

GUSTAVO-ADOLFO MARMOLEJO, MARÍA TERESA GONZÁLEZ ASTUDILLO

CONTROL VISUAL EN LA CONSTRUCCIÓN DEL ÁREA
DE SUPERFICIES PLANAS EN LOS TEXTOS ESCOLARES.
UNA METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

VISUAL CONTROL IN THE CONSTRUCTION OF THE AREA OF TWO-DIMENSIONAL
PLANE FIGURES, IN TEXTBOOKS. AN ANALYSIS METHODOLOGY

RESUMEN

Para construir el concepto de área de superficies planas, los libros de texto proponen tareas en las que se proporciona información sobre cómo ver las figuras. Deben caracterizarse los elementos y estrategias empleadas por los libros para privilegiar ciertos tipos de visualización sobre otros, y deben ser analizados los tipos de control visual imperantes. El modelo de análisis aquí presentado incluye una adaptación de los referentes teóricos expuestos por Duval (1995, 2003, 2005), sobre la visualización asociada a las figuras geométricas, y la noción de estructura de control de Balacheff y Gaudin (2010), sobre la existencia de ciertos elementos que guían las maneras de proceder de los estudiantes al enfrentarse con actividades matemáticas.

PALABRAS CLAVE:

- *Visualización*
- *Estructura de control visual*
- *Textos escolares*
- *Áreas de superficies planas*

ABSTRACT

To construct the concept of plane surfaces area, textbooks propose activities in which some information about how to see the figures is provided. The elements and strategies showed by the books, that favor some types of visualization above others, must be characterized and the types of visual control commanding must be analyzed. The model of analysis presented here includes an adaptation of the theoretical model exposed by Duval (1995, 2003, 2005), about the visualization associated with geometrical figures, and the notion of control structure from Balacheff and Gaudin (2010), about the existence of some elements that guide the ways students use to proceed when they are confronted with mathematical activities.

KEY WORDS:

- *Visualization*
- *Visual control structure*
- *Textbooks*
- *Plane surfaces area*



RESUMO

Para construir o conceito de área de superfícies planas, os livros didáticos propõem tarefas nas quais é dada a informação sobre como ver as figuras. Devem ser caracterizados os elementos e estratégias empregadas pelos livros para privilegiar uns tipos de visualização sobre outros e devem ser analisados os tipos de controle visual imperantes. O modelo de análise aqui apresentado inclui uma adaptação dos referentes teóricos expostos por Duval, (1995, 2003, 2005), sobre a visualização associada às figuras geométricas, e à noção de estrutura de controle de Balacheff e Gaudin, (2010) sobre a existência de certos elementos que guiam as maneiras de proceder dos estudantes quando se deparam com atividades matemáticas.

PALAVRAS CHAVE:

- *Visualização*
- *Estrutura de controle visual*
- *Textos escolares*
- *Áreas de superfícies planas*

RÉSUMÉ

Pour construire le concept d'aire de surfaces planes, les manuels scolaires proposent des activités qui fournissent des informations sur comment afficher des figures planes. Les éléments et les stratégies employées par les livres à favoriser certains types de visualisation-dessus des autres doivent être qualifiés et les types de contrôle visuel commandant doivent être analysés. Le modèle d'analyse présenté ici comprend une adaptation du cadre théorique présenté par Duval (1995, 2003, 2005) à l'écran associé à des figures géométriques et la notion de structure de contrôle de Balacheff et Gaudin (2010) sur l'existence de certains éléments qui guident les moyens de procéder de les étudiants quand ils sont confrontés à des activités mathématiques.

MOTS CLÉS:

- *La visualisation*
- *Le contrôle visuel*
- *Manuels structure*
- *L'aire de surfaces planes*

1. INTRODUCCIÓN

La geometría es una de las ramas de las matemáticas que genera una particular preocupación en los educadores matemáticos, dado su abandono como objeto de estudio en los currículos escolares desde la segunda mitad del siglo XX. Tal como señala Villani (1998) esto se ve reflejado en las encuestas nacionales e internacionales que evalúan los conocimientos matemáticos de los estudiantes; en ellas, la geometría es totalmente ignorada o se incluyen muy pocos ítems de geometría. En algunos casos las preguntas tienden a ser confinadas a algunos

“hechos” elementales sobre figuras simples y sus propiedades; además el desempeño de los estudiantes es relativamente pobre. Actualmente existe en la comunidad matemática internacional una unanimidad en la revitalización de la geometría en todos los niveles escolares.

La comprensión de los fenómenos asociados a la enseñanza y aprendizaje de la geometría exige considerar el estudio de tres actividades cognitivas básicas: el razonamiento, la construcción y la visualización (Duval, 1998), cada una con funciones epistemológicas específicas. Se considera que la enseñanza y aprendizaje de la geometría exige, por un lado, el desarrollo de las tres actividades, lo cual ocurre de manera separada (Duval, 1998); por el otro, que en razón a las dificultades inherentes al desarrollo de cada proceso la visualización podría privilegiarse en la enseñanza inicial de la geometría en la escuela (Duval, 1998). La visualización alude a las representaciones espaciales (figuras, gráficos cartesianos, tablas, esquemas...) y permite “la ilustración de proposiciones, la exploración heurística de situaciones complejas, echar vistazos sinópticos sobre ella o realizar verificaciones subjetivas” (Duval, 1998, p. 37).

La visualización adquiere matices y características diferentes según el tipo de registro semiótico considerado (Duval, 1998, 2003). Las que se han considerado en esta investigación son las figuras geométricas, en particular, aquellas de naturaleza bidimensional. Se considera que este tipo de representaciones son soportes intuitivos fundamentales para dotar de sentido y significado a los conceptos matemáticos, y facilitar así el aprendizaje. Además, las figuras coadyuvan en la resolución de un problema o en la búsqueda de una demostración, para lo que es necesaria una conducta de abducción, que consiste en delimitar de entrada la clase de hipótesis o alternativas que han de considerarse (Duval, 1999). Hablar del papel heurístico de las figuras alude a que la conducta de abducción es la que guía la deducción.

En las tres últimas décadas la visualización en educación matemática ha sido estudiada desde acepciones distintas; tal es el caso de Zimmermann y Cunningham (1991), Gutiérrez (1996), Cantoral y Montiel (2003), Arcavi (2003) y Presmeg (2006), entre otras. En este documento, adaptando la definición de visualización de Duval (1995, 1998, 2003, 2005), entendida ésta como una actividad cognitiva que permite: 1) el reconocimiento o discriminación de todas las organizaciones posibles de una configuración geométrica, además de aquellas que se imponen con el primer golpe de vista y 2) la discriminación de las modificaciones de naturaleza configuracional, así como las extrapolaciones susceptibles de ser aplicadas sobre la figura que se estudia.

