

VÍCTOR FERREIRA RAGONI, APARECIDA SANTANA DE SOUZA CHIARI

EXPANDINDO TELAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA:
PRODUZINDO CONCEITOS DE INTEGRAIS DUPLAS COM O *SMARTPHONE*

EXPANDING SCREENS IN MATHEMATICAL EDUCATION WITH GEOGEBRA:
PRODUCING CONCEPTS OF DOUBLE INTEGRALS WITH *SMARTPHONE*

RESUMEN

En este artículo, nos proponemos analizar procesos de producción de conocimiento sobre integrales dobles con el uso de smartphones y GeoGebra con estudiantes de Educación Superior, a partir de la Teoría de la Actividad. Como marco teórico, encontramos en la tercera generación de la Teoría de la Actividad (TA) un soporte para el análisis de la actividad humana. En la producción de datos, de naturaleza cualitativa, desarrollamos un Proyecto de Enseñanza de Grado con una duración de cinco encuentros realizados durante tres lunes del mes de noviembre de 2019, en el cual participaron 11 estudiantes de las carreras de Matemáticas y Física. Por medio de grabaciones de pantalla del propio smartphone de los participantes, producciones escritas y entrevistas, analizamos los videos de un trío y llegamos a interpretar que el smartphone, gracias a su atractivo visual y su capacidad de ofrecer retroalimentación inmediata, posee potencial para provocar o favorecer transformaciones en las formas de producir conocimiento sobre integrales dobles, así como para observar lo que implica la extensión de los conceptos de integrales. Los resultados muestran que los participantes ampliaron conceptos de integrales simples hacia integrales dobles, aunque con algunas imprecisiones. El uso del smartphone junto con GeoGebra favoreció el aprendizaje mediante la visualización y la interacción, pero su eficacia dependió de la mediación de la comunidad. Tensiones internas en el sistema de actividad impulsaron reconstrucciones conceptuales, mientras que se identificaron limitaciones técnicas en los dispositivos. En términos generales, la producción de conocimiento se dio de forma colectiva y mediada, lo que confirma la adecuación de la Teoría de la Actividad como herramienta de análisis.

PALABRAS CLAVE:

- *Tecnologías digitales*
- *Teoría de la actividad*
- *Enseñanza superior*
- *Cálculo integral*
- *Producción de Conocimiento*



ABSTRACT

In this article, we aim to analyze processes of knowledge production about double integrals using smartphones and GeoGebra with higher education students, through the lens of Activity Theory. As a theoretical framework, we draw on the third generation of Activity Theory (AT) to support the analysis of human activity. For data production, of a qualitative nature, we developed an Undergraduate Teaching Project over the course of five sessions held across three Mondays in November 2019, involving 11 students from Mathematics and Physics programs. Through smartphone screen recordings made by the participants themselves, along with written productions and interviews, we analyzed the videos of one trio and interpreted that the smartphone—through its visual appeal and capacity for instant feedback—has potential to provoke or support transformations in the ways knowledge about double integrals is produced, and to help visualize the extension of integral concepts. The results show that participants expanded their understanding from single to double integrals, albeit with some inaccuracies. The use of smartphones with GeoGebra supported learning through visualization and interaction, though its effectiveness depended on community mediation. Internal tensions within the activity system drove conceptual reconstructions, while technical limitations of the devices were also identified. Overall, knowledge production occurred in a collective and mediated way, confirming the suitability of Activity Theory as an analytical framework.

KEY WORDS:

- *Digital Technologies*
- *Activity Theory*
- *University Education*
- *Integral Calculation*
- *Knowledge Production*

RESUMO

Nesse artigo, objetivamos analisar processos de produção de conhecimento sobre integrais duplas com *smartphone* e GeoGebra com alunos do Ensino Superior através da Teoria da Atividade. Como referencial teórico encontramos na terceira geração da Teoria da Atividade (TA) suporte para a análise da atividade humana. Na produção de dados, de natureza qualitativa, desenvolvemos um Projeto de Ensino de Graduação com duração de cinco encontros durante três segundas-feiras em novembro de 2019, no qual participaram 11 alunos dos cursos de Matemática e Física. Por meio de gravação de tela do próprio *smartphone* dos participantes, de produção escrita e entrevista, analisamos os vídeos de um trio e interpretamos que o *smartphone*, por meio do apelo visual e da capacidade de *feedback* instantâneo, possui potencial para provocar, ou favorecer, transformação nos modos de produzir conhecimentos sobre integrais duplas, observar o que significa a extensão

PALAVRAS CHAVE:

- *Tecnologias Digitais*
- *Teoria da Atividade*
- *Ensino Superior*
- *Cálculo Integral*
- *Produção de Conhecimento*

dos conceitos de integrais. Os resultados mostram que os participantes expandiram conceitos de integrais simples para integrais duplas, embora com algumas imprecisões. O uso do smartphone com GeoGebra favoreceu a aprendizagem pela visualização e interação, mas sua eficácia dependeu da mediação da comunidade. Tensões internas no sistema de atividade impulsionaram reconstruções conceituais, enquanto limitações técnicas dos dispositivos foram identificadas. De forma geral, a produção de conhecimento ocorreu de maneira coletiva e mediada, confirmando a adequação da Teoria da Atividade para a análise.

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous avons pour objectif d'analyser les processus de production de connaissances sur les intégrales doubles à l'aide de smartphones et de GeoGebra avec des étudiants de l'enseignement supérieur, à travers la Théorie de l'Activité. Comme cadre théorique, nous nous appuyons sur la troisième génération de la Théorie de l'Activité (TA), qui offre un soutien pertinent pour l'analyse de l'activité humaine. Pour la production de données, de nature qualitative, nous avons mené un projet d'enseignement de niveau licence, composé de cinq séances réparties sur trois lundis du mois de novembre 2019, avec la participation de 11 étudiants inscrits en mathématiques et en physique. À partir des enregistrements d'écran réalisés directement sur les smartphones des participants, de productions écrites et d'entretiens, nous avons analysé les vidéos d'un trio d'étudiants. Nous avons interprété que le smartphone, grâce à son attrait visuel et à sa capacité de rétroaction instantanée, possède un potentiel pour provoquer ou favoriser des transformations dans les manières de produire des connaissances sur les intégrales doubles, ainsi que pour visualiser l'extension des concepts d'intégrale. Les résultats montrent que les participants ont élargi leurs concepts des intégrales simples aux intégrales doubles, bien que certaines imprecisions aient été observées. L'utilisation du smartphone avec GeoGebra a favorisé l'apprentissage par la visualisation et l'interaction, mais son efficacité a dépendu de la médiation de la communauté. Des tensions internes au sein du système d'activité ont conduit à des reconstructions conceptuelles, tandis que des limitations techniques des dispositifs ont été identifiées. De manière générale, la production de connaissances s'est faite de manière collective et médiée, confirmant la pertinence de la Théorie de l'Activité comme outil d'analyse.

MOTS CLÉS:

- *Technologies Numériques*
- *Théorie de l'Activité*
- *Enseignement Supérieur*
- *Calcul Intégral*
- *Production de Connaissances*

1. INTRODUÇÃO

Consideramos pertinente iniciar esse texto explicando que se trata de um artigo base de uma dissertação de mestrado defendida em 2021, para tanto objetivamos analisar processos de produção de conhecimento sobre integrais duplas com *smartphone* e GeoGebra com alunos do Ensino Superior através da Teoria da Atividade, que corresponde à questão de pergunta: como ocorre a produção de conhecimentos de integrais duplas com *smartphone* e o aplicativo GeoGebra?. Para que isso fosse possível, nos baseamos na terceira geração da Teoria da Atividade, a qual tem como principal pesquisador Engeström (2001), o que será mais explicado na terceira seção deste texto.

Consideramos o estudo pertinente e relevante no sentido de articular o uso de *smartphone* com o GeoGebra nos processos de produção de conhecimento sobre integrais duplas, visto que o aplicativo possui um impacto significativo para o ensino e aprendizagem de Cálculo (Huillcahuari et al., 2023). Destacamos ainda a utilização da terceira geração da Teoria da Atividade como ferramenta analítica para compreender a dinâmica coletiva. Ao integrar conceitos de cálculo integral com práticas mediadas por tecnologia, o estudo amplia as discussões sobre produção de conhecimento mediado por tecnologias digitais.

Entendemos que a pesquisa é relevante para o campo da Educação Matemática ao problematizar o potencial dos *smartphones* como potencial mediador do conhecimento em contextos como o ensino superior. O artigo ainda propõe alternativas pedagógicas que respondem aos desafios de cálculo, assim como a importância da interação entre os sujeitos para a produção de conhecimento. Consideramos também que a pesquisa e o artigo trazem contribuições importantes para a formação de professores, fortalecendo práticas educacionais que se pautem na dialogicidade, inclusão e produção autônoma de conhecimento.

Na segunda seção, nos detemos a alguns aspectos que consideramos ser importante para uma pesquisa que envolva tecnologias, isto é, pontuamos nossa concepção de termos como “tecnologia” e “tecnologia digital”. Além disso, trazemos algumas ideias sobre a nossa perspectiva do que consideramos como produção de conhecimentos, a importância de se investigar ainda questões relacionadas ao cálculo. Continuando o pesquisar, na terceira seção, trazemos nosso embasamento na natureza qualitativa a qual considera que “os dados qualitativos consistem em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos. Estes dados não são padronizáveis como os dados quantitativos, obrigando o pesquisador a ter flexibilidade e criatividade [...]” (Goldenberg, 2018, p. 58) no momento da sua produção de dados e ao analisá-los.

A quarta seção trata da análise de dados, contemplamos a produção dos sujeitos pesquisados e lançamos nosso olhar sensivelmente para os dados e deixamos que eles nos levem pela construção que os 11 alunos do Projeto de Ensino de Graduação fizeram durante os três dias dos encontros. Por ser uma pesquisa longa não trazemos na íntegra a análise de dados, mas um excerto de como fizemos esse tópico tão importante para a contemplação das considerações finais. Enunciamos que a analisamos através da TA com a ajuda de um sistema de atividade que foi evoluindo, modificando, alterando, sofrendo influências durante o curso. Exatamente por esse motivo trazemos no início da análise uma constelação de sistemas, a qual faz referência justamente para como o sistema foi evoluindo.

Por fim, trazemos as considerações finais que por meio de gravação de tela do próprio *smartphone* dos participantes, de produção escrita e entrevista, analisamos os vídeos de um trio e interpretamos que o *smartphone*, por meio do apelo visual e da capacidade de *feedback* instantâneo, possui potencial para provocar, ou favorecer, transformação nos modos de produzir conhecimentos sobre integrais duplas e observar o que significa a extensão dos conceitos de integrais. Ainda nos mostrou que a interação entre sujeitos e mediadores, a troca de informações, discussões e análises possibilitou que eles (re) pensassem e estendessem conceitos.

