



Estrategias de los niños en la resolución de situaciones multiplicativas: reconocimiento y uso de unidades

Strategies of children in the resolution of multiplying situations: recognition and use of units

Nidia Stella Martínez Melo nsmartinezm@gmail.com

Colegio Cafam, Colombia

 **Pedro Javier Rojas Garzón** pjrojasg@udistrital.edu.co

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Natalia Lorena Rojas Rodríguez natys0323@gmail.com

IED Jorge Gaitán Cortés, Colombia

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, vol. 21, núm. 2, 2018

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0 Internacional.

Cita recomendada:

Martínez-Melo, N., Rojas Garzón, P. y Rojas Rodríguez, N. (2018). Estrategias de los niños en la resolución de situaciones multiplicativas: reconocimiento y uso de unidades. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21 (2), 157-181. <https://doi.org/10.12802/relime.18.2122>

Recepción: 28 Febrero 2017

Aprobación: 26 Junio 2018

DOI: <https://doi.org/10.12802/relime.18.2122>

Estrategias de los niños en la resolución de situaciones multiplicativas: reconocimiento y uso de unidades



Resumen:

Se presenta un análisis de las estrategias utilizadas por niños de primero y segundo grado de educación básica primaria (7-8 años de edad) de dos instituciones educativas de Bogotá, Colombia, para resolver situaciones multiplicativas antes de recibir instrucción sobre multiplicación y división. El análisis se centró en identificar si los niños reconocen diferentes unidades, simples o compuestas, y el uso que hacen de éstas, en particular si forman unidades para abordar las situaciones dadas y si con ellas reinterpreten dichas situaciones. Esta investigación se desarrolló utilizando el método de entrevistas basadas en tareas, a partir del cual fue posible encontrar evidencias sobre las estrategias usadas por los niños, en particular dos estrategias emergentes que no han sido reportadas en la literatura internacional: equivalencia entre distintos tipos de unidad y uso coordinado de unidades compuestas.

Palabras clave:

Pensamiento multiplicativo, unitización, normación, estrategias de los estudiantes.

Abstract:

On this paper, an analysis of the strategies used by children in first and second grade of elementary education (7-8 years old) from two academic institutions in Bogota, Colombia, for solving multiplicative situations before receiving instruction on multiplication and division, is introduced. The analysis focuses on identifying whether children recognize different units, simple or compound, and the use they made of them, particularly if children build units to address the given situations, and whether the children re-interpretate the said situations with these units. This research was conducted by using the method of task-based interviews, from which it was possible to find evidence of the strategies used by the children, in particular two emerging strategies that have not been reported in the international literature: equivalence between different types of unit and coordinated use of composite units.

Keywords:

multiplicative thinking, unitization, normation, pupils' strategies.

Résumé:

Cet article propose une analyse des stratégies utilisées par des enfants en première et deuxième niveau de l'école élémentaire (7 à 8 ans) de deux établissements scolaires à Bogota, Colombie, pour résoudre des situations multiplicatives avant de recevoir de l'instruction sur la multiplication et la division. L'analyse se concentre à identifier si les enfants reconnaissent des unités différentes, simples ou composées, et l'utilisation qu'ils en font, notamment s'ils en forment des unités pour aborder les situations données et si avec ces unités, ils réinterprètent telles situations. Cette recherche a été réalisée selon la méthode des entretiens axés sur les tâches, à partir de laquelle il a été possible de trouver des preuves sur les stratégies utilisées par les enfants, en particulier deux stratégies émergentes qu'ils n'ont pas été rapportés dans la littérature internationale: l'équivalence entre les différents types d'unités et l'utilisation coordonnée des unités composites.

Mots clés:

pensée multiplicative, unitisation, normation, stratégies des élèves.

Resumo:

Neste artigo apresenta-se uma análise das estratégias utilizadas por crianças em primeiro e segundo grau do ensino básico (7-8 anos de idade), de duas instituições de ensino de Bogotá, Colômbia, para resolver situações multiplicativas antes de receber instruções sobre multiplicação e divisão. A análise concentra-se em identificar se as crianças reconhecem diferentes unidades, simples ou compostas, bem como a utilização que as crianças fazem delas, especialmente se as crianças formam unidades para lidar com as situações dadas e se com elas, as crianças re-interpretam ditas situações. Esta pesquisa foi realizada usando o método de entrevistas baseadas em tarefas, a partir do qual foi possível encontrar evidências sobre as estratégias utilizadas pelas crianças, em particular duas estratégias emergentes que não têm sido relatados na literatura internacional: a equivalência entre diferentes tipos de unidades e da utilização coordenada de unidades compostas.

Palavras-chave:

pensamento multiplicativo, unitização, normação, estratégias dos alunos.

1. INTRODUCCIÓN

Diversos estudios muestran que los niños pueden resolver situaciones multiplicativas desde la educación infantil (4-6 años), haciendo uso de estrategias informales (Bosh, Castro y Segovia, 2007; Caballero, 2005; Castro y Hernández, 2014), y que poseen esquemas matemáticos, algunas veces funcionales y otras no, los cuales pueden perdurar a pesar del trabajo realizado por su profesor (Steffe, 1994). En relación con los procesos de conteo utilizados por los niños, Kouba (1989, citado por Mulligan & Watson, 1998) y Carpenter, Ansell, Franke, Fennema & Weisbeck (1993) clasificaron las estrategias de cálculo utilizadas en la solución de problemas multiplicativos e identificaron métodos de conteo cada vez más sofisticados: conteo directo, conteo rítmico, conteo a saltos, cálculo aditivo, cálculo multiplicativo. Bosch, Castro y Segovia (2007) reportan el uso de "unidades múltiples" por parte de niños de cinco años en una situación basada en saltos de una rana sobre piedras, además de procesos de subitización (captar una cantidad de manera perceptiva e inmediata) para dar cuenta de saltos de dos en dos y de tres en tres. Por otra parte, Castro y Hernández (2014) analizan la forma de descomposición de una cantidad de 24 objetos en grupos (filas) iguales, y preguntan tanto por el número de filas como por el número de objetos de cada fila; así hallan que casi la totalidad de los niños lograron dar solución a las situaciones planteadas, y algunos dieron más de una solución.

En relación con las estrategias utilizadas por los niños, Wright, Mulligan & Gould (2000) distinguieron cinco niveles evolutivos en el conocimiento temprano de los niños sobre la multiplicación y la división, vinculados a estrategias que procedían de la reorganización del conteo y de las estrategias de adición y sustracción usadas por ellos: *a)* agrupamiento inicial; *b)* conteo perceptual por múltiplos; *c)* comparación figurativa de grupos; *d)* repetición abstracta de la composición de un grupo (por ejemplo, si se tienen seis grupos cada uno de tres elementos, uno de estos grupos es una unidad y al mismo tiempo tiene tres elementos), y *e)* multiplicación y división como operación.

Steffe (1994) desarrolló trabajos sobre los esquemas multiplicativos y los tipos de secuencias numéricas usadas por niños de primero y segundo grado, en los cuales se evidencia la construcción de unidades en los procesos de conteo y se reconoce el inicio del pensamiento multiplicativo. Los procesos de formación de unidades y de reinterpretación de las unidades formadas en términos de las situaciones en las que están involucradas, desde la propuesta de Lamon (1994), han sido denominados *unitización* y *normación*, respectivamente.

En esta investigación se indagó sobre las estrategias que usan los niños para resolver situaciones multiplicativas en contextos discretos y continuos, antes de recibir instrucción sobre la multiplicación y la división, las cuales son analizadas en el marco de los procesos de *unitización* y *de normación*. La indagación se realizó con niños de primero y segundo grado de educación primaria (7-8 años de edad), de dos instituciones educativas (una de carácter oficial y la otra privada) de la ciudad de Bogotá (Colombia). Desde el análisis realizado se evidenció la emergencia de dos estrategias que, al parecer, no han sido reportadas en la literatura internacional, cuyo reporte y descripción constituyen el propósito fundamental de este trabajo: *equivalencia entre distintos tipos de unidad* y *uso coordinado de unidades compuestas*. Las unidades compuestas, también denominadas "múltiples", se forman por unidades simples y se tratan a su vez como unidades, por ejemplo, al realizar agrupamientos de dos unidades y realizar conteos con dichos agrupamientos, asumidos y usados como nuevas unidades.

