

CESÁRIO ALMEIDA, LUIS CASAS GARCÍA, RICARDO LUENGO GONZÁLEZ

ESTUDO DA ESTRUTURA COGNITIVA DOS ALUNOS  
DOS 9.º (14-15 ANOS DE IDADE) E 12.º ANOS (17-18 ANOS DE IDADE)  
DE ESCOLARIDADE SOBRE O CONCEITO DE PROBABILIDADE:  
O CONTRIBUTO DAS TEORIAS DOS CONCEITOS NUCLEARES  
E DOS CONCEITOS THRESHOLD

STUDY OF THE COGNITIVE STRUCTURE OF PORTUGUESE STUDENTS IN YEARS 9 (14-15  
YEAR-OLDS) AND 12 (17-18 YEAR-OLDS) CONCERNING THE NOTION OF PROBABILITY:  
A CONTRIBUTION OF THEORIES OF NUCLEAR CONCEPTS AND THRESHOLD CONCEPTS

RESUMEN

Con base en las Teorías de los Conceptos Nucleares y de los Conceptos Threshold, se pretende, con este artículo, presentar los resultados obtenidos sobre la estructura cognitiva, referida a la noción de Probabilidad, de alumnos de 9º (14-15 años de edad) y 12º (17-18 años de edad) curso de escolaridad, en Portugal. Tras ser impartida la enseñanza sobre este tema, en primer lugar fueron encuestados 344 alumnos y en un segundo momento 325. Los datos recogidos, de las Redes Asociativas Pathfinder (PFNET), permitieron identificar los conceptos que asumen un mayor relieve, su correspondiente organización y la relación entre las Teorías de los Conceptos Nucleares y de los Conceptos Threshold. Los resultados muestran que ambas teorías constituyen una destacada herramienta didáctica para la organización de la práctica docente y un referente pedagógico importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad.

PALABRAS CLAVE:

- Probabilidad
- Teoría de los Conceptos Nucleares
- Conceptos Threshold
- Representación del Conocimiento
- Redes Asociativas Pathfinder

ABSTRACT

Based on the Theories of Nuclear Concepts and Threshold Concepts, this paper aims at presenting the results of the cognitive structure of Portuguese students in years 9 (14-15 year-olds) and 12 (17-18 year-olds), concerning the notion of Probability. After having been taught the subject, 344 students were inquired in a first moment, and 325 in a second one. The Pathfinder Associative Networks (PFNETs) thus obtained led to identify the most relevant concepts in the students' conceptual framework, their respective organization and the possible relationship between the Theories of Nuclear Concepts and Threshold Concepts. The results show that both theories are useful tools to organize the teaching practice and a valuable and effective pedagogical framework, which should be taken into account in the teaching and learning processes of Probability.

KEY WORDS:

- Probability
- Theory of Nuclear Concepts
- Threshold Concepts
- Knowledge Representation
- Pathfinder Associative Networks



## RESUMO

Com base na Teoria dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos *Threshold*, pretende-se, neste artigo, apresentar os resultados obtidos sobre a estrutura cognitiva dos alunos dos 9.º (14-15 anos de idade) e 12.º (17-18 anos de idade) anos de escolaridade portugueses, em torno da noção de Probabilidade. Após a lecionação desta temática, e utilizando uma amostra de 344 alunos, num 1.º Momento, e de 325, num 2.º Momento, os dados recolhidos, através das Redes Associativas Pathfinder (PFNET), permitiram-nos identificar os conceitos mais significativos, as relações mais relevantes e estabelecer conexões entre as Teorias dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos *Threshold*. Os resultados mostram que ambas as Teorias constituem uma outra ferramenta didática para organizar a prática pedagógica e um referencial pedagógico rico e fecundo, que deve ser levado em consideração no processo de Ensino e Aprendizagem da Probabilidade.

## PALAVRAS CHAVE:

- *Probabilidade*
- *Teoria dos Conceitos Nucleares*
- *Conceitos Threshold*
- *Representação do Conhecimento*
- *Redes Associativas Pathfinder*

## RÉSUMÉ

Basé sur les théories de Concepts Nucléaires et Threshold Concepts, cet article vise à présenter les résultats obtenues sur la structure cognitive des élèves portugaises dans les années 9 (14-15 ans) et 12 (17-18 ans), concernant à la notion de probabilité. Après l'enseignement du sujet, 344 élèves ont été interrogés dans en premier temps, et 325 dans un second temps. Les Pathfinder Associatifs Réseaux (PFNET) ainsi obtenus ont permis d'identifier des concepts les plus remarquables dans le cadre conceptuel des élèves et leur respective organisation, aussi bien que la relation possible entre les théories de Concepts Nucléaires et Threshold Concepts. Les résultats montrent que les deux théories sont des outils utiles pour organiser la pratique de l'enseignement et un cadre pédagogique précieux et efficace, qui devrait être pris en compte dans les processus d'enseignement et d'apprentissage des probabilités.

## MOTS CLÉS:

- *Probabilités*
- *Théorie des Concepts Nucléaires*
- *Threshold Concepts*
- *Représentation des Connaissances*
- *Pathfinder Associatifs Réseaux*

## 1. INTRODUÇÃO

A procura e a compreensão organizativa dos conceitos associados a um dado conteúdo sempre desempenharam um papel relevante na Didática da Matemática e, nas últimas décadas, têm-se assumido como uma matéria de pesquisa importante entre investigadores educacionais. Apesar dos significativos avanços registados nos últimos tempos, a forma como a mente humana funciona e se organiza constitui, ainda, um enigma. Todavia, um dado amplamente aceite

é o de que a informação é armazenada na memória de um indivíduo ajustando-se a uma certa disposição das ideias, ou, no contexto da aprendizagem de certos temas específicos da Matemática, a uma organização cognitiva de conceitos, noções e exemplos.

Em diferentes países, as novas propostas curriculares têm assumido a inclusão e o reconhecimento da importância do tema matemático Probabilidade desde os primeiros anos de escolaridade.

Esta temática constitui um tópico matemático extremamente interessante, prático e peculiar, sustentado pela diferente abordagem epistemológica que a sua aprendizagem pressupõe. Como refere Azcárate (1996) ele pressupõe a quebra de alguma primazia dada à lógica do sim/não, verdade/falso, do modelo determinístico, introduzindo nos estudantes uma forma diferente de pensar, ao admitir a existência, para além destas duas últimas possibilidades, de todo um intervalo no qual prevalece a incerteza e o acaso.

Para a sua abordagem didático-pedagógica, Batanero (2005, p. 250-251) enumera os elementos do significado de Probabilidade considerados relevantes - *o campo de problemas no qual emerge o objeto matemático, os elementos linguísticos, os procedimentos e algoritmos, as definições e propriedades dos objetos e as suas relações com outros objetos matemáticos e os argumentos e demonstrações das propriedades*. Em paralelo Gal (2005) reflete sobre o que deve ser entendido por literacia probabilística e alega que esta designação sugere, para além de crenças, atitudes, hábitos mentais e uma perspetiva crítica, um conjunto amplo de conhecimentos factuais e certas aptidões formais e informais. Nesta lógica sugere cinco aspetos importantes que se devem ter em consideração no seu ensino - *as grandes ideias, descobrir probabilidades, a linguagem, o contexto e as questões críticas* (Gal, 2005, p.46).

Com este trabalho, e após a seleção dos termos/conceitos/exemplo, verificamos que ao longo do processo de aprendizagem da noção de Probabilidade, existem conceitos que pela sua relevância, ao estabelecerem múltiplas relações, podem ser classificados como Conceitos Nucleares. Ainda podemos comprovar que os alunos, ao longo da sua escolarização, mantêm um número reduzido de conceitos como Nucleares nas suas representações da estrutura cognitiva sobre a Probabilidade, assim como a manutenção de algumas relações que estabelecem com outros termos e que se conservam e preservam no tempo, não se verificando um aumento da complexidade destas representações. Finalmente, constatamos a tendência para que os Conceitos Nucleares sejam também os conceitos mais fáceis de entender para os alunos e por esta razão, tendencialmente, não podem ser considerados potenciais Conceitos *Threshold*. No entanto provou-se a existência de uma relação significativa forte e positiva com que são referidos os potenciais Conceitos *Threshold* e os nós extremidade das PFNET.

## 2. MARCO TEÓRICO

### 2.1. O conceito de probabilidade e a sua didática

O objeto matemático deste estudo – Probabilidade - constitui, presentemente, um conteúdo e uma componente essencial nos percursos formativos dos jovens e a sua relevância é reconhecida nas respetivas diretivas curriculares, assim como nos resultados das investigações didáticas.

O termo Probabilidade é utilizado frequentemente, e de um modo mais ou menos intuitivo, nas mais variadas situações do dia-a-dia, as quais apresentam “*uma característica comum, que é o facto de não se conseguir prever com exactidão e de antemão, qual o resultado da situação de incerteza.*” (Graça Martins e Ponte, 2010)

No decorrer do desenvolvimento formal da noção de Probabilidade, foram-lhe sendo outorgados diferentes significados, justificados pela necessidade da resolução de situações práticas em diferentes períodos da história e do progresso de outros campos da Matemática, nos quais a Probabilidade encontrou os elementos imprescindíveis a um formalismo axiomático necessário para a construção de um modelo matemático.