2. TRAÇANDO DEFINIÇÕES DOS TERMOS “TECNOLOGIA”, “TECNOLOGIA DIGITAL”, CONCEITUANDO A PRODUÇÃO DE CONHECIMENTO E O CÁLCULO

Primeiro, gostaríamos de salientar que consideramos esse texto como uma evolução tecnológica. Tanto do aspecto digital, uma vez que é um texto escrito por meio de um computador (outra tecnologia), quanto do aspecto escrito. Sobre o conceito “tecnologias”, Kenski (2012, p. 24) propõe que

[...] Ao conjunto de conhecimentos e princípios científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade, chamamos de “tecnologia”. Para construir qualquer equipamento – uma caneta esferográfica ou um computador –, os homens precisam pesquisar, planejar e criar o produto, o serviço, o processo. Ao conjunto de tudo isso, chamamos de tecnologias.

É nesse olhar para o termo tecnologias que repousa a nossa compreensão de tecnologias nesta pesquisa, como uma criação humana, de técnicas, equipamentos, linguagens, etc. Além dessa discussão, entra em foco com mais intensidade as tecnologias digitais. Chiari (2015, p. 38) afirma que, “[...] em educação,

normalmente utilizamos o termo ‘Tecnologia Digital’ quando nos referimos ao uso de computador, internet e outros meios associados, como softwares, vídeos digitais, entre outros”.

Além disso, consideramos que o celular, como já discutido, se tornou ao longo dos anos um “computador de mão”. Em Ragoni e Chiari (2021) argumentamos que, em certo sentido, o celular tem até mais funções que o computador, pois também pode funcionar como scanner, bússola, babá eletrônica, entre outros. Assim, o *smartphone*, com suas várias funções, deixou de ser meramente utilizado para troca de mensagens e ligações, mas também como uma ferramenta capaz de acessar e produzir distintas informações em frações de segundos. Com os *smartphones* podemos fazer cálculos e interagir por meio das redes sociais. De modo mais amplo, podemos produzir matemática.

Em pesquisas como Ragoni (2021), o *smartphone* torna-se um mediador de produção de conhecimentos, a partir de suas funcionalidades e aplicativos. Nesse artigo, analisamos processos de produção de conhecimento sobre integrais duplas com *smartphone* e GeoGebra. Entendemos que o conhecimento é produzido por meio de atores humanos e não humanos e que “[...] professores, estudantes e tecnologias fazem parte de um sistema coletivo dinâmico e que a produção de conhecimento se dá por meio desse coletivo [...]” (Borba et al., 2018, p. 57). A nossa compreensão se baseia nas ideias do “construto seres humanos-com-mídias (S-H-C-M) [...] que enfatiza o papel das mídias na produção de conhecimento [...]” (Souto e Borba, 2016, p. 220).

A produção de conhecimento dentro do Cálculo é um campo riquíssimo de investigação, mas não é novo que um professor ao se deparar com turmas cheias de alunos verificará ao final do processo educativo vários problemas quanto ao ensino nessas disciplinas, seja o primeiro Cálculo, o segundo, etc. Em geral, um acadêmico que ingressa na universidade já se depara com essa disciplina sendo que nunca “[...] trabalhou com nenhuma das noções do Cálculo, e que os novos conceitos lhe são apresentados segundo uma abordagem que está muito pouco relacionada com a maneira pela qual o Cálculo foi sendo historicamente estruturado [...]” (Baruffi, 1999, p. 16). Basicamente, quando o aluno passa pelo primeiro Cálculo ele pouco vê questões de tridimensionalidade, um dos assuntos tratados na pesquisa. Nasser et al. (2017, p. 44) em uma revisão de literatura comentam que

Observa-se que grande parte dos problemas propostos na disciplina de Cálculo depende de uma representação visual adequada [...]. Em geral, a dificuldade dos alunos nesses problemas não é na aplicação do conceito de derivada ou de integral, mas na sua representação geométrica e na identificação de relações entre as grandezas envolvidas no problema ou os elementos da figura.

É nesse ponto que queremos tocar, pois quanto ao Cálculo de várias variáveis, os elementos geométricos são de extrema importância para a visualização e compreensão de problemas. Por isso vemos nas tecnologias digitais um forte aliado do professor e dos alunos. Visando contemplar o objetivo indicado no início, nas seções seguintes tratamos da terceira geração da Teoria da Atividade (TA), caracterizada pelos estudos de Engeström (2001) e seu pares.

3. Um Clique na História da Teoria da Atividade

Nessa seção, discorreremos sobre a Teoria da Atividade (TA) segundo Engeström (2001). Buscamos responder algumas questões centrais para o desenrolar do texto, tais como: O que é a Teoria da Atividade? O que essa teoria estuda? Por que foi considerada neste trabalho?

A primeira geração é marcada pelos estudos do pensamento vygotskyano de mediação, sendo a base da Teoria da Atividade. Em seguida, vamos para os estudos de Leontiev (1978), que para Engeström (2001) é caracterizado como a segunda geração. Leontiev, a partir dos estudos de Vygotsky, traz contribuições para a elaboração de noções do que é objeto e meta, além de trazer o caráter coletivo para a atividade.

A partir dessas ideias, Engeström (1987) traz como contribuições o que chamamos de princípios da TA (Engeström, 2001), a serem especificados mais à frente nesse texto. A Teoria da Atividade (TA) tem suas raízes históricas na escola histórico-cultural. As suas ideias são baseadas na perspectiva materialista-dialética, que considerava o sujeito com o poder de agir sobre um objeto ($S \rightarrow R$). No entanto, para que isso acontecesse, seria necessário ainda um terceiro elemento (X) que mediaría essa relação, isto é,

[...] o indivíduo não podia mais ser entendido sem seus meios culturais; a sociedade não podia mais ser entendida sem a ação de indivíduos que usam e produzem artefatos. Isso significava que os objetos deixavam de ser apenas matérias-primas para a formação de operações lógicas no sujeito [...] (Engeström, 2001, p. 134, tradução nossa).

O terceiro elemento (X), refere-se aos signos utilizados para “solucionar um problema psicológico (lembrar, comparar coisas, relatar, escolher, etc.) [...]” (Souto, 2014, p. 17). Além disso, “Vygotsky fez distinção entre dois tipos de instrumentos mediadores inter-relacionados: ferramentas e signos. Os signos pertencem a uma categoria mais ampla de ‘ferramentas psicológicas’” (Engeström, 1987, p. 87).

Essa teoria considera a atividade humana como principal meio de desenvolvimento humano e possui muitos desdobramentos e variações. Leontiev é considerado por Engeström (2001) como expoente da segunda geração da TA. Souto (2014) pondera que, para Engeström (2001), enquanto a análise de Vygotsky era focada no individual, Leontiev passa a considerar o papel da coletividade humana durante a atividade. Outras contribuições de Leontiev foram a elaboração de duas noções importantes para o desenvolvimento da teoria: objeto e meta. Este autor, segundo Souto (2014), centraliza o objeto da atividade na motivação que os sujeitos têm para realizar determinada atividade. A partir disso, Engeström (1987) considera que o trabalho humano é cooperativo e coletivo desde os seus primórdios, assim

[...] Nós podemos falar da atividade do *indivíduo*, mas nunca de *atividade individual*; apenas ações são individuais. [...] o que distingue uma atividade de outra é seu objeto. De acordo com Leontiev, o objeto de uma atividade é seu motivo verdadeiro. Portanto, o conceito de atividade está necessariamente ligado ao conceito de motivo (Engeström, 1987, p. 94, grifo do autor).

Para que seja considerada uma atividade, no pensamento de Leontiev, eram precisos processos para responder a uma necessidade. Isso nos leva à sua célebre frase que enuncia a existência de uma atividade, que sem objeto não possui qualquer significado, ou seja, é a partir do objeto que podemos diferenciar uma atividade de outra e, se não o houver, não há atividade.

Para sintetizar as ideias aqui apresentadas trazemos o seguinte excerto:

Em síntese, de acordo com o pensamento de Leontiev, a atividade humana é consciente e intencional, tem a mediação cultural como principal característica e leva a um processo de transformações recíprocas entre sujeito e objeto. Seus exemplos e argumentos apontam a uma necessidade de uma ampliação, em relação à unidade de análise de Vygotsky, focada no individual, para um plano coletivo (Souto, 2014, p. 20).

Considerada por Engeström (2001) como a terceira geração da TA, depois de anos sendo trabalhada e estudada, a teoria saiu de seu campo de estudos, a psicologia, para ser usada em vários outros âmbitos, como a antropologia, a filosofia, a linguística, entre outros, como é o nosso caso: a educação. Para Engeström (1987) “[...] a atividade é uma formação coletiva, sistêmica, que possui uma estrutura mediadora complexa” (Daniels, 2011, p. 167). Além disso, como Souto (2014, p. 24) salienta:

[...] a atividade é tomada como um processo contínuo de mudança e movimento decorrentes de crises e rupturas, os quais, inter-relacionados em uma formação criativa, composta de múltiplos elementos, vozes e concepções, provocam transformações e inovações que são entendidas do ponto de vista histórico.

Basicamente a autora está se referindo aos cinco princípios propostos por Engeström (2001): contradições internas, sistema de atividade, multivocalidade, transformações expansivas e historicidade. Engeström (1987) sistematiza um todo unificado como o primeiro princípio “[...] que é um sistema de atividade coletiva, mediado por artefatos e orientado ao objeto [...] [Ele] é tomado como a unidade principal de análise [...]” (Engeström, 2001, p. 136, tradução nossa), como sugerido a seguir:



Figura 1. Sistema de Atividade

Fonte: Baseado em Souto (2014).

O SA integra em sua estrutura artefato, sujeito, objeto, regras, comunidade e a divisão do trabalho. Chamamos de *nó* cada um desses elementos do sistema. Ademais, pelas ideias de Vygotsky de mediação e pela contribuição de Leontiev com relação ao caráter cultural e coletivo, podemos dizer que quem medeia a relação do sujeito com o objeto, além do artefato, é também a comunidade.

A comunidade tem a sua relação com o sujeito mediada pelas regras, e, com o objeto, pela divisão do trabalho. Ou seja, no triângulo superior, a relação sujeito-objeto é mediada pelo artefato. Nos triângulos inferiores temos as regras mediando a relação sujeito-comunidade, a comunidade mediando a relação sujeito-objeto e a divisão do trabalho mediando comunidade-objeto. Neste trabalho, veremos mais à frente que a comunidade tem um papel importante para o desenvolver da atividade. Artefatos são signos, como linguagens (oral, escrita, matemática, etc) e os instrumentos como *smartphone*, *softwares*, aplicativos, lápis, papel, quadro, giz, etc, utilizados. Sujeitos são todos os que têm o poder de ação dentro da atividade a ser desenvolvida. São os protagonistas na atividade.

