Eloísa Montero, María Luz Callejo[1], Julia Valls

ANTICIPACIÓN DE ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE DIVISIÓN-MEDIDA CON FRACCIONES MEDIANTE UNA PROGRESIÓN DE APRENDIZAJE

The use of the progression in strategies of resolution of measurement-division fraction problems by preservice primary mathematics teachers

RESUMEN

El objetivo de esta investigación es caracterizar cómo los estudiantes para maestro, un año después de un experimento de enseñanza, reconocen diferentes etapas de progresión al anticipar estrategias de estudiantes de educación primaria al resolver problemas de división - medida con fracciones. Los 41 participantes cursaban el séptimo semestre del Grado en Maestro en Educación Primaria durante el curso 2018-2019. En el análisis se tuvo en cuenta el tipo de estrategias utilizadas y si estas evidenciaban la idea de progresión. Los resultados muestran tres categorías en el uso de la idea de progresión al anticipar respuestas a problemas de división-medida: (a) No usan la idea de progresión; (b) usan parcialmente la idea de progresión; (c) usan la idea de progresión. Pese a su dificultad, es posible comenzar a desarrollar la idea de progresión al anticipar estrategias en la formación de futuros maestros.

PALABRAS CLAVE:

- *Anticipación de estrategias*
- *Progresión en el aprendizaje*
- *Estudiantes para maestro de primaria*
- *División-medida con fracciones*
- *Mirar profesionalmente*

ABSTRACT

The objective of this research is to characterize how primary prospective teachers, one year after a teaching experiment, recognize different stages of progression anticipating solving strategies for measurement division problems with fractions used by elementary school children. The 41 participants were in the seventh semester of the Education Teaching Degree (eight semesters) during the 2018-2019 academic year. The analysis considered the type of strategies used and whether they evidenced the idea of progression. The results show three categories in the use of the idea of progression when anticipating answers to measurement division problems: They (a) do not use the idea of progression; (b) partially use the idea of progression; (c) use the idea of progression. Despite its difficulty, it is possible to begin to develop the idea of progression by anticipating strategies in the training of future teachers.

KEY WORDS:

- *Anticipation*
- *Progression in learning*
- *Prospective primary teachers*
- *Measurement division problems with fractions*
- *Professional noticing*

1 La autora ha fallecido † en el tiempo del proceso de envío-revisión.

Montero, E., Callejo, M. L. y Valls, J. (2022). Anticipación de estrategias de resolución de problemas de división-medida con fracciones mediante una progresión de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 25(3), 289 - 310. https://doi.org/10.12802/relime.22.2532. Recepción: Noviembre 16, 2020 / Aceptación: Mayo 3, 2023

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é caracterizar como estudantes para professores, um ano após a sua formação, são capazes de reconhecer a existência de diferentes níveis de progressão, antecipando estratégias de resolução de problemas com frações envolvendo divisão-medida, utilizadas por alunos dos anos iniciais. Os 41 participantes estavam em seu sétimo semestre do Graduação em Pedagogia nos anos iniciais (oito semestres) durante o ano acadêmico de 2018-2019, um ano após receberem formação em uma experiência de ensino. A análise teve em conta o tipo de estratégias utilizadas e se evidenciavam a ideia de progressão. Os resultados mostram três categorias no uso da ideia de progressão ao antecipar respostas a problemas de divisão-medida: (a) eles não usam a ideia de progressão; (b) usar parcialmente a ideia de progressão; (c) usar a ideia de progressão. Apesar de sua dificuldade, é possível começar a desenvolver a ideia de progressão antecipando estratégias na formação dos futuros professores.

PALAVRAS CHAVE:

- *Antecipação*
- *Progressão da Aprendizagem*
- *Estudantes para professor de anos iniciais*
- *Problemas de divisão-medida com frações*
- *Olhar profissionalmente*

RÉSUMÉ

Le but de cette recherche est de caractériser comment les futurs professeurs des écoles, une année après une expérience d'enseignement, reconnaissent différentes étapes de progression différents quand ils anticipent des stratégies de résolution de problèmes de division-mesure avec des fractions employées par les élèves du Primaire. Les 41 participants étaient au septième semestre des études pour devenir professeurs d'Éducation Primaire (huit semestres) au cours de l'année académique 2018-2019, une année après une expérience d'enseignement. L'analyse a pris en compte le type de stratégies utilisées et si elles mettaient en évidence l'idée de progression. Les résultats montrent trois catégories face à l'usage de l'idée de progression: a) L'idée de progression n'est pas utilisée; (b) on utilise partiellement l'idée de progression; (c) on utilise l'idée de progression. Malgré sa difficulté, il est possible de commencer à développer l'idée de progression quand on anticipe des stratégies lors de la formation de futurs professeurs.

MOTS CLÉS:

- *Anticipation*
- *Progression dans l'apprentissage*
- *Étudiants pour devenir professeurs des écoles*
- *Problèmes de division-mesure avec des fractions*
- *Regard professionnel*

1. Introducción

Entre las tareas del profesorado se encuentran anticipar, interpretar y dotar de significado a las respuestas de los estudiantes. Cuando el profesorado planifica una lección es conveniente prever las respuestas que pueden dar los estudiantes para considerar qué preguntas puede hacer o qué variables modificar en la actividad para ayudar a los estudiantes a superar sus dificultades o para plantearles situaciones más complejas.

La mayor parte de los trabajos empíricos sobre la mirada profesional del profesor de matemáticas se han centrado en cómo se interpreta el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs et al., 2010). Sin embargo, menos estudios se han centrado en caracterizar cómo los futuros maestros y profesores de matemáticas anticipan posibles respuestas de los estudiantes cuando planifican la enseñanza (Fernández et al., 2018; Llinares et al., 2016; Stahnke et al., 2016). La importancia de anticipar posibles respuestas de los estudiantes ha sido manifestada desde diferentes perspectivas. Por ejemplo, desde el conocimiento matemático para la enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT, Ball et al., 2008); desde el conjunto de prácticas que forman parte del proceso de planificación del profesor, teniendo en cuenta las ideas de los estudiantes (Smith y Stein, 2011); y desde propuestas formativas basadas en la "representación de la enseñanza" (Herbst et al., 2011).

En particular, Ball et al. (2008) indican que:

> Los profesores deben anticipar lo que los estudiantes probablemente piensen y aquello en que tengan dificultades. Cuando escojan un ejemplo, los profesores necesitan predecir lo que los estudiantes pueden considerar interesante y motivador. Cuando escojan una actividad, los profesores necesitan anticipar lo que los estudiantes harán y si ellos encontrarán la actividad fácil o difícil. [...]. Cada una de estas actividades requiere una interacción específica entre el conocimiento de matemáticas y la familiaridad con el estudiante y su pensamiento matemático. (p. 401)

En su formación los estudiantes para maestro (EPM) necesitan desarrollar estas actividades de anticipación. Para ello, resulta relevante proporcionarles referencias para pensar sobre la progresión de la comprensión de los estudiantes (Wilson et al., 2013; Wilson et al., 2014; Wilson et al., 2015). Diversos estudios indican que es posible diseñar entornos de aprendizaje en los programas de formación para ayudar a los EPM a robustecer el conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas. Una característica de estos entornos de aprendizaje es proporcionar información sobre trayectorias o progresiones de aprendizaje (Clements y Sarama, 2004; Ivars et al., 2020; Sánchez-Matamoros et al., 2018; Simon, 1995; Wilson et al., 2015). Los EPM pueden usar estas progresiones en el aprendizaje de tópicos matemáticos para centrar su atención en el pensamiento matemático de los estudiantes (Edgington, 2014; Edgington et al., 2016). En este sentido, la información sobre la progresión en el aprendizaje de tópicos matemáticos hace el papel de hojas de ruta para ayudar a los EPM a anticipar respuestas de los estudiantes, identificar objetivos de aprendizaje, interpretar respuestas de los estudiantes y en función de ello proponer tareas que les ayuden a avanzar en la comprensión de dominios matemáticos específicos (Wilson et al., 2015).