Debido a la complejidad y al papel que desempeña la visualización en la construcción de objetos matemáticos consideramos, igual que Marmolejo y Vega (2012), que su estudio debe tomarse en consideración a lo largo de toda

la educación básica. El área de superficies planas es un contenido propicio para trabajar desde la visualización, no sólo por tratarse de un tópico cuya construcción se realiza durante la mayor parte de la educación básica, sino porque procesos como la construcción de la magnitud área, la medida de cantidades de área y la diferenciación entre el área y el perímetro de una figura, suscitan la aplicación de operaciones que transforman bidimensionalmente las figuras y el paso de centrar la atención en la superficie de una figura a hacerlo en algunas de sus partes constituyentes de dimensión inferior. Estos aspectos son, uno y otro, determinantes en cualquier investigación que considere la visualización como un objeto de estudio (Duval, 2003, 2005).

Los textos escolares, por otro lado, son uno de los materiales didácticos más usados por los profesores al planificar, preparar y desarrollar sus clases de matemáticas (Schmidt et al., 1996), por lo que se convierten en una fuente para identificar el contenido cubierto (Pepin, Haggarty & Keynes, 2001) y las formas cómo es presentado en el aula escolar (Cobo y Batanero, 2004). Los textos escolares son un importantísimo referente a considerar para comprender muchos fenómenos asociados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular las cuestiones relacionadas con la sinergia existente entre la construcción del área y el rol que desempeña en ella la visualización. En este sentido, algunas cuestiones de interés son las siguientes: ¿en los textos escolares la visualización se plantea como un asunto de reflexión en la construcción del área de superficies planas?, ¿la visualización asociada a las figuras desempeña un papel determinante en la manera en que los textos escolares construyen el área de superficies planas? De ser así, entonces: ¿qué tipo de tareas, según las exigencias visuales que subyacen a su desarrollo o comprensión, son propuestas por los libros de textos en el estudio del área de superficies planas?, ¿en qué tópicos del área se privilegian un tipo de tareas sobre otros?, ¿qué funciones desempeña la visualización en los capítulos donde los textos escolares construyen el área?, ¿es el área un lugar donde es posible el desarrollo de la visualización o, por el contrario, se recurre a ella sin que medie de manera previa cualquier tipo de reflexión que suscite su adquisición?, ¿son los libros de texto el mejor recurso didáctico para favorecer la construcción del concepto de área de figuras planas a través de la visualización?, ¿de qué forma estos recursos didácticos favorecen o entorpecen la construcción autorregulada del concepto de área?

Para dar respuesta a cada uno de los cuestionamientos planteados en el párrafo anterior y teniendo en cuenta que en muchas de las tareas sobre áreas de superficies planas una misma figura puede desencadenar diferentes formas de ver, algunas pertinentes a la tarea planteada, mientras que otras no (Marmolejo y Vega, 2012); es necesario, en primera instancia, diferenciar las formas de visualización que los manuales escolares tienden a privilegiar en las tareas propuestas, de todas aquellas que pueden, asertiva o no asertivamente,

aplicarse en su resolución o comprensión. En consecuencia, se tratará de dar respuesta a la cuestión: ¿cómo y a través de qué estrategias o elementos, estos materiales didácticos suscitan el recurso de la visualización en la comprensión y desarrollo de las tareas propuestas sobre el concepto de área? Es ésta, la base para discriminar las formas de visualización privilegiadas por los textos al construir el concepto de área de superficies planas y, por tanto, responder a las preguntas antes planteadas.

Nuestra investigación pone en evidencia la existencia de una serie de estrategias y elementos presentes en la manera en que se construye el concepto de área de superficies planas en los libros de texto, a través de los cuales se privilegia (explícita o implícitamente) unas formas de ver sobre otras.

2. ESTRUCTURA DE CONTROL VISUAL EN LOS LIBROS DE TEXTO

Flavell (citado por Garofalo & Lester, 1985, p. 163) asume la autorregulación y el control de las acciones cognitivas como elementos claves en el estudio de la meta-cognición. Particularmente la autorregulación considera cómo los alumnos dirigen sus comportamientos proactivamente o seleccionan estrategias para alcanzar sus metas; considera también todo conjunto de retroalimentaciones afectivas, cognitivas, motivacionales y conductuales empleadas (Cleary & Zimmerman, 2004). En este sentido la literatura especializada ha puesto en evidencia que los estudiantes que tienen dificultades en su aprendizaje no suelen entender cómo seleccionar, evaluar y ajustar las estrategias erróneas cuando estas no son eficaces (Zimmerman, 2002) y que la aplicación de estrategias de autorregulación deficiente es un factor que influye significativamente en el bajo rendimiento escolar (Gettinger & Seibert, 2002). Otros estudios muestran que los estudiantes autorregulados, por el contrario, tienden, en sus estrategias de resolución de tareas, a fijar sus metas y aplicar procesos de la auto-observación y auto-evaluación (Cleary & Zimmerman, 2004). También se señala que la autorregulación es susceptible de aprendizaje (Cleary & Zimmerman, 2004) y que los estudiantes que han logrado procesos de autorregulación muestran altos niveles de motivación en la escuela (Schunk, 1996).

En el campo de la educación matemática se ha enfatizado en la necesidad de distinguir entre conocimiento y autorregulación de la cognición para explicar y modificar el rendimiento matemático en la escuela (Garofalo & Lester, 1985). De la misma manera se destaca que la adquisición de conocimiento sobre los propios procesos de pensamiento y el desarrollo de actividades de autorregulación y de supervisión adecuados son elementos a considerar en el aprendizaje de las

matemáticas (Schoenfeld, 1987, 1992). También hay estudios que muestran que los momentos propicios para el desarrollo de la autorregulación son los primeros grados de enseñanza de las matemáticas y la primera infancia (Schneider & Artelt, 2010; Whitebread & Coltman, 2010); incluso otros establecen vínculos entre los procesos de autorregulación y el desarrollo de afecto (Malmivuori, 2006) y la disminución de la ansiedad (Kramarski, Weisse & Kololshi, 2010), en las clases de matemáticas. De igual forma hay investigaciones que evidencian que la descripción detallada de procesos de autorregulación puede ser un apoyo para la aplicación explícita, en el aula, de modelos socioculturales de enseñanza de las matemáticas. En este sentido, Pape, Bell y Yetkin (2003) consideran como factores cruciales a considerar, por los educadores matemáticos, tanto el recurso a múltiples y enriquecedoras representaciones de los objetos en las tareas matemáticas propuestas, como el tipo de discurso usado en el aula, el ambiente de trabajo que propicie el comportamiento estratégico y el apoyo explícito e individualizado de los estudiantes.