A comunidade contribui para o desenvolvimento da atividade, mas não tem poder de ação, embora compartilhe do mesmo objeto. A divisão do trabalho compreende a divisão das tarefas, *status* e poder entre os membros da comunidade. As regras são as regulações implícitas e explícitas, normas, convenções e padrões que regulam as ações dentro do sistema.

É preciso ainda destacar que o objeto é representado com um destaque oval nessa estrutura, o que é justificado por Engeström (2001, p. 136, tradução nossa) como “[...] um alvo em movimento, não redutível a objetivos conscientes de curto prazo”. Além disso “[...] o objeto é matéria-prima resistente e propósito futuro de uma atividade. O objeto é o verdadeiro portador do motivo da atividade” (Engeström e Sannino, 2010, p. 4). Isso ainda indica que “[...] as ações orientadas por objeto são sempre, explícita ou implicitamente, caracterizadas por ambiguidade, surpresa, interpretação, produção de sentido e potencial para mudança” (Daniels, 2011, p. 170).

Para Engeström (2001), um SA é coletivo e possui nos artefatos o caráter mediacional, se orienta para o objeto e, por esse motivo, deve ser considerado como uma unidade mínima de análise da atividade. A coletividade faz o objeto ser compartilhado por todos os sujeitos envolvidos na atividade e este, o objeto, refere-se “[...] à matéria-prima ou espaço-problema para o qual a atividade é dirigida” (Souto, 2014, p. 24). Por ter esse caráter coletivo, o SA ainda vem carregado por uma multiplicidade de vozes, conceitos, opiniões, ou seja, aqui se encontra o segundo princípio proposto por Engeström (2001): multivocalidade.

O autor ainda destaca que a multivocalidade “[...] é uma fonte de problemas e uma fonte de inovação, exigindo ações de tradução e negociação” (Engeström, 2001, p. 136, tradução nossa). Em um curso no qual são convidados alunos de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Física da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como será abordado no capítulo de metodologia desta pesquisa, e que faziam parte de semestres diferentes do seu período de vida acadêmica, esse contexto torna-se um campo fértil para a revelação das múltiplas vozes existentes.

A historicidade é o terceiro princípio da Teoria da Atividade. É, aparentemente, o princípio mais simples de se entender, pois, assim como a multivocalidade, seu enunciado é autoexplicativo. Ou seja, é através da história contínua que devemos analisar o desenvolvimento de uma atividade, isto é,

[...] a análise de um sistema de atividade deve considerar esse princípio, pois ele contribui para a compreensão de seu desenvolvimento. [...] um sistema, qualquer que seja, é constituído e transformado ao longo do tempo e, na maioria das vezes, isso ocorre de forma irregular. Assim, uma forma de entender esses movimentos do sistema de atividade é por meio da análise à luz da história nele envolvida (Silva e Souto, 2020, p. 141).

Engeström (2001) defende a ideia de que um sistema de atividade é transformado segundo a sua história, ou seja, seus problemas e desafios tomam formas e “só podem ser entendidos em relação à sua própria história” (Engeström, 2001, p. 136, tradução nossa). Além disso, a historicidade é importante para

entender a história local da atividade, do objeto, ou seja, olhar para a história local da construção do conceito de integrais duplas. Ainda, é pertinente neste artigo para a análise a história global dos conceitos que se relacionam com as integrais duplas, como, por exemplo, a construção do conceito de integrais simples, o entendimento de cada termo da Soma de Riemann, derivadas, área abaixo de uma curva, e outros conceitos que são interligados.

No quarto princípio da Teoria da Atividade proposto por Engeström (2001), temos as contradições internas. Tal princípio se define por serem tensões estruturais, historicamente acumuladas, que acontecem durante uma atividade. Essas tensões podem ocorrer de quatro diferentes formas, “[...] as contradições internas não devem ser consideradas incômodas ou ligadas a situações que não deveriam ocorrer, mas, sim, devem ser encaradas como oportunidades de desenvolvimento que podem atuar como forças de mudança em um sistema de atividade” (Silva e Souto, 2020, p. 141). Corroboramos Soares e Souto (2014) ao considerarem para estas diferentes formas níveis para diferenciá-las.

Podemos ver como se caracteriza cada nível de contradição interna a partir da figura 2 a seguir:

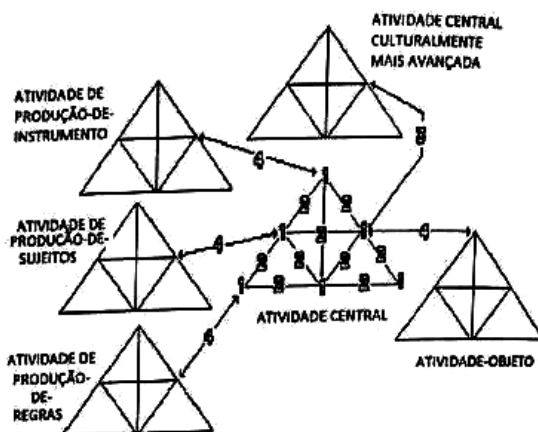


Figura 2. Quatro níveis de contradição dentro do sistema de atividade humana

Fonte: Engeström (1987).

No primeiro nível, as chamadas contradições primárias ocorrem dentro dos *nós* do sistema de atividade (Soares e Souto, 2014). As contradições secundárias, nível 2, ocorrem dentro de um sistema e entre elementos (*nós*) diferentes, estas surgem a partir de diversos entendimentos que os próprios sujeitos sobre os objetos, baseado

pelas regras, pelos instrumentos e pela divisão do trabalho (entre elementos da atividade) (Lorenzin, 2019, p. 63). Para que ocorram as contradições terciárias, nível 3, é necessária uma tensão estrutural entre “ações que formam o objeto coletivo, principalmente entre algo novo que é proposto e algo que é padrão dominante” (Souto, 2014, p. 26-27). Isto é, segundo Engeström (1987, p. 116, grifo do autor), a contradição terciária ocorre “[...] *entre* o objeto/motivo da forma dominante da atividade central e o objeto/motivo de uma forma da atividade central culturalmente mais avançada”. As contradições de nível 4, quaternárias, ocorrem entre um sistema de atividade e sistemas de atividade vizinhos, interligados (Soares e Souto, 2014).

Estas autoras argumentam também que as contradições são tensões, as pesquisadoras entendem estas como sinônimos. E consideram que as “[...] tensões são importantes, na medida em que podem ser fonte de mudança e renovação da atividade, podendo gerar, inclusive, transformações expansivas (ou aprendizagem expansiva)” (Soares e Souto, 2014, p. 53). Aqui neste trabalho estamos tratando as tensões como uma possibilidade de contradições internas e que podem ter transformações expansivas dentro do Sistema de Atividade. Assim,

[...] um sistema de atividade deve ser tomado como um processo contínuo de mudança e movimento decorrentes de crises e rupturas, que inter-relacionados numa formação criativa, composta de elementos, vozes e concepções múltiplas, provocam transformações e inovações que são entendidas do ponto de vista histórico (Souto e Borba, 2016, p. 221).

Em seguida, tratamos dos caminhos metodológicos da pesquisa, desde a nossa concepção qualitativa aos instrumentos utilizados para a produção de dados. A quarta seção retrata a análise de dados, orientada pela TA.

4. AMPLIANDO HORIZONTES E CONECTANDO POSSIBILIDADES COM O *SMARTPHONE*

Para a pesquisa, nossa opção foi produzir dados em um Projeto de Ensino de Graduação, no qual os participantes gravaram as telas dos *smartphones* ao realizarem tarefas exploratórias e investigativas. A partir disso, foram gerados vídeos pelos 11 acadêmicos de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Física que se inscreveram, ao mesmo tempo que interagiam com essa tecnologia e entre si. Além disso, utilizamos folha de respostas com perguntas direcionadoras de discussões. O curso foi desenvolvido em três encontros no mês de novembro de 2019.

Durante todo o processo de planejamento e desenvolvimento das tarefas do curso, pensamos em aplicativos voltados tanto para a matemática, como o GeoGebra, utilizado para o estudo de integrais, quanto para gravação de tela e áudio, o Mobizen. O GeoGebra foi explorado em duas categorias: a primeira refere-se ao GeoGebra 2D, que nos *smartphones* se encontra com o nome “Graphing Calculator”. O aplicativo possui como característica, que o diferencia do segundo, a apresentação, na tela do *smartphone*, de uma janela em duas dimensões. A segunda refere-se ao GeoGebra 3D, que se intitula no *smartphone* como “3D Calculator” e tem como característica principal a apresentação da janela em três dimensões.

O curso ocorreu conforme o quadro a seguir:

<i>Dias</i>	<i>Tema</i>	<i>Objetivos</i>
04/11/2019	Primeira parte: Contato inicial com os participantes do curso; Segunda parte: Tarefa de exploração do GeoGebra Graphing Calculator;	Primeira parte: Explicação do decorrer do curso, objetivos do curso, apresentação dos aplicativos e por que/para que o curso foi desenvolvido. Segunda parte: Apresentação e exploração do GeoGebra; construção de uma função e cálculo da área abaixo do gráfico da função;
11/11/2019	Primeira parte: Explorando Integrais Definidas; Segunda parte: Explorando o aplicativo <i>GeoGebra 3D Graphing Calculator</i> ;	Primeira parte: Explorar a área sob o gráfico de funções a partir da Soma de Riemann e Integrais Definidas. Segunda parte: Deixar que os alunos se ambientassem com o GeoGebra 3D; Construção de uma função de duas variáveis; Manipulação da função.
18/11/2019	Primeira parte: Continuação da segunda parte do encontro do dia 11/11. Segunda parte: Integrais Iteradas e Teorema de Fubini	Primeira parte: Continuação da segunda parte do encontro do dia 11/11 Segunda parte: observação e manipulação de <i>applets</i> sobre iteração e a discussão sobre o Teorema de Fubini;

Quadro 1. Distribuição dos temas e objetivos nos dias de encontro

Fonte: Os autores, 2020.

Nos utilizamos de vídeos gravados pelo próprio *smartphone* dos alunos para a produção e análise de dados, pois segundo Powell et al. (2004) é um artefato flexível, trabalha com informações orais e visuais, captura interações complexas e tem a possibilidade de exame de dados quando o pesquisador sentir necessidade. Os autores ainda destacam que durante a produção dos dados “[...] são feitas seleções do fenômeno que se desenvolve com base na tecnologia utilizada e nos interesses teóricos. Por sua vez, essas realidades tanto compelem quanto moldam as análises posteriores e a apresentação de resultados” (Powell et al., 2004, p. 86).

Aliadas aos vídeos como instrumentos de pesquisa, aplicamos também folhas de perguntas que os alunos precisavam responder durante as atividades com o intuito de sistematizar as discussões. Nesse momento os alunos expressaram o seu entendimento, as suas opiniões e suas concepções sobre o que foi discutido, analisado e explorado durante as tarefas. Tornou-se de extrema importância observar o que foi manifestado pelos participantes do curso, pois tivemos a possibilidade de apreciar suas sistematizações.