Uno de los dominios matemáticos en los que se ha mostrado que maestros y estudiantes de educación primaria tienen mayores dificultades es la enseñanza-aprendizaje de las fracciones y sus operaciones, en particular, la división. Algunas investigaciones indican que, aunque los EPM tienen conocimiento procedimental para resolver problemas con fracciones (Depaepe et al., 2015) y para realizar los algoritmos de cálculo, a menudo tienen dificultad para entender su significado más allá de los procedimientos (Ball, 1990; Li y Kulm, 2008; Vula y Kingji-Kastrati, 2018).

Respecto a la división, Graeber et al. (1986) señalaron que los EPM tendían a interpretar la división sólo como división-partitiva, es decir, reparto de un conjunto de objetos de forma equitativa entre un número de grupos. Sin embargo, tenían dificultades en las situaciones en las que la división tenía el significado de división-medida (también conocida como división cuotitiva), es decir, determinar cuántos grupos de un tamaño determinado se pueden formar con un número dado de objetos. En la misma línea, Ball (1990) encontró que los EPM tenían dificultad para comprender el significado de la división de fracciones ya que muchos de ellos sólo eran capaces de interpretar la división en términos de división-partitiva. En un grupo de 19 futuros maestros de primaria y profesores de secundaria, sólo cinco fueron capaces de describir o inventar una historia adecuada para explicar el significado de la expresión “1¾ entre la mitad” y otros cinco inventaron historias que no se ajustaban a la situación; el error más común fue formular un problema que requería dividir por 2, en lugar de que el divisor fuera ½. Tirosh y Graeber (1989) sugieren que estas dificultades están vinculadas a la identificación con el modelo primitivo intuitivo de reparto descrito por Fischbein et al. (1985). Por su parte, Nillas (2003) demostró que la capacidad de resolución de problemas de división de fracciones de los futuros maestros no implica que tengan una buena comprensión conceptual del tema dado que no son capaces de contextualizar una división en la que el divisor sea, por ejemplo, una fracción.

Los problemas de división-medida con fracciones buscan determinar cuántos grupos de un tamaño (divisor) se pueden formar con una cantidad de objetos (dividendo), independientemente de si divisor y/o dividendo son números naturales o fracciones (por ejemplo, he comprado 4 botes de comida para los peces de mi pecera. Cada día echo en la pecera 2/3 de bote. ¿Para cuántos días tengo?). En esa misma línea, Fernández et al. (2012) propusieron a un grupo de EPM un problema de división-medida con resto (tengo 4 pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño. ¿A cuántos niños puedo dar?, ¿qué me sobra?) y pidieron resolver el problema, interpretar y valorar cuatro respuestas de estudiantes de primaria. Los resultados mostraron que algunos EPM, si bien interpretaron y valoraron las respuestas de los estudiantes de manera correcta, no fueron capaces de resolver el problema correctamente, mientras que otros tuvieron dificultad para interpretar respuestas que utilizaban procedimientos distintos a los que ellos habían empleado.

Actualmente, aunque existen propuestas de formación de maestros centradas en mejorar el conocimiento de los EPM sobre las fracciones y las operaciones con estas (Jansen y Hohensee, 2016; Lo y Luo, 2012; Olanoff et al., 2014; Stevens et al., 2020), y en apoyar su capacidad de interpretar el pensamiento de los estudiantes (Ivars et al., 2020; Tyminski et al., 2021), tenemos poca información sobre lo que los EPM retienen después de un tiempo de participar en las propuestas formativas.

El objetivo de esta investigación es caracterizar cómo los EPM, un año después de un experimento de enseñanza, reconocen diferentes etapas de progresión al anticipar estrategias de estudiantes de educación primaria al resolver problemas de división-medida con fracciones.

2. Marco Teórico

El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" se considera un objetivo de los programas de formación, así como una línea de investigación en Didáctica de la Matemática (Stahnke et al., 2016). Desarrollar esta competencia se considera una componente de la práctica profesional del profesor de matemáticas. Adquirir esta competencia permite al docente de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de una manera distinta en comparación con la forma de mirar de quien no es profesor de matemáticas (Llinares, 2013). Por ejemplo, Mason (2002) ha subrayado la importancia de identificar aquello que resulta relevante en una situación de enseñanza-aprendizaje, usar el conocimiento para identificar propiedades y hacer conexiones entre los eventos específicos y los principios más amplios. Por su parte, Jacobs et al. (2010) han particularizado estas ideas en la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, conceptualizándola en tres destrezas interrelacionadas: i) identificar las estrategias usadas por los estudiantes en la resolución de tareas; ii) anticipar e interpretar la comprensión de los estudiantes basándose en las estrategias usadas; y iii) tomar decisiones instruccionales según la interpretación inferida.

Algunos estudios han mostrado que la competencia "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes puede empezar a desarrollarse en los programas de formación, aunque no resulte fácil hacerlo por las limitaciones de tiempo que tienen las asignaturas en las que se desarrollan los entornos de enseñanza-aprendizaje para los futuros maestros (Fernández et al., 2012; Stockero, 2014; Teuscher et al., 2017). Por otra parte, para apoyar el desarrollo de esta competencia se debe proporcionar a los EPM referencias para organizar su mirada. Por ejemplo, proporcionarles información sobre progresiones de aprendizaje de los estudiantes para ayudarles a saber qué mirar y cómo hacerlo (Wilson et al., 2015). Las progresiones de aprendizaje son modelos educativos sobre cómo se espera que evolucionen las ideas y formas de pensar de los estudiantes sobre un concepto o tema determinado a medida que avanzan en sus estudios (Duschl et al., 2011).

Las progresiones de aprendizaje se caracterizan por (a) centrarse en unas pocas ideas y prácticas; (b) estar delimitadas por elementos claves (anclajes) que describen lo que se espera que el estudiante sepa y sea capaz de hacer al final de la progresión, así como por las suposiciones que tienen los profesores sobre el conocimiento y las habilidades previas que tienen los estudiantes al iniciar la progresión; (c) describir diferentes etapas de logros que pueden servir como evidencias de la comprensión y competencia de los estudiantes, etapas que son fruto de síntesis de investigaciones sobre el aprendizaje de los estudiantes en un dominio específico, así como de estudios empíricos de la progresión y (d) estar mediadas por la instrucción y el plan de estudios específico (Duncan y Hmelo-Silver, 2009).