Desde un punto de vista diferente, investigaciones como las realizadas por Lester (citada en Schneider & Artelt, 2010) y Kramarski et al. (2010) han tratado la relación entre la resolución de problemas matemáticos y la autorregulación. Lester indica que el conocimiento de una persona acerca de su propia cognición, antes, durante y después de un período de resolución de problemas, así como su capacidad para mantener el control ejecutivo en el sentido de monitoreo y la autorregulación afectan significativamente a la resolución exitosa del problema en desarrollo. Kramarski et al. (2010) tras estudiar los efectos de un entrenamiento meta-cognitivo aplicado a estudiantes de menor y mayor nivel de éxito matemático considera, entre otros aspectos, que los estudiantes meta-cognitivamente entrenados evidencian mayor nivel de rendimiento al resolver problemas matemáticos que aquellos que no lo han sido. Esta tendencia igualmente se ha señalado en los trabajos de Garofalo y Lester (1985) y Schoenfeld (1987).

El control de acciones cognitivas, aspecto a considerar en esta investigación, tiene en cuenta tanto la planificación de comportamientos y selección de acciones como la evaluación de las decisiones realizadas y los resultados de los planes ejecutados (Balacheff & Gaudin, 2010). Al respecto, se ha puesto en evidencia la existencia de *estructuras de control* a través de las cuales el control de acciones cognitivas se ve influenciado y/o dirigido mediante el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Una estructura de control es todo conjunto de elementos y estrategias que en el desarrollo y comprensión de una actividad matemática “permite expresar los medios necesarios para realizar selecciones, tomar decisiones y promover juicios acerca de si una acción es relevante o no, o si un problema está resuelto” (Balacheff & Gaudin, 2010, p. 192). Independientemente de la acción cognitiva, una estructura de control está conformada por uno o varios elementos y/o estrategias que direccionan o enfatizan el control ejercido.

A cada uno de estos elementos y/o estrategias se les designa, a lo largo de este documento, como elementos de control.

Nuestro interés en este artículo recae exclusivamente en la caracterización de los elementos de control y en las clases de control que se suscitan en el desarrollo y comprensión de tareas sobre áreas de superficies planas. Su importancia radica, como haremos alusión en los párrafos siguientes, en que permite diferenciar los tipos de concepciones presentes en los estudiantes (Balacheff & Gaudin, 2010) y estudiar los procesos de refutación, validación y modelización (Burgermeister & Coray, 2008). Igualmente, hace posible discriminar los procesos de verificación (Mesa, 2004), razonamiento (Lithner, 2004) y visualización, privilegiados en los manuales escolares al construir conocimiento matemático.

Para caracterizar las concepciones sobre las funciones que dos parejas de estudiantes franceses ponen en juego al desarrollar tareas específicas en ambientes de geometría dinámica (Cabri-Geometry II), Balacheff y Gaudin (2010) proponen un modelo de concepción en función de las interacciones entre el sujeto y el medio. La caracterización del tipo de problemas propuestos, de las operaciones movilizadas en su desarrollo, de la estructura de control utilizada y de los sistemas de representación, son elementos a considerar para discriminar en detalle unos tipos de concepción de otros. En este sentido, las concepciones evidenciadas por una y otra pareja de estudiantes en la investigación de Balacheff y Gaudin se caracterizaron por la presencia de dos estructuras de control de naturaleza distinta. En una se utilizaba esencialmente el sistema de representación algebraico, control algebraico, es decir, la atención recaía en la búsqueda de la escritura simbólica adecuada de la ecuación. En la otra, se prefiere un control gráfico, vinculado a los sistemas de representación gráfico y algebraico.

En un sentido similar la investigación de Burgermeister y Coray (2008) recae en la adquisición de estrategias eficaces para la selección y el control, tanto en procesos de refutación y de validación, como de modelización. Se alude a la noción de proceso de control en términos semejantes a como lo hace Balacheff y Gaudin con la estructura de control: “conjunto de medios, adecuados o no, eficaces o no, utilizados por los alumnos en una situación de resolución de problemas para responder a sus dudas cuando una resolución está en proceso de ser elaborada” (Burgermeister & Coray, 2008, p. 68). En este sentido, se considera que el proceso de control está compuesto tanto por elementos prospectivos (estimación a priori del resultado a atender), como retrospectivos (verificación a posteriori) y se considera que los dos tipos de elementos pueden articularse, es decir, que la “confrontación a posteriori de una estimación a priori con el resultado de un cálculo” es posible. De esta manera se discriminan los elementos de control introducidos por estudiantes, al resolver problemas de proporcionalidad entre magnitudes, a través de una doble clasificación: una de naturaleza temporal y la otra espacial. En la primera, se considera que un elemento del proceso de control puede aplicarse al inicio, en el

desarrollo o al final de la resolución. En la clasificación espacial se tienen en cuenta los elementos del proceso de control que se desarrollan. Son tres los aspectos considerados: 1) la planificación del sistema a modelizar (texto del problema y los conocimientos sociales importados por el sujeto), 2) la planificación de los modelos potenciales (operaciones y algoritmos, pero sin las rutinas de la clase de matemática y de los elementos del contrato didáctico usuales que prevalecen) y 3) el espacio de la modelización introducido por los estudiantes, es decir, los elementos de control que se construyen tanto sobre el sistema a modelizar como sobre sus modelos. Fueron tres los elementos de control identificados, los relacionados con: 1) el tipo de procedimiento a inicializar o desencadenar, 2) el procedimiento en curso y 3) la coherencia, es decir, si el resultado es coherente con el contexto o que el mismo resultado puede ser encontrado por dos cálculos diferentes o según el tipo de procedimiento utilizado. A manera de conclusión se considera, por un lado, que “la distinción entre los diferentes roles de los elementos de control – validar o refutar una selección, reforzar una convicción, jamás son tenidos en cuenta por los alumnos... [y] a veces son poco evidentes para los propios profesores” (p. 98). Y, por otra parte, que en los problemas empleados en la enseñanza de proporcionalidad de magnitudes, los medios de validación del modelo adecuado residen, por lo general, o bien en la familiaridad del sujeto con el concepto y con el dominio de experiencias evocadas o en conocimientos científicos aún no estudiados. Estos aspectos, según los autores, deben ser tenidos en cuenta por los manuales y por los educadores para tomar mayores precauciones en la formulación de los enunciados de los problemas.