Historicamente, a visão mais *clássica*, ou Laplaciana, dominou durante um largo período de tempo o ensino da Teoria da Probabilidade. Posteriormente, com a implementação da Matemática Moderna, veio-se introduzir uma conceção mais formal e *axiomática* desta área da Matemática. Todavia, com o crescente interesse e consciencialização da aplicabilidade deste conceito a inúmeras e diferentes áreas do saber, assistiu-se a uma inclusão da noção de Probabilidade como o *limite da frequência relativa* de um acontecimento numa sucessão de experiências. Porém, existem experiências aleatórias que, pelas suas especificidades, nunca mais, ou dificilmente, se repetirão. Nestas situações é conveniente interpretar a Probabilidade como manifestação do *grau de convicção* que cada indivíduo atribui à ocorrência dos acontecimentos, com base na experiência e informação anteriores.

Os diferentes conceitos de Probabilidade referidos, evidenciam a natureza complexa deste conceito Matemático e Batanero, Henry e Parzysz (2005) sugerem que a abordagem pedagógica desta noção não se pode limitar a uma única perspectiva, de tal modo que os alunos para alcançar um nível adequado de compreensão da Probabilidade é necessário que sejam capazes de relacionar as abordagens clássica, frequentista, subjetiva e axiomática.

A investigação didática nas últimas duas décadas em torno da Teoria da Probabilidade foi bastante extensa e rica. Ao nível do currículo as pesquisas

apontam que, apesar de se verificar explicitamente o cumprimento, nestes textos, de algumas das recomendações apontadas pela didática da Probabilidade, ainda subsistem evidências que apontam para a necessidade de uma revisão, nos programas, das temáticas da Estatística e das Probabilidades (Batanero, 2004, 2005; Gal, 2005; Caldeira, 2009; Millán, 2013).

A relevância dos recursos materiais no processo de Ensino-Aprendizagem da Probabilidade tem também merecido a atenção da comunidade científica. A investigação realizada tem demonstrado que a utilização de programas informáticos específicos tem facilitado a aquisição de diferentes conceitos probabilísticos e um melhor desempenho dos estudantes, em complementaridade com a evidência da proficiência do trabalho colaborativo para melhorar os seus conhecimentos (Azcárate e Serradó, 2006; Mercado, 2013; Alexander e Bueno, 2013).

A importância do papel do professor no contexto educativo/probabilístico também tem sido objeto de estudo. Assim, as concepções e as visões dos professores sobre Probabilidade têm-se demonstrado diversificadas, insuficientes e por vezes erróneas, pelo que urge organizar cursos dentro de um quadro conceptual, como parte de programas oficiais de formação de professores (Azcárate, 1996; Batanero, Díaz Godino e Roa, 2004; Pratt, 2005; Batanero, 2009; Batanero, Ruiz e Arteaga, 2009; Mannan, 2012; Anasagasti e Berciano, 2013; Díaz Godino, 2013).

Os estudos sobre a aprendizagem da Probabilidade por parte dos alunos têm-se também multiplicado. As concepções, os significados, as metodologias, as diferentes representações, os conceitos e a sua organização, as dificuldades de aprendizagem, os procedimentos e a linguagem, têm sido objeto de pesquisa com alunos. As conclusões apontam para a existência de conflitos e para a dificuldade que esta temática induz nos estudantes (Batanero e Díaz, 2007; Lopes, 2011, 2013; Almeida, Casas e Luengo, 2013).

## *2.2. As teorias dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos Threshold*

A compreensão é um processo mental através do qual atribuímos um significado aos dados que recebemos, os quais podem ser imagens, palavras, conceitos, relações, estruturas ou, inclusive, notas emocionais. Neste contexto, entendemos o termo “conceito” como uma representação mental, abstrata e geral de um objeto, uma noção abstrata, uma ideia geral e/ou a compreensão que um indivíduo tem de uma palavra/conteúdo. Quando se trata da compreensão de um conceito, referimo-nos à aquisição de diferentes atributos que o constituem, de modo que, por exemplo, o conceito de “homem” caracteriza-se por atributos como “animal”, “racional”, “humano”, entre outros. Como Tall e Vinner (1981) mostraram, a estrutura completa associada a um conceito inclui tanto a sua definição, como as imagens mentais que evocam as propriedades e processos que lhe são inerentes.

Assim, quando um conceito é invocado por um sujeito, produz-se na sua mente uma variedade de imagens pessoais associadas ao referido conceito, apesar de, habitualmente, neste processo transmitir-se o conceito através de um símbolo, ou um nome, o que ajuda à sua manipulação mental e permite comunicá-lo. É preciso reconhecer que a simples definição verbal de um conceito apresenta a limitação de referir-se somente a uma parte desse conceito. No entanto, quando se transmite um conceito é necessário utilizar um conjunto de palavras, com o intuito de especificá-lo e, por esta razão, neste trabalho trataremos, como uma primeira aproximação, a compreensão de conceitos mediante o estudo das palavras associadas a eles.

A Teoria dos Conceitos Nucleares (TCN), desenvolvida por Casas e Luengo, afirma que à medida que os alunos progredem na escolaridade, o conhecimento sobre determinada temática é estruturado de uma forma cada vez mais simples e em torno de um conjunto limitado de conceitos relevantes - Conceitos Nucleares (CN) - que, no entanto, não são necessariamente os mais gerais nem os mais abstratos (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2003, 2004 e 2005).

Os principais elementos distintivos da TCN são a “*Organização geográfica do conhecimento*” e as noções de “*Conceito Nuclear*” e de “*Caminho de Custo Mínimo*” (Casas, 2002; Antunes, 2010; Carvalho, 2011; Luengo, Casas, Mendoza e Arias, 2011; Veríssimo, 2013; Luengo, 2013; Almeida, 2014). Esta teoria emprega, como suporte metodológico, as Redes Associativas Pathfinder (PFNET) (Schvaneveldt, Dearholt e Durso, 1985,1988), baseada na Teoria dos Grafos.

Com aplicações em áreas tão diversificadas como a Matemática, a Contabilidade, a Informática, a Engenharia Telemática, a Avaliação das Aprendizagens, a Análise do conhecimento, a Física, entre outros, (Kudikyala e Vaughn, 2005; Arias, 2008; Clariana, Engelmann e Yu, 2013; Sarwar, 2012; Almeida, 2011; Carvalho, 2011; Großschedl e Harms, 2013), as PFNET têm como virtude o modo como os resultados finais são apresentados. Estes surgem na forma de uma representação organizada no plano – as redes – que permitem, com relativa comodidade, identificar os conceitos mais/menos importantes, ou valorizados, para além da apresentação de um conjunto de índices (coerência, similaridade e de complexidade) e outros indicadores quantitativos, que suportam análises comparativas, e mais refinadas, entre redes (Casas e Luengo, 2005; Antunes, 2010; Carvalho, 2011; Almeida, 2011; Almeida, et al., 2013; Veríssimo, 2013; Almeida, 2014).

Neste contexto, assume muita importância a noção de estrutura cognitiva. Adotaremos aquela apresentada por Casas (2002, p.73), na qual refere que “Por tal se entiende el patrón de relaciones entre los conceptos en la memoria. Más

exactamente definido, sería el constructo hipotético que se refiere en la organización de las relaciones entre conceptos en la memoria semántica o a largo plazo”.

A estrutura cognitiva não é rígida mas, bem pelo contrário, evolui individualmente com a aquisição de novos atributos subjetivos e objetivos e uma estrutura cognitiva mais coerente e melhor estabelecida corresponde ao que entendemos ser uma melhor compreensão de um conceito.

Entre as técnicas utilizadas para conhecer a estrutura cognitiva dos sujeitos podemos assinalar a ordenação de cartões, o escalonamento multidimensional, a análise de conglomerados ou, ainda, as Redes Associativas Pathfinder (PFNET), todas elas baseadas na atribuição de valores de proximidade entre termos. Amplamente utilizadas na psicologia cognitiva, estas técnicas servem para que o sujeito faça explicitamente a conexão entre conceitos e se fundamentem no constructo da memória a longo prazo, segundo o qual se assume que as ideias mais relacionadas na memória a longo prazo têm maior proximidade semântica (Jonassen, Beissner e Yacci, 1993).

Convém destacar que estas técnicas podem-se complementar-se com outras, entre as quais se incluem a associação de palavras, os protocolos de pensamento em voz alta, as entrevistas, os mapas conceptuais, a avaliação de tarefas concretas realizadas pelos sujeitos ou o uso de questionários. Como veremos, no presente trabalho recorre-se a comparar os dados obtidos mediante um questionário no qual se identificam os conceitos de mais fácil e difícil compreensão para os alunos segundo o proposto por Meyer e Land, e que descrevemos de seguida.

Meyer e Land (2003) desenvolveram e introduziram a noção de Conceito *Threshold* (CT), os quais constituem noções, ou ideias, que inicialmente para os estudantes são complicadas e problemáticas, mas que, no entanto, quando compreendidas, transformadas e integradas podem constituir um dos fundamentos essenciais à aprendizagem, pois funcionam como “portais”, ou “janelas”, para o conhecimento (Meyer e Land, 2003, 2005; Davies, 2003). Os mesmos autores referem que esta tipologia de Conceitos *Threshold* verifica, provavelmente, as seguintes características: *Transformadora* – no sentido em que, uma vez compreendidos, o seu efeito potencial na aprendizagem dos alunos, provoca uma mudança significativa da perceção de um assunto ou, pelo menos, de parte dele; *Irreversibilidade* – é improvável a mudança de perspetiva provocada pela compreensão de um Conceito *Threshold*, e caso ela seja esquecida é à custa de um considerável esforço; *Integradora* – o conceito expõe as possíveis conexões com outros temas, as quais, numa fase inicial, se mantinham indetetáveis e incompreensíveis; *Limitadora* – embora não necessariamente sempre, estes conceitos podem definir as fronteiras de um assunto ou área de conhecimento,

e; *Problemáticos* – esta característica entendida na dimensão da compreensão do conceito, a qual pode assumir diferentes formas, como definido em Perkins (1999).