Esses procedimentos de pesquisa nos permitiram fazer uma triangulação de dados, ou seja, a partir desses dados produzidos pudemos relacioná-los e “[...] checar algum detalhe ou [...] compreender melhor algum fato ocorrido [...] promovendo uma maior credibilidade de sua pesquisa” (Araújo e Borba, 2013, p. 42). Ou seja, a utilização de variados métodos e fontes proporcionou o aprofundamento do estudo em si. A partir da triangulação dos vídeos que mostram os movimentos e discussão do trio, juntamente com as respostas das folhas podemos ter uma visão melhor de como foi a extensão dos conceitos de cálculo.

Para este artigo propomos uma discussão sobre a produção de um trio participante do curso, compostos por Danilo e Íris inicialmente e depois formando o trio com João, em que os trechos retirados dos vídeos e transcritos são momentos em que os alunos imergiram em discussões sobre os conteúdos, temas e ações propostas durante o curso. A partir dela, buscamos evidenciar, orientados pelos princípios da Teoria da Atividade, movimentos no Sistema de Atividade construído com esse trio ocupando a posição de sujeitos. Com os movimentos no SA, foi possível analisar processos de produção de conhecimento sobre integrais duplas com *smartphone* e GeoGebra, como pode ser observado na análise dos dados a seguir.

5. DESLIZANDO SOBRE TELAS E PRODUÇÕES: A SENSIBILIDADE DE OLHAR PARA OS DADOS

Para iniciar, pensamos ser interessante para o artigo apresentar um Sistema de Atividades Idealizado do Curso (SAIC), fruto de motivos de quem propôs o curso e de quem se dispôs a participar, dos objetivos e foco do curso.

A partir dos motivos expostos pelos participantes no primeiro encontro e dos motivos que *nós*, enquanto proponentes do curso, desejávamos proporcionar, podemos identificar um objeto, pois a atividade tem caráter coletivo para Engeström. Segundo Souto (2014, p. 24), “[...] o objeto, em geral, é compartilhado por todos os sujeitos [...]”. Assim, apresentamos como objeto: Estudar processos de produção de conhecimento e interação por meio do *smartphone*, considerando as possibilidades e limitações de seu uso.

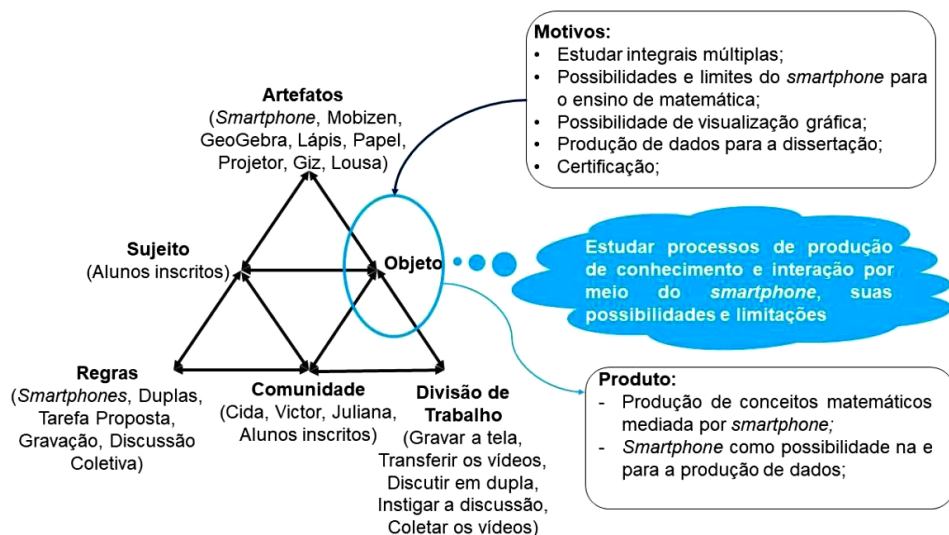


Figura 3. Sistema de Atividades Idealizado do Curso (SAIC)

Fonte: os autores, 2020.

Na representação os artefatos são estabelecidos conforme foram mobilizados no curso, como o *smartphone*, os aplicativos Mobizen e GeoGebra, lápis, papel, projetor, giz e quadro (ou lousa). Os sujeitos, que possuem poder de ação sobre as tarefas propostas, são os alunos inscritos no curso, assim como outros que pediram para participar no decorrer do mesmo. As regras eram: usar os *smartphones* em duplas para realizar as tarefas propostas, executando o Mobizen para a gravação da discussão com o colega ou coletiva.

Dentro da comunidade estavam inseridos: Cida, que era a professora regente do curso; o primeiro autor deste trabalho e Juliana, que éramos colaboradores; e os alunos inscritos, que fazem parte de dois *nós*, pois também realizam o papel de comunidade dentro dessa atividade. A divisão de trabalho constitui-se de ações individuais, mas que podem ser feitas por mais de um membro, assim como um membro pode fazer mais de uma ação: gravar a tela, transferir os vídeos, discutir em dupla, instigar a discussão e coletar os vídeos.

Para exemplificar ao leitor como ocorreram os movimentos no Sistema de Atividades, trazemos para a discussão uma constelação de sistema para orientar. Iniciamos a análise com o SA idealizado do curso (SAIC), como foi mostrado anteriormente, e passamos para o SA inicial do I Encontro. A partir disso, por meio dos vídeos, analisamos os movimentos ocorridos no SA, evidenciando tensões e mudanças, como pode ser observado na figura a seguir.

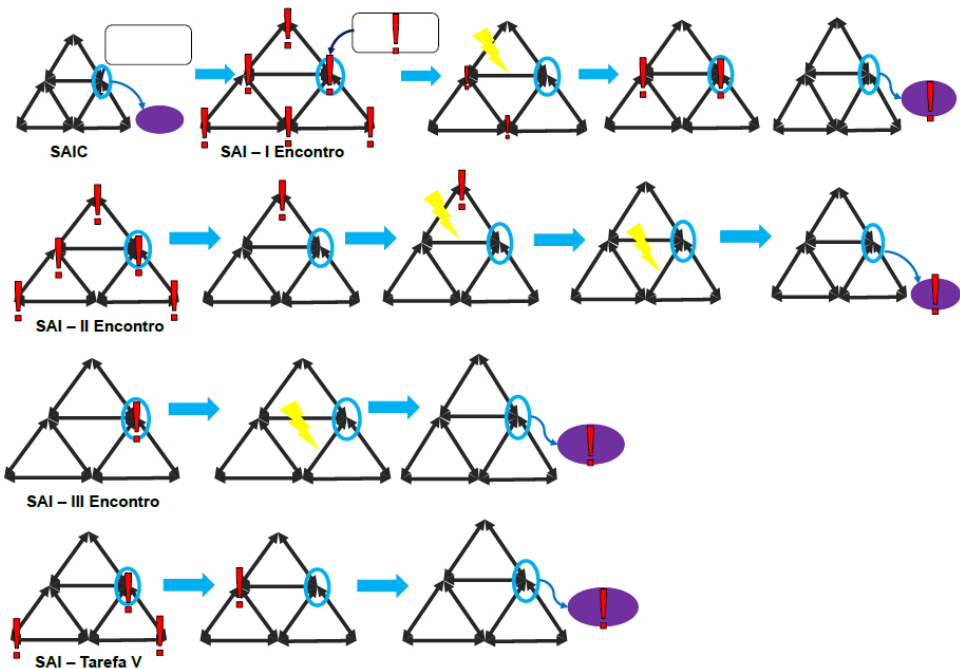


Figura 4. Constelação de sistemas

Fonte: os autores, 2020.

Na constelação de sistemas da figura anterior vemos como os sistemas evoluíram conforme a sua história. Os pontos de exclamação em vermelho indicam que houve alguma mudança no nó, isto é, distanciamento ou aproximação de motivos, sujeitos, inserção de novas regras.

Os raios amarelos indicam onde houve as tensões entre sujeitos e objeto e entre sujeitos e artefatos. Um aprofundamento das tensões e contradições expressas na constelação de sistemas foram melhor discutidas em Ragoni (2021). Vemos nas tensões entre sujeito e artefatos um acúmulo histórico em que os alunos tiveram dificuldade em *plotar* gráficos, em se relacionar com a tecnologia. Isso pode indicar a ocorrência de uma contradição interna no sistema de atividade,

ou seja, contradições de segundo nível, “[...] entre dois ou mais elementos da atividade central” (Lorenzin, 2019, p. 63).

Tivemos durante os três encontros nesse trio analisado quatro pontos de tensão, isto é do Sistema de Atividade do primeiro encontro ao ser inserido a tecnologia, entre dois componentes do sistema: sujeitos e artefatos, mas que ao final do primeiro encontro já havia sido estabilizado.

No segundo encontro tivemos uma tensão novamente nos nós sujeito e artefato, pois inserimos uma atividade em que era necessário plotar uma função de duas variáveis (GeoGebra 3D), mas os alunos tentaram plotar o gráfico na estrutura do ambiente bidimensional. No terceiro ponto de contradição interna do Sistema de Atividade, ainda na segunda tarefa, os sujeitos tem uma tensão com o objeto, ao observarmos que os alunos não conseguiam fazer a relação da “[...] extensão do domínio de funções de uma variável para as funções de duas variáveis [...]” (Ragoni, 2021, p. 100). Essa tensão é resolvida também ao final do encontro com a intervenção da comunidade.

No terceiro encontro temos novamente uma contradição interna entre sujeitos e objeto, ao não identificarem novamente que saindo do plano bidimensional para o tridimensional os retângulos passam a ser paralelepípedos. Embora não tenham percebido isso, o trio já entendia que se tratava de volume e não mais de área (Ragoni, 2021).

Por fim, vemos um esforço dos alunos ao entrarem em atividade para realizar as tarefas solicitadas que, com suas diferenças, estiveram diante de dificuldades e tensões, impulsionando-os a se movimentarem e a buscarem soluções, assim como a comunidade em vários momentos teve de intervir para ajudar a criar diferentes saídas. Nesse sentido, destacamos o momento em que os alunos transformaram o objeto do encontro dois para observar as Somas de Riemann Superior e Inferior. Além disso, destacamos que a inserção de novas regras e artefatos trouxe aos alunos tensões, mas também movimentos de superação dessas dificuldades.

Nos parágrafos que se seguem buscamos retomar aspectos e acontecimentos centrais dos encontros com os alunos que possam subsidiar o leitor a compreender e também interpretar em maior profundidade a constelação de sistemas apresentadas anteriormente. Esta constelação sintetiza a interpretação dos movimentos ocorridos no SA, a partir dos quais pretendemos inferir uma caracterização possível de processos de produção de conhecimento sobre integrais duplas a partir do uso do GeoGebra em *smartphones*.