Investigaciones como las realizadas por Love y Pimm (1996), Mesa (2004, 2010) y Lithner (2004), así como la nuestra, han puesto en evidencia que los libros de texto ejercen control sobre las maneras de proceder en el desarrollo de una actividad matemática. Love y Pimm (1996) señalan que el texto escolar forma o controla la actividad matemática y las respuestas del lector a través de “sentencias escritas en modo imperativo “probar”, “calcular”, “encontrar”, “simplificar”..., junto a las preguntas y a las afirmaciones realizadas” (p. 381). Consideran, además, que en la estructura del texto se presume frecuentemente que la presencia de tales elementos basta para asegurar las formas de proceder privilegiadas por el libro, en consecuencia que “las funciones y tareas explícitas e implícitamente asignadas han sido satisfactoriamente seguidas por el lector” (p. 381). Por otra parte, en relación a la linealidad textual del flujo de lectura privilegiado en un libro de texto estos investigadores señalan que las respuestas presentadas al final del libro junto a las referencias mezcladas, apéndices y notas al pie, y la existencia de márgenes son elementos que rompen la linealidad textual a privilegiar.

Mesa (2004) identifica tres criterios a través de los cuales los textos escolares permiten discriminar si la respuesta encontrada al resolver tareas donde intervienen las funciones es correcta o, por el contrario, el procedimiento desplegado

es inadecuado. Los criterios identificados son: el *proceso* relacionado con la selección de estrategias de solución, presentes en el desarrollo de tareas previas; el *contrato didáctico* (Brouseau, 1982), a través de pistas que suscitan la consideración de acciones y de resultados apropiados; y el *contenido*, es decir, la consideración de teoremas, definiciones o suposiciones en los que se apoya la solución al problema y que deben ser comprobadas para justificar una afirmación. Entre las tareas hay una mayor presencia en las que se establece el control como proceso (55%), frente a aquellas en las que el control es ejercido por el contrato didáctico (28%) o el contenido (17%). Igualmente, señala que entre los libros de texto analizados, muy pocos presentan de forma explícita los elementos que conforman la estructura de control y son muy pocos los libros de texto que incluyen “indicaciones explícitas, para los estudiantes, para controlar sus actividades... o problemas que sean resueltos de más de una forma... o recomendaciones de cuáles respuestas podrían mirar” (p. 281). En consecuencia, se concluye que “las estrategias que muestran a los estudiantes cómo asegurarse de que el procedimiento o la noción usada son apropiadas o que la solución obtenida es correcta, o apropiada para el problema en juego” (p. 281) son muy limitadas.

En un segundo estudio, Mesa (2010) al centrar la atención en los ejemplos de valor inicial (determinación de la solución de una ecuación diferencial que satisface condiciones iniciales dadas) presentados en libros de textos de Cálculo, utilizados en el primer año de pregrado, observó que en este tipo de tarea se “proporciona información explícita para decidir qué hacer para resolver el problema y determinar la respuesta con más frecuencia que para establecer discusiones que permitan reconocer que la solución es correcta o que tiene sentido para la situación dada” (p. 235). También destacó la plausibilidad, la corrección y la interpretación como los tres aspectos que tienden a ser resaltados mediante estrategias de control, para verificar que la respuesta es correcta o que tiene sentido. También se identificó en la investigación que la manera en que se expone la estructura de control en los libros de texto varía según las características del lector al que es dirigido. Así, en los manuales escolares destinados a estudiantes de un mayor nivel matemático, estos elementos se muestran más explícitos que en los destinados a estudiantes con un nivel matemático más bajo.

En un sentido distinto, Lithner (2004) centró su interés en la estructura de razonamiento asociada al estudio del Cálculo en libros de texto usados en Estados Unidos, considerando cuatro aspectos: la situación problemática planteada, la estrategia elegida para desarrollarla, la implantación de la estrategia a seguir y la conclusión encontrada. En esta investigación, a diferencia de Mesa (2004), el interés se centró en las consecuencias de la decisión o del tipo de razonamiento obtenidos, y no en los criterios que rigen las decisiones que toman los estudiantes. Se concluye que la gran mayoría de los ejercicios, presentes en los manuales estudiados, exigían para su resolución la aplicación de razonamientos superficiales,

es decir, tipos de razonamiento guiados por palabras claves, algoritmos o experiencias previas. Únicamente en el 10% de las tareas propuestas era necesario considerar, en el proceso de razonamiento, la aplicación del significado de los conceptos matemáticos en estudio.

En relación a la geometría, en la literatura especializada, no existen informes que indiquen qué elementos generan control, ni cuáles son sus posibles efectos, ni las maneras en que se organizan en las tareas presentadas en los textos escolares. La visualización, al ser una de las principales actividades cognitivas que subyacen al aprendizaje y enseñanza de la geometría (Duval, 1998; Villani, 1998), se impone como un aspecto para el estudio de cómo los manuales escolares ejercen control en su enseñanza. En los textos escolares se observa que para resolver las tareas se pueden seleccionar distintas maneras de ver, acordes con el desarrollo de la problemática o de la tarea presentada, en consecuencia, es factible considerar procesos variados para su desarrollo o comprensión. Sin embargo, este documento pone en evidencia la existencia de elementos en los textos que privilegian alguna de estas formas de ver, frente a otras.

Nuestra investigación se realiza desde la perspectiva del libro de texto, por lo que se trata de caracterizar en detalle: a) los elementos y estrategias utilizados por estos materiales didácticos para controlar las maneras de ver, que es privilegiada por ellos en la construcción del área de superficies y b) las clases de control visual privilegiadas en el desarrollo de dicho tópico. En este sentido, adaptando la definición de estructura de control de Balacheff y Gaudin (2010), consideramos la *estructura de control visual* como todo conjunto de elementos y estrategias a las que recurren, explícitamente o implícitamente, los textos escolares para expresar los caminos visuales a privilegiar en el desarrollo y comprensión de las tareas propuestas. A cada una de los elementos y estrategias que caracterizan una estructura de control visual se les denomina *elementos generadores de control visual*. Es el caso de cada una de las categorías que constituyen la metodología de análisis descrita en el apartado siguiente: *procedimiento, contenido, visibilidad e iconismo*. En algunos casos los libro de texto recurren a un único elemento de control visual para generar control sobre la manera de ver que se privilegia, en otros, son varios los elementos de control visual que determinan la estructura de control considerada.