Las progresiones de aprendizaje tienen un carácter hipotético. La cognición que se presenta en ellas no es necesariamente lineal, ni tampoco aleatoria. Las progresiones de aprendizaje presentan tendencias obtenidas en la investigación de cómo progresa el pensamiento de los estudiantes sobre un concepto matemático específico, a través de etapas por las que ellos pueden transformar sus ideas intuitivas en una comprensión más formal de dicho concepto. Las etapas cada vez más complejas de razonamiento matemático evidencian aspectos de la progresión de la comprensión de un contenido específico. El número de etapas varía entre progresiones y, en algunos casos, los estudiantes pueden progresar por una única o varias etapas durante un curso escolar. Al ser modelos conjeturales de aprendizaje a lo largo del tiempo, necesitan ser validados a partir de investigaciones empíricas sobre el pensamiento y el aprendizaje de los estudiantes en los conceptos específicos.

En particular, aprender a anticipar respuestas de los estudiantes a un problema matemático permite a los EPM pensar en cómo esas respuestas hipotéticas se relacionan entre sí a la luz de una progresión del aprendizaje. El desarrollo de esta destreza en los EPM se vincula con llegar a ser consciente de que el aprendizaje es un continuo, con etapas progresivas de logros en el pensamiento matemático de los estudiantes (Stein et al., 2008).

En nuestra investigación nos planteamos si, un año después de haber recibido formación sobre una progresión en las estrategias de resolución a problemas de división-medida con fracciones, los EPM usan esta progresión para anticipar respuestas de estudiantes. En este contexto nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

– ¿Cómo los estudiantes para maestro, un año después de su formación, usan la progresión en las estrategias de resolución de problemas de división-medida para anticipar respuestas de estudiantes de educación primaria?

3. Método

3.1. *Participantes y contexto*

En esta investigación participaron 41 EPM de Educación Primaria durante el curso académico 2019-2020. Los EPM estaban matriculados en la asignatura Matemáticas y su Didáctica III (del séptimo semestre), un año después de cursar la asignatura Matemáticas y su Didáctica II en donde recibieron formación para desarrollar la competencia "mirar profesionalmente" mediante un experimento de enseñanza diseñado *ad hoc*. El plan de estudios permitió dar seguimiento a este grupo de EPM un año después, abriendo la posibilidad de indagar sobre lo que evidenciaban de lo trabajado durante el experimento de enseñanza.

3.2. *El experimento de enseñanza*

El experimento de enseñanza diseñado en la asignatura Matemáticas y su Didáctica II constaba de nueve sesiones de dos horas cada una (Figura 1) y tenía como objetivo que los EPM aprendieran a usar información sobre la progresión de las estrategias en la resolución de problemas de división-medida con fracciones para anticipar respuestas de los alumnos.

Sesión 1	*Sesión 2*	*Sesión 3*	*Sesión 4*	*Sesión 5*	*Sesión 6*	*Sesión 7*	*Sesión 8*	*Sesión 9*
Introducir fracciones usando problemas	*Estrategias en problemas de reparto*	*Estrategias en problemas de división medida*	*Progresión desarrollo estrategias de división medida*	*Progresión desarrollo estrategias de división medida*	*Elementos matemáticos en la resolución de problemas*	*Identificación y uso variables didácticas*	*Descripción e interpretación de respuestas de niños y proponer un nuevo problema*	*Descripción e interpretación de respuestas de niños y proponer un nuevo problema*
Resolver problema con EPM y anticipación ingenua de niños de Primaria	Analizar estrategias en respuestas de niños de Primaria	Analizar estrategias en respuestas de niños de Primaria	Analizar estrategias en respuestas de niños de Primaria	Resolver problemas de división medida con diferentes estrategias	Describir y clasificar estrategias de una selección de respuestas de sesión 1 y alumnos de Primaria. Identificar elementos matemáticos	Análisis de variables didácticas en una selección de problemas	Análisis individual de casos de Ana y Sara	Discusión en grupo clase de casos de Ana y Sara

Figura 1. Módulo de enseñanza desarrollado en el curso 2018-2019

3.2.1. *Descripción de las sesiones en el experimento de enseñanza*

A continuación, describimos cada una de las sesiones del experimento de enseñanza (Figura 1). En la primera sesión, los EPM resolvieron problemas de división-medida con respuesta un número natural y el divisor una fracción (por ejemplo, ¾) y anticiparon posibles respuestas que podían generarse para resolver este problema. En esta sesión no se les proporcionó ninguna información sobre las características de los problemas ni sobre el aprendizaje de los estudiantes.

Durante las sesiones 2 a 8, se les proporcionó información sobre las características de los problemas de división-medida y sobre la progresión en las estrategias usadas por los niños (Empson y Levi, 2011). La información proporcionada tenía por objetivo que los EPM mirasen de forma estructurada las características de los problemas de división con fracciones y las posibles respuestas de los estudiantes. Es decir, aprendieran a identificar las estrategias que los estudiantes usaban en estos problemas, interpretar la etapa de progresión en el uso de estas estrategias y decidir qué hacer para apoyar la progresión del aprendizaje de los estudiantes. En síntesis, se buscaba que los EPM profundizaran en la progresión de aprendizaje de este tipo de problemas como un aprendizaje con significado del algoritmo de la división de fracciones, a través de estrategias cada vez más complejas.

En particular, en las sesiones 2 a 4, los EPM analizaron respuestas reales de niños de primaria a problemas de reparto (sesión 2) y de división-medida (sesiones 3 y 4). En la sesión 5 los EPM resolvieron problemas con distintas estrategias. En las sesiones 6 y 7 interpretaron las respuestas reales de estudiantes de educación primaria a problemas de división-medida. En la sesión 8 se realizó una tarea de evaluación. En la sesión 9 se realizó una síntesis de la información. En las pruebas finales del semestre se incluyó una pregunta en la que se les pidió que anticiparan respuestas de niños para un problema de división con algunas condiciones. En la prueba final, al ser evaluativa, los EPM no disponían del material proporcionado en el experimento de enseñanza.

El conjunto de tareas planteadas en el experimento favoreció que los EPM conectaran con su vocación docente, incentivando en ellos un deseo por aprender y les permitió conectar diferentes dominios de conocimiento (por ejemplo, entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes) con la posibilidad de hacerlo potencialmente más duradero en la memoria (Entwistle, 2000). La autorregulación del aprendizaje puede, a su vez, estimular la adquisición y desarrollo de competencias docentes por parte de los EPM permaneciendo a medio y largo plazo tras el periodo de instrucción. La autorregulación del aprendizaje es entendida como las acciones y los procesos dirigidos a la adquisición de conocimientos o habilidades que implican voluntad, propósito y sentido de utilidad (Zimmerman, 1989). Para favorecer la autorregulación en el aprendizaje por parte de los EPM se incentivó la intencionalidad de comprender las ideas por ellos mismos, relacionar éstas con conocimientos y experiencias previos, usando evidencias, buscando patrones y principios subyacentes, como una manera de llegar a ser conscientes de su progreso en el aprendizaje implicándose activamente en el contenido del programa (Entwistle, 2000).