Apesar de não conhecermos estudos da aplicação específica de ambas as teorias à temática das Probabilidades, todavia é reconhecida a relevância da identificação dos diferentes elementos imprescindíveis para a construção gradual do conhecimento dos estudantes (Batanero, 2005; Gal, 2005).

Em síntese, adotando como marco teórico a Teoria dos Conceitos Nucleares, e as Redes Associativas Pathfinder, obtivemos a representação da estrutura cognitiva e identificamos os Conceitos Nucleares, nós polares (NP) e extremidade (NE), dos alunos em relação à noção de Probabilidade e a partir destes elementos, e outros, reconhecemos potenciais Conceitos *Threshold*, com vista à compreensão do modo como um grupo de estudantes dos 9.º e do 12.º anos organizam as suas ideias em torno da Probabilidade. Assim, com este estudo pretendemos contribuir ao que era proposto por Ausubel (1978) “Averígüese lo que el alumno sabe y actúese en consecuencia”.

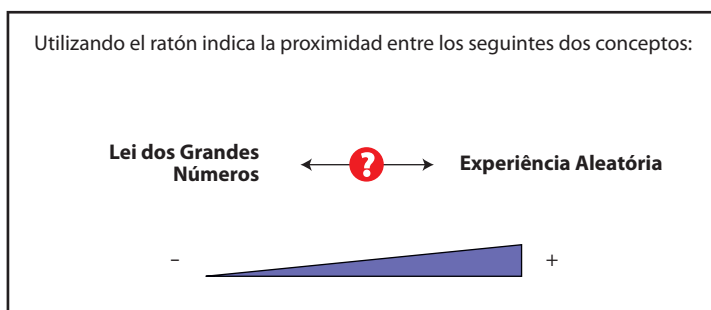
### 3. ASPETOS METODOLÓGICOS DA INVESTIGAÇÃO

O objetivo geral desta investigação consistiu na “Compreensão da *organização conceptual dos alunos dos 9.º (14-15 anos de idade) e 12.º (17-18 anos de idade) anos de escolaridade sobre a noção de Probabilidade, com base no marco teórico da Teoria dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos Threshold.*”

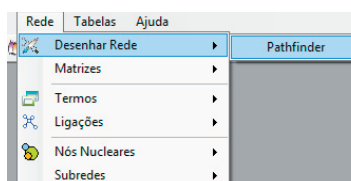
Para a consecução desta finalidade, utilizou-se uma metodologia por questionário para recolher os dados, apesar de esta apresentar características diferentes das habituais, já que se substituiu, em alguns momentos, o questionário em suporte papel por um instrumento informático – *Goluca* - que nos permitiu formular as questões, recolher os dados e apresentar alguns resultados, já que outros foram tratados com *software* específico de análise de dados (SPSS 20 e Excel 2007).

O programa informático *Goluca*, desenvolvido por Casas, Luengo e Godinho (Godinho, 2007; Casas, Godinho e Luengo, 2011), sistematiza, no mesmo *software* três procedimentos essenciais da técnica das redes PFNET: 1) Permite estabelecer relação entre os termos (A); 2) Representa a estrutura cognitiva (B), e; 3) Permite a análise da representação da estrutura (C).

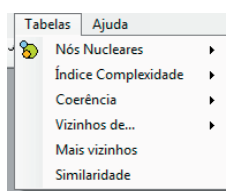




(A)



(B)



(C)

Figura 1. (A) Estabelecimento da relação entre os termos, (B) Representação das redes PFNET e (C) Análise das PFNET

Para identificar os potenciais Conceitos Threshold, utilizamos um questionário em papel, adaptado de Holloway, Alpay e Bull (2009), com o objetivo complementar de estabelecer relações entre estes e as diferentes tipologias dos conceitos das redes PFNET (nó extremidade, nó polar e Conceito Nuclear). Este instrumento de recolha de dados, para além do género e do ano de escolaridade, questionava os alunos sobre o conceito/ideia/exemplo que acharam ser o mais e o menos difícil de compreender no momento da aprendizagem do conceito de Probabilidade. Para além desta informação, e através de uma escala de *Likert*, o questionário incluía um conjunto de asserções para analisar as várias dimensões caracterizadoras dos Conceitos *Threshold* – transformadora, irreversibilidade, integradora e limitadora (Meyer e Land, 2003)

Optou-se por um desenho de investigação descritivo com características transversais, facto sustentado pela inquirição de diferentes grupos de estudantes condicionada por um corte no tempo.

Nesta lógica, o desenho da presente investigação obrigou ao delineamento de três fases sequenciais e funcionalmente dependentes:

1.<sup>a</sup> FASE – Definição dos termos, conceitos, noções e exemplos a serem utilizados na elaboração das Redes Associativas Pathfinder. A seleção destes elementos constituiu uma etapa fundamental do nosso estudo. Para tal inquiriram-se vinte e dois professores, analisaram-se seis manuais escolares do 9.<sup>o</sup> ano de escolaridade e o programa de Matemática dos Ensinos Básico e Secundário e levou-se em consideração artigos que clarificam os elementos do significado (Batanero, 2005) e da literacia (Gal, 2005) probabilística, no sentido de corroborar da relevância dos termos identificados.

2.<sup>a</sup> FASE – Inquirição, num 1.<sup>o</sup> momento, dos estudantes do 9.<sup>o</sup> (14-15 anos de idade) e do 12.<sup>o</sup> ano (17-18 anos de idade) de escolaridade. As respostas dadas pelos alunos foram efetuadas em computador e, por esta razão, as mesmas ocorreram em salas de aula de informática, utilizando o programa *Goluca*, nos meses de janeiro e fevereiro de 2013. Optou-se por estas datas, já que este tema foi lecionado no 1.<sup>o</sup> período do ano letivo de 2012/13 (setembro a novembro de 2012), tanto no 9.<sup>o</sup> ano como no 12.<sup>o</sup> ano.

3.<sup>a</sup> FASE - Inquirição, num segundo momento, dos estudantes do 9.<sup>o</sup> e do 12.<sup>o</sup> ano de escolaridade e passagem do questionário, em papel, para a deteção dos potenciais Conceitos *Threshold*. Esta fase teve como objetivo a análise da sedimentação das estruturas cognitivas dos discentes, obtidas na fase anterior e ocorreu nos meses de maio e junho de 2013. Também, nesta fase, preocupar-nos-emos, com a possível deteção, através de um questionário em papel, dos potenciais *Threshold*.

Os termos seleccionados, num total de onze, e sustentados nas respostas dos 22 professores inquiridos, nos 6 manuais escolares, nos programas de Matemática dos 9. e 12.<sup>o</sup> anos de escolaridade e nos elementos do significado (Batanero, 2005) e da literacia da Probabilidade (Gal, 2005), foram, atendendo à sua maior ou menor generalidade, os seguintes:

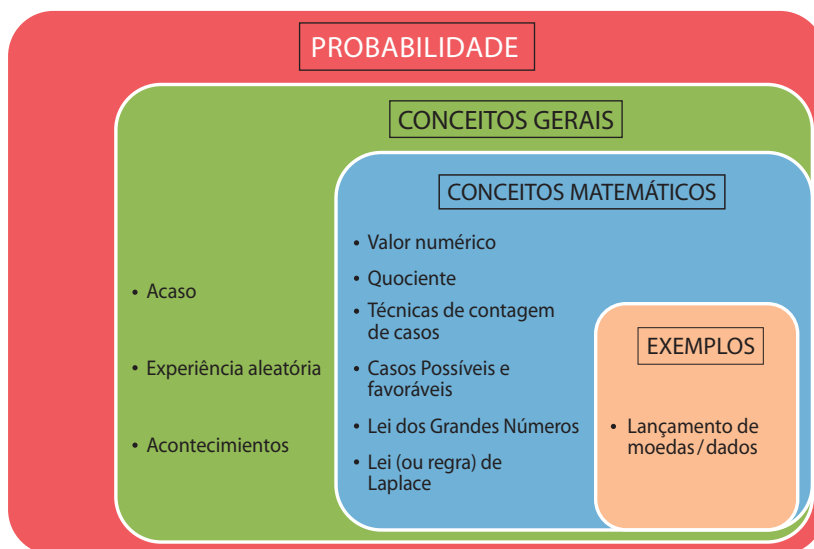


Figura 2. Hierarquia dos conceitos/termos/noções/exemplos associados à Probabilidade

Definidos os termos/conceitos/exemplos a utilizar para a construção das redes PFNET, decidiu-se por efetuar a recolha de dados, com os mesmos estudantes, em dois momentos distintos – 1.º Momento e 2.º Momento (Figura 3).

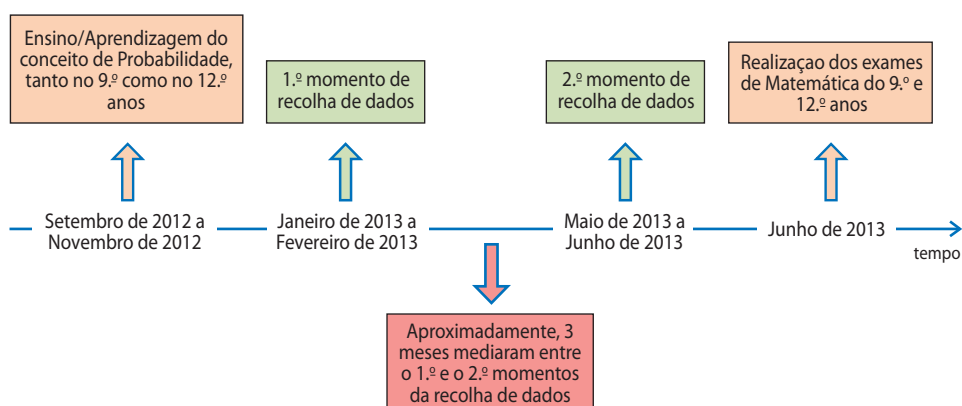


Figura 3. Organização, em termos temporais, do 1.º e 2.º Momentos de recolha de dados nos 9.º e 12.º anos

O 1.º Momento de recolha de dados foi planificado para ser executado após a lecionação da temática das Probabilidades e no qual pretendia-se obter as primeiras representações da estrutura cognitiva dos estudantes, dadas através das redes associativas Pathfinder, sobre este conceito.