3. ELEMENTOS GENERADORES DE CONTROL VISUAL

3.1. *Diseño y validación del instrumento de análisis*

Para el diseño del instrumento de análisis se adaptaron los referentes teóricos que caracterizan la visualización asociada a las figuras geométricas (Duval, 1995,

1999, 2003, 2005) y la noción de estructura de control de Balacheff y Gaudin (2010). Fueron analizadas 2.561 tareas presentes en 35 libros de texto¹ de seis editoriales (tres españolas y tres colombianas) que forman parte de los capítulos de Geometría y Medición donde los textos escolares seleccionados suscitan, explícita o implícitamente, reflexiones sobre la magnitud área y su medida. Las unidades de información consideradas en el estudio están compuestas por las definiciones, los ejemplos y las tareas propuestas por el texto para que el estudiante las realice. La captación y selección de los datos se realizó de forma inductiva, es decir, las categorías de análisis que constituyen el instrumento se extrajeron de los procedimientos de resolución propuestos o exigidos en las tareas de los manuales.

Para dar respuesta a la pregunta ¿cómo y a través de qué elementos o estrategias los manuales escolares suscitan el recurso a la visualización en la comprensión y/o desarrollo de las tareas de sobre áreas de superficies planas? se procedió, por un lado, a un meticuloso seguimiento de las indicaciones dadas en las definiciones y en los procedimientos desarrollados en los ejemplos de los libros. Igualmente, se resolvieron en su totalidad las tareas propuestas por los manuales para los estudiantes. Se consideraron los presupuestos de Duval (1999, 2003) y Padilla (1992) acerca de la existencia de factores que guían o entorpecen las maneras de ver, a considerar en el desarrollo de una actividad matemática (factores de visibilidad). Además, se tuvieron en cuenta los elementos de contraste (líneas resaltadas y punteadas, flechas, introducción de colores, índices, etc.) de las figuras que de una forma u otra determinan aspectos visuales a privilegiar. También se consideraron, en esta etapa de diseño, todos los enunciados y explicaciones realizadas en lengua natural, como toda alusión a imágenes que, en uno y otro caso, determinan acciones y/o situaciones que demarcan elementos visuales a privilegiar en el desarrollo o comprensión de la tarea expuesta. Al final del proceso, fueron cuatro los elementos generadores de control visual encontrados en los libros de texto: *procedimiento*, *contenido*, *visibilidad e iconismo* (se describen en el siguiente apartado). Los dos primeros coincidieron con los expuestos por Mesa (2004), al describir la estructura de control relacionada con la discriminación de procesos de verificación inmersos en la construcción de funciones en los manuales escolares. En lo que sigue describimos cada uno de ellos.

¹ Por motivos de espacio ni los libros de texto, ni las editoriales consideradas en la investigación se referencian en este artículo, salvo aquellas de las que se extrajeron las tareas presentadas en la presentación y ejemplificación del instrumento de análisis aquí descrito.

En una segunda etapa del diseño de la metodología de análisis y con el doble objetivo de discriminar tanto la efectividad y coherencia de las categorías y sub-categorías diseñadas, como de identificar las clases de control visual generada en los manuales estudiados, se procedió a revisar las tareas propuestas en uno de los libros analizados, escogido al azar. Se consideraron un total de 61 tareas, para las que se construyó una tabla que permitiera analizar los datos. Cada entrada correspondió a una tarea y al tipo de elemento(s) generador(es) de control visual presentes en ella. Se incluyó una entrada adicional para introducir comentarios acerca de la forma en que los elementos de control visual, presentes en cada tarea, ejercen control sobre la manera de ver privilegiada por el manual. De esta forma, se establecieron tres maneras distintas en que los textos suelen ejercer control visual, a saber: simple o disjunto, por refuerzo y ambiguo.

Finalmente, se validó el instrumento de análisis diseñado. Se realizó a través de tres instancias, en la primera se solicitó a tres investigadores especializados en el campo de la educación matemática, en concreto, en aspectos visuales y en análisis de textos escolares, evaluar la pertinencia y coherencia de las categorías previamente mencionadas. En una segunda instancia, con el propósito de garantizar que el sistema de clasificación propuesto puede ser utilizado por investigadores ajenos al proceso de diseño del instrumento y/o que no están familiarizados con la problemática a tratar, se realizó una fase piloto de codificación con dos especialistas en educación matemática, pero, no en la temática abordada. De manera arbitraria y al azar se seleccionaron 8 tareas presentes en dos capítulos de dos libros de una de las editoriales estudiadas. Tanto la editorial como los dos libros considerados fueron seleccionados de forma aleatoria. Se elaboró un documento con cada una de las categorías y sub-categorías consideradas para esas personas pudieran utilizarlo para codificar las tareas de áreas de superficies planas presentes en los manuales. Finalmente, se diseñó una rejilla para determinar los elementos y clases de control visual introducidos. Para la codificación de dichas tareas, tanto las copias digitales de los capítulos seleccionados como el resumen y la rejilla fueron entregadas a tres investigadores que fueron informados sobre el problema de la investigación y el proceso que estaba en curso. El grado de coincidencia entre los elementos de control visual discriminados por los autores y los identificados por la población participante en las tareas presentadas varió entre el 87,5% y el 100% salvo para el caso del elemento de control visual de procedimiento, el cual fue del 75%. Los resultados obtenidos se utilizaron para refinar las categorías de análisis y para seleccionar ejemplos cada vez más representativos que les caractericen de manera más adecuada y contundente posible.

En una tercera instancia se realizó una segunda fase piloto. Participaron en ella 2 investigadores en educación matemática y 15 estudiantes de tercer semestre

de Licenciatura en Matemática de una Universidad del sur-occidente colombiano. Los investigadores no eran especialistas en la temática abordada y los estudiantes nunca habían reflexionado sobre la visualización y los elementos generadores de control. Se replicó el mismo proceso y las mismas tareas que en la primera fase piloto de codificación. En este caso, el grado de coincidencia entre los elementos de control visual discriminados por los autores y los identificados por la población participante varió entre el 87,5% y el 100%. En consecuencia, podemos afirmar que el instrumento es válido y que puede ser aplicado no solo por especialistas en el tema sino igualmente por investigadores y futuros educadores matemáticos que no han considerado la temática aquí abordada.