2. UNITIZACIÓN, NORMACIÓN Y ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS

Desde los referentes teóricos asumidos en el desarrollo de esta investigación, el concepto de "unidad" tiene un papel fundamental para el abordaje de temáticas relacionadas con lo que Vergnaud (1990)

denominó el campo de las estructuras multiplicativas. El concepto de unidad fue utilizado por Euclides (300 A.C./1991), de manera implícita, en las primeras definiciones del libro V:

Definición 1: Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor.

Definición 2: Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.

Con la expresión “mide a” puede interpretarse que la magnitud que mide a otra es asumida como *unidad*. Así, por ejemplo, tres como cantidad de alguna magnitud, puede ser pensada como una unidad cuando se afirma que: tres “es parte de” 12, puesto que tres “mide a” 12.

En relación con la importancia de la unidad, Rojas, Romero, Mora, Bonilla, Rodríguez y Castillo (2011) toman como referencia el tratamiento de la unidad y de los cambios de unidad realizados por Euclides en *Elementos*, y proponen que la multiplicación sea reinterpretada como “cambio de unidad”; plantean específicamente que:

Reconceptuar la multiplicación como cambio de unidad es entender que, cuando se multiplica, lo que esencialmente se hace es expresar una cantidad o magnitud –no necesariamente entera– de cierta cantidad o magnitud en términos de otra unidad, y que para llevar a cabo tal cambio de unidad, se realizan procesos de unitización y normación. (p. 58).

Lamon (1994) define la *unitización* como la construcción de una unidad de referencia o un todo-unidad y, la *normación*, como la reconceptualización de un sistema en términos de una unidad fija o estándar. Para esta autora las estructuras multiplicativas combinan dos magnitudes con diferentes “etiquetas”, con el propósito de producir una cantidad cuya etiqueta no es la misma, por ejemplo, cinco bolsas de dulces con seis dulces por bolsa, producen 30 dulces (no bolsas, ni dulces por bolsa). Considera también la importancia de la relación entre los números y sus referentes, es decir, la vinculación entre las unidades de medida y las cantidades de magnitud para la comprensión de relaciones y operaciones. En este mismo sentido, Rojas et al. (2011) resaltan que abordar la multiplicación como cambio de unidad evitaría la práctica de resolver los problemas en términos puramente numéricos, en tanto “exige no desconocer que cuando se habla de cantidad, se habla de cantidad de algo, de cantidad de una cierta unidad” (p. 74).

Los procesos de reconocimiento y formación de unidades (unitización) han sido abordados en diversos estudios en las últimas décadas, relacionados con conceptos como número fraccionario (Lamon, 1996; McCloskey y Norton, 2009; Norton y McCloskey, 2008), proporcionalidad (Lamon, 1994) y multiplicación en la educación inicial (Bosh, 2012; Olive, 2001; Rojas et al., 2011). En particular, en el abordaje de situaciones multiplicativas en la educación infantil, las estrategias asociadas a la construcción de unidades resulta crucial para reconocer los esquemas multiplicativos de los niños, como lo plantea Olive (2001), en tanto resulta frecuente que empiecen formando unidades compuestas, las cuales usan posteriormente para realizar conteos, comparaciones, separaciones y reparticiones, resignificando las situaciones en términos de estas nuevas unidades y realizando las operaciones requeridas. Dicha construcción de unidades (unitización) por parte de los niños se genera a partir de secuencias de conteo y de secuencias numéricas, las cuales son consideradas como estructuras fundamentales que los niños desarrollan desde su primera infancia (Olive, 2001).

Por otra parte, en relación con la *normación*, Lamon (1994) estudió las estrategias *inter* e *intra* usadas por los estudiantes antes de recibir instrucción al resolver situaciones del cálculo del término desconocido de una proporción. La estrategia *intra* hace referencia a utilizar como unidad uno de los valores de un espacio de medida para determinar cuántas de esas unidades están contenidas en otro valor del mismo espacio de medida, luego se hace un proceso similar en el segundo espacio de medida usando como unidad el valor allí dado, como ocurre en el siguiente ejemplo: *Tres empanadas cuestan 4 200 pesos [colombianos], ¿cuánto cuestan 12 empanadas?* Si se analiza el problema usando una estrategia *intra* dentro del espacio de medida “cantidad de empanadas”, es posible encontrar el factor escalar “4” que relaciona los dos valores (3 y 12), contando la cantidad de veces que está 3 en 12.

	<i>Empanadas</i>	<i>Precio</i>	
	3	4,200	
x 4	12	x	x 4

El operador escalar 4 debe aplicarse a la cantidad dada, al interior del otro espacio de medida, para obtener el “precio” de las 12 empanadas: $\$4\ 200 \times 4 = \$16\ 800$. Una estrategia *inter* consiste en encontrar una relación funcional entre los dos espacios de medida:

$$4,200 = 1,400 \times 3$$

$$f(x) = 1,400x$$

$$16,800 = 1,400 \times 12$$

El ejemplo presentado corresponde a lo que Vergnaud (1991) denominó problemas de isomorfismos de medidas, los cuales se caracterizan porque la forma de relación multiplicativa es una relación cuaternaria entre cuatro cantidades, dos son medidas de un cierto tipo y las otras son medidas de otro tipo.

Resulta de interés preguntarse ahora, en particular, si es posible identificar en los niños, en sus grados iniciales de escolaridad, el uso de estrategias de normación para el abordaje de situaciones multiplicativas. Esto forma parte del propósito de la presente investigación. Desde un enfoque de instrucción guiada cognitivamente se reconoce que los niños abordan los problemas de “forma natural” teniendo en cuenta el contexto, sin necesidad de enseñar estrategias específicas, como lo reportan Carpenter, Fennema, Franke, Levi & Empson (2015), quienes plantean además que resulta inadecuado orientar la instrucción a que los estudiantes reconozcan tipos de problemas o palabras clave para ayudarlos a resolver problemas, en tanto distrae su atención y limita las opciones de responder desde un contexto dado; estrategias como ésta pueden resultar eficaces para abordar un conjunto relativamente reducido de situaciones problemáticas, a la vez que desalientan a los estudiantes para asignar sentido a los problemas que resuelven. Por lo anterior, se reconoce la necesidad de promover un ambiente en el que los niños puedan desarrollar estrategias propias, explicitando y representando acciones, así como las relaciones establecidas, que les permitan asignar sentido a los procedimientos generados.

3. Marco metodológico

El estudio realizado es una investigación de tipo cualitativo en la que se utilizó como método la entrevista estructurada basada en tareas (Goldin, 1998). Para este estudio se tenía previsto realizar tres entrevistas en grupos de dos estudiantes, y tres entrevistas individuales en cada una de las dos instituciones seleccionadas (una de carácter privado y una de carácter oficial) con niños de segundo grado de educación básica (7-8 años) que no hubieran trabajado previamente la multiplicación; sin embargo, dado que algunos niños de la institución oficial no cumplían con este requisito, fue necesario entrevistar en ésta algunos niños de grado primero. Por otra parte, y teniendo en cuenta las dinámicas internas de cada una de las instituciones, en la privada se logró trabajar con la muestra prevista, mientras que en la oficial sólo fue posible realizar entrevistas con cinco niños (dos de primero y tres de segundo grado), completando un total de diez entrevistas con 14 estudiantes (seis individuales y cuatro en grupos de dos). Las entrevistas individuales permitieron reconocer las estrategias activadas por los niños en su producción individual y las de grupo posibilitaron además que dichas estrategias fueran explicitadas y visibilizadas, en tanto la interacción genera necesidad de comunicarlas, usando materiales disponibles o haciendo uso de representaciones semióticas.

En las entrevistas individuales el entrevistador leyó las situaciones que debían abordar los estudiantes quienes tenían a su disposición algunos materiales (fichas, regletas de Cuisenaire, lápiz y papel); esto con el fin de brindar a los niños la posibilidad de acudir a diferentes recursos si así lo requerían como parte de sus estrategias. Para las entrevistas grupales (por parejas), se les entregó un instrumento escrito con las situaciones a trabajar; los niños dialogaban durante su abordaje respondiendo a las preguntas allí formuladas, y el entrevistador solamente intervenía si lo consideraba necesario, con el propósito de obtener mayor información sobre las estrategias usadas. Las respuestas dadas en forma individual y la dinámica de abordaje de las situaciones propuestas en parejas de niños fueron registradas mediante grabaciones en video. En las entrevistas grupales fue posible identificar las estrategias usadas por los niños, desde el diálogo con sus pares, a partir de las preguntas y respuestas que surgieron sin la intervención del entrevistador.