O 2.º Momento de obtenção de informação teve como objetivos averiguar da consolidação e evolução das representações da estrutura cognitiva em torno da Probabilidade, analisar a sedimentação deste conhecimento e a estabilidade temporal das conceções cognitivas dos estudantes.

A distribuição dos alunos auscultados, nos dois momentos de recolha de dados, foi, de acordo com o Ano de Escolaridade e com o Género, a que consta na Tabela I.

TABELA I  
Distribuição dos alunos da amostra, nos 1.º e 2.º momentos, de acordo com Ano de Escolaridade e com o Género

Género/Ano	1.º MOMENTO			2.º MOMENTO		
	9.º ANO	12.º ANO	Total	9.º ANO	12.º ANO	Total
Masculino	116	43	159	105	46	151
Feminino	134	51	185	121	53	174
Total	250	94	344	226	99	325

A construção das Redes Associativas Pathfinder baseia-se na determinação de um conjunto de características/relações comuns e são compostas por nós que estabelecem entre si distintas relações, expressas através de arestas, que descrevem a maior ou menor proximidade entre os conceitos. Para estabelecer as relações entre os termos, procedeu-se à inquirição dos estudantes para quantificar as relações entre os termos, previamente definidos. Aos diferentes sujeitos foi solicitado para que, na sua opinião, indicassem a maior (menor) proximidade entre os pares de conceitos que, sucessivamente, vão aparecendo no *layout* do *Goluca*, num total de  $C_2^n = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$ . Quanto maior (menor) for o peso atribuído, maior (menor) será a proximidade entre os conceitos/termos.

Através deste procedimento é gerada uma matriz (*Tabela II*) que reflete numericamente a relação estabelecida entre os termos considerados e que constitui a base quantitativa para a representação da estrutura cognitiva do aluno.

TABELA II  
Matriz de proximidade de um aluno do 9.º ano sobre o conceito de Probabilidade,  
obtida com o software Goluca

	<i>TCC</i>	<i>EA</i>	<i>CPCF</i>	<i>Pro</i>	<i>Quo</i>	<i>LMD</i>	<i>Acon</i>	<i>VN</i>	<i>LL</i>	<i>Aca</i>
<i>Técnicas de contagem de casos (TCC)</i>										
<i>Experiência Aleatória (EA)</i>	0,216									
<i>Casos Possíveis e casos favoráveis (CPCF)</i>	0,506	0,848								
<i>Probabilidade (Pro)</i>	0,558	0,913	0,923							
<i>Quociente (Quo)</i>	0,535	0,126	0,535	0,535						
<i>Lançamento de moedas / dados (LMD)</i>	0,545	0,565	0,952	0,935	0,148					
<i>Acontecimento (Acon)</i>	0,181	0,906	0,939	0,881	0,252	0,510				
<i>Valor numérico (VN)</i>	0,532	0,548	0,497	0,116	0,835	0,500	0,177			
<i>Lei (ou regra) de Laplace (LL)</i>	0,194	0,929	0,526	0,558	0,506	0,187	0,197	0,168		
<i>Acaso (Aca)</i>	0,926	0,568	0,868	0,490	0,168	0,935	0,542	0,126	0,116	
<i>Lei dos Grandes Números (LGN)</i>	0,219	0,129	0,165	0,506	0,503	0,184	0,148	0,487	0,145	0,226

Com os dados obtidos nesta matriz, o Goluca calcula uma matriz de correlações na qual se definem os pesos das ligações entre os vários conceitos. Uma vez que todos os conceitos estão relacionados com maior, ou menor grau na matriz de dados, existe uma rede geométrica correspondente em que todos eles estão ligados entre si. Todavia, e em virtude do elevado número de ligações que apresenta, esta rede é demasiado complexa e, face a este facto, perde alguma utilidade interpretativa. A ideia fundamental subjacente às Redes Associativas Pathfinder é descartar os caminhos mais supérfluos e reter os caminhos mais significativos da rede. O procedimento básico para encontrar qual o caminho / ligação que se incorpora nas várias fases do processo iterativo, é que este só é

considerado se não existe um caminho indireto, através de outros nós, cuja soma de pesos seja menor que o caminho direto referido (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2005). Usando um algoritmo devido a Kamada e Kawai (1989), o programa gera uma rede no plano que exhibe apenas as ligações entre conceitos e que correspondem aos caminhos de peso mínimo, de tal modo que apenas as relações mais fortes e relevantes são representadas.

Estas representações permitem destacar qual, ou quais, são, dentro da estrutura cognitiva do estudante, os conceitos importantes e que relações estabelecem, facultando uma visão detalhada da organização conceptual, com uma interferência mínima por parte do investigador. A partir desta matriz é construída a respetiva rede Associativa Pathfinder (Figura 4).

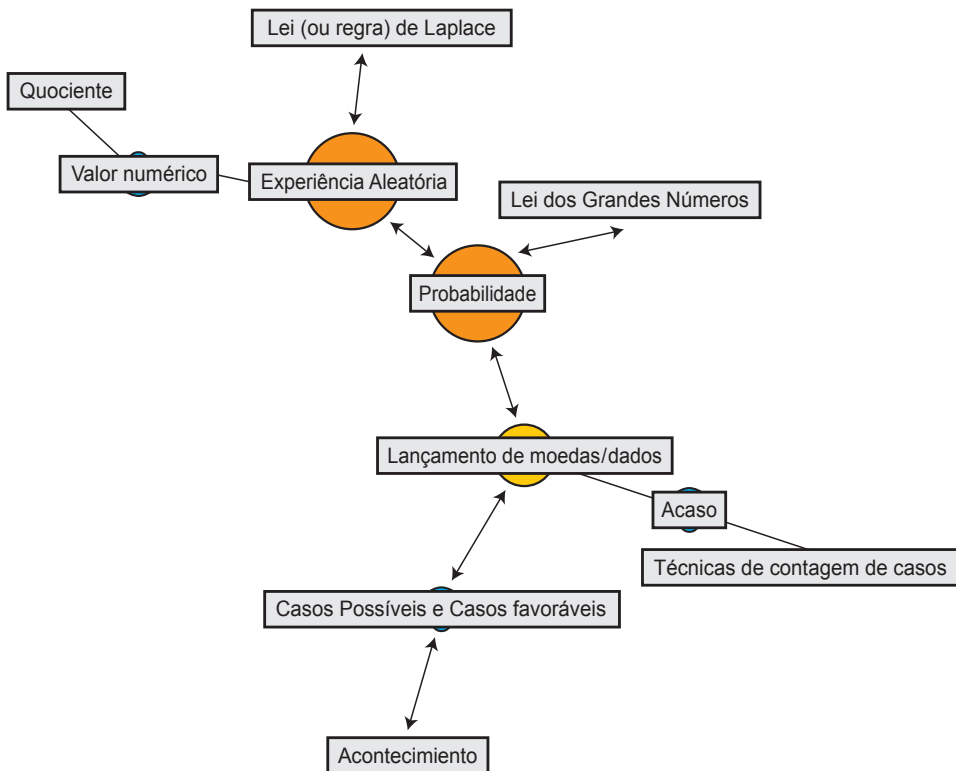


Figura 4. A rede PFNET ( $\infty, 10$ ) de um aluno do 9.º ano de escolaridade

As redes PFNET assim obtidas oferecem amplas indicações visuais (Conceitos Nucleares, nós extremidade, nós polares, relações entre conceitos,

grupos de conceitos homogêneos, distâncias,...) que, para além disso, foi complementada com indicadores quantitativos como a Coerência, Similaridade entre redes, Índice de Complexidade da rede, Índice de Centralidade da rede, entre outros, e, ainda, a informação dada pelas próprias matrizes numéricas.

Interpretaremos “*Conceito Nuclear*”, como o conceito que apresenta três ou mais ligações, sendo que o número destas ligações constitui o grau do nó nuclear e pelo facto de apresentar muitas ligações assume relevância na representação da estrutura cognitiva na aprendizagem de um determinado conteúdo. Interpretaremos “*nó extremidade*” como o conceito que, na rede Associativa *Pathfinder*, apresenta uma só ligação e, em consequência, ainda não está devidamente incorporado na estrutura cognitiva dos alunos. Definiremos, ainda, “*nó polar*” como aquele que apresenta exatamente duas ligações (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2003, 2004, 2005).

A *Coerência* de uma rede (Schvaneveldt et al., 1988) permite avaliar o conhecimento do tema tratado e apresenta um valor que varia no intervalo  $[-1,1]$  (Casas e Luengo, 2004; Antunes, 2010; Veríssimo, 2013).

O *Índice de Similaridade* de duas redes é calculado a partir da análise das ligações totais existentes nas duas redes e das ligações comuns às redes e varia no intervalo  $[0,1]$  (Casas, 2002).

O *Índice de Complexidade da Rede* (ICR), elaborado por Casas (2002), é um indicador numérico que permite avaliar quantitativamente a complexidade das distintas redes PFNET e fornece, também, um valor que varia entre 0 e 1 e. Quanto maior é o seu valor, maior é a complexidade da rede. Este índice depende do produto de três fatores: Densidade da rede (D), Fator dos nós nucleares (N) e Fator do grau dos nós nucleares (FN).