3.2.1. *La progresión en las estrategias de resolución de los problemas de división-medida con fracciones*

La información proporcionada sobre la progresión en las estrategias usadas por los estudiantes para resolver los problemas de división-medida con fracciones (Empson y Levi, 2011) consta de tres etapas. En las dos primeras (I y II) se utilizan estrategias aditivas y en la tercera (III) estrategias multiplicativas (Figura 2).

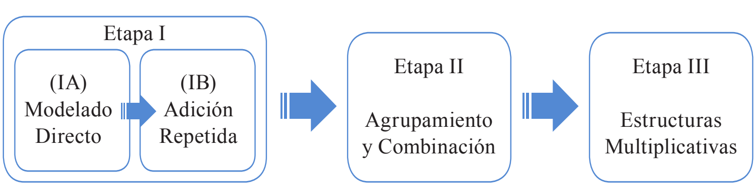

Figura 2. Progresión de estrategias de los estudiantes para resolver problemas de división medida con fracciones (Empson y Levi, 2011)

A continuación, describimos las tres etapas y ejemplificamos las posibles estrategias que se pueden utilizar en la resolución del problema planteado a los EPM un año después de participar en el experimento de enseñanza (Tabla I).

TABLA I
Tarea de anticipación un año después del experimento de enseñanza (curso 2019-2020)

Anticipa las resoluciones que podrían hacer 3 niños que se encontraran en 3 etapas diferentes de la progresión de estrategias según Empson y Levi (2011) al siguiente problema: Estamos preparando brochetas de fruta y hemos decidido colocar 3/8 de naranja en cada brocheta. Si tenemos 12 naranjas, ¿cuántas brochetas de fruta podremos hacer?

Este problema es de división-medida, siendo el dividendo un número natural (12), el divisor una fracción (3/8) y la respuesta un número natural.

- Etapa I – Modelización directa y adición repetida. Los niños representan con objetos o gráficamente todas las cantidades en el problema y cuentan o suman (y en ocasiones restan) hasta llegar a la respuesta final.

  Por ejemplo, en el problema de las brochetas (Tabla I), se dibujan 12 círculos representando las naranjas. A continuación, cada círculo se divide en octavos y se hacen grupos de 3. En este caso se pueden hacer 32 grupos que es la respuesta.

  La estrategia de adición repetida se diferencia de la modelización directa en que las fracciones se representan de manera simbólica, con números fraccionarios, en lugar de con dibujos.

- Etapa II – Agrupamiento-combinación [pensando aditivamente]. Los niños con esta estrategia agrupan y cuentan conjuntos de unidades fraccionarias con la idea de obtener un número entero. Luego cuentan el número de grupos (sumando un grupo, dos grupos, etc.).

  Por ejemplo, en el problema de las brochetas agrupan 8 unidades fraccionarias (3/8), 3/8 + 3/8 + 3/8 + 3/8+ 3/8 + 3/8 + 3/8 + 3/8 para obtener 3 naranjas que sirven para hacer 8 brochetas. Los niños repiten este proceso de agrupamiento cuatro veces más (hasta 12 naranjas), tendremos para hacer 32 brochetas.

- Etapa III – Estrategias multiplicativas [con proporcionalidad: proceso constructivo o directamente con multiplicación]. Los niños relacionan el grupo fraccionario o un agrupamiento con el total, usando la multiplicación.

> Por ejemplo, en el problema de las brochetas, usan directamente la relación “con 3 naranjas hacemos 8 brochetas”, por tanto, con cuatro veces más, 3 x 4 = 12 naranjas, tenemos para hacer cuatro veces más de brochetas, 8 x 4 = 32 brochetas.

En esta progresión de las estrategias usadas por los niños para resolver los problemas de división-medida con fracciones subyace la construcción de la idea de fracción como unidad iterativa (Steffe y Olive, 2010). Para ello se iteran las fracciones unitarias (*1/n*) para construir fracciones como una unidad múltiple (por ejemplo, 3/8 como 3 veces 1/8). En el ejemplo de la Tabla I se usa la fracción unitaria 1/8, que se va iterando sucesivamente; cada tres iteraciones se tiene un grupo de 3/8; se terminan las iteraciones cuando se alcanzan 12 unidades.

En la estrategia de agrupamiento-combinación se usa 3/8 como unidad iterativa para construir otra cantidad. Mientras que en las estrategias multiplicativas hay un salto cualitativo, pues se pasa de estrategias aditivas a multiplicativas, usando la idea de proporcionalidad.

3.3. *Instrumento de recogida de datos*

En la asignatura Matemáticas y su Didáctica III durante el curso 2019-2020 (un año después del experimento de enseñanza) se planteó a los EPM una tarea de anticipación de respuestas a un problema de división-medida (Tabla I). En la tarea se pedía a los EPM que anticiparan estrategias de distintas etapas en relación con pensamientos de conteo (Etapa I), aditivos (Etapa I-II) o de proporcionalidad (Etapa III). Implícitamente se les pedía que no usaran el algoritmo de la división u otras estrategias. Para realizar esta tarea los EPM no disponían de material. Esta actividad no formaba parte de la asignatura que estaban desarrollando y tuvo carácter voluntario.

Los EPM que participaron voluntariamente en esta prueba habían realizado una prueba evaluativa el año anterior como cierre del experimento de enseñanza, en la que se les pedía anticipar, en distintas etapas de progresión, respuestas de estudiantes de primaria a la tarea “Hemos comprado 15 piezas de telas para hacer cojines y para cada uno usaremos 3/8 de una pieza. ¿Cuántos cojines se pueden hacer con 15 piezas de tela?”. Los resultados de esta prueba indican que el 80,3% (49 de 61) de los EPM anticipó y describió estrategias con características propias de agrupamiento y combinación (aditiva); un 86,9% (53 de 61) anticipó y describió estrategias multiplicativas (Montero y Callejo, 2019).

3.4. *Análisis de los datos*

En primer lugar, el análisis se centró en el tipo de estrategias utilizadas por los EPM y si sus respuestas se correspondían con diferentes etapas progresivas de conteo, adición y proporcionalidad. En segundo lugar, nos centramos en determinar en qué medida los EPM, al anticipar las estrategias que los niños podían usar, manifestaban su comprensión de la idea de progresión en el aprendizaje, más allá del uso de estrategias inconexas entre sí. Es decir, si los EPM evidenciaban o no en sus anticipaciones la transición necesaria para diferenciar la etapa de progresión en que se encontraban los estudiantes. Por ejemplo, un estudiante transita de la etapa I a la etapa II cuando es capaz de percibir una relación entre las variables y la utiliza aditivamente; de la etapa II a la etapa III, cuando esta relación es utilizada proporcionalmente. Ejemplos de estas diferencias en el uso de la idea de progresión en las estrategias de resolución de los problemas de división-medida con fracciones se describen en la próxima sección.

Este análisis permitió caracterizar los EPM en tres grupos considerando cómo comprendían y usaban la idea de progresión en el aprendizaje al anticipar respuestas de estudiantes a problemas de división-medida con fracciones.