3.2. *Instrumento de análisis*

En lo que sigue presentamos un modelo de análisis de libros de texto que aporta importantes elementos para clasificar las tareas de los textos escolares, en función de los elementos generadores de control visual, privilegiados en los libros, y de las clases de control visual, introducidos al construir el objeto métrico de interés en este documento. Para su definición se consideró tanto el lugar de donde proviene el control ejercido, como los elementos o estrategias empleados para guiar al lector en el tipo de visualización a tener en cuenta en la comprensión y/o desarrollo de tareas propias del área de superficies planas.

3.2.1. *Procedimiento*

Se alude al tipo de visualización “mostrado” en una tarea donde el control es ejercido de forma directa, por réplica o por referencia.

En el control de forma directa la tarea es planteada y resuelta en el propio libro de texto, de esta forma se evidencia, en el despliegue del procedimiento, la secuencia visual privilegiada. Aparece este tipo de control cuando una tarea es propuesta y resuelta en el texto escolar, cuando se divide un problema en otros de menor complejidad, que hay que resolver en el orden establecido, o cuando la tarea está propuesta para que se sigan ciertas indicaciones dadas en las que se orienta el procedimiento enunciado a usar. Este último es el caso de tareas de construcción de figuras. También se contemplan dentro de este tipo de control las tareas en las que el libro presenta parcialmente el procedimiento a seguir (ilustración 1). Asimismo está presente cuando se representa, junto a la consigna de la tarea, tanto la figura de partida como la figura de llegada, ambas descompuestas en los mismos tipos de sub-figuras. En este caso basta con comparar entre sí las partes internas de cada una de las figuras, para identificar la manera de transformar una en otra.

Copia y completa para que las figuras resultantes sean simétricas respecto al eje que se señala.

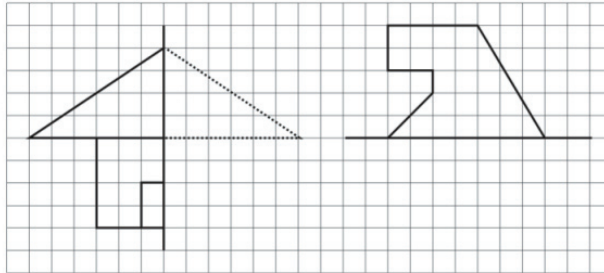


Ilustración 1. Imagen tomada de Matemáticas 4. Serie Abre la puerta. Editorial Anaya (España), p. 167

En el procedimiento por réplica, la tarea propuesta por el libro de texto no señala el tipo de desarrollo que se debe realizar; quien resuelve la tarea debe revisar tareas previas resueltas en el libro de texto para reproducirlas. Para considerar la réplica como un elemento de control, debe tenerse en cuenta que la manera de “replicar” debe aparecer previamente a la tarea que se debe resolver. En la siguiente tarea (ilustración 2) está presente el procedimiento como réplica, puesto que de forma paralela, en la propia tarea, se presentan figuras que si bien no determinan en su totalidad la secuencia visual a considerar, sí determinan aspectos particulares.

Observa la figura. Marisa dice que aquí ve dos triángulos, dos cuadriláteros y dos pentágonos. ¿Los ves tú? Dibújalos por separado.

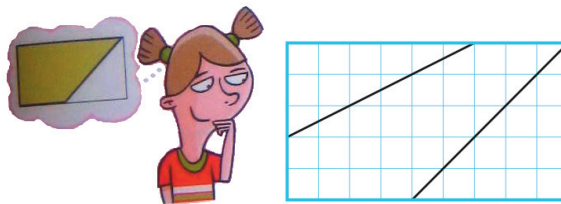


Ilustración 2. Imagen tomada de Matemáticas 3. Serie Abre la puerta. Editorial Anaya (España), p. 169

La réplica también se encuentra presente cuando de manera explícita, en la consigna, se alude a otra tarea que estructuralmente es distinta, o cuando en la tarea propuesta se introduce el mismo tipo de visualización mostrado, evidenciado o sugerido en el desarrollo de tareas previas. En el segundo caso,

aunque no se hace referencia explícita a proceder visualmente, de igual forma que en tareas anteriormente resueltas, la similitud entre las características de las tareas en cuestión (igual organización perceptiva de la figura, mismo tipo de pregunta, igual procedimiento a considerar) son los elementos que implícitamente condicionan al lector.

El procedimiento por referencia alude a que de manera explícita en la consigna de la tarea, en lengua natural o figuralmente, se designan ciertas acciones a aplicar sobre la figura de inicio y/o a los elementos de la figura a considerar, lo que suscita una manera de ver a privilegiar. En lengua natural se puede aludir a *acciones* que determinan la operación a aplicar sobre la figura, entre otras: doblar, completar, ampliar, trazar, armar, construir, dividir, descomponer,...; a *características* de la figura de llegada, por ejemplo, forma de la figura de llegada (designada en lenguaje verbal o figuralmente), partes o número de partes en que se ha de descomponer la figura de partida o unidades bidimensionales, unidimensionales o cero dimensionales que se deben considerar (número de trazos a introducir para fraccionar una figura, número de sub-configuraciones existentes en una configuración dada), la medida de la cantidad de área de la figura de llegada (número de cuadrillos, medios cuadrados, 7 cm^2 , área = ...■); o se realizan ciertas sugerencias que señalan la forma de ver las figuras en cuestión.

- 5** Copia estos polígonos y busca la manera de dividirlos de forma que todas las partes que se obtengan sean paralelogramos:

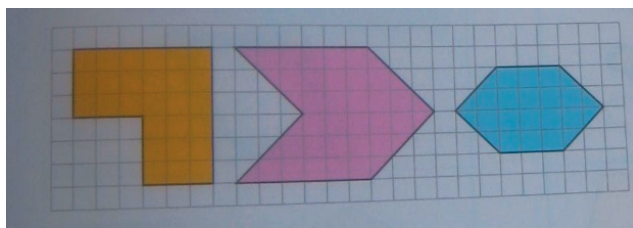


Ilustración 3. Imagen tomada de Matemáticas 3. Serie Abre la puerta. Editorial Anaya (España), p. 181

La ilustración 3 ejemplifica el procedimiento por referencia, como elemento de control visual. Son dos los elementos que le caracterizan, por un lado, en la consigna se hace explícito la acción a considerar (“dividirlos”), por otro, se caracteriza de entrada las partes en que se han de dividir las figuras en cuestión (“sean paralelogramos”). Uno y otro aspecto determinan la forma de ver a considerar en el desarrollo de la tarea propuesta.