A *Centralidade de grau* de uma rede constitui uma medida para mensurar a tipologia da estrutura cognitiva e também varia entre 0 e 1 (Clariana, Draper e Land, 2011; Clariana et al. 2013).

#### 4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

A *Tabela III* sistematiza os resultados alcançados e relativos aos diferentes indicadores quantitativos das redes PFNET, nos 1.º e 2.º momentos de recolha de dados.

TABELA III  
Sistematização dos resultados dos indicadores quantitativos, relativos ao Género e Ano de Escolaridade, em ambos os momentos de recolha de dados

Indicador quantitativo da rede PFNET	<i>1.º Momento de recolha de Dados</i>		<i>2.º Momento de recolha de dados</i>	
	Género (rapazes vs raparigas)	Ano de escolaridade (9.º ano vs 12.º ano)	Género (rapazes vs raparigas)	Ano de escolaridade (9.º ano vs 12.º ano)
Número de nós extremidade	Estatisticamente iguais	Estatisticamente diferentes	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Número de nós polares	Estatisticamente iguais	Estatisticamente diferentes	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Número de nós nucleares	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Densidade da Rede	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Fator dos nós nucleares	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Grau dos nós nucleares	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Fator do grau dos nós nucleares	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Coerência	Estatisticamente iguais	Estatisticamente diferentes	Estatisticamente iguais	Estatisticamente diferentes
Índice de complexidade da rede	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais

Relativamente às várias medidas quantitativas, no 1.º e no 2.º momento de recolha de dados, a variável género não foi discriminatória, isto é os diferentes indicadores apresentaram valores estatisticamente iguais. Em relação ao ano de escolaridade somente a variável Coerência da rede mantém valores estatisticamente diferentes, em ambos os momentos de recolha de dados, com valores mais altos no ano terminal do Ensino Secundário.

As Redes Médias PFNET para os dois anos de escolaridade e nos dois momentos apresentam-se nas Figuras seguintes:



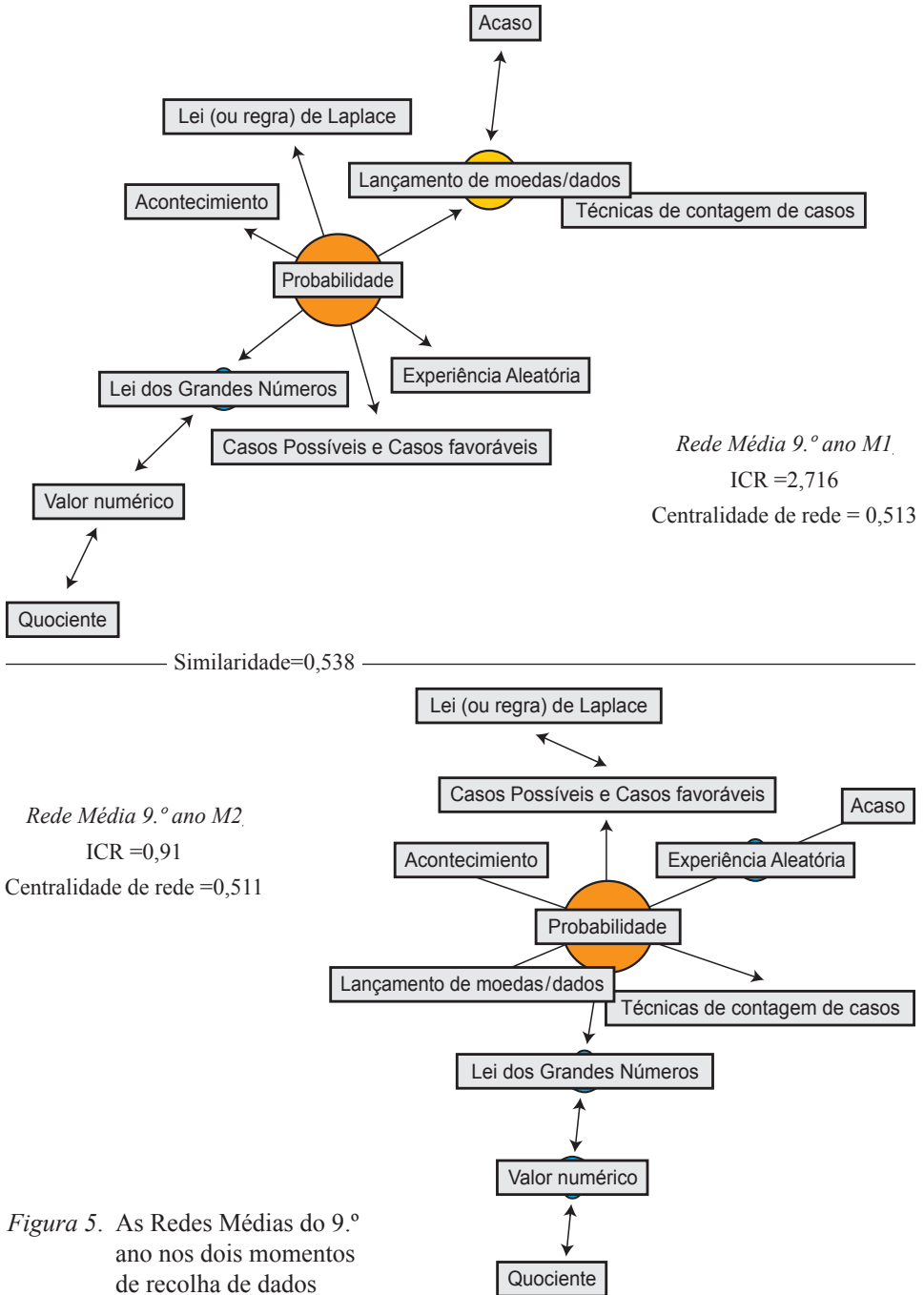


Figura 5. As Redes Médias do 9.º ano nos dois momentos de recolha de dados

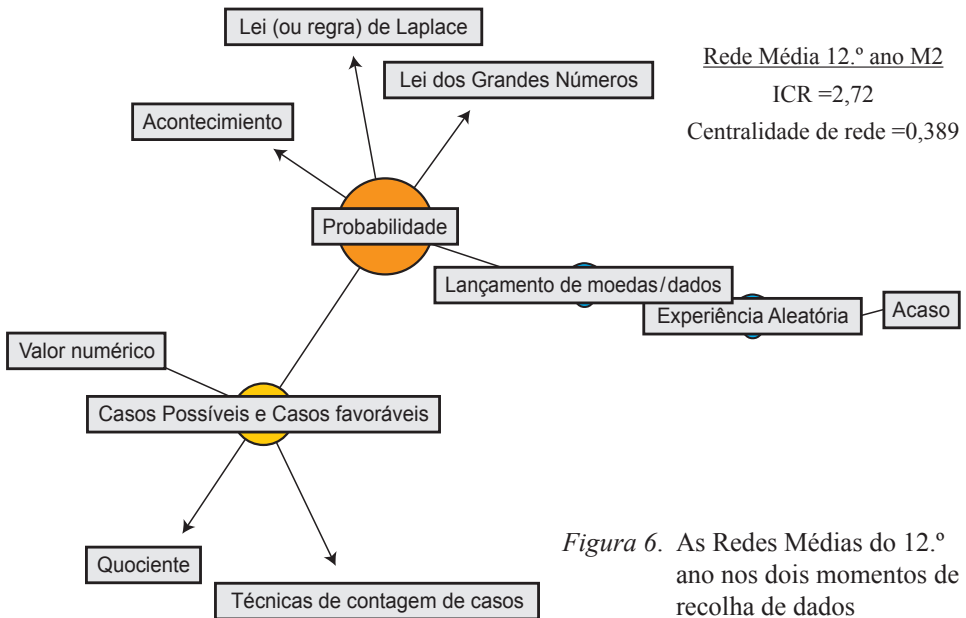
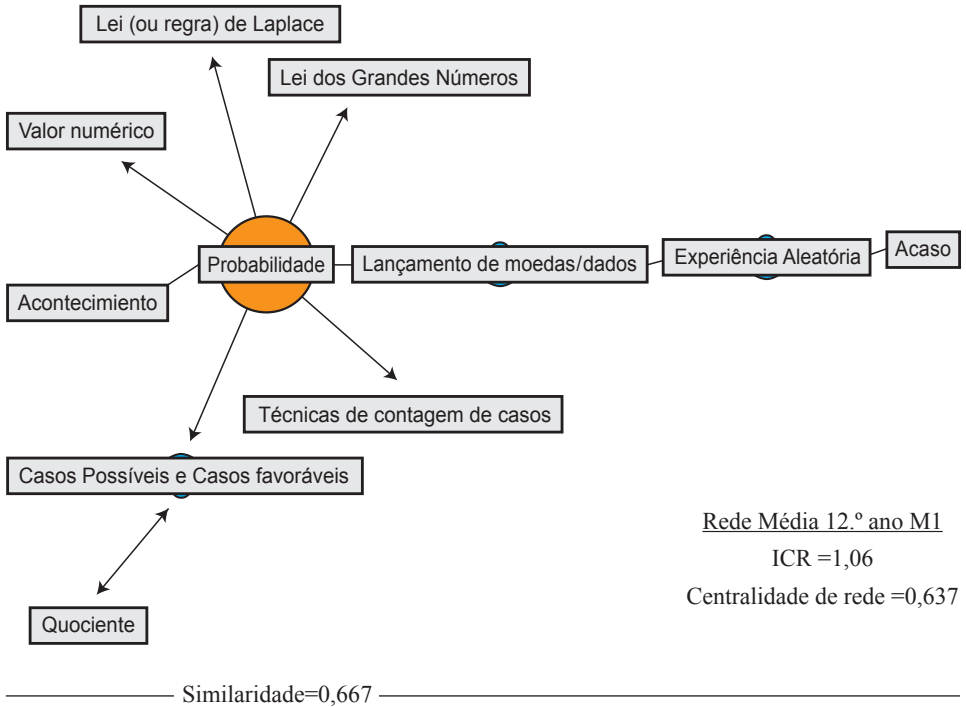


Figura 6. As Redes Médias do 12.º ano nos dois momentos de recolha de dados

Em relação à tipologia dos conceitos a *Tabela IV* mostra os conceitos presentes nestas Redes Médias.