4. Resultados

En esta sección describimos las características del uso que han hecho los EPM de la idea de progresión en el aprendizaje al anticipar respuestas de niños al resolver problemas de división-medida con fracciones.

4.1. *EPM que no usan la idea de progresión en el aprendizaje*

Un año después del experimento de enseñanza, 23 EPM no mostraron evidencias de usar el carácter progresivo de las estrategias al anticipar, bien con errores, bien de forma aislada, alguna estrategia de conteo, de agrupamiento-combinación o multiplicativa, junto a otras estrategias como el algoritmo de la división de fracciones. Estos EPM no usaron la información sobre las características de cada una de las etapas de progresión proporcionada en el experimento de enseñanza.

Por ejemplo, cuando se le pide a la EPM-10 anticipar tres posibles respuestas, plantea una primera estrategia de modelización directa que evidencia una interpretación errónea de la fracción 3/8: dibuja un círculo dividido en 8 partes iguales y toma (colorea) tres, a continuación, agrupa cada unidad fraccionaria coloreada (1/8) de ocho en ocho y responde que se pueden formar cuatro brochetas (indicando que sobran algunas porciones sin poder formar una quinta brocheta). Como segunda estrategia dibuja cuatro brochetas con “8 trozos [en] cada brocheta”, de forma que representa tres naranjas como parte de los ocho trozos que forman el total de la brocheta, para un total de cuatro brochetas. Como tercera estrategia usó el algoritmo de la división de fracciones, planteando la división $\frac{12}{1} : \frac{3}{8}$.

En las respuestas de la EPM-10 no hay evidencias de cómo la idea de progresión estaba articulando las diferentes estrategias. Es decir, la EPM-10 proporciona ejemplos de tres estrategias sin indicar en qué medida se pueden articular en una progresión, ni cual es la idea clave cuya comprensión determina la progresión en el aprendizaje (Figura 3).

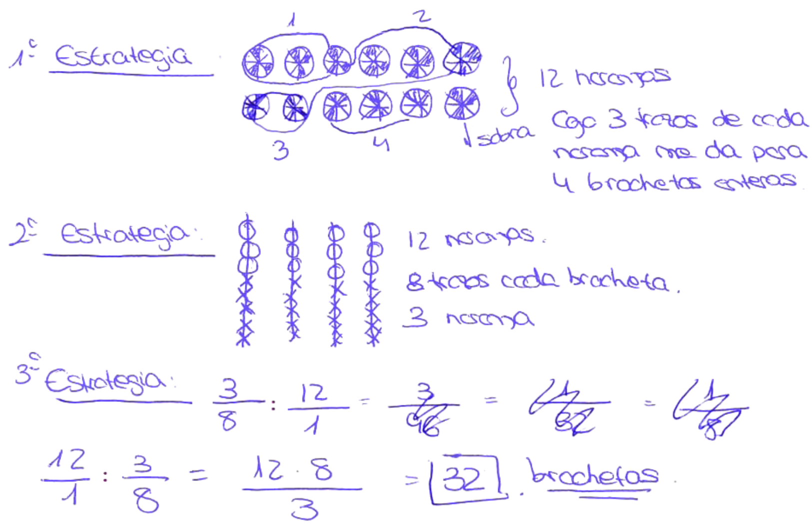

Figura 3. Respuesta de la EPM-10

En cierta medida, los EPM en este grupo respondían anticipando con “formas diferentes de resolver el problema”, pero sin indicar la diferencia entre una estrategia y otra en función de una mayor complejidad en la comprensión del concepto matemático (la construcción y uso de la idea de unidad iterativa y la relación entre cantidades de magnitudes).

Este tipo de respuestas pone de manifiesto que los EPM en este grupo no evidenciaron comprender los aspectos matemáticos que definen un aumento progresivo en la complejidad de cada etapa. La tarea pedía explícitamente describir tres estrategias que mostraran cierta progresión en el aprendizaje de los niños (no solo diferentes maneras de resolver el problema). El hecho de que estos EPM proporcionen estrategias diferentes sin un esquema de progresión muestra la dificultad que tienen para integrar lo trabajado en el programa de formación en relación a la idea de progresión en el aprendizaje.

4.2. *EPM que usan parcialmente la idea de progresión en el aprendizaje*

A esta categoría pertenecen nueve EPM que usaron parcialmente la idea de progresión en el aprendizaje. Los EPM en este grupo anticipaban estrategias de conteo y a partir de ellas anticipaban una estrategia de agrupamiento-combinación o una estrategia multiplicativa.

Por ejemplo, el EPM-35 anticipa para dos niños estrategias de conteo (modelización directa y adición repetida) y para un tercer niño anticipa una estrategia que se inicia como adición repetida y da un salto cognitivo al agrupar y contar conjuntos de 3/8 hasta llegar al dato “con 3 naranjas hago 8 brochetas”, momento en el que suma grupos de naranjas y de brochetas, es decir, abandona la estrategia de adición repetida y desarrolla la de agrupamiento-combinación (Figura 4).

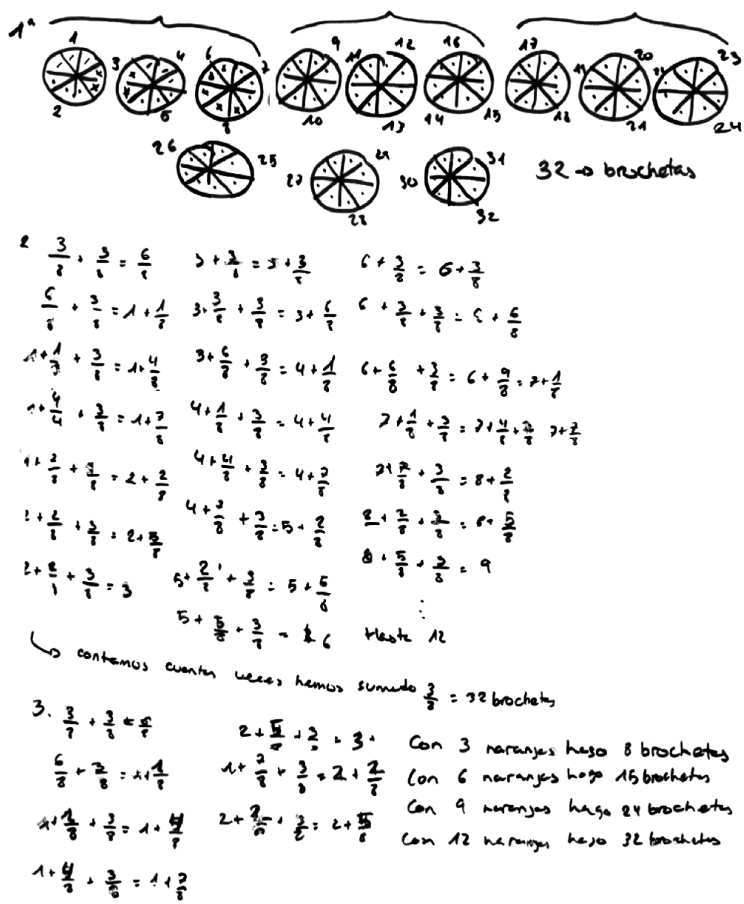

Figura 4. Respuesta del EPM-35

Los EPM en este grupo presentan la idea de progresión en el aprendizaje considerando solo la relación entre dos etapas de progresión, pero no globalmente entre las tres etapas. Por ejemplo, en la respuesta del EPM-35 (Figura 4) las estrategias presentadas están vinculadas a un pensamiento aditivo, y no consideran el paso a la tercera etapa que implica tener en cuenta las relaciones entre relaciones (proporcionalidad).