3.2.2. *Contenido*

El contenido hace referencia a la visualización, que explícita o implícitamente, subyace en el contenido a tratar, por ejemplo, cuando: (1) se hace alusión a las definiciones de objetos matemáticos, fórmulas o propiedades que el desarrollo de la tarea propuesta exige aplicar, o (2) cuando se alude, bien en la consigna de la tarea propuesta, o bien en el proceso de desarrollo, mostrando definiciones, propiedades o relaciones de otros objetos, distintos a los objetos métricos en cuestión, que han sido previamente expuestos en el libro de texto y que deben considerarse para discriminar instancias particulares de la secuencia visual a privilegiar. Es el caso de las definiciones, entre otras, del área como medida directa y de unidad de medida estándar. En el primer caso, la figura medida tiende a ser vista como una composición de partes de igual forma y tamaño, donde su organización global es ignorada. En el segundo, se induce una visualización de naturaleza estática: la figura que representa la unidad estándar no tiene poder de transformación, por ejemplo, 1 cm^2 tiende a ser asumido exclusivamente como un cuadrado de lados 1 cm , excluyéndose cualquier posibilidad de ser representado a través de figuras de forma distinta (1 cm^2 de forma triangular o rectangular).

3.2.3. *Visibilidad*

La introducción de ciertos elementos en la figura o la consideración de algunas de sus características, privilegian u obstaculizan unas formas de ver en detrimento de otras. Son varios los elementos introducidos en los libros de texto que afectan positivamente a la visibilidad en tareas de áreas de superficies planas: factores de visibilidad (Duval, 1995; Padilla, 1992), elementos de contraste e índices.

Los factores de visibilidad destacan el atributo de forma en una configuración y suscitan la aplicación de operaciones particulares. Por ejemplo, son factores que privilegian la visibilidad (Duval, 1995; Padilla, 1992) el representar la figura de partida fraccionada en las partes a considerar, que las sub-figuras claves sean convexas, que haya complementariedad entre las formas de las partes a reorganizar y que una misma sub-figura no deba ser considerada simultáneamente en dos configuraciones que se comparan entre sí (obstáculo de desdoblamiento). Igualmente se destacan como factores de visibilidad el grado de inclinación de una figura o sub-figura (Duval, 1995; Shepard & Metzler, citado por Duval, 1999), la ubicación del centro de homotecia (Duval, 1995), las características del contorno de la figura en estudio (Duval, 1995; Marmolejo, 2007; Padilla, 1992) y el grado de inclinación del eje de simetría de una figura simétrica (Rock, 1985).

Los elementos de contraste son estímulos que destacan atributos de color y textura en la configuración de partida, es el caso del *contraste en tono y grosor* entre las unidades de dimensión 1 que conforman el contorno de la figura en estudio y las que constituyen el fondo cuadrulado sobre el cual se representa la figura. Esta particularidad suscita reconocer una figura que se encuentra representada en un fondo cuadrulado como un todo global y no ver en ella una composición de cuadrados (Marmolejo, 2007). En las figuras propuestas en las ilustraciones 4 y 5 se puede discriminar el papel que desempeña en uno y otro caso, la presencia o no, de este tipo de contraste. En el primer caso las figuras resaltadas en un tono oscuro tienden espontáneamente a ser discriminadas como la unión de un gran número de pequeños cuadrados. En este caso, figura y fondo se funden en un mismo objeto, el fondo no es un soporte, sino una parte de la figura. En la segunda de las ilustraciones destacan las figuras como si estuviesen “encima” del fondo. Perceptivamente, en este caso, no hay una fusión entre la figura y el fondo.

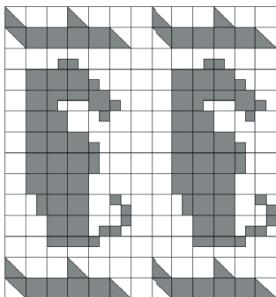


Ilustración 4. Ausencia de contraste en tono y grosor entre los segmentos que constituyen el contorno de la figura y los que conforman el fondo cuadrulado. Imagen tomada de Marmolejo (2007), p. 204

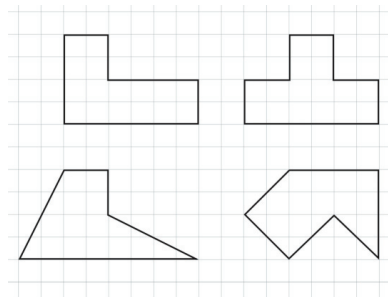


Ilustración 5. Contraste de tono y grosor entre los segmentos que constituyen el contorno de la figura y los que conforman el fondo cuadrulado. Imagen tomada de Marmolejo (2007), p. 100

Otro elemento de contraste es el *color* que resalta ciertas partes de una figura. También destaca como elemento de contraste el *punteado*, es decir, cuando se introducen trazos discontinuos en la figura para centrar la atención, por ejemplo, en posibles fraccionamientos (ilustración 6) o en los ejes de simetría que sobresalen respecto de la figura en estudio, por tanto, se puede ver a la “vez” tanto las partes como el todo (ilustración 7).

Determinar el área de la siguiente figura,

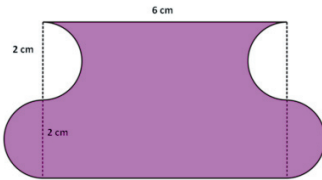


Ilustración 6. Imagen tomada de Matemáticas 1 ESO. Editorial Santillana (España), p. 226

Figura con eje de simetría. Una figura tiene cuando se puede doblar por la mitad y las dos mitades coinciden.

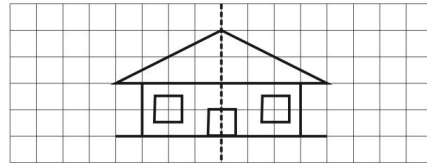


Ilustración 7. Imagen tomada de Matemáticas 4. Editorial Anaya (España), p. 170

Finalmente, se destacan como un elemento que genera una buena visibilidad en las figuras propuestas en los textos, la introducción de elementos suplementarios que resaltan unidades a considerar o que guían la manera de ver (índices), por ejemplo, letras, segmentos continuos, puntos sobredimensionados, flechas curvas y rectas, trazos, nombres de las unidades a las que se alude, valor de la medida de unidad (por ejemplo, 5 cm) y espacios en blanco.