No primeiro encontro foi entregue um questionário inicial para os participantes com questões abertas e de múltipla escolha a fim de conhecê-los em suas especificidades. Ainda com a intenção de observar os motivos por trás da inscrição de cada um, fizemos uma questão estritamente direcionada a isso, como mostramos transcrições das respostas dos alunos à questão dos motivos a seguir:

Íris: Melhor a minha compreensão da área de integração. Visualizar os gráficos das funções, que em geral, é difícil de intuir.

Danilo: O tema integrais, pois quero entender melhor o conteúdo. Pelas horas.

Como é possível observar, temos apenas duas respostas, ou seja, da Íris e do Danilo, respectivamente, pois João já entrou com o curso em desenvolvimento. Nessas respostas podemos observar os motivos de ambos se inscreverem no curso. Quanto às suas expectativas:

Íris: Que atenda aos meus motivos (4).

Danilo: Espero aprender coisas novas e principalmente a estudar mais pelo celular.

Íris é categórica ao afirmar que espera que seus motivos sejam contemplados, enquanto Danilo responde que busca aprender coisas novas, assim como a estudar pelo *smartphone*. Todos esses motivos e expectativas nos levam na direção da construção de um objeto da atividade inicial: Compreender Integrais Múltiplas com o auxílio de gráficos e do *smartphone*. A seguir apresentamos o Sistema de Atividade Inicial:

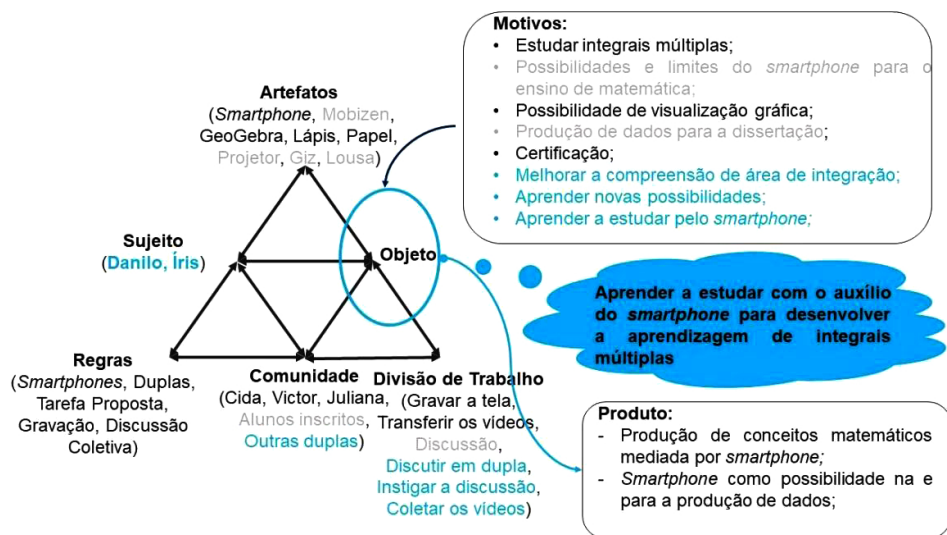


Figura 5. Sistema de Atividade Inicial

Fonte: os autores, 2020.

Do SAIC, que representava uma projeção, para o Sistema de Atividade Inicial, que indica como, de fato, foi o início do curso, temos algumas mudanças, que foram destacadas com algumas cores. Para familiarizar o leitor, em azul são

considerados “novos” *nós* do sistema, em cinza colocamos elementos que já faziam parte do sistema e não se tornaram foco para a análise ou se distanciaram com o avanço da produção de dados

Pensando nessas mudanças, agora os sujeitos são apenas Danilo e Íris¹, e os outros participantes do curso, aqui chamados de “outras duplas”, passam a fazer parte apenas da comunidade. Os artefatos agora só se referem aos que os sujeitos vão se utilizar para a mediação com o objeto, elencados como *smartphone*, GeoGebra, lápis e papel. As regras continuam as mesmas, pois os sujeitos vão usar os *smartphones* com sua dupla para realizar a tarefa proposta fazendo discussões e gravando. Os motivos mudaram junto com os sujeitos, assim como o objeto. A divisão do trabalho, agora, se concentra em gravação de tela, discussão (em duplas e coletiva) e a transferência dos vídeos.

Durante a análise do encontro 1, os elementos do sistema sofreram alterações e mudanças. A comunidade atuou no momento que houve tensões entre sujeitos e artefatos mais de uma vez. O artefato *smartphone* por meio do GeoGebra influenciou os sujeitos a modificarem o objeto, principalmente, por seu caráter interativo. Além disso, o *smartphone*, por meio do GeoGebra, por facilitar a visualização de movimentos que outras mídias podem não contemplar, fez com que os sujeitos inserissem além da soma inferior, a soma superior, como mostra a figura a seguir.

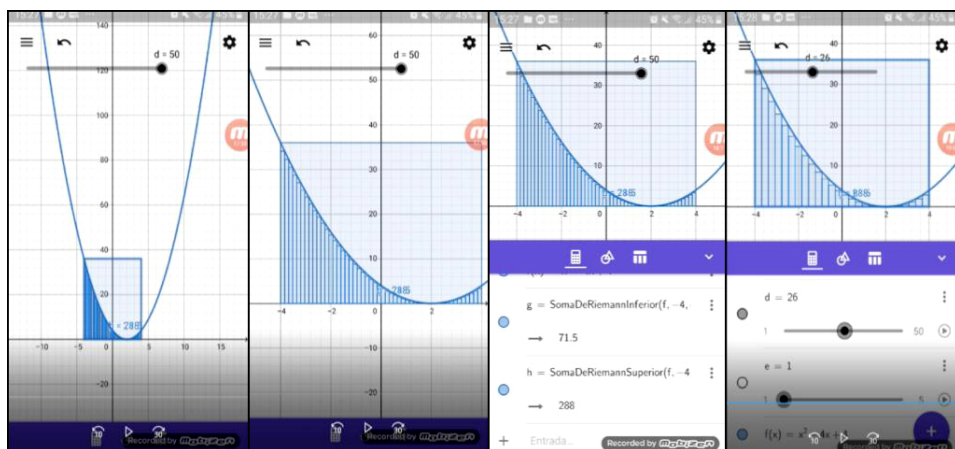


Figura 6. Movimento feito nas partições por Danilo

Fonte: dados da pesquisa.

¹ Que serão chamados D e I na transcrição dos excertos dos vídeos. E, mais adiante, João que será abreviado para J, assim como Cida será abreviado para C.

Finalizando com a investigação dos controles deslizantes, temos os alunos buscando as configurações desse comando para mudar a quantidade de retângulos apresentados na tela. Todo esse movimento no sistema fez o objeto do primeiro encontro ser reconstruído e, também, possibilitou movimentações referentes à produção do conceito de integral definida por meio da Soma de Riemann inferior e superior.

Ao olharmos a constelação, na segunda linha temos a evolução do SA (Engeström, 2001) no segundo encontro. Nessa análise, consideramos importante mencionar o papel do artefato *smartphone* (por meio do GeoGebra) de trazer a resposta imediata e visualização instantânea proporcionando reflexão e questionamentos que os levam a fazer testes recorrentes contestando os pensamentos que os alunos tinham até então, o que também leva o sistema se movimentar.

Além disso, destacamos que a comunidade, mesmo não tendo o poder de agir sobre o objeto, teve papel de destaque nessa atividade para que os sujeitos pudessem superar tensões, como mostra a discussão² a seguir em que vemos algumas reflexões dos alunos sobre o domínio, um dos conteúdos estudados no curso:

- I: Como podemos discutir o domínio das funções? Semelhanças e diferenças que você destaca entre eles. Pega uma função que te agrada. Vamos pegar a parábola que é uma das mais fáceis que a gente tem e vamos jogar você no 2D e eu jogo no 3D.
- D: Beleza!
- I: Você não trouxe celular hoje?
- J: Eu não tenho. Estou sem celular.
- I: Te entendo. Já passei por isso.
- D: Qual que é a parábola? X ao... Ah, não. Parábola, vamos por x ao quadrado menos...
- I: É... Eu vou colocar ela, só que eu vou colocar ela diferente.
- D: Y igual x ao quadrado. I: Vou colocar ela...
- D: Coloquei x ao quadrado menos quatro.
- J: Deixa só x quadrado, mais bonitinho, mais fácil.
- D: Melhor só x quadrado?
- I: Não... Você colocou x quadrado menos quatro?
- D: Arram...
- I: Não tem problema não. f. De... (inaudível) colocar aqui... x , y , z é igual...
- C (ao fundo): E aí?! Como tá a discussão? É... vocês querem que a gente sistematize? A gente já cancelou a terceira [tarefa] hoje, por conta do tempo. Aí a gente faz a terceira de hoje na segunda que vem. Aí a ideia é: terminar essa discussão, é... socializar as respostas e eu queria fazer uma fala final sobre esses quatro elementos: gráfico, domínio, partição e ponto de amostragem. A gente tá preparando o terreno para a discussão que seria hoje e a gente passou para a semana que vem.

² Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=xfLIM1dbWUw>. Acesso em: 18 jul. 2025.

- I: Como eu coloquei só assim, ela tá de novo grudada lá. Ela não subiu.
 D: Tá... Como podemos discutir o domínio... o domínio das funções? Que semelhanças você destaca entre elas? Elas são iguais!
 J: Elas não formam uma concavidade?!
 D: Como podemos discutir os domínios das funções? O domínio? Vamos colocar... vamos tirar o quatro porque o domínio fica todos os reais.
 J: Oxi... aí também está.
 D: Também está os reais?
 J: Também está o domínio, todos os reais.
 D: Opa...
 I: É... o quatro só te interfere na imagem. Olhando aqui ó...
 D: Como podemos discutir... Sim. Entendi. Isso que era pra fazer: pegar a mesma função para analisar o domínio. C (ao fundo conversando com outro aluno): Mudou o que era domínio?
 D: Mudou alguma coisa do domínio aí? Mudou o domínio? I: Não.
 D: Não?
 I: Não. Não muda.

Ao discutirem a construção e o domínio os alunos chamam a atenção novamente para a estrutura, pois ao inserirem " $f(x, y, z)$ " o GeoGebra não "entende" que estamos no ambiente tridimensional e sim que procuramos uma imagem já em quatro dimensões, indo além do que o aplicativo pode fazer. O que pode explicar a fala de Íris ao se referir que a função "tá de novo grudada lá", que "ela não subiu".

Aparentemente os alunos entram em acordo que o domínio não muda, mas gostaríamos de chamar a atenção para a questão de duplas ordenadas, pois é nesse ponto que a intenção da primeira pergunta repousa. Quando estamos trabalhando com funções de uma variável, temos que o domínio, em geral, é o conjunto dos números reais, que pode ser representado por uma reta numérica. Ao trabalharmos com funções de duas variáveis temos a "adição" de uma outra dimensão ao domínio, isto é, passamos a usar um par ordenado, cuja representação pode ser feita em um plano. A ideia de reta é, então, expandida para a ideia de plano.