Por otra parte, el EPM-55 también anticipa dos estrategias de conteo (modelización directa y adición repetida) en las que se apoya para anticipar dos estrategias multiplicativas, relacionando el grupo fraccionario con el total mediante el uso de la multiplicación. Sin embargo, se obvian las estrategias de agrupamiento-combinación que son el nexo entre las estrategias de conteo y las de proporcionalidad (Figura 5).

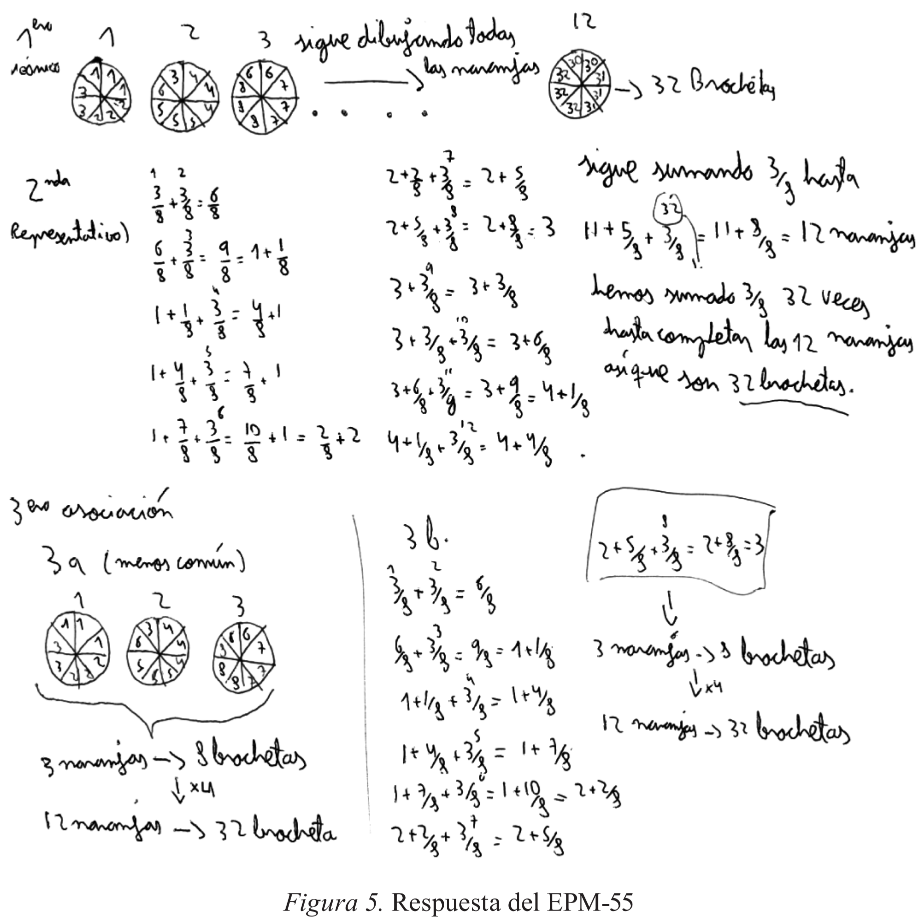

Figura 5. Respuesta del EPM-55

4.3. *EPM que usan la idea de progresión en el aprendizaje*

A esta categoría pertenecen nueve EPM que usaron la idea de progresión en el aprendizaje para anticipar estrategias de conteo y, a partir de ellas, anticipar sucesivamente estrategias de agrupamiento-combinación y estrategias multiplicativas.

Por ejemplo, la EPM-41 anticipa una estrategia de modelización directa y, a partir de ella, después de dividir tres rectángulos en octavos y observar "que de cada tres naranjas tiene un patrón con el que puede hacer ocho brochetas", presenta otra estrategia abandonando la modelización directa y describiendo una estrategia de agrupamiento-combinación, dibujando y sumando grupos de naranjas y de brochetas. Por último, partiendo de una estrategia de adición repetida, después de sumar y contar la fracción 3/8 reiteradamente, y observar que con 3 naranjas se hacen 8 brochetas, presenta una estrategia de adición repetida y anticipa estrategias multiplicativas por un proceso constructivo y por multiplicación (Figura 6).

Esta manera de proceder muestra cómo los EPM de este grupo articulaban la idea de progresión apoyados en el uso constructivo de la idea de unidad iterativa y de relación entre relaciones que subyace en las diferentes etapas de la progresión.

5. Conclusiones

El objetivo de esta investigación fue caracterizar cómo los EPM, un año después de un experimento de enseñanza, reconocen diferentes etapas de progresión al anticipar estrategias de estudiantes de educación primaria al resolver problemas de división-medida con fracciones. Los resultados muestran que más de la mitad de los EPM (23) no usaron la idea de progresión en el aprendizaje un año después de haber recibido formación para anticipar respuestas. Estos EPM habían realizado correctamente la prueba evaluativa de cierre del experimento de enseñanza del año anterior. El resto de los EPM (18) usaron la idea de progresión en el aprendizaje para anticipar respuestas de manera más o menos articulada. La mitad de este grupo omitió parte de la progresión, dando un salto desde las estrategias de conteo, o bien a estrategias de agrupamiento-combinación, o bien a estrategias de estructura multiplicativa. La otra mitad anticipó respuestas tanto de carácter aditivo como de relación entre relaciones (proporcionalidad) mostrando un uso adecuado de la idea de progresión en el aprendizaje.