La información recolectada en las diez entrevistas se sistematizó de dos maneras: la primera consistió en consignar en una matriz segmentos de cada una de las entrevistas, relacionándolas con las diversas situaciones abordadas; la segunda, en transcribir las entrevistas, resaltando expresiones o frases en las que se evidenciaba el reconocimiento o uso de unidades, lo cual permitió identificar el trabajo que realizaban con dos tipos de unidades, las simples y las compuestas.

Las tareas propuestas a los niños se diseñaron a partir de ocho situaciones (véase Tabla II de la siguiente sección); cuatro de ellas tomando como referente el trabajo de Steffe (1994), y las otras cuatro tomando como referente la clasificación propuesta por Vergnaud (1991) sobre isomorfismos de medidas: una de multiplicación, una de división partitiva, una de división cuotitiva y una de cálculo del término desconocido de una proporción.

El análisis realizado a las producciones de los niños se centró en identificar las estrategias utilizadas, partiendo de si reconocían o no diferentes unidades, simples o compuestas (formadas por unidades simples), y el uso que hacían de éstas, en particular, si formaban unidades (unitización) y si con ellas reinterpretan la situación dada (normación). En el siguiente apartado se presentan algunas de las situaciones propuestas a los niños y se analizan las estrategias utilizadas por ellos para abordarlas.

4. Descripción y análisis de las estrategias utilizadas

Se identificaron estrategias asociadas a los procesos de unitización y de normación. Las estrategias de unitización son similares a las que reportaron los autores consultados, mientras que las de normación emergieron como producto del análisis realizado a la información sistematizada. En la tabla I se muestran las estrategias identificadas:

Tabla I

Estrategias asociadas a los procesos de unitización y normación

Estrategias asociadas al proceso de *unitización*: - *Conteo de uno en uno sin reconocimiento de grupos o de relaciones*. Realizan conteos de uno en uno pero no forman grupos o no los reconocen. En esta categoría se ubican estrategias en la que los niños realizaron conteos unitarios sin evidencia de tener en cuenta las relaciones dadas en el problema o de reconocer las diferentes unidades presentes en la situación. -*Conteo o reparto de uno en uno con reconocimiento de grupos o de relaciones*. Realizan conteos de uno en uno y forman grupos del mismo tamaño (mediante conteos simples). Los niños cuyas estrategias se ubican en esta categoría realizaron conteo de unidades simples evidenciando tener en cuenta las relaciones dadas en la situación o realizaron repartos de grupos iguales. -*Doble conteo reiniciando en uno*. Forman grupos de igual tamaño (unidades compuestas), realizan doble conteo y reinician cada vez el conteo en 1 [por ejemplo, 1, 2, uno; 1, 2, dos; 1, 2, tres...]. -*Doble conteo*, haciendo pausa en los múltiplos. Forman grupos de igual tamaño (unidades compuestas), realizando doble conteo: por un lado, usan secuencias de uno en uno y hacen pausa en los múltiplos y, de manera simultánea, un segundo conteo de los grupos [por ejemplo, uno, dos, pausa; tres, cuatro, pausa; cinco, seis, pausa..., llevando un segundo conteo con los dedos]. -*Doble conteo por múltiplos*. Usan unidades compuestas, haciendo un doble conteo directamente sobre los múltiplos [por ejemplo: dos, 1; cuatro, 2; seis, 3;...].

Estrategias asociadas al proceso de *normación*: -*Equivalencia entre distintos tipos de unidad y/o reinterpretación en términos de las nuevas unidades*. Reconoce o establece una nueva unidad distinta a la dada en la situación y reinterpreta en términos de esta nueva unidad. [Por ejemplo: si una regleta roja equivale a dos regletas blancas y una regleta verde oscuro equivale a seis blancas, entonces una regleta verde oscuro equivale a tres regletas rojas. La regleta roja se convierte en una nueva unidad para medir las regletas verde oscuro.] -*Uso coordinado de unidades compuestas*. Establece dos tipos de unidades compuestas, reinterpreta la situación en términos de las nuevas unidades formadas y opera con ellas de manera coordinada mediante doble conteo. [Por ejemplo: si dos son tres, cuatro son seis y seis son nueve.]

A partir de esta clasificación de las estrategias fue posible realizar un análisis sobre las maneras de proceder de los niños y obtener los resultados que se describen a continuación:

4.1 CONSTRUCCIÓN Y RECONOCIMIENTO DE UNIDADES COMPUESTAS POR PARTE DE LOS NIÑOS: UNITIZACIÓN

En el abordaje de situaciones multiplicativas por parte de los niños se observó que algunas veces realizaban conteos de uno en uno sin reconocer la necesidad de formar grupos; otras veces formaban grupos del mismo tamaño y los contaban, ya sea mediante un doble conteo de manera simultánea, o formando grupos y contándolos al final. Desde las diversas maneras en que realizaron sus conteos fue posible identificar los procesos seguidos para la conformación de las unidades compuestas (unitización); por ejemplo, mediante alguna de las siguientes formas de conteo: a) 1, 2, uno; 1, 2, dos; 1, 2, tres; b) 1, 2, pausa; 3, 4, pausa, o c) contando directamente por múltiplos, así: 2, 4, 6.

Uno de los ejemplos en los que se observó cómo los niños armaron y reconocieron unidades se registró a partir de un trabajo con grupos de igual número de fichas, como se evidencia en la entrevista individual realizada a Lorenzo (grado primero, 7 años de edad):

Entrevistador: Te voy a mostrar estas fichitas. Éste es un grupo de dos fichas [coloca dos fichas sobre la mesa]. Aquí detrás de esta carpeta te voy a esconder otros tres grupos iguales. ¿Cuántas fichas hay escondidas?

Lorenzo: ¿Otros tres grupos de dos fichas? [muestra con una mano tres de sus dedos y con la otra mano dos de sus dedos]

Entrevistador: Sí.

Lorenzo: Seis [mediante tres movimientos consecutivos de su mano derecha, mostrando dos de sus dedos].

Entrevistador: ¿Cómo hiciste para saber que eran seis?



Imagen 1

Lorenzo: Sumé.

Entrevistador: ¿Cómo sumaste?

Lorenzo: Como acá hay *tres grupos de dos fichas* [señalando la carpeta donde estaban escondidas las fichas], entonces sumé 2, 4 y 6.

Entrevistador: ¿Y con las que estás viendo?

Lorenzo: 2, 4, 6 y... 8 [mediante tres movimientos consecutivos de su mano muestra dos de sus dedos cada vez].

Entrevistador: Ahora... éste es un grupo de tres fichas, tengo escondidos otros cinco grupos iguales a éste [la entrevistadora deja tres fichas visibles y detrás de la carpeta esconde las otras].

Lorenzo: ¿Cinco grupos? ¿De tres?

Entrevistador: Sí.

Lorenzo: 3, 6, 9 (10, 11), 12 (13, 14), 15, espera, creo que lo hice mal. [Se queda callado, tiene su mano empuñada y mueve sus dedos de uno en uno, a la vez que murmura su secuencia de tres en tres]... 15.

Entrevistador: ¿Cómo supiste que eran 15?

Lorenzo: Sumé tres veces cinco.

Entrevistador: ¿Y cómo hiciste?

Lorenzo: Sumé 3, 6, 9, 12 y 15.

Entrevistador: ¿Cómo paraste en 15?

Lorenzo: Porque como tú dijiste que eran cinco grupos, entonces sólo sumé *cinco veces tres*.

Obsérvese que la primera pregunta que formuló Lorenzo sugiere que ha diferenciado dos tipos de cantidades presentes en la situación: la cantidad de filas y la cantidad de fichas por fila. En efecto: “¿Otros tres grupos de dos fichas?”. Una vez que aclaró esta diferencia procedió a hacer *doble conteo por múltiplos* (aunque cuando no recordó la secuencia completa hizo conteos intermedios).

Otro ejemplo de lo ocurrido con la formación de unidades se observa en el trabajo de Samuel (grado segundo, 7 años):

Entrevistador: Observa que hay un grupo con tres fichas. Detrás de esta carpeta escondí cinco grupos iguales a ese. Entre las fichas que puedes ver y las que están escondidas, ¿cuántas fichas son?