A partir disso, esperávamos que os alunos buscassem explorar os gráficos, olhando para o domínio e chegassem à conclusão de que ao trabalhar no ambiente tridimensional, ao escrevermos a estrutura " $f(x, y)$ ", eles estariam inserindo pontos do tipo: (0, 1), (-2, 3), (0, 2148, 9, 21) etc. Com isso, poderiam pensar que, no caso, o domínio seria R^2 , uma dificuldade apontada por Baruffi (1999).

Como as discussões dos alunos continuaram sobre domínio, vamos a um novo diálogo³ em que Cida (comunidade) também entra em atividade para resolver

³ Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=fdDkbEZtn1s>. Acesso em: 18 jul. 2025.

questões. O diálogo tem em torno de cinco minutos, por isso os principais pontos são: Cida instiga os alunos a investigarem quais pontos estariam presentes para que a imagem fosse tridimensional. Como esses pontos deveriam ser apresentados. Com Cida instigando e provocando reflexões nos alunos, eles começam a questionar se o que haviam concluído estava correto.

J: Mas aqui, então... é o domínio vai ser todos os reais.

D: Sim.

I: Sim.

J: Quando (inaudível) permanece os reais?

I: O domínio permanece o reais.

C: Me dá exemplo de um ponto que tá no domínio... dessa função.

J: É...

I: Da z igual x ao quadrado?

J: Um, dois, três, quatro...

D: Todos os reais.

I: O zero?

J: O zero...

C: E tem mais gente além de todos esses?

J: Mais gente que os reais?

I: Mais gente que os reais não dá...

D: Professora fez uma pegadinha com você e você caiu.

C: Mais gente que os reais dá...

I: Tem os imaginários, mas...

C: Mas tem outro sentido de *ampliação*, é que eu não queria matar a discussão, mas é...

I: Eu juro que não entendi a pergunta. Porque o domínio...

C: O Danilo falou assim que qualquer número... qualquer número aí faz parte da... vocês estão vendo aqui a...

I: Não, nem tudo. Porque você... o que a gente tem na função é o que tá contornado de verde, certo?

C: Isso... Esse é o gráfico da função. Essa é a folha.

I: Esse é o gráfico da função. Eu posso pegar pontos... eu vou fazer aqui, que assim eu sou mais...

J: Óh... esse eixo em verde é o x .

D: Sim.

I: Sim, mas a sua função é essa *folha* verde que tá...

C: O gráfico dela...

I: É isso aqui. Ela é isso! (provavelmente Iris se utilizou de uma folha sulfite para representar).

C: Então me dá um exemplo de um ponto que pertence a esse gráfico aqui óh... Por exemplo, um ponto que não 'tá nesse plano cinza aí que 'tá apresentado. Um ponto dessa parte aqui. Vocês conseguem pensar?

D: Um ponto que não ‘tá dentro desse cinza?

I: É... deixa eu puxar aqui. A gente colocou aqui z igual a x ao quadrado menos quatro né?!

D: Um ponto que não ‘tá aqui dentro desse cinza, professora? Mas ‘tá tudo dentro do cinza...

C: É... que faz parte... o cinza que eu ‘to falando é esse plano aqui, óh...

D: Sim, mas ‘tá tudo dentro dele.

Os alunos, junto com Cida, começam a olhar para os gráficos e pensar que o domínio seriam todos os reais, influenciados pelas funções escolhidas. Veja que a reflexão dos alunos não estava totalmente errada, pois para ambas funções o domínio são os números reais, embora para a função $f(x, y) = x^2 - 4$ a “ampliação” que Cida cita é que para funções de duas variáveis necessita se pensar o domínio R^2 .

Em seguida, lançamos algumas perguntas norteadoras:

1. No contexto do GeoGebra 3D, o que $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y$
2. No mesmo contexto, o que o duplo somatório $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y$ representa?
3. Estabeleça relações entre o significado de $\sum_{i=1}^m f(x_{ij}^*) \Delta x$ com o significado de $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y$

Quadro 2. Questões norteadoras

Fonte: dados da pesquisa.

Como foi a finalização da Tarefa IV, os alunos ainda discutiam as questões fazendo relações entre a Soma de Riemann para o contexto de funções de uma variável. Como foi a finalização da Tarefa IV, os alunos ainda discutiam as questões fazendo relações entre a Soma de Riemann para o contexto de funções de uma variável $\left(\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x\right)$ para o contexto de funções de duas variáveis $\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y\right)$. Nesse *applet*⁴ os alunos podiam visualizar os paralelepípedos em verde, pontos de amostragem em vermelho e o gráfico de uma função também em vermelho.

A opção por enviar um *applet* pronto aos alunos se deu pela dificuldade em construir uma função de duas variáveis que se utilizasse de paralelepípedos, demandando mais tempo, o que já podemos apontar como uma limitação de se trabalhar com o aplicativo GeoGebra no *smartphone*. A partir daquele momento, era necessário que os alunos olhassem para o que foi estudado anteriormente e

⁴ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/rwcrs3yv>. Acesso em: 18 jul. de 2025.

fizessem relações com o que foi apresentado por meio do *applet*. Para entender isso, vamos recorrer ao vídeo⁵ e à discussão de Danilo, Íris e João, como pode ser visto no diálogo⁶ a seguir.

J: Se x_{ij}^*, y_{ij}^* seriam...

I: As coordenadas?

D: Sim.

J: É... aquilo lá seriam a nossa altura em z .

I: Arram...

J: Aí tipo... se a gente tinha a altura e a gente tem que delta x , delta y é igual à base.

D: A base... a gente consegue... *debaixo do retângulo*.

J: A gente consegue área *debaixo do retângulo*.

I: Arram...

D: Eu coloquei aqui que o $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ representam a altura do retângulo e delta x , delta y representam a *base do retângulo*.

Nesse diálogo, os alunos estão fazendo relações sobre a expressão $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y$ a partir do que eles já tinham visto anteriormente. Isto é, eles afirmam que x_{ij}^*, y_{ij}^* são as coordenadas (x, y) , ou seja, o ponto de amostragem e que isso os daria a altura no eixo z . Além disso, os alunos consideram a parte $\Delta x \Delta y$ como a base do paralelepípedo e ainda permanece a imprecisão na linguagem que utilizam quando mencionam “retângulo”, como notamos nas frases sublinhadas do diálogo. Aqui podemos estar diante de uma tensão entre algo que impede os alunos de estenderem os conceitos de integrais simples para integrais duplas.

Nesse momento, os alunos ainda não perceberam essa característica do ambiente 3D e da Soma de Riemann nesse contexto, isso pode ser percebido ao longo do diálogo e, também, na última frase quando Danilo faz a sistematização. Isto é, enquanto eles trabalhavam no 2D faziam retângulos para aproximar a área, agora o trabalho é com paralelepípedos. Assim, não somente o apelo visual da tecnologia é preciso, mas também o trabalho com a matemática expressa nos gráficos.

Em seguida, Danilo, Íris e João se engajam na segunda questão⁷, em que o objetivo era a reflexão dos alunos acerca do duplo somatório. Enquanto Danilo e João iniciam uma discussão acerca da questão, ao fundo escutamos Íris conversando com a filha que estava presente nos encontros.

⁵ Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=pYa0y8kDYPk>. Acesso em: 18 jul. 2025.

⁶ Os alunos fazem a discussão toda sem manipular efetivamente o *applet*, por esse motivo preferimos não trazer imagens das ações nesse momento.

⁷ Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=0phPGee85Ow>. Acesso em: 18 jul. 2025.

Aparentemente houve a exclusão do aplicativo Mobizen, que tem a função de gravação de tela e áudio. Isso nos leva a refletir sobre algumas coisas como, por exemplo, a capacidade de armazenamento dos *smartphones*, que ano após ano se modificam, e com isso se tornam incapazes de guardar vários aplicativos, sendo aqui apontado já como uma limitação. Além disso, também nos leva a refletir sobre a disponibilidade de uso desses dispositivos aos filhos, o que corrobora a nossa visão de que muitas das crianças nativas da era digital nascem, vivem e já interagem com essas tecnologias tão cedo.

D: Agora, no contexto duplo, o somatório... E agora João?

J: Hã?!

D: No contexto duplo?

J: No contexto duplo? O somatório o que que vai ser? [incompreensível]... O somatório de um, um, [incompreensível]. Seria a área da... de um desses retângulos só. Tá vendo?

D: Mas por quê?

Os alunos parecem estar pensando em algo, mas não chegam a falar claramente sobre o que estão refletindo, até que Danilo indaga:

D: Será que vai representar...?

J: [incompreensível] a soma.

D: Seria a soma dos retângulos.

J: É... da quantidade de n . Seria n retângulos, aí quando fizesse limite seria a região do próximo domínio abaixo da superfície.

D: Soma da área dos retângulos que formam a [...], o que você falou? A superfície da parte de baixo?

J: É. Seria aproximadamente a... seria isso aqui, essa somatória é igual a todos esses retângulos.

D: É a soma da área dos retângulos que é... Representam a soma da área dos retângulos.

I: Deixa eu entender o que vocês estão falando. Porque quando a gente fez ali pro três, pro... dois d aqui, ela colocou a área né?! Então você fez a curva, aí você achou os retangulozinhos e aí você pegou os x_i , aí quando colocou no três d, que você fez... é que eu não consegui montar. Agora que eu vou conseguir. Quando você projetou isso daqui que é o somatório de i a n , de i a n , você 'tá dando a área em três d, a projeção da área no plano (x, y) .

D: Sim.

J: Sim... porque... f... Tá vendo aí... e esses pontos vermelhos aqui...

D: Representam delta x e delta y .

I: É a sua amostra.

J: É aqueles amostra lá. x ... aí tipo...

D: Isso representa a base.

J: x e y , no três d que vira o domínio né?! Aplicado no pé da altura que é z . E vai chegar, basicamente, aqui. E aquele Δx e Δy seriam a base.

D: A base.

J: Seria esses quadradinhos aqui óh. Esse aqui e esse aqui.

Na sequência de prints a seguir, ao notarmos o tempo, vemos que os alunos ficam alguns minutos mais refletindo sobre a questão do que propriamente explorando o *applet*, sendo que os movimentos de rotação são feitos já quando Íris se envolve na discussão, ao final do vídeo.