TABELA IV  
Tipologia dos conceitos nas redes médias nos dois momentos de recolha de dados e para os dois anos de escolaridade

	9.º ano M1	9.º ano M2	12.º ano M1	12.º ano M2
Acaso	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Acontecimento	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Casos possíveis e favoráveis	Nó extremidade	Nó polar	Nó polar	Conceito Nuclear
Experiência Aleatória	Nó extremidade	Nó polar	Nó polar	Nó polar
Lançamento de dados / moedas	Conceito Nuclear	Nó extremidade	Nó polar	Nó polar
Lei (ou regra) de Laplace	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Lei dos Grandes Números	Nó polar	Nó polar	Nó extremidade	Nó extremidade
Probabilidade	Conceito Nuclear	Conceito Nuclear	Conceito Nuclear	Conceito Nuclear
Quociente	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Técnicas de contagem de casos	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Valor Numérico	Nó polar	Nó polar	Nó extremidade	Nó extremidade

Parece-nos evidente que o ano de escolaridade mais constante ao nível da tipologia dos termos/ideias/exemplos é o 12.º ano, já que dos onze conceitos considerados somente um altera a tipologia do 1.º para o 2.º momento (“Casos possíveis e caso favoráveis”), o que é demonstrativo de uma maior consolidação da estrutura cognitiva dos estudantes.

Em relação aos estudantes mais jovens, oito dos conceitos conservam a sua tipologia e três variam na sua tipologia (“Experiência aleatória”, “Casos possíveis e favoráveis” e “Lançamento de moedas/dados”).

Uma leitura mais transversal, e comparando a tipologia dos conceitos desde o 1.º momento de recolha de dados no 9.º ano, para o 2.º momento de recolha de dados no 12.º ano de escolaridade constatamos que:

- Os conceitos “Acaso”, “Acontecimento”, “Lei (ou regra) de Laplace”, “Quociente” e “Técnicas de contagem de casos”, mantêm-se nestes anos escolares como nó extremidade, ou seja, não se encontram devidamente consolidados na estrutura cognitiva;
- A noção de “Probabilidade” é o único conceito que se mantém, nestes anos e momentos, como Conceito Nuclear, isto é, assume relevância na estrutura cognitiva;
- O conceito “Experiência aleatória”, que inicialmente é um nó extremidade, passa a nó polar;
- Tanto o conceito “Valor numérico” como a “Lei dos Grandes Números” diminuem de importância cognitiva ao passar de nó polar a nó extremidade;
- A importância do exemplo “Lançamento de dados/moedas” é diminuída, em virtude de passar de Conceito Nuclear (9.º ano, 1.º momento) para nó extremidade (12.º ano, 2.º momento).
- Por oposição, o estatuto cognitivo dos “Casos possíveis e dos casos favoráveis” amplia-se, ao passar de nó extremidade, no 9.º ano (1.º momento), a Conceito Nuclear, no 12.º ano (2.º momento).

Globalmente estes resultados permitiram-nos constatar que existem conceitos que se mantêm no tempo pouco consolidados na estrutura cognitiva dos estudantes, os quais referem-se à especificidade desta temática Matemática (“Acaso” e “Acontecimento”) e a questões ligada aos procedimentos e algoritmos probabilísticos (“Lei (ou regra) de Laplace”, “Técnicas de contagem de casos” e “Quociente”). Houve um aumento, do 9.º para o 12.º ano, da importância cognitiva dos “Casos possíveis e dos casos favoráveis” aspeto que nos parece associado à utilização/dificuldade do Cálculo Combinatório para determinar estas quantidades.

A Comparação do Índice de Complexidade das redes do 9.º ano (1.º momento) com o do 12.º ano (2.º momento) apresenta, no teste de *Mann - Whitney*, o valor do  $Sig.=0,780 (>0,05)$  que é indicador de que em termos da complexidade das redes não há diferenças estatisticamente significativas entre o 9.º ano (1.º momento) e o 12.º ano (2.º Momento).

Como referimos anteriormente, na 3.ª Fase da investigação, utilizou-se um questionário, em papel, constituído por quatro grupos de questões. As questões I e II pretendem caracterizar os inquiridos em relação ao Ano de Escolaridade (9.º ano/12.º ano) e ao Género (Masculino/Feminino). Com

a questão III pretendeu-se saber, de entre os conceitos utilizados nas redes PFNET, qual tinha sido, na opinião dos estudantes, o termos menos complicado/fácil e o mais complicado/difícil de entender.

Em relação ao conceito mais complicado/difícil de entender, obtivemos:

TABELA V  
Conceito mais complicado/mais difícil de entender referido pelos estudantes

Conceitos	9.º ano		9.º ano Total	12.º ano		12.º ano Total	Total
	Masculino	Feminino		Masculino	Feminino		
Acaso	2	5	7	4	4	8	15
Acontecimento	2	4	6	0	0	0	6
Casos possíveis e casos favoráveis	1	7	8	2	2	4	12
Experiência aleatória	1	3	4	3	2	5	9
Lançamento de moedas/dados	0	2	2	0	0	0	2
Lei (ou regra) de Laplace	37	32	69	1	2	3	72
Lei dos Grandes Números	35	25	60	13	20	33	93
Probabilidade	3	0	3	2	3	5	8
Quociente	11	26	37	2	2	4	41
Técnicas de contagem de casos	8	7	15	15	15	30	45
Valor numérico	6	9	15	3	4	7	22
Total	106	120	226	45	54	99	325

O conceito mais complicado/difícil de entender no 9.º ano de Escolaridade foi a “Lei (ou regra) de Laplace” (69) e a “Lei dos Grandes Números” (60), verificando-se também este último conceito (33) juntamente com as “Técnicas de contagem de casos” (30) como os mais complicados de entender pelos estudantes do 12.º ano. O menos referido como complicado/difícil foi o “Lançamento de moedas/dados”, em ambos os anos de escolaridade.

Daqui resultou que o conceito que parece perpetuar-se no tempo (tanto no 9.º como no 12.º ano) como o mais difícil de entender no 9.º e no 12.º ano, é a “Lei dos Grandes Números”, que surge neste contexto como problemático/difícil e, consequentemente de acordo com Meyer e Land (2003), um candidato a Conceito *Threshold*.

A IV, e última questão deste questionário, pretendia, em relação ao conceito referido por cada estudante como o mais complicado/difícil de entender, saber a opinião destes sobre diferentes aspetos desse conceito (num total de 13 itens). Para tal foi utilizada uma escala na qual num dos extremos encontra-se o “1-*totalmente em desacordo*” e no outro extremo “5-*totalmente de acordo*”.

TABELA VI  
Médias e desvios padrões dos itens do questionário

		<i>N</i> =325	
		<i>Média</i>	<i>Desvio padrão</i>
It1	– Eu acho que o conceito é fácil de explicar a um outro colega.	2,47	1,041
It2	– O entendimento do conceito transformou/mudou a minha maneira de pensar sobre outros assuntos.	2,64	1,134
It3	– Eu consigo ver aplicações do conceito a outras áreas e disciplinas.	2,90	1,264
It4	– O conceito é algo que eu agora consigo ver como central e fundamental, mas que foi complicado de entender.	2,89	1,129
It5	– Eu ter entendido o conceito implicou ter uma melhor visão sobre as relações entre diferentes matérias, que antes não tinha.	2,87	1,139
It6	– Eu já entendi realmente o conceito.	2,87	1,375
It7	– Compreender o conceito foi como um “clique” e agora vejo o que realmente significa.	2,60	1,199
It8	– Muitas coisas organizaram-se e reuniram-se para entender o conceito.	2,82	1,070
It9	– Agora que entendi o conceito, acho que seria difícil esquecê-lo.	2,78	1,318
It10	– Entender o conceito fez-me sentir mais como um matemático.	2,49	1,193
It11	– Foi fácil ver como o conceito se ajusta e complementa a outros temas e assuntos.	3,08	1,161
It12	– Assim que entendi o conceito, outros temas matemáticos já estudados começaram a fazer mais sentido.	2,84	1,110
It13	– Não vou ter que manter atualizado o meu conhecimento sobre o conceito.	2,56	1,252

Com exceção do It11- “*Foi fácil ver como o conceito se ajusta e complementa a outros temas e assuntos*”, todos os restantes itens apresentam médias de respostas abaixo de “3 – *Nem em desacordo nem em acordo*” e com uma variabilidade, nas respostas, semelhante. Daqui resulta que os alunos se situam globalmente, e em média, numa perspetiva de discordância relativamente às várias afirmações que os itens expressam.