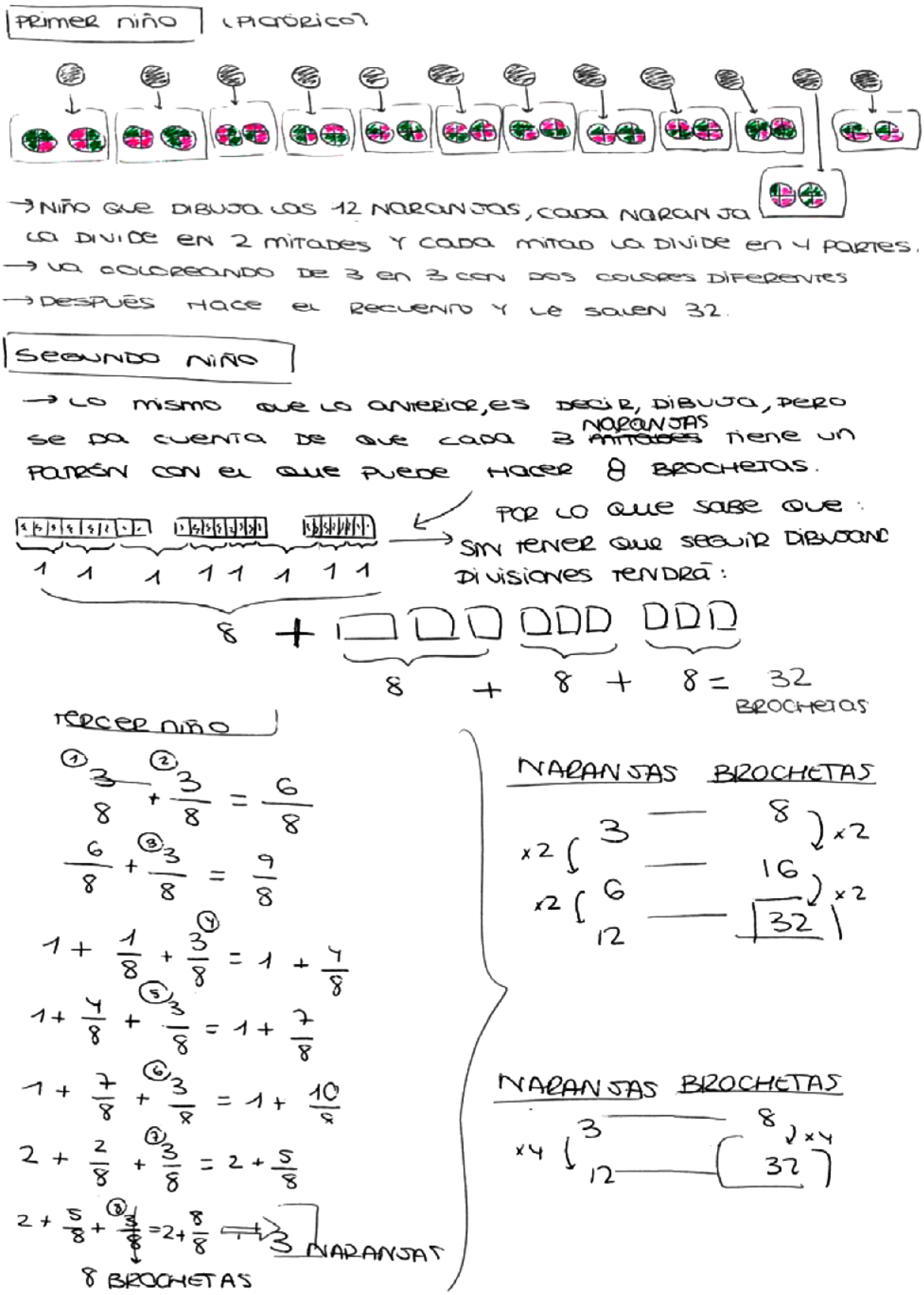

Figura 6. Respuesta de la EPM-41

Así mismo, estos resultados indican que usar la idea de progresión en el aprendizaje, para anticipar respuestas a problemas de división-medida con fracciones, ha supuesto una mayor dificultad a los EPM (18 de 41) que solo anticipar diferentes respuestas a un problema (23 de 41). Esta mayor dificultad podría deberse a que usar la idea de progresión para anticipar respuestas a este tipo de problemas implica: (a) comprender el significado de fracción como unidad iterativa; (b) contar unidades fraccionarias, agruparlas y sumarlas; y (c) llegar a establecer una relación entre relaciones (proporcionalidad). Comprender estos aspectos que subyacen a la idea de progresión resulta clave para que los EPM articulen esta idea en la tarea de anticipar respuestas. No obstante, aunque el aprendizaje de la idea de progresión de estrategias de problemas de división-medida haya presentado dificultades para los EPM, consideramos que es posible empezar a desarrollarla en los programas de formación inicial con diseños específicos de tareas (Edgington, 2014; Edgington et al., 2016; Sánchez-Matamoros et al., 2018).

Interpretamos que la dificultad presentada por los EPM para articular la idea de progresión está en consonancia con los trabajos que muestran que estos tienen un conocimiento procedimental para resolver problemas con fracciones (Depaepe et al., 2015) y para realizar los algoritmos de cálculo; a su vez, dificultad para entender su significado más allá de los algoritmos (Ball, 1990; Li y Kulm, 2008; Vula y Kingji-Kastrati, 2018). Asimismo, las dificultades que presentan los EPM en cuanto al contenido matemático pueden ser producto de los significados de las fracciones que predominan en la enseñanza primaria. Por ejemplo, el significado de fracción como relación parte-todo podría promover el uso de estrategias aditivas; mientras que el significado de fracción como razón podría favorecer el uso de estrategias multiplicativas (Empson, 2011). La dificultad de los EPM con la anticipación de estrategias multiplicativas también puede deberse a que es más fácil visualizar y representar las diferencias entre dos cantidades cuando se comparan aditivamente, en contraste a cuando se trata de la razón entre estas cantidades. Además, si se piensa en la multiplicación como suma repetida será difícil entender la fracción como razón que expresa una relación entre dos magnitudes. Por ejemplo, entender que se puede interpretar el dato “3/8 de naranja en cada brocheta” como razón entre el número de naranjas y brochetas, “con 3 naranjas se pueden hacer 8 brochetas” (Montero y Callejo, 2019).

Consideramos que existen razones por las cuales 18 EPM (44%) usaron el conocimiento adquirido en un experimento de enseñanza, después de un año (Bandura, 1977; Gordon y Debus, 2002; Zimmerman, 1998). Una de estas razones podría ser el efecto positivo en la comprensión y uso de la idea de progresión de estrategias de resolución de problemas debido a que durante el experimento los EPM tuvieron que resolver tareas vinculadas a situaciones reales de enseñanza-aprendizaje, ofreciéndoles la posibilidad de observar cómo responden los niños y las dificultades que estos presentan, vinculando la teoría a la práctica de manera efectiva (Higgs, 2012). A su vez, esto incentiva en los EPM el deseo de aprender conocimientos útiles para su desempeño profesional docente (Entwistle, 2000), el sentido de utilidad profesional y el objetivo de llegar a ser maestros de Educación Primaria. Por tanto, los resultados de esta investigación subrayan la importancia de trabajar con progresiones de aprendizaje en los programas de formación inicial para que desarrollen su mirada profesional vinculada a registros de la práctica.

Por último, cabe señalar que los resultados de esta investigación aportan información de cómo las progresiones de aprendizaje, enmarcadas en un experimento de enseñanza, pueden favorecer que los futuros docentes pasen de una postura de "anticipar respuestas bien o mal" a una postura de "anticipar respuestas basadas en el dinamismo del aprendizaje del estudiante", en línea con otros autores como, por ejemplo, Gotwals (2018).