Imagen 2

Samuel: [Toma de una en una las tres fichas visibles y cuenta usando su mano izquierda.] 1, 2, 3, pausa [registra con su dedo índice una vez], 4, 5, 6, pausa [toma nuevamente de una en una cada una de las tres fichas para contarlas y registra con su dedo corazón la segunda vez], 7, 8, 9, pausa [toma nuevamente las tres fichas de una en una y registra con su dedo anular], 10, 11, 12... [piensa por un momento y dice] hay 15 [no muestra el uso de su dedo pulgar dentro de su conteo].

Entrevistador: ¿Escondidas o en total?

Samuel: Escondidas.

Entrevistador: ¿Y en total?

Samuel: [Inicia nuevamente su conteo tomando y moviendo las tres fichas visibles cada vez que cuenta una] 1, 2, 3 pausa, 4, 5, 6, pausa, 7, 8, 9, pausa, 10, 11, 12, pausa, 13, 14, 15. Hay 15 detrás.

Entrevistador: ¿Y en total entre las que están escondidas y las que tienes ahí, cuántas son?

Samuel: Ummm, 18.

Entrevistador: ¿Cómo llegaste a 18?

Samuel: Hice lo mismo que en el anterior, empecé con 15 y luego puse las 3.

La estrategia usada por Samuel fue *doble conteo haciendo pausa en los múltiplos*. El primer conteo lo hizo contando las fichas, mientras que registró un segundo conteo de “veces de tres” usando los dedos de su otra mano. Se muestra un doble conteo para los dos tipos de unidades identificadas en la situación.

Un aspecto a destacar, a partir de la forma como los niños trabajaron las diversas situaciones propuestas, es la manera “natural” de construir y reconocer unidades compuestas, así como de realizar conteos de dichas unidades y de sus elementos constitutivos; usualmente iniciaban con conteos de uno en uno, haciendo pausa en los múltiplos, y a medida que iban encontrando formas rápidas de contar, pasaban a realizar conteos por múltiplos (unidades compuestas), por ejemplo, cinco grupos de tres fichas fueron contados con múltiplos de tres.

Lo planteado anteriormente corrobora lo afirmado por Steffe (1994), con respecto a que los tipos de secuencias numéricas y los esquemas multiplicativos de los niños proporcionan elementos para comprender la forma como ellos construyen unidades en sus procesos de conteo.

4.2. REINTERPRETACIÓN DE SITUACIONES EN TÉRMINOS DE LAS UNIDADES CONSTRUIDAS O RECONOCIDAS: NORMACIÓN

La reinterpretación de las situaciones en términos de las unidades construidas o reconocidas se hizo manifiesto principalmente cuando algunos niños abordaron las situaciones diseñadas haciendo uso de las regletas de Cuisenaire. En la forma como abordaron las situaciones propuestas, fue posible identificar dos tipos de estrategias de normación:

4.2.1. EQUIVALENCIA ENTRE DISTINTOS TIPOS DE UNIDAD Y/O REINTERPRETACIÓN EN TÉRMINOS DE LAS NUEVAS UNIDADES

Los niños reinterpretaron las situaciones en términos de unidades de dos (regletas rojas) o unidades de seis (regletas verdes), como ocurrió en la entrevista individual realizada a Gabriel (7 años) y a Tomás y a Abril (8 años). Gabriel usó la relación entre la regleta roja y las dos regletas blancas y reinterpretó la situación presentada en términos de las regletas rojas:

Entrevistador: Vamos a hacer trenes. [La entrevistadora deja sobre la mesa una ficha rosada, dos rojas y dos blancas.] Tú puedes armar un tren con dos fichas blancas. [Gabriel toma dos fichas blancas y las junta] Y ese tren con dos fichas blancas es igual de largo a un tren con una ficha roja. [Gabriel toma una ficha roja y la coloca al frente de las dos fichas blancas.] Y si armamos un tren con dos fichas rojas... [Gabriel toma la otra ficha roja], va a ser igual de largo a un tren con una ficha rosada. [Gabriel toma la ficha rosada y la coloca al frente de las dos rojas, véase imagen 3]. La pregunta es: ¿cuántas fichas blancas debe tener un tren para que sea igual de largo a un tren con una ficha rosada?

Gabriel: [Se queda pensando y luego responde] cuatro fichas.

Entrevistador: ¿Cómo sacaste el cuatro?



Imagen 3

Gabriel: *Porque si una ficha roja era igual que un tren de dos fichas blancas, pues yo dije... bueno... si dos fichas rojas dan lo mismo de largo que el tren de la ficha rosada, pues son cuatro porque si acá me alcanzaron a quedar do por encima [señalando la parte en donde están las fichas blancas], acá también me pueden caber dos por encima, [señalando la otra parte de las regletas rojas]*

Al abordar la misma situación, Natalia (8 años) respondió de una vez “cuatro” y explicó: “Aquí son 2, [señalando una regleta roja] y aquí son otras dos”.

La segunda situación con regletas que se les propuso a los niños fue la siguiente:

“Sigamos armando trenes”: Un “tren” de tres fichas rojas es tan largo como un “tren” de una ficha verde. Un tren con dos fichas blancas es tan largo como un tren con una ficha roja. ¿Cuántas fichas blancas debe tener un “tren” para que sea tan largo como un nuevo “tren” de dos fichas verdes?

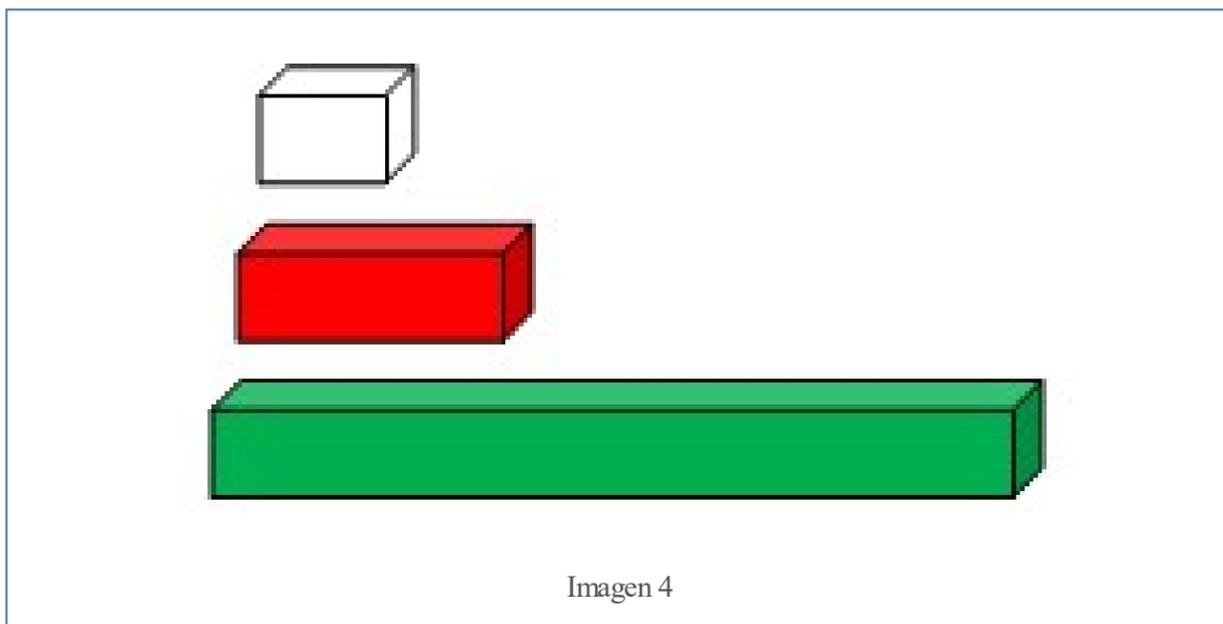


Imagen 4

Gabriel interpretó primero la situación en términos de las unidades de dos (regletas rojas) cuando afirmó: “si hago bien la cuenta, ahí me da seis, tendré que sumar entonces... 7, 8, 9, 10, 11, 12. Me dio un doce”.