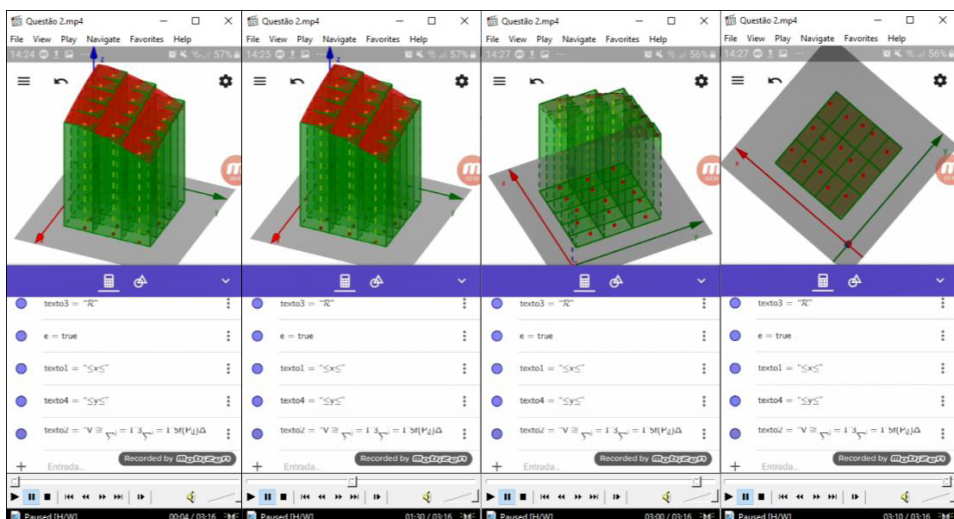


Figura 7. Movimento de rotação

Fonte: dados da pesquisa.

Nesse momento, notamos que os alunos se envolvem mais na discussão matemática que é proposta do que na visualização gráfica proporcionada por essa tecnologia, mas para exemplificar a sua fala, João recorre ao *applet* para mostrar. Além disso, vemos que o contexto 3D se tornou um disparador de discussão, mas não tomou o lugar central que era a extensão dos conceitos do 2D (funções de uma variável) para o 3D (funções de duas variáveis). Masetto (2012, p. 144) destaca que

É importante não nos esquecermos de que a tecnologia possui um valor relativo: ela somente terá importância se for adequada para facilitar o alcance dos objetivos e se for eficiente para tanto. As técnicas não se justificarão por si mesmas, mas pelos objetivos que se pretenda que elas alcancem, que no caso serão a aprendizagem.

Acreditamos que as tarefas abertas, de caráter investigativo e explorador, são possibilidades que se agregam às tecnologias digitais, dando destaque à produção de conhecimentos por parte dos alunos e ao ensino. Por isso, corroboramos Borba et al. (2015, p. 48) quando os autores afirmam que

[...] Além das potencialidades oferecidas, existem outros aspectos fundamentais a serem considerados com relação ao uso educacional de uma tecnologia como, por exemplo, o papel do professor, o *design* ou natureza da atividade proposta, dentre outros. A organização do cenário (imaginado) condiciona a natureza das interações, os diferentes tipos de negociações de significados e os conhecimentos produzidos no ambiente de aprendizagem construído.

Isto é, as tecnologias, a proposta metodológica, a comunidade são tão importantes nesse processo quanto o próprio sujeito enquanto produtor de seu conhecimento, isto é, a interação é de suma importância. Assim, para analisarmos a produção de conhecimento a partir da questão matemática, trazemos as sistematizações dos alunos a seguir.

Í: Representa a soma do volume dos retângulos que é a medida abaixo da superfície na perspectiva m e n e $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x\Delta y$.

D: O somatório $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n$ traz a área projetada pela região de $f(x, y)$ no plano x, y de forma quadriculada.

J: É igual a soma do volume dos retângulos dados por $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x\Delta y$ de abaixo da superfície.

Aqui precisamos trazer para a discussão que quando partimos para as funções de duas variáveis, o domínio passa a ser todo o plano representado pelo R^2 , deixando de se formar retângulos e passando a ter paralelepípedos ao representarmos graficamente o somatório duplo. Essa característica os alunos ainda não haviam percebido, mesmo com a visualização do *applet*. Podemos estar nesse momento diante de uma contradição interna. A partir das respostas, vemos Íris falar em área e que Danilo e João falam em “volume dos retângulos”, quando deveriam concluir sobre volume do paralelepípedo. Além disso, poderiam mencionar que $\Delta x\Delta y$ é a área do retângulo formado no plano gerado pelos eixos x e y .

Há um erro na comparação entre retângulos e paralelepípedos, mas os alunos já perceberam que não tratamos mais de áreas e sim de volume. Para Lorenzato (2010, p. 50) “o erro pode ter distintas causas: falta de atenção, pressa, chute, falha de raciocínio, falta de estudo, mau uso ou má interpretação da linguagem oral ou escrita da matemática, deficiência de conhecimentos da língua materna ou de conceitos matemáticos”. Por isso, entendemos que há um erro de falta de atenção nesse momento.

Ainda, para explicar o conceito da dupla soma iniciamos falando sobre cada “componente” dela: $\Delta x \Delta y$ é a área da base retangular de cada paralelepípedo, em que Δx é o comprimento do lado no eixo x e Δy é o comprimento do lado no eixo y . $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ é o valor da função aplicada no ponto de amostragem (x_{ij}^*, y_{ij}^*) , isto é, em termos geométricos temos a altura de cada paralelepípedo.

Já temos então a expressão: $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y$, que significa o volume de um paralelepípedo, uma vez que estamos multiplicando a área de sua base, que é fixa em todos, pois temos bases retangulares congruentes, pela altura, que é variável. Então cada paralelepípedo tem seu volume. Ao fazermos o somatório em i e j , $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y$, consideramos todos os paralelepípedos e somamos seus volumes, nos aproximando do valor numérico da integral dupla considerada. Quanto menor a base dos paralelepípedos e consequentemente maior a quantidade deles, mais próximos estarão esses dois valores, de modo que consideramos que são iguais quando a quantidade de paralelepípedos tende a infinito. Após isso, os alunos pausam a gravação do vídeo e não há discussão da terceira questão, mas durante a sistematização com a professora Cida, há comentários como

C: Vocês conseguem enxergar uma certa expansão de conceitos?

D: Sim. A área, volume.

C: Domínio. Eu expando a ideia de domínio. Eu expando a ideia do que é gráfico. Eu expando, agora, a ideia do que é um somatório. Né?! Aqui eu to somando áreas e eu estou me aproximando de uma área que eu quero calcular, uma área irregular. Aqui eu to construindo volumes e, ao reunir todos esses volumes dos paralelepípedos, eu também estou me aproximando de um volume que eu quero calcular. Então, embora eu esteja falando de uma outra grandeza, que é a grandeza do volume, o processo de raciocínio tem várias semelhanças, né?! Mas é preciso fazer as adaptações necessárias no novo contexto, que é o contexto tridimensional. E assim, a gente acha que o GeoGebra, a gente vê o GeoGebra dando, principalmente o 3D, dando um retorno visual pra gente muito importante para a produção de interpretações, porque a gente visualizar qual é o parâmetro, a gente consegue ter essa ideia de profundidade, a gente consegue rotacionar ali e olhar aquela construção.

Com isso, concluímos que apesar da confusão entre retângulos e paralelepípedos, nota-se que houve uma possível extensão de conceitos de área para volume. Assim, a partir das tensões criadas dentro do sistema foram importantes fontes de renovação e mudança da atividade (Soares e Souto, 2014). Vemos ainda que a especificidade da tecnologia em proporcionar visualização, profundidade e rotação da construção é uma facilidade, mas que conceitos matemáticos eram necessários para os alunos estabelecerem relações, com a

mediação dos professores uma vez que a tecnologia sozinha não é capaz de ensinar. Nesse momento percebemos o papel fundamental dos professores.

Salientamos ainda outras tecnologias que se fizeram presentes durante todo o processo da atividade e que tiveram destaque, como o papel, o lápis e a linguagem (Kenski, 2012). Esta última ainda se desdobra em alguns tipos, como linguagem escrita, falada, linguagem matemática e a linguagem utilizada pelo aplicativo, digital. A seguir, trazemos o Sistema de atividade final em que, consideramos, os conceitos foram estendidos.

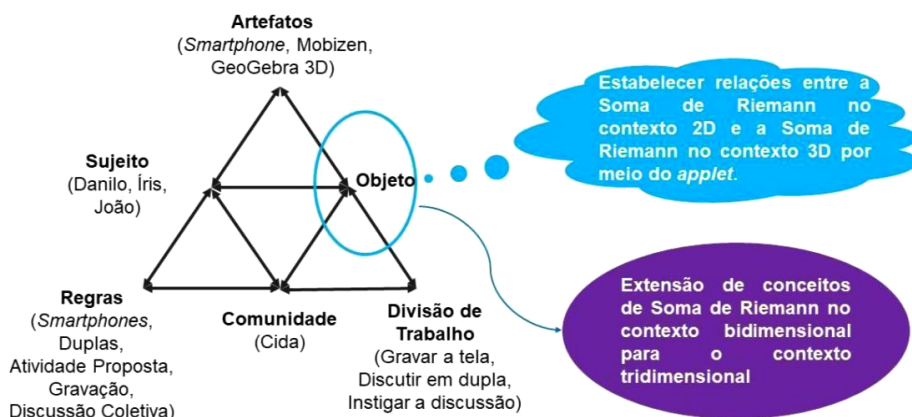


Figura 8. Sistema de atividade com os conceitos estendidos

Fonte: dados da pesquisa.

Vistos sob a ótica da teoria, a comunidade representada aqui por Cida tem papel de extrema importância no desenvolver da tarefa, uma vez que também fazem a mediação entre sujeitos e objeto. Artefatos, como o *smartphone*, o *applet*, o lápis, o papel fazem a função de mediar, assim como a comunidade, a relação sujeitos-objeto. A seguir, apresentamos nossas considerações finais. A partir de um primeiro olhar sobre a produção geral de dados, uma pesquisa de mestrado foi desenvolvida pelo primeiro autor desse texto, orientada pela segunda autora (Ragoni, 2021).

Podemos ver que o *smartphone* tem potencial de mobilização de alunos por meio da integração tecnológica às aulas de matemática, como sustentam Baggiotto et al. (2020) mencionando que estes dispositivos móveis podem aprimorar processos educacionais. Estes autores ainda argumentam que o GeoGebra tem potencial de diversificação de experiências de aprendizado, atendendo às diferentes necessidades dos alunos com suas várias possibilidades de exploração.

Notamos a partir dos excertos, que o trio analisado entra a fundo na discussão teórica do assunto, mobilizando conhecimentos e produzindo outros, corroborando Carvalho et al. (2020), ao argumentarem que o *smartphone* tem potencial de engajamento dos alunos, com participação e colaboração entre alunos.

6. TELAS ABERTAS: COLOCANDO EM *STANDBY*

Nosso objetivo neste artigo foi analisar processos de produção de conhecimento sobre integrais duplas com *smartphone* e GeoGebra com alunos do Ensino Superior através da Teoria da Atividade. Assim, consideramos que o conhecimento pode emergir de várias formas, por isso a nossa expectativa era a sua produção aliando as tecnologias digitais, mas ao analisarmos os dados podemos perceber que não só isso é preciso. Vemos a importância da comunidade, na perspectiva da Teoria da Atividade, em ter o papel de mediar a relação dos sujeitos com o objeto para que os indivíduos possam produzir seus próprios conhecimentos, trazendo questionamentos e considerações ao processo, necessitando reflexão por parte dos sujeitos.