Reconocimiento

Este estudio forma parte del proyecto Referencia: PID2020-116514GB-I00, Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 132–144. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.21.2.0132

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a Unifying Theory of Behavioral Change. *Psycological Review, 84*(2), 191. https://doi.org/10.1037/0033-295x.84.2.191

Clements, D. H. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 81-89. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_1

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary teachers. *Teaching and Teacher Education*, *47*, 82-92. https://doi.org/10.1016/j.tate.2014.12.009

Duncan, R. G. y Hmelo-Silver, C. E. (2009). Learning progressions: Aligning curriculum, instruction, and assessment. *Journal of Research in Science Teaching*, *46*(6), 606-609. https://doi.org/10.1002/tea.20316

Duschl, R., Maeng, S. y Sezen, A. (2011). Learning progressions and teaching sequences: A review and analysis. *Studies in Science Education*, *47*(2), 123182. https://doi.org/10.1080/03057267.2011.604476

Edgington, C. (2014). Teachers' uses of a learning trajectory as a tool for mathematics lesson planning. En J. J. Lo, K. Leatham y L. Van Zoest (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 261-284). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02562-9_14

Edgington, C., Wilson, P. H., Sztajn, P. y Webb, J. (2016). Translating learning trajectories into useable tools for teachers. *Mathematics Teacher Educator, 5*(1), 65-80. https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.5.1.0065

Empson, S. B. (2011). On the idea of learning trajectories: Promises and pitfalls. *The Mathematics Enthusiast*, *8*(3), 571-598. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1229

Empson, S. B. y Levi, L. (2011). *Extending Children's Mathematics: Fractions and Decimals*. Heinemann.

Entwistle, N. (2000). Promoting deep learning through teaching and assessment. En *1st Annual Conference ESRC Teaching and Learning Research Programme* (pp. 9-20). University of Leicester. http://www.etl.tla.ed.ac.uk/docs/entwistle2000.pdf

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM*, *44*(6), 747-759. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0425-y

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M. y Callejo, M. L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las ciencias*, *36*(1), 143-162. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2291

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, *16*(1), 3-17. https://doi.org/10.2307/748969

Gordon, C. y Debus, R. (2002). Developing deep learning approaches and personal teaching efficacy within a preservice teacher education context. *British Journal of Educational Psychology*, *72*(4), 483-511. https://doi.org/10.1348/00070990260377488

Gotwals, A. W. (2018). Where are we now? Learning progressions and formative assessment. *Applied Measurement in Education, 31*(2), 157-164. https://doi.org/10.1080/08957347.2017.1408626

Graeber, A., Tirosh, D. y Glover, R. (1986). Preservice teachers' beliefs and performance on measurement and partitive division problems. En G. Lappan y R. Even (Eds.), *Proceedings of the Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 262-267). Michigan State University, East Lansing y MI.

Herbst, P., Chazan, D., Chen, C. L., Chieu, V. M. y Weiss, M. (2011). Using comics-based representations of teaching, and technology, to bring practice to teacher education courses. *ZDM*, *43*(1), 91-103. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0290-5

Higgs, J. (2012). Practice-Based Education Pedagogy. Situated capability-development, relationship practice(s). En J. Higgs, R. Barnett, S. Billett, M. Hutchings y F. Trede (Eds.), *Practice-Based Education. Perspective and Strategies* (pp. 71-80). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6209-128-3_6

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2020). A learning Trajectory as a scaffold for pre-service Teachers' Noticing of Students' Mathematical Understanding. *International Journal of Science and mathematics Education, 18*(3), 529-548. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09973-4

Jacobs, V., Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202. https://www.jstor.org/stable/20720130

Jansen, A. y Hohensee, Ch. (2016). Examining and elaborating upon the nature of elementary prospective teachers' conceptions of partitive division with fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*, 503-522. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9312-0

Li, Y. y Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: The case of fraction division. *ZDM*, *40*(5), 833-843. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0148-2

Llinares, S. (2013). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista, 50*, 117-133. https://doi.org/10.1590/S0104-40602013000400009

Llinares, S., Fernández, C. y Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12*(8), 2155-2170. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1295a

Lo, J. y Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*, 481-500. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9221-4

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: the discipline of noticing*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203471876

Montero, E. y Callejo, M. L. (2019). Cambios en cómo estudiantes para maestro anticipan respuestas de niños de primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 433-442). Valladolid: SEIEM. https://doi.org/10.26754/actas.seim21

Nillas, L. (2003). Division of fractions: Preservice teachers' understanding and use of problem solving strategies. *The mathematics educator 7*(2), 96-113.

Olanoff, D., Lo, J. y Tobias, J. (2014). Mathematical Content Knowledge for Teaching Elementary Mathematics: A Focus on Fractions. *The Mathematics Enthusiast*, *11*(2), 267-310. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1304

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Perez-Tyteca, P. y Callejo, M.L. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(2), 203-228. https://doi.org/10.12802/relime.18.2124

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in mathematics education*, *26*(2) 114-145. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.26.2.0114

Smith, M. S. y Stein, M.K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. National Council of Teachers of Mathematics.

Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: A systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM Mathematics Education*, *48*, 1-27. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0775-y

Steffe, L. P. y Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. Springer.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. y Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Stevens, A., Wilkins, J., Lovin, L., Siegfried, J., Norton, A. y Busi, R. (2020). Promoting sophisticated fraction constructs through instructional changes in a mathematics course for PreK-8 prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23*, 153-181. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9415-5

Stockero, S. L. (2014). Transitions in prospective mathematics teacher noticing. En J. J. Lo, K. Leatham y L. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 239-259). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02562-9_13

Teuscher, D., Leatham, K. R. y Peterson, B. E. (2017). From a framework to a lens: Learning to notice student mathematical thinking. En E. Schack, M. Fisher y J. Wilhelm (Eds), *Teacher noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 31-48). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5_3

Tirosh, D. y Graeber, A. O. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(1), 79-96. https://doi.org/10.1007/bf00356042

Tyminski, A. M., Simpson, A. J., Land, T. J., Drake, C. y Dede, E. (2021). Prospective elementary mathematics teachers 'noticing of childrens' mathematics: a focus on extending moves. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*, 533–561. https://doi.org/10.1007/s10857-020-09472-2

Vula, E. y Kingji-Kastrati, J. (2018). Pre-service teacher procedural and conceptual knowledge of fractions. En G. J. Stylianides y K. Hino (Eds.), *Research advances in the mathematical education of pre-service elementary teachers* (pp. 111-123). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68342-3

Wilson, P. H., Mojica, G. F. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: supporting teachers' understanding of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 103-121. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.12.003

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C. y Confrey, J. (2014). Teachers' use of their mathematical knowledge for teaching in learning a mathematics learning trajectory. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*, 149-175. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9256-1

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C. y Myers, M. (2015). Teachers' uses of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education*, *66*(3), 227-244. https://doi.org/10.1177/0022487115574104

Zimmerman, B. J. (1989). A social cognitive view of self-regulated academic learning. *Journal of Educational Psychology*, *81*(3), 329. https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/0022-0663.81.3.329

Zimmerman, B. J. (1998). Developing self-fulfilling cycles of academic regulation: An analysis of exemplary instructional models. En D. Schunk y B. Zimmerman (Eds.), *Self regulated learning: From teaching to self-reflective practice* (pp. 1–19). Guilford Publications.

Autores

Eloísa Montero. Escuni Centro Universitario de Educación, España. emontero@escuni.es

https://orcid.org/0000-0002-1847-9254

María Luz Callejo.† Universidad de Alicante, España.

https://orcid.org/0000-0002-2617-9657

Julia Valls. Universidad de Alicante, España. julia.valls@ua.es

https://orcid.org/0000-0002-5988-5443