Santiago (8 años de edad) reinterpretó también la situación en términos de las regletas rojas y de las regletas verdes, pues respondió “doce” y explicó: “porque ya sabía que eran tres rojas y entonces eran seis y $6 + 6$ son 12”.

En entrevista de parejas, mientras que Avril intentaba apoyarse en el dibujo dado en la imagen 4, haciendo marcas, para contar perceptualmente, Tomás usó la relación entre las regletas rojas, blancas y verdes para explicarle a su compañera, como se muestra en el siguiente fragmento de entrevista:

Entrevistador: ¿Qué estás dibujando?

Tomás: Fichas blancas. [Completa su dibujo de seis cuadritos y le explica a Avril] 1, 2, 3, 4, 5, 6 [y señala cada cuadrito].

Avril: Yo estaba midiendo con el lápiz para mirar cuántos cuadritos eran [coloca el lápiz sobre el dibujo y empieza a hacer las marquitas con la uña, y le explica a Tomás] y me da cinco.

Entrevistador: ¿Tú qué piensas Tomás de lo que está haciendo Avril?

Tomás: Yo pienso que es extraño. Es que yo no las mido. Yo no pongo las rayitas sino que voy calculando...

Entrevistador: Cuéntale cómo estás calculando.

Tomás: Dos da dos, más dos... cuatro...

Entrevistador: Cuéntale cuáles son esos dos que estás sumando. ¿Qué son?

Tomás: Fichas blancas...

Avril: [lee la situación y para pensando en voz alta]. *Como una ficha roja forma dos cuadritos de... entonces bajé una línea aquí [señala en el dibujo la parte de la regleta verde que coincide en longitud con una ficha roja]... y pues me dio ahí. Luego otros dibujitos para saber cuántos son...*

Entrevistador: ¿Y si el dibujo estuviera mal hecho? ¿Cómo usarían la información?

Avril: [Vuelve a intentar medir con su dedo índice].

Tomás: Pues lo haríamos usando nuestra mente. Nuestra mente es como una computadora. Entonces uno va haciendo las cuentas en su memoria.

Entrevistador: Entonces cuéntale a Avril cómo lo estabas haciendo tú en tu memoria.

Tomás: Yo lo estaba haciendo cogiendo dos... entonces... *ya que dos blancas eran tan grandes como un tren con una ficha roja...* Yo cogí... entonces puse *dos fichas blancas en mi memoria...* entonces cojo y *hago un cuadro rojo.*

Entrevistador: ¿Y por qué dibujaste seis? ¿Qué significaban esas seis?

[Tomás dibuja seis cuadritos y explica que eran fichas blancas. Encierra cada grupo de dos blancas en un rectángulo para mostrar que se trata de una ficha roja].

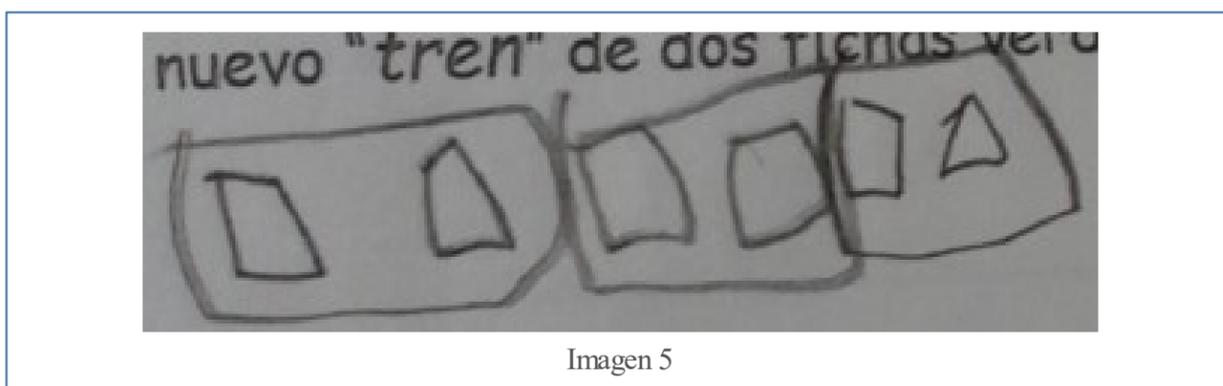


Imagen 5

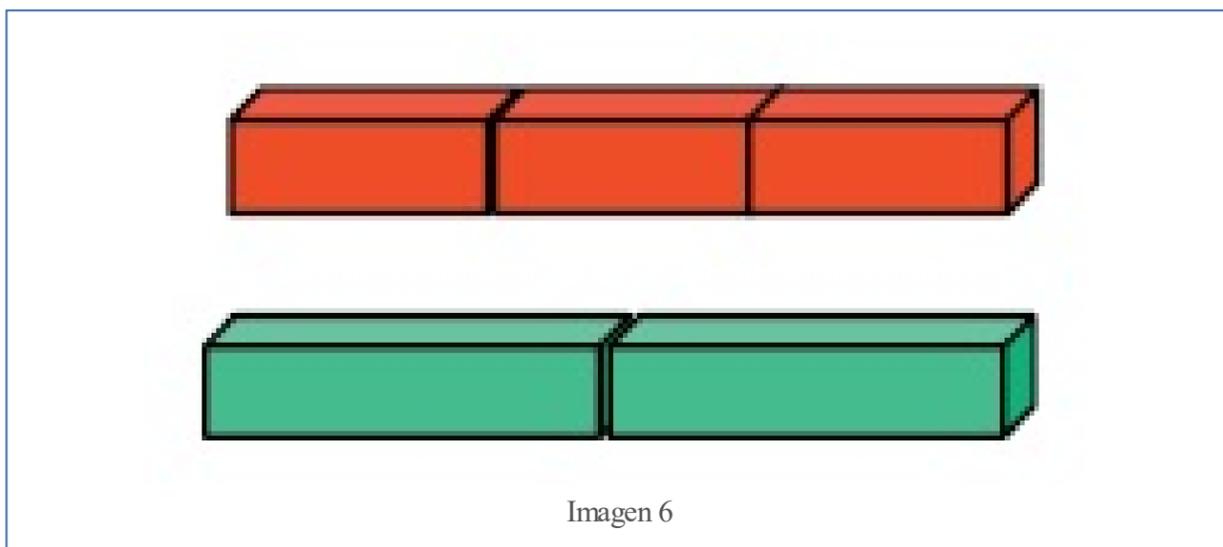
Tomás: Yo pensé... coger uno, dos, tres [señala en el dibujo] y *otros tres*, porque son dos fichas verdes, entonces cogí *dos "tres"* y me dieron seis y cogí *dos "seis"* y los uní y me dieron doce.

Tomás expresó en palabras haber puesto dos fichas blancas en su memoria y que con ellas hizo un cuadro rojo. Cuando se le preguntó por el significado de las seis fichas blancas que dibujó, expresó claramente que significaban tres fichas rojas y además fue capaz de acudir a otro tipo de representación en un contexto discreto de la relación entre las blancas y las rojas para explicarle a su compañera. Por su parte, Avril se mantuvo atenta a su procedimiento, pero también al trabajo de Tomás, tanto que hacia el final de la entrevista explicó de dónde salía el doce que expresó su compañero: *puse tres y después otros tres*, haciendo referencia a los dos grupos de tres; pero también a los tres grupos de dos: *y aquí como hay dos... cuatro, seis*; además se refirió al otro seis para llegar a doce. Obsérvese cómo la niña y el niño entrevistados hicieron reinterpretaciones de la situación en términos de unidades de dos, o unidades de seis.

4.2.2. USO COORDINADO DE UNIDADES COMPUESTAS

Esta estrategia se evidenció cuando algunos niños abordaron la siguiente situación:

“Un nuevo reto para construir trenes”: Un “tren” con tres fichas rojas es tan largo como un tren con dos fichas verde claro. ¿Cuántas fichas rojas tendrá un tren para que sea igual de largo a otro tren nuevo que se armó con seis fichas verde claro?



Samuel (7 años) coordinó dos tipos de unidades compuestas, usando para cada una de ellas conteos y haciendo pausa en los múltiplos como se muestra a continuación:

Entrevistador: Un “tren” con tres fichas rojas es tan largo como un tren con dos fichas verde claro, ¿cuántas fichas rojas tendrá un tren para que sea igual de largo a otro tren nuevo que se armó con seis fichas verde claro?