Além da comunidade, temos os artefatos como vínculo mediacional entre sujeitos e objeto. As tecnologias digitais presentes nesse nó, citamos o *smartphone* e o aplicativo GeoGebra, trouxeram outras oportunidades para os sujeitos visualizarem, manipularem, explorarem cada *applet* disponibilizado, cada construção feita pelos alunos. Os dados apontaram que variadas tecnologias se fizeram presentes nessa produção de dados, em que os alunos se apropriaram destas para produzir seus conhecimentos. Isto é, vários tipos de linguagem foram usadas por eles, desde a fala, a escrita, até a linguagem matemática.

É pertinente comentar que a proposta pedagógica, colocando o aluno como ator central, as questões abertas, disparadoras de diálogos e estimuladoras de movimentos, tiveram papel importante para a produção dos conceitos de integrais duplas. Tais questionamentos mobilizaram os alunos no sentido de não os levar a responder apenas sim ou não, mas a pensar em respostas que iam além disso, necessitando a justificativa de *feedback*. E, nessas soluções, por meio do diálogo, das tensões que envolviam a tarefa realizada, havia o estabelecimento de conceitos. Podendo ressignificar, discutir e, até mesmo, produzir novos conceitos.

O SA (primeiro princípio) evoluiu historicamente (terceiro princípio) permeado pelas múltiplas vozes, concepções e crenças dos sujeitos (segundo princípio), foi afetado por tensões que o fizeram modificar, alterar e evoluir (quarto princípio),

conforme a constelação de sistemas apresentada anteriormente (Figura 5). Foram introduzidos novas regras, novos artefatos, os alunos se movimentaram e se engajaram em uma outra atividade em que o objeto era construir um gráfico no ambiente 3D. Notamos ainda alterações na comunidade, nos sujeitos, em momentos cujos alunos alternavam de papel na atividade.

Vemos um potencial nos *smartphones* aliado ao GeoGebra na produção de conceitos de integrais quando esses dispositivos trazem em si o caráter portátil, o manejo fácil e a versatilidade, no sentido de que é fácil de carregar aos espaços educativos, é acessível e, mesmo em momentos que não se tem a possibilidade de ter um *smartphone* para todos os alunos, como foi o caso de um dos sujeitos do grupo analisado, notamos não haver impedimento para participar das tarefas. Não queremos estender aqui a discussão para um campo social importantíssimo, que demanda pesquisas, mas colocar possibilidades vistas no nosso estudo.

O *smartphone*, por meio do GeoGebra, trouxe o apelo visual, o *feedback* instantâneo, a possibilidade de rotação, expansão e redução das construções dos próprios alunos e dos *applets* disponibilizados. Trouxe também a oportunidade de exploração, a partir dos comandos e do toque em tela, pelos alunos, para fazer relações com os conceitos de cálculo integral.

Ao olharmos para a constelação dos SA notamos que há tensões recorrentes entre os nós Sujeito-Artefato, o que pode nos dar indícios de uma contradição interna de nível dois. Tais tensões podem se explicar pela não familiaridade pela linguagem utilizada pelo GeoGebra, mas também pode ter uma raiz nos conceitos matemáticos, uma vez que os alunos insistiam em colocar o comando $f(x)$ no campo de entrada do aplicativo e mantiveram de modo recorrente, em determinado período, a referência a conceitos associados a funções de uma variável mesmo quando já trabalhavam com funções de duas variáveis.

O que queremos colocar em evidência é a extensão dos conceitos de domínio, imagem, gráfico, somatório, que ocorreu de modo geral ao longo do curso. Aqui demos ênfase na expansão associada ao conceito de domínio. Em integrais simples, trabalhamos com os conceitos relacionados ao ambiente bidimensional, com funções de uma variável, em que o domínio se apresenta nos números reais. Ao estendermos esse conceito para integrais duplas, trabalhamos com funções de duas variáveis, com elementos do domínio sendo representados em pares ordenados, levando-nos ao ambiente tridimensional.

Para analisar o processo de produção de conhecimentos, aliamos a TA com todos esses procedimentos metodológicos da pesquisa e foi possível notar que o *smartphone* trouxe possibilidades, mas também trouxe limitações, anteriormente mencionadas. Os movimentos feitos pelos alunos, ao explorarem o GeoGebra com

o *smartphone*, foram importantes para observarem relações do cálculo integral, o que feito com outras mídias seria diferente.

O *smartphone* apresenta potencial para engajar os alunos ao integrar tecnologia às aulas de matemática, destacamos ainda que dispositivos móveis podem aprimorar o aprendizado. Também apontamos o GeoGebra como recurso que diversifica experiências educativas. Com a análise dos excertos mostramos que o grupo estudado se aprofunda teoricamente no tema, assim defendemos o papel do *smartphone* na promoção da participação e colaboração entre alunos.

Nesse estudo as tecnologias digitais, presentes do início ao fim, caracterizaram um modo particular de produzir conhecimento. Dentro do campo do Cálculo há ainda aspectos a serem pesquisados e analisados como é o caso das integrais que trabalham com regiões de integração delimitadas por funções contínuas com o *smartphone*. E, por isso, esperamos contribuir de modo qualitativo para que estudos posteriores que trabalhem com o campo matemático aqui investigado, com as tecnologias digitais, a Teoria da Atividade e a Educação Matemática, sejam desenvolvidos.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. O presente trabalho foi realizado com apoio da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS/MEC – Brasil.

DECLARACIÓN DE CONTRIBUCIÓN Y AUTORÍA

Victor, Ferreira Ragoni: redação e revisão.

Aparecida, Santana de Souza Chiari: redação e revisão.

REFERÊNCIAS

Araújo, J. de L. e Borba, M. de C. (2013). Construindo pesquisas coletivamente em educação matemática. Em M. de C. Borba (Ed.), *Pesquisa qualitativa em educação matemática* (5a ed., pp. 31–51). Autêntica Editora.

- Baruffi, M. C. B. (1999). *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral* (Tese de doutorado não publicada). Universidade de São Paulo.
- Baggiotto, C. C., dos Santos Bernardi, L. e Gregolin, V. M. (2020). GeoGebra em dispositivos móveis: o ensino de Geometria na perspectiva da educação matemática crítica. *Ensino da Matemática em Debate*, 7(3), 349-375.
- Borba, M. de C., Scucuglia, R. R. S. e Gadanidis, G. (2015). *Fases das tecnologias digitais em educação matemática: Sala de aula e internet em movimento* (1a ed.). Autêntica Editora.
- Borba, M. de C., Almeida, H. R. F. L. de e Gracias, T. A. de S. (2018). *Pesquisa em ensino e sala de aula: Diferentes vozes em uma investigação*. Autêntica Editora.
- Chiari, A. S. de S. (2015). *O papel das tecnologias digitais em disciplinas de álgebra linear a distância: Possibilidades, limites e desafios* (Tese de doutorado não publicada). Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”.
- Carvalho, J. F. de, Souto, D. L. P. e Gonçalves, W. V. (2020). O uso da calculadora gráfica GeoGebra em dispositivos móveis para o ensino de funções reais: um olhar para as publicações no Brasil. *Debates Em Educação*, 12(Esp.2), 315-327. <https://doi.org/10.28998/2175-6600.2020v12nEsp2p315-327>
- Daniels, H. (2011). *Vygotsky e a pesquisa*. Edições Loyola.
- Engeström, Y. (2001). Expansive learning at work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14(1), 133-156.
- Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research*. Orienta-Konsultit.
- Engeström, Y. e Sannino, A. (2010). Studies of expansive learning: Foundations, findings and future challenges. *Educational Research Review*, 5(1), 1-24. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2009.12.002>
- Goldenberg, M. (2018). *A arte de pesquisar: Como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais* (15a ed.). Record.
- Huillcahuari, E. L., Flores, V. A. e Pérez, L. V. (2023). Enseñanza del cálculo diferencial e integral asistido por el software GeoGebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 26(3), 357-377. <https://doi.org/10.12802/relime.23.2634>
- Kenski, V. M. (2012). *Educação e tecnologias: O novo ritmo da informação* (8a ed.). Papirus.
- Leontiev, A. N. (1978). *O desenvolvimento do psiquismo*. Livros Horizonte.
- Lorenzato, S. (2010). *Para aprender matemática* (3a ed.). Autores Associados.
- Lorenzin, M. P. (2019). *Sistemas de Atividade, tensões e transformações em movimento na construção de um currículo orientado pela abordagem STEAM* [Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo]. Biblioteca Digital USP. <https://doi.org/10.11606/D.81.2019.tde-10122019-155229>
- Masetto, M. T. (2012). Mediação pedagógica e o uso da tecnologia. Em J. M. Moran, M. T. Masetto e M. A. Behrens (Eds.), *Novas tecnologias e mediação pedagógica* (19a ed., pp. 133-173). Papirus.
- Nasser, L., Sousa, G. A. de e Torraca, M. A. A. (2017). Desempenho em cálculo: Investigando a transição do ensino médio para o superior. *Boletim GEPEM*, 70(1), 43-55.
- Powell, A. B., Francisco, J. M. e Maher, C. A. (2004). Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento das idéias matemáticas e do raciocínio de estudantes. *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, 21(17), 81-140.
- Ragoni, V. F. (2021). *Expandindo telas e contando experiências em educação matemática com o GeoGebra: Da sensibilidade do toque à produção de conceitos de integrais duplas com o smartphone* (Dissertação de mestrado não publicada). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

- Ragoni, V. F. e Chiari, A. S. de S. (2021). Smartphone e a produção do conceito de integral: Visualização, mobilidade e GeoGebra. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 10(21), 259-276. <https://doi.org/10.33871/22385800.2021.10.21.259-276>
- Silva, P. D. O. e Souto, D. L. P. (2020). Manifestações discursivas de contradições internas na produção de cartoons matemáticos digitais. *Revista Portuguesa de Educação*, 33(2), 136-158. <https://doi.org/10.21814/rpe.19379>
- Soares, D. S. e Souto, D. L. P. (2014). Tensões no processo de análise de modelos em um curso de cálculo diferencial e integral. *REMATEC - Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, 17, 44-74. <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/316>
- Souto, D. L. P. (2014). *Transformações expansivas na produção matemática online* (1a ed.). Cultura Acadêmica. <http://hdl.handle.net/11449/126237>
- Souto, D. L. P. e Borba, M. de C. (2016). Seres humanos-com-internet ou internet-com-seres humanos: uma troca de papéis? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 19(2), 217-242. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1924>

Autores

Victor Ferreira Ragoni. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande-MS, Brasil. v.f.ragoni@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0003-4901-0034>

Aparecida Santana de Souza Chiari. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande-MS, Brasil. aparecida.chiari@ufms.br

 <https://orcid.org/0000-0001-7865-9356>