Paralelamente, e para mensurar a relação existente entre as frequências com que surgem como potenciais CT e as diferentes tipologias dos conceitos nas redes PFNET (NE, NP e CN), calculamos o coeficiente de correlação de *Spearman*. Os coeficientes foram determinados com as variáveis: frequência como CT e frequência como NE (no 9.º, no 12.º ano e em relação ao total de alunos), frequência como CT e frequência como NP (no 9.º, no 12.º ano e em relação ao total de alunos) e ainda, frequência como CT e frequência como CN (no 9.º, no 12.º ano e em relação ao total de alunos). Os valores destes coeficientes foram:

TABELA VII  
Coeficientes de correlação de *Spearman* ( $\rho$ ) entre os potenciais Conceitos *Threshold* (CT) e as diferentes tipologias dos conceitos nas PFNET (NE, NP e CN)

$\rho(\text{CT}_9 \text{ e } \text{NE}_9) = 0,743^{**}$	$\rho(\text{CT}_{12} \text{ e } \text{NE}_{12}) = 0,389$	$\rho(\text{CT}_{\text{Total}} \text{ e } \text{NE}_{\text{Total}}) = 0,636^*$
$\rho(\text{CT}_9 \text{ e } \text{NP}_9) = -0,251$	$\rho(\text{CT}_{12} \text{ e } \text{NP}_{12}) = -0,216$	$\rho(\text{CT}_{\text{total}} \text{ e } \text{NP}_{\text{Total}}) = -0,273$
$\rho(\text{CT}_9 \text{ e } \text{CN}_9) = -0,797^{**}$	$\rho(\text{CT}_{12} \text{ e } \text{CN}_{12}) = -0,537$	$\rho(\text{CT}_{\text{total}} \text{ e } \text{CN}_{\text{Total}}) = -0,682^*$

\*A correlação é significativa no nível 0,05 (2 extremidades).

\*\*A correlação é significativa no nível 0,01 (2 extremidades).

A leitura destes valores permitiu-nos retirar algumas conclusões. A primeira foi a existência de uma correlação positiva e significativa da frequência com que são referidos os potenciais Conceitos *Threshold* e os nós extremidade, tanto no 9.º ano (0,743) como para o total de alunos (0,636), sendo que quanto mais alunos referiram um CT mais alunos também o referiram como nó extremidade. No 12.º ano esta correlação apesar de positiva foi baixa e não significativa.

Em segundo, valores de correlações baixas negativas da frequência com que são referidos os Conceitos *Threshold* e os nós polares tanto no 9.º ano (-0,251) como no 12.º (-0,216) como no total (-0,273), no entanto todos estes valores não foram significativos.

O último aspeto prende-se com o facto de haver correlações negativas e significativas da frequência com que foram referidos os potenciais Conceitos *Threshold* e os Conceitos Nucleares tanto no 9.º ano (-0,797) como para a totalidade dos alunos (-0,682), sendo que quanto mais alunos referem um CT menos alunos referem-no como Conceito Nuclear. No 12.º (-0,537) e apesar do coeficiente indicar uma correlação moderada negativa, esta não foi, no entanto, significativa.

## 5. CONCLUSÕES

No decorrer no nosso trabalho empírico, e nos dois momentos de recolha de dados, foram obtidas um total de 669 (1.º momento – 344 e 2.º momento – 325) representações das estruturas cognitivas de estudantes, dadas através das Redes Associativas *Pathfinder*, em torno do conceito de Probabilidade.

A partir das redes Médias PFNET dos dois momentos de recolha de dados, podemos observar que no grupo de estudantes mais jovens, emerge um Conceito Nuclear “Probabilidade”, em torno do qual orbitam os termos “Acontecimento”, “Lançamento de moedas/dados”, “Experiência aleatória”, “Lei dos Grandes Números” e os “Casos possíveis e favoráveis”, todos estes associados à linguagem específica desta temática matemática. O exemplo “Lançamento de dados/moedas” perde importância, ao passar de Conceito Nuclear, no 1.º momento, a nó extremidade, no 2.º momento de recolha de dados. Constata-se a existência de uma “cauda” formada pela “Lei dos Grandes Números”, “Valor numérico” e “Quociente” e, diametralmente opostos como nós extremidade nesta disposição, “Acaso” e “Quociente”, constituindo estes últimos conceitos os menos consolidados na estrutura cognitiva dos alunos em torno da Probabilidade. É curioso no 9.º ano a fraca ligação existente entre a Probabilidade e a sua vertente mensurável dada pelos termos “Quociente” e “Valor Numérico”.

Também os termos “Acaso” e “Quociente” surgem, nas redes médias PFNET dos estudantes do 12.º ano de escolaridade e nos dois momentos de recolha de dados, muito afastados. São redes muito centradas no Conceito Nuclear “Probabilidade”, apesar de, no 2.º momento de recolha de dados, o termo “Casos possíveis e favoráveis” aumentar a sua relevância nestas representações das estruturas cognitivas, e por esta razão passar a Conceito Nuclear, aspeto que, na nossa opinião, se prende com reconhecimento da importância que os alunos atribuem à utilização do Cálculo Combinatório para determinar estas quantidades. Ainda para este nível de ensino é recorrente a existência de uma “cauda”, agora formada pelas noções de “Lançamento de moedas/dados”, “Experiência aleatória” e “Acaso”, aspeto que nos parece natural já que temos um exemplo de uma experiência aleatória e que, por esta razão, está envolvida em incerteza. A imprevisibilidade associada a este tema matemático, expressa através do termo “Acaso” e da “Experiência aleatória”, não surgem muito próximos de “Probabilidade”.

Apesar do incremento do grau de dificuldade dos conteúdos probabilísticos do 9.º ano para o 12.º ano, não há diferenças estatisticamente significativas no Índice de Complexidade das redes, nos dois anos de escolaridade e nos dois



momentos, o que é numericamente demonstrativo da inexistência de um aumento de complexidade das PFNET. Este facto evidencia que no ano escolar em que os alunos aprofundam a temática das probabilidades a respetiva estrutura cognitiva não se torna mais complexa, privilegiando relações já existentes/consolidadas em anos escolares anteriores.

O conceito mais complicado/difícil de entender simultaneamente no 9.º ano como no 12.º ano de escolaridade foi a “Lei dos Grandes Números”. Daqui resulta que é este conceito que parece perpetuar-se no tempo como o mais difícil de entender em ambos os anos de escolaridade. Pelo facto de ser uma noção problemática e difícil de entender, constitui um candidato a ser um potencial Conceito *Threshold*. Todavia o questionário utilizado não evidenciou que esta noção verificava também as outras características associadas a este tipo de conceito – Transformadora, Integradora, Irreversível e Limitadora.

A existência de uma correlação positiva e significativa da frequência com que são referidos os potenciais Conceitos *Threshold* e os nós extremidade, tanto no 9.º ano, como para o total de alunos, sendo que quanto mais alunos referem um CT mais alunos também o referem como nó extremidade. No 12.º ano esta correlação, apesar de positiva, é baixa. Parece-nos que pelo facto de os nós extremidade ainda não estarem devidamente consolidados na estrutura cognitiva dos estudantes não invalida que, pela importância de alguns deles (“Lei dos Grandes Números”), se invista mais fecundamente no seu processo de Ensino/Aprendizagem.

Neste trabalho conseguimos detetar como potencial Conceito *Threshold* a “Lei dos Grandes Números” e, ainda, mostrar a relação existente entre os nós extremidade das PFNET e os conceitos mais difíceis/complicados de entender (potenciais Conceitos *Threshold*). Consideramos que para os estudantes alcançarem um nível adequado de compreensão sobre a Probabilidade, estes devem ser capazes de estabelecerem conexões que relacionem os seus diferentes significados. Nesta lógica opinamos a “Lei dos Grandes Números” pela sua proficuidade em estabelecer pontes entre as diferentes conceções de Probabilidade (Laplaciana, Frequentista e Subjetiva), deve ser uma noção mais abordada e com mais profundidade no 9.º ano de escolaridade e reforçado o seu ensino e aprendizagem no ano terminal do ensino secundário (12.º ano).

Apesar de não conhecermos estudos da aplicação específica destas Teorias à temática das Probabilidades, todavia, alguns destas conclusões estão patentes em investigações aplicadas a outros assuntos matemáticos. Podemos encontrar em Casas (2002) e Antunes (2011), a constatação da existência de um número reduzido de Conceitos Nucleares presentes na estrutura cognitiva e sobre os quais os alunos centram o seu conhecimento. Nas pesquisas destes mesmos autores,

verificou-se também um não aumento do Índice de Complexidade das PFNET, a existência de ligações que se mantêm no tempo e a constatação da relevância da metodologia das redes PFNET no processo de Ensino e Aprendizagem.

Por outro lado a identificação do potencial Conceito *Threshold* “Lei dos Grandes Números” vem mostrando a importância que este conceito assume enquanto um dos modos de descobrir probabilidades (Gal, 2005) através de procedimentos e algoritmos (Batanero, 2005), assume enquanto elemento de “(...) *hacer inferencias que conecten los enfoques subjetivo, clásico y frecuencial*” (Sánchez e Valdez, 2013, p.39).

Ao possibilitar a identificação dos conceitos mais significativos e as relações mais relevantes da estrutura cognitiva dos alunos, estamos convictos que as Teorias dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos *Threshold* constituem uma outra ferramenta didática para organizar a prática pedagógica e um referencial pedagógico rico e fecundo, que deve ser levado em consideração no processo de Ensino e Aprendizagem da Probabilidade. Trabalhos como os de Veríssimo (2013) ou Veríssimo, Godinho, Luengo e Casas (2014), que permitiram desenhar unidades didáticas baseadas nos resultados da investigação, constituem exemplos das aplicações em desenvolvimento e de sugestões futuras com base nesta linha de pesquisa.