Samuel: [después de varios minutos de mover las fichas mientras pensaba una solución, toma dos fichas verdes y hace un conteo en el aire como para saber la cantidad de veces que las usará. Enseguida las mantiene fijas y empieza a colocar las tres rojas contándolas] 1, 2, 3, pausa [vuelve a la primera ficha y cuenta]; 4, 5, 6, pausa [nuevamente vuelve a la primera ficha]; 7, 8, 9.

Entrevistador: ¿Por qué supiste que eran nueve?

Samuel: Me mantuve concentrado en éstas [señalando las rojas] contándolas, y en éstas [señalando las verdes] para que no me pasara.

Entrevistador: ¿Qué estabas contando de las verdes?



Imagen 7

Samuel: Hasta llegar al seis.

Entrevistador: ¿Cómo lo hiciste?

Samuel: Primero pensé que acá estaba *un, dos* [junta las dos fichas verdes y cuenta tres rojas], 4, 5, 6, y me puse a pensar en *este que eran cuatro* (señala nuevamente las dos fichas verdes) y *el tercero era el último*, antes eran 4 y aquí eran 5 y 6 [haciendo referencia a las regletas verdes].

El conteo realizado por Samuel para las fichas rojas continuó siendo de uno en uno haciendo pausa en los múltiplos, mientras que su conteo de fichas verdes fue de dos en dos. Las dos fichas verdes parecen haberse configurado como unidad cuando Samuel expresó *primero pensé que acá había un dos*. Además llevó en su cuenta un tercer conteo que es el de las veces que contó sus unidades de tres (fichas rojas) y de dos (fichas verdes) que se observa cuando dice “y *el tercero era el último*”. Samuel reinterpretó la situación en términos de una nueva unidad, “dos verdes, tres rojas”, que está contando a la par.

Esta manera de proceder de Samuel podría considerarse como una de las estrategias previas a la que menciona Lamon (1994) como estrategia intra de multiplicación por un escalar. En el nivel de Samuel, él toma tres “dos” y cuenta a la vez tres “tres”, posteriormente esto puede convertirse en una estrategia que consiste en aplicar un mismo operador en los dos espacios de medida (espacio de medida de regletas verdes y espacio de regletas rojas, 2×3 verdes implica 2×3 rojas).

Por su parte, Santiago *cuenta también de manera simultánea dos tipos de unidades compuestas* pero a diferencia de Samuel contó los dos grupos usando múltiplos, como se muestra en el siguiente fragmento de entrevista:

Entrevistador: Un tren con tres fichas rojas...

Santiago: Es igual a dos verde claro.

Entrevistador: ¿Cuántas rojas se necesitan para armar un tren que sea igual de largo a otro con seis verde claro?

Santiago: [Movi6 sus dedos, se quedó pensando y murmur6] 2, 4, 6. [A continuación *movió sus mismos tres dedos de la mano izquierda y murmur6*: 3, 6, 9. Luego en voz alta afirma: nueve].



Imagen 8

Entrevistador: ¿Cómo lo pensaste?

Santiago: *Porque si dos son tres, los otros dos serían seis y los otros dos serían nueve.*

En la forma de trabajar de Santiago es posible identificar tres momentos de formación y uso de unidades compuestas:

Momento 1: Establece una unidad “dos verdes claro” y analiza cuántas veces “mide” a seis verde claro. Se evidencia cuándo señala con tres dedos y expresa 2, 4, 6. Tres veces dos verde claro equivalen a seis verde claro.

Momento 2: La unidad “tres rojas” debe ser iterada también tres veces como se hizo con la unidad “dos verdes”. Al iterar tres veces “tres rojas” se obtiene nueve rojas.

Momento 3: Cuando Santiago explica cómo resolvió la situación, ha construido una nueva unidad a partir de la relación “dos-tres”. Justifica: “porque si dos son tres, cuatro son seis y seis son nueve”. Se evidencia una estrategia de uso coordinado de unidades compuestas.

4.3. RELACIÓN ENTRE LOS NIÑOS Y LAS ESTRATEGIAS UTILIZADAS

Con el propósito de describir diversas estrategias empleadas por los estudiantes en las diversas situaciones planteadas (véase Tabla II) y evidenciar algunas diferencias básicas en el abordaje de las mismas, especialmente el surgimiento de las estrategias emergentes, en esta sección se presentan tres casos, dos de ellos a partir de las entrevistas individuales [Lorenzo y Samuel], una en cada institución, y el otro a partir de una entrevista en pareja [Avril y Tomás]. Mientras Lorenzo en las diversas situaciones fundamentalmente hace uso del conteo, Samuel logra desplegar una de las estrategias emergentes: *usar de manera coordinada unidades compuestas* (sin dejar de lado su estrategia de contar de uno en uno haciendo pausa en los múltiplos) y, por su parte, Avril y Tomás logran desplegar dos estrategias emergentes: *usan de manera coordinada unidades compuestas* en una de las situaciones y, en otra, logran reconocer una *equivalencia entre distintos tipos de unidad*. En el análisis de las entrevistas de parejas se buscó, en particular, identificar si sus integrantes movilizaban estrategias diferenciadas o construían una entre los dos, como se reporta en el tercer caso que se presenta en esta sección.

SITUACIÓN	ESTRATEGIAS USADAS POR LOS NIÑOS		
	Lorenzo	Samuel	Avril y Tomás
“Haciendo pulseras”: Con 24 chaquiras rojas se harán pulseras, colocando 4 chaquiras en cada pulsera. ¿Cuántas pulseras se pueden hacer con las chaquiras?	Doble conteo reiniciando en uno.	Doble conteo haciendo pausa en los múltiplos.	Doble conteo reiniciando en uno.
“Repartiendo dulces”: Voy repartir 12 dulces entre mis cuatro amigos. Si todos deben recibir la misma cantidad, ¿cuántos le debo dar a cada uno?	Doble conteo reiniciando en uno.		
“Descubriendo fichas”: <i>Tarea 1:</i> En la imagen pueden ver un grupo de fichas. Detrás de esta tarjeta azul escondí otros tres grupos de fichas iguales al grupo que pueden ver. ¿Cuántas fichas hay escondidas? ¿Cuántas fichas hay en total? <i>Tarea 2:</i> En la imagen pueden ver un grupo de fichas. Detrás de la tarjeta azul escondí otros cinco grupos de fichas iguales al grupo de fichas que pueden ver. Entre las fichas que pueden ver y las que están escondidas, ¿cuántas hay en total?	Doble conteo por múltiplos.	Doble conteo haciendo pausa en los múltiplos.	

4.3.1. EL CASO DE LORENZO

Al abordar las situaciones “Haciendo pulseras” y “Repartiendo dulces”, Lorenzo se mostró como contador perceptual usando estrategias de *doble conteo reiniciando en uno* utilizando material concreto. No se observó la necesidad de verificar la totalidad de las 24 unidades simples en el caso de las pulseras o de las 12 en el caso de los dulces, de esta manera sólo fue necesario formar unidades compuestas y contarlas como tales. Cuando Lorenzo pasó a abordar la situación “Descubriendo fichas” y “Empacando pastelitos”, evidenció haber identificado y usado las unidades de tres o las unidades de cuatro, que coordinó a lo largo de las 15 o 12 unidades simples, respectivamente, usando estrategias de *doble conteo por múltiplos*, completando las series con conteos de uno en uno en los casos en los que aún no tenía las secuencias completas.

En contraste con lo anterior, cuando Lorenzo pasó a abordar las situaciones de los trenes no evidenció haber establecido las relaciones necesarias entre los tamaños de las regletas para construir y usar unidades compuestas. En este sentido, es posible que las unidades utilizadas en las situaciones anteriores solamente fueran unidades compuestas experienciales (Steffe, 1994), que debieron ser formadas en el abordaje de cada situación para operar con ellas.

De acuerdo con lo ocurrido, es probable que las estrategias usadas por Lorenzo como contador perceptual o figurativo le permitieron dar respuesta a las preguntas formuladas en contextos discretos, en los que podía tomar los objetos de uno en uno para ser contados y por ende conformar las unidades, pero no a las preguntas formuladas en contextos continuos, en las que se requería establecer relaciones entre unidades de medida y construir nuevas unidades.

4.3.2. EL CASO DE SAMUEL

Al abordar la situación de las pulseras, Samuel empezó realizando un conteo de uno en uno reiniciando en uno (no doble conteo), sin embargo, debido a que la cantidad de fichas que se le entregó fue mayor a 24 y a la intervención de la entrevistadora para recalcar que la totalidad de las chaquiras era de 24, cambió su estrategia por la de *doble conteo haciendo pausa en los múltiplos*. Esta misma estrategia la utilizó al abordar la mayoría de situaciones, de manera que las unidades compuestas (cuatro chaquiras/pulsera; tres fichas/fila; cuatro pasteles/por plato) no solamente existieron de manera independiente, sino también como parte de un todo (grupos de cuatro en 24, grupos de tres en 15, grupos de cuatro en 12).

En la situación de los dulces la estrategia no fue la misma, pues lo primero que hizo fue contar 12 fichas para representar los dulces y colocarlas de manera que pudiera organizar grupos iguales. Por la forma como dispuso las fichas pareciera que más que contar de uno en uno, se ocupó de que los grupos fueran del mismo tamaño en una especie de subitización.

En el abordaje de las dos primeras situaciones con regletas “Armemos trenes” y “Sigamos armando trenes”, aunque tuvo en cuenta las relaciones dadas en la información, no dejó de lado lo perceptual y acudió a experiencias de verificación como: 1) En la situación “Armemos trenes” colocó frente a la regleta rosada una regleta blanca y una roja, completando así lo que serían tres regletas blancas, y en seguida movió la regleta blanca a continuación de la roja para verificar que completaría “cuatro regletas blancas” que equivalían a un tren rosado; 2) comparar su tren formado por una regleta rosada y una roja para que efectivamente fuera igual de largo a uno verde al colocar las fichas frente a frente. Finalmente en los dos casos realizó *conteos de uno en uno con reconocimiento de relaciones*.

Por otra parte, al abordar la situación “Un nuevo reto para construir trenes” movió sus fichas para encontrar la forma de contar las unidades rojas y verdes al mismo tiempo. La unidad “dos verdes”, posiblemente por su tamaño, pudo ser contada como unidad abstracta “un dos”, pero la unidad “tres rojas” requirió para Samuel ser armada siempre para contarla, acudiendo nuevamente a su conteo de *uno en uno haciendo pausa en los múltiplos*.

De manera general, se observó que Samuel construyó unidades experienciales en contextos discretos (por ejemplo en las situaciones de las fichas y de los pastelitos) y continuos (en las situaciones con regletas) como parte de sus estrategias de *doble conteo de uno en uno haciendo pausa en los múltiplos*, o en los conteos a lo largo de las unidades formadas con las regletas en los casos de los trenes.

4.3.3. EL CASO DE AVRIL Y TOMÁS

Avril y Tomás se mostraron como contadores perceptuales en el momento de abordar la primera situación “Haciendo pulseras”, pues armaron los grupos y los contaron usando una estrategia de *doble conteo reiniciando en uno*. De manera similar procedieron en la situación “Repartiendo dulces”.

En las siguientes situaciones, mientras que Avril usaba estrategias basadas en conteos perceptuales, formando unidades compuestas experienciales, Tomás parecía formar unidades compuestas abstractas y operaba con éstas. Por ejemplo, en la situación “Descubriendo fichas”, Tomás hizo *conteo por múltiplos de tres*, pero también explicó su manera de proceder acudiendo a un *doble conteo reiniciando en uno*, mientras que Avril hizo sus dibujos de las fichas. En la situación “Armemos trenes”, Avril, apoyándose en la imagen, explicó su forma de proceder: *Me paré en el tren rosado y empecé a contar, hice cuadritos en mi mente*. Sin embargo, esta estrategia no le fue útil en el abordaje de la situación “Sigamos armando trenes”, pues cuando intentó dibujar los cuadritos (regletas blancas) en la regleta verde, le daba como resultado cinco, hecho que puso a dudar a Tomás, pues no coincidía con los cálculos que estaba haciendo. Para completar su proceso, Tomás representó cada ficha roja como equivalente a dos blancas y las encerró en un rectángulo. Con esta ayuda Avril movilizó sus estrategias para contar tres grupos de dos blancas (equivalente a seis regletas blancas) como un grupo al que le podía agregar otro grupo de tres grupos de dos blancas (otras seis regletas blancas). Las explicaciones de Tomás, en las que evidenció reinterpretar en términos de unidades de dos y además representar, le permitió usar estas representaciones como evidencia de lograr establecer alguna equivalencia entre distintos tipos de unidad.

De manera general, Lorenzo, Samuel y Avril acudieron a conteos usando o bien material concreto o bien las figuras. La construcción de sus unidades compuestas se fue dando de manera experiencial para luego hacer *dobles conteos reiniciando en uno, dobles conteos haciendo pausa en los múltiplos o dobles conteos por múltiplos*. Las estrategias usadas en contextos discretos por Lorenzo y Avril no les fueron útiles a la hora de abordar las situaciones de contextos continuos. Sin embargo, Avril tuvo la posibilidad de movilizar nuevas estrategias a partir de trabajar conjuntamente con Tomás. Por su parte, Tomás mostró siempre habilidad para realizar sus conteos por múltiplos y explicar su estrategia acudiendo a *dobles conteos reiniciando en uno o dobles conteos haciendo pausa en los múltiplos*.

Las situaciones de los trenes requirieron del establecimiento de relaciones entre los tamaños de las regletas, de manera que los conteos perceptuales, sin el reconocimiento de tales relaciones, ya no fueron

útiles en términos de lograr la respuesta esperada. Así, el abordaje de estas situaciones dio lugar a la identificación de dos nuevas estrategias que se constituyen en un aporte importante de esta investigación: “equivalencia entre distintos tipos de unidad y/o reinterpretación en términos de las nuevas unidades” y “uso coordinado de unidades compuestas”. En el caso de Tomás se observó evidencia de la forma como estableció equivalencia entre los distintos tipos de unidad, y en el caso de Samuel, una vez establecidas las relaciones entre los tamaños de las regletas (al resolver la situación que correspondería al cálculo del término desconocido de una proporción), continuó usando *doble conteo haciendo pausa en los múltiplos*, pero a la vez incorporando las unidades compuestas de dos dando lugar al uso coordinado de dos tipos de unidades.

4.4 RELACIÓN ENTRE LAS SITUACIONES Y LAS ESTRATEGIAS UTILIZADAS

Se pudo establecer relación entre la naturaleza de las situaciones propuestas y las estrategias utilizadas por parte de los niños en su abordaje. En las situaciones de isomorfismos de medidas que corresponderían a división partitiva y cuotitiva predominaron estrategias de *doble conteo reiniciando en uno*, y en las que usualmente se resolverían por multiplicación predominaron las de *doble conteo haciendo pausa en los múltiplos* y *doble conteo por múltiplos*, como se muestra en la Tabla III:

SITUACIÓN	ESTRATEGIAS PREDOMINANTES
“Haciendo pulseras” (División cuotitiva)	Doble conteo reiniciando en uno (seis entrevistas). Doble conteo haciendo pausa en los múltiplos (dos entrevistas). Doble conteo por múltiplos (dos entrevistas).
“Repartiendo dulces” (División partitiva)	Doble conteo reiniciando en uno (seis entrevistas). Reparto de uno en uno con reconocimiento de grupos o de relaciones (una entrevista). Doble conteo por múltiplos (dos entrevistas) Uso coordinado de unidades compuestas (una entrevista).
“Descubriendo fichas”	Conteo de uno en uno sin reconocimiento de grupos o de relaciones (una entrevista). Doble conteo haciendo pausa en los múltiplos (dos entrevistas). Doble conteo por múltiplos (siete entrevistas).
“Empacando pastelitos”	Conteo de uno en uno sin reconocimiento de grupos (una entrevista). Doble conteo haciendo pausa en los múltiplos (dos entrevistas). Doble conteo por múltiplos (siete entrevistas).
“Armemos trenes”	Conteo de uno en uno sin reconocimiento de grupos (una entrevista). Conteo de uno en uno con reconocimiento de grupos o de relaciones (cinco entrevistas). Equivalencia entre distintos tipos de unidad y/o reinterpretación en términos de las nuevas unidades (cuatro entrevistas).
“Sigamos armando trenes”	Conteo de uno en uno sin reconocimiento de grupos o de relaciones (cuatro entrevistas). Conteo de uno en uno con reconocimiento de grupos o de relaciones (una entrevista). Equivalencia entre distintos tipos de unidad y/o reinterpretación en términos de las nuevas unidades (cinco entrevistas).
“Un nuevo reto para construir trenes”	Conteo de uno en uno sin reconocimiento de grupos o de relaciones (dos entrevistas). Conteo de uno en uno con reconocimiento de grupos o de relaciones (una entrevista). Uso coordinado de unidades compuestas (cinco entrevistas). En las otras entrevistas no se logró clasificar las estrategias utilizadas.