## REFERÊNCIAS

- Alexander, D. & Bueno, F. (2013). Técnicas Monte Carlo para la enseñanza de la estadística. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 579-586. Granada: Universidad de Granada.
- Almeida, C. (2011). *O contributo das Redes Associativas Pathfinder à avaliação das aprendizagens em Matemática: Aplicação aos exames de Matemática da 1.ª chamada do 9.º ano de escolaridade do Ensino Básico português*. Trabalho Final de Master. Badajoz: Universidad de Extremadura.
- Almeida, C., Casas, L. & Luengo, R. (2013). A organização conceptual dos estudantes, dada através das Redes Associativas Pathfinder, do conceito de Probabilidade: Um estudo com alunos do 9.º ano de Escolaridade do Ensino Básico Português. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 83-90. Granada: Universidad de Granada.
- Almeida, C. (2014). *Estudo da estrutura cognitiva dos alunos dos 9.º e 12.º anos sobre o conceito de Probabilidade: o contributo das Teorias dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos Threshold*. Tese de Doutoramento. Badajoz: Universidad de Extremadura.

- Anasagasti, A. & Berciano, A. (2013). Prueba exploratoria sobre competencias de futuros maestros de Primaria: Conocimiento del bloque relativo al tratamiento de la información, azar y probabilidad, en el currículo escolar de Matemáticas. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 531-538. Granada: Universidad de Granada.
- Antunes, A. (2010). *Estructura Cognitiva y Conceptos Nucleares en la Enseñanza/Aprendizaje de la Trigonometría: Estudio Comparativo Realizado con Alumnos del 10.º al 12.º Año de Enseñanza Secundaria a través de la Aplicación de Diferentes Metodologías*. Tese de Doutoramento. Badajoz: Universidad de Extremadura.
- Arias, J. (2008). *Evaluación de la Calidad de Cursos Virtuales: Indicadores de Calidad y Construcción de un Cuestionario de Medida. Aplicación al Ámbito de Asignaturas de Ingeniería Telemática*. Tese de Doutoramento. Badajoz: Universidad de Extremadura.
- Ausubel, D. (1978). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
- Azcárate, P. (1996). *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de la aleatoriedad y probabilidad*. Granada: Comares.
- Azcárate, P. & Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341-378.
- Batanero, C. (2004). Ideas estocásticas fundamentales ¿Qué Contenidos se Debe Enseñar en la Clase de Probabilidad?. Em J. Fernandes, M. Sousa & S. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Atas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*, 9-30. Braga: Universidade do Minho.
- Batanero, C., Díaz Godino, J. & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal os Statistics Education*, 12 (1).
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Relime - Revista Latinoamericana de Investigación en Educación en Matemática Educativa*, 8(3), 247-263.
- Batanero, C. & Henry, M. & Parzys, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 15-37. New York, USA: Springer.
- Batanero, C. & Díaz, C. (2007). Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. Ponencia Invitada en las *XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Granada: Espanha.
- Batanero, C. (2009). Retos para la formación Estadística de los Profesores. *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga: Universidade do Minho.
- Batanero, C., Ruiz, B. & Arteaga, P. (2009). Comparación de distribuciones: Una actividad sencilla para los futuros profesores?. *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga: Universidade do Minho.
- Caldeira, S. (2009). *A estatística e as probabilidades no ensino secundário: Análise dos programas de Matemática A e B na perspectiva do professor e dos alunos*. Tese de Mestrado. Lisboa: Universidade de Lisboa.
- Carvalho, J. (2011). *Estudio de las posibilidades de aplicación a la enseñanza de la Matemática del entorno PmatE: Validación y aportaciones en 1.º ciclo de Enseñanza Básica de Portugal*. Tese de Doutoramento. Badajoz: Universidad de Extremadura.
- Casas, L. (2002). *El Estudio de la Estructura Cognitiva de Alumnos a Través de Redes Asociativas Pathfinder: Aplicaciones y Posibilidades en Geometría*. Tese de Doutoramento. Badajoz: Universidad de Extremadura.

- Casas, L. & Luengo, R. (2003). Redes Asociativas Pathfinder y Teoría de los Conceptos Nucleares. Aportaciones a la Investigación en Didáctica de las Matemáticas. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico, & A. Vallecinos (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. VII Simposio de la Sociedade Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, 179-188. Granada: Universidad de Granada.
- Casas, L. & Luengo, R. (2004). Representación del Conocimiento y Aprendizaje. Teoría de los Conceptos Nucleares. *Revista Española de Pedagogía R.E.P.* 227, 59-84.
- Casas, L. & Luengo, R. (2005). Conceptos Nucleares en la Construcción del Concepto de Ángulo. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(2), 201-216.
- Casas, L., Luengo, R. & Godinho, V. (2011). Software GOLUCA: Knowledge Representation in Mental Calculation. *US-China Education Review*, 4, 592-600.
- Clariana, R., Draper, D. & Land, S. (2011). An automated measure of group knowledge structure convergence. Apresentação na *Annual Meeting of the Association for Educational Communications and Technology*. Jacksonville: EUA.
- Clariana, R., Engelmann, T. & Yu, W. (2013). Using centrality of concept maps as a measure of problem space states in computer-supported collaborative problem solving. *Education Tech Research*, 61, 423-442.
- Davies, P. (2003). Threshold Concepts: how can we recognise them?. Paper apresentado em *EARLI Conference*, August. Itália: Padova.
- Díaz Godino, J. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 1-16. Granada: Universidad de Granada.
- Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. Em Jones, G. (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 39-43.
- Godinho, V. (2007). *Implementação do software GOLUCA e aplicação à modificação de redes conceptuais*. Trabalho de DEA. Badajoz: Universidad de Extremadura.
- Graça Martins, M. & Ponte, J. (2010). *Organização e tratamentos de dados*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.
- Gröbschedl, J. & Harms, U. (2013). Assessing conceptual knowledge using similarity judgments. *Studies in Educational Evaluation*, 39, 71-81.
- Holloway, M., Alpay, E. & Bull, A. (2009). A Quantitative Approach to Identifying Threshold Concepts in Engineering Education. In *EE2010 conference*.
- Jonassen, D., Beissner, K., & Yacci, M. (1993). *Structural Knowledge: Techniques for Representing, Conveying and Acquiring Structural Knowledge*. Hillsdale: Erlbaum.
- Kamada, T. & Kawai, S. (1989). An algorithm for drawing general undirected graphs. *Information Processing Letters*, 31 (1), 7-15.
- Kudikyala, U. & Vaughn, R. (2005). Software requirement understanding using Pathfinder networks: discovering and evaluating mental models. *The Journal of Systems and Software*, 74, 101-108.
- Lopes, J. (2011). Uma Proposta Didático-Pedagógica para o Estudo da Conceção Clássica de Probabilidade. *Bolema*, 24(39), 607-628.
- Lopes, J. (2013). Una propuesta para la enseñanza del teorema de Bayes a través de un juego de dados y de resolución de problemas. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, p. 601-608. Granada: Universidad de Granada.

- Luengo, R., Casas, L., Mendoza, M. & Arias, J. (2011). Possibilities of “Nuclear Concepts Theory” on Educational Research, a Review. *International Conference “The future of Education”*, June. Florence: Italia.
- Luengo, R. (2013). La Teoría de los Conceptos Nucleares y su aplicación en la investigación en Didáctica de las Matemáticas. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 34, 9-36.
- Maanan, M. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre Probabilidad*. Tese de Doutoramento. Granada: Universidad de Granada.
- Mercado, M. (2013). Exploración de conceptos de probabilidad con Geogebra. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 309-318. Granada: Universidad de Granada
- Meyer, J. & Land, R. (2003). *Threshold Concepts and Troublesome Knowledge: Linkages to Ways of Thinking and Practising within the Disciplines - Occasional Report 4, ETL Project*. University of Edinburgh: Scotland.
- Meyer, J. & Land, R. (2005). Threshold concepts and troublesome knowledge (2): Epistemological considerations and a conceptual framework for teaching and learning. *Higher Education*, 49 (3), 373–388.
- Millán, E. (2013). Razonamiento Combinatorio y el currículo español. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 539-545. Granada: Universidad de Granada.
- Perkins, D. (1999). The many faces of constructivism. *Educational Leadership*, 57(3), 6-11.
- Pratt, D. (2005). How do teachers foster students’ understanding of probability? En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 345-366. New York: Springer.
- Sánchez, E. & Valdez, J. (2013). La cuantificación del azar: una articulación de las definiciones subjetiva, frecuencial y clásica de probabilidad. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 39-45. Granada: Universidad de Granada.
- Sarwar, G. (2012). *Comparing the Effect of Reflections, Written Exercises, and Multimedia Instruction to Address Learners’ Misconceptions using Structural Assessment of Knowledge*. Tese de Doutoramento. Canada: Ottawa.
- Schvaneveldt, R., Dearholt, D. & Durso, F. (1985). *Pathfinder: Scaling with network structures (Memorandum in Compute and Cognitive Science, MCCS.85-9)*. New Mexico: State University.
- Schvaneveldt, R., Dearholt, D. & Durso, F. (1988). Graph Theoretic Foundations of Pathfinder Networks. *Computer Mathematics Applications*, 15(4), 337-345.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981) Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
- Veríssimo, S. (2013). *A introdução das ideias da Teoria dos Conceitos Nucleares no ensino da Geometria e as suas implicações*. Tese de Doutoramento. Badajoz: Universidad de Extremadura.
- Verissimo, S., Godinho, V., Luengo, R. y Casas, L. (2014). Identificação de conceitos prévios dos alunos recorrendo a métodos qualitativos. *Indagatio Didactica*, 6(3), s/p. Disponível em <http://revistas.ua.pt/index.php/ID/article/view/3000/2785>

## **Autores**

---

**Cesário Almeida.** Instituto Politécnico de Beja, Portugal. calmeida@ipbeja.pt

**Luis Casas García.** Universidad de Extremadura, España. luisma@unex.es

**Ricardo Luengo González.** Universidad de Extremadura, España. rluengo@unex.es