Los niños pudieron identificar rápidamente las unidades compuestas involucradas en las situaciones “Descubriendo fichas” (dos fichas/fila o tres fichas/fila) y “Empacando pastelitos” (cuatro pasteles/plato) para movilizar estrategias de doble conteo haciendo pausa en los múltiplos (en dos entrevistas, una de ellas la de Samuel) o doble conteo por múltiplos (siete entrevistas, entre ellas la de Lorenzo y la de Avril y Tomás).

En el abordaje de la situación de división partitiva “Repartiendo dulces” es importante aclarar que algunos niños primero conformaron la unidad para responder la pregunta formulada acudiendo a ensayo y error y continuaron como si se tratara de un problema de división cuotitiva. Estos niños podrían estar usando secuencias tácitamente anidadas de manera que una vez que han encontrado el tamaño de la unidad (tres dulces/por niño), verifican cuántas de éstas se pueden formar con las 12 unidades simples (dulces). Este hecho corrobora lo dicho por Steffe (1994), quien afirma que los niños con una secuencia tácitamente anidada resolverían un problema de división partitiva como si fuera de división cuotitiva una vez establecido el tamaño de la unidad.

En las dos primeras situaciones de los trenes los niños pusieron en uso la primera de las estrategias emergentes, *equivalencia entre distintos tipos de unidad y reinterpretación en términos de las nuevas unidades* [Avril en la segunda situación y otros niños en las dos situaciones], y en la tercera situación se usó la otra estrategia emergente, *uso coordinado de unidades compuestas* [Samuel, Avril y Tomás, y Gabriel]. En estos mismos problemas también se pudo establecer que algunos niños que pudieron identificar, construir o usar las unidades en las demás situaciones (de contextos discretos), no lo lograron en este caso (de contextos continuos), pues trataban de hacerlo a partir de la imagen con algunas marquitas o usando las regletas pequeñas intentando medir las grandes, método que no resultaba funcional en términos de precisión [caso de Lorenzo]. Otros niños lograron establecer relación entre los tamaños de las regletas (por ejemplo, dos regletas verde claro equivalen a tres regletas rojas) y reinterpretar las situaciones en términos de regletas rojas o verdes según el caso [casos de Samuel y de Avril y Tomás].

5. Resultados y consideraciones finales

A partir del análisis sobre la forma como los niños abordaron las situaciones multiplicativas que involucraron contextos continuos (situaciones con regletas) se observó la emergencia de dos tipos de estrategias: “equivalencia entre distintos tipos de unidad y/o reinterpretación en términos de las nuevas unidades” y “uso coordinado de unidades compuestas”. Esta segunda ocurrió cuando los niños resolvieron la situación de cálculo del término desconocido de una proporción en la que el doble conteo realizado por ellos considera dos tipos de unidades compuestas. En las demás situaciones multiplicativas se pudo observar que movilizaron básicamente estrategias de doble conteo de acuerdo con las unidades correspondientes a cada isomorfismo de medidas, de manera que en las situaciones de división partitiva y división cuotitiva predominaron estrategias de doble conteo reiniciando en uno, y en las situaciones de multiplicación, debido a que ya estaban dadas las unidades, procedieron a contar de uno en uno haciendo pausa en los múltiplos o mediante conteo por múltiplos de acuerdo con secuencias que posiblemente habían construido previamente los niños.

Se observó también que los niños pudieron identificar las unidades contables dentro de cada situación de contextos discretos, mientras que en las situaciones de contextos continuos (situaciones de trenes) resultó complejo para algunos establecer relaciones entre los tamaños de las regletas. Sin embargo, quienes lograron establecer relaciones mostraron una reinterpretación de las situaciones en términos de las nuevas unidades.

Uno de los principales resultados del presente trabajo lo constituye la evidencia aportada en relación con dos estrategias asociadas al proceso de *normación*, a saber: *equivalencia entre distintos tipos de unidad* en la que los niños reconocen o establecen una nueva unidad y reinterpretan la situación en términos de la nueva unidad, y *uso coordinado de unidades compuestas* en la que establecen dos tipos de unidades compuestas, reinterpretan la situación en términos de estas nuevas unidades y operan con ellas de manera coordinada mediante doble conteo.

Para futuras investigaciones en esta línea se plantean dos interrogantes que surgieron en el desarrollo de este trabajo: 1) Si la unitización ocurre de manera natural en los niños cuando abordan situaciones multiplicativas, ¿cómo se pueden aprovechar estos procesos para la dinamización del aprendizaje de las estructuras multiplicativas? 2) Teniendo en cuenta que al proponer una situación de cálculo del término desconocido de una proporción (por ejemplo, en la situación “Un nuevo reto para construir trenes”), los niños movilizaron estrategias de uso coordinado de unidades compuestas, reinterpretando la situación en términos de las nuevas unidades, ¿cómo pueden ser aprovechadas dichas estrategias para el abordaje de la proporcionalidad en la escuela?

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del Programa de Maestría en Educación, énfasis en Educación Matemática, de la Facultad de Ciencias y Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá (Colombia).

Referencias

- Bosch, A., Castro, E. y Segovia, I. (2007). El pensamiento multiplicativo en los primeros niveles: una investigación en curso. *PNA*, 1(4), 170-190.
- Bosh, M. (2012). Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y multiplicativo en los primeros niveles. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1 (1), 15-37.
- Caballero, S. (2005). *Un estudio transversal y longitudinal sobre los conocimientos informales de las operaciones aritméticas básicas en niños de educación infantil* (Tesis doctoral no publicada). Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.
- Carpenter, T., Ansell, E., Franke, M., Fennema, E. & Weisbeck, L. (1993). Models of Problem Solving: A Study of Kindergarten Children's Problem-Solving Processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(5), 427-440.
- Carpenter, T., Fennema, E., Franke, M., Levi, L., & Empson, S. (2015). *Children's Mathematics Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth, uk: Heinemann.
- Castro, C., y Hernández, E. (2014). Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil. *PNA*, 8 (3), 99-114.
- Euclides (300 A.C./1991). *Elementos*. Madrid, España: Gredos.
- Goldin, G. (1998). Observing Mathematical Problem Solving Through Task-Based Interviews. In A. Treppo (Ed.), *Qualitative Research Methods in Mathematics Education. Monograph 9, Journal for Research in Mathematics Education* (pp. 40-62). Reston, va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.). *The Development Multiplicative Reasoning in Learning of Mathematics* (pp. 89-121). New York: State University of New York Press.
- Lamon, S. (1996). The development of unitizing: It's role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (2), 70-93.

- McCloskey, A. & Norton, A. (2009). Using Steffe's Advanced Fraction Schemes. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15 (1), 44-50.
- Mulligan, J. & Watson, J. (1998). A Developmental Multimodal Model for Multiplication and Division. *Mathematics Education Research Journal*, 10 (2), 61-86.
- Norton, A. & McCloskey, A. (2008). Modeling students' mathematics using steffe's fraction schemes. *Teaching Children Mathematics*, 15 (1), 48-54.
- Olive, J. (2001). Children's Number Sequences: An Explanation of Steffe's Cosntructs and an Extrapolation to Rational Numbers of Arithmetic. *The Mathematics Educator*, 11 (1), 4-9.
- Rojas, P., Romero, J., Mora, L., Bonilla, M., Rodríguez, J. y Castillo, E. (2011). *La multiplicación como cambio de unidad: estrategias para promover su aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Steffe, L. (1994). Children's multiplying schemes In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 3-40). Albany, ny: suny Press.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2-3), 133-170.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. Ciudad de México, México: Trillas.
- Wright, J., Mulligan, J. & Gould, P. (2000). Extending the learning framework to multiplication and division. In J. Wright, J. Narland & A. Staffod (Eds.), *Assessment for teaching and intervention* (pp. 154-176). Londres, Inglaterra: pcp.