3.2.4. Iconismo

La figura representa o alude a un objeto físico o a una acción física. Las características del objeto o de la acción planteada guían la manera de proceder visualmente.

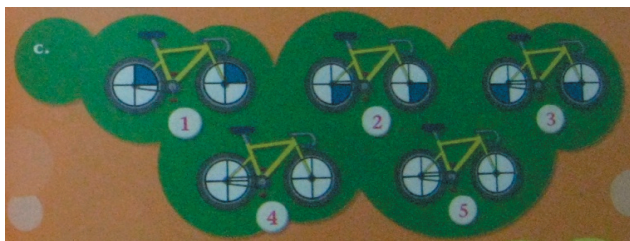


Ilustración 8. Imagen tomada de Matemáticas 2. Editorial Anaya (España), p. 172

Este elemento de control se refleja en la tarea presentada en la ilustración 8. En este caso el manual escolar suscita discriminar y completar una secuencia figural, para lo que se introducen cinco figuras isométricas entre sí. Quien resuelve la tarea debe centrar su atención en las tres primeras y discriminar en la rotación a la operación figural a privilegiar. Las figuras introducidas en el texto representan en cada caso a un mismo objeto físico, la acción que le caracteriza determina el

tipo de secuencia en cuestión: las bicicletas tienden a desplazarse hacia adelante mediante la rotación de sus llantas, de esta forma el punto de rotación es interno a ella y está determinado por el buje de la llanta. Considerar esta característica introducida por las particularidades inmersas al objeto que representan las figuras en estudio, es la manera como el libro de texto guía al lector en la forma de ver a tener en cuenta en el desarrollo de la tarea planteada.

En la tabla 1 se presentan sintéticamente los elementos generadores de control descritos en la investigación y las formas en que cada uno ejerce control sobre el tipo de visualización a contemplar.

TABLA I
Elementos generadores de control visual en el tratamiento del área de superficies planas en los libros de texto

<i>ELEMENTO GENERADOR DE CONTROL VISUAL</i>	<i>FORMA DE CONTROL</i>
<i>Procedimiento</i>	<p><i>Directo:</i> despliegue (total o parcial) de procedimientos; descomposición de problemas complejos en otros de menor complejidad y establecimiento de un orden de resolución; indicaciones a seguir en el desarrollo del problema; y representación de la figura de partida junto a la de llegada.</p> <hr/> <p><i>Replica:</i> procedimientos previos.</p> <hr/> <p><i>Referencia:</i> acciones y sugerencias que determinan la operación a considerar y característica (figurales y de medida de área) de la figura de llegada.</p>
<i>Contenido</i>	Alusión o presentación de definiciones de conceptos matemáticos, fórmulas y propiedades geométricas.
<i>Visibilidad</i>	<p><i>Factores de visibilidad:</i> fraccionamiento dado, sub-figuras convexas, complementariedad de formas, desdoblamiento, grado de inclinación de la figura o de un eje de simetría, ubicación del centro de homotecia y características del contorno.</p> <hr/> <p><i>Elementos de contraste:</i> color, punteado y contraste en el tono y el grosor del contorno de una figura y el del fondo cuadrículado en que se representa.</p> <hr/> <p><i>Índices:</i> letras, segmentos continuos, puntos sobredimensionados, flechas curvas y rectas, trazos, nombres de las unidades a las que se alude, valor de la medida de unidad y espacios en blanco.</p>
<i>Iconismo</i>	Características del objeto o acción física representada o aludida.

4. TIPOS DE CONTROL VISUAL

Según el número de elementos de control visual presentes en las tareas propuestas en los textos escolares, así como de la cantidad de visualizaciones a privilegiar por ellos, es posible distinguir tres tipos de control visual. A continuación, mediante tareas seleccionadas de algunos de los libros de texto analizados, se definen y ejemplifican cada uno de estos tipos de control visual.

4.1. Control simple o disjunto

Se considera este control si el elemento o los elementos generadores de control presentes en la tarea suscitan la manera de ver específica y pertinente a la resolución de la tarea planteada. En caso de ser un solo elemento (control simple), éste por sí mismo impone el tipo de visualización a considerar. Ahora bien, si son varios los elementos generadores de control (control disjunto), entonces cada uno genera control en partes distintas de la secuencia visual; en consecuencia, su aplicación de manera secuencial impone la manera de ver a establecer.

Ejemplo: En una tarea se pide dividir un cuadrado que ha sido representado sobre un fondo cuadrículado en dos triángulos rectángulos (Ilustración 9).

Sobre la figura inicial hay que realizar un fraccionamiento en dos triángulos (ilustración 9) y pasar de centrar la atención en el cuadrado a hacerlo en las sub figuras introducidas. Para verificar que cada uno cumple con la condición exigida (ser triángulos rectángulos), es necesario pasar de centrar la atención en las características perceptivas globales de cada uno de los triángulos a hacerlo en sus partes internas (ángulos rectos). El fraccionamiento introducido hace que uno de los triángulos (“verde”) esté representado en una posición no habitual a la que se acostumbra, por tanto es necesario aplicar sobre él, y de manera previa al segundo cambio de focalización, una operación de rotación.

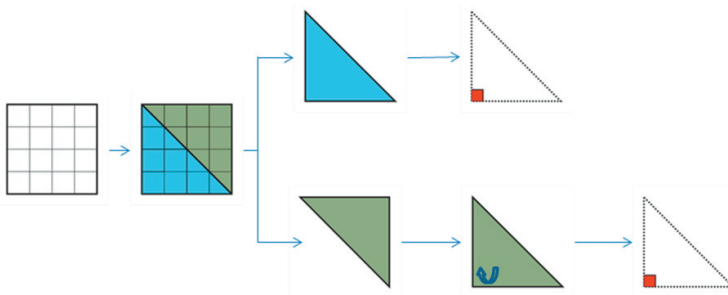


Ilustración 9. Despliegue del tipo de visualización a considerar al fraccionar un cuadrado en dos triángulos rectángulos

Son tres los elementos a los que recurre el libro de texto en la presentación de esta tarea para ejercer control sobre la manera de ver a privilegiar en ella: el procedimiento, el contenido y la visibilidad. El procedimiento exige la aplicación de una descomposición por fraccionamiento de la figura de inicio, en lenguaje verbal se introduce la acción “descomponer”. Además, se indican tanto la forma como el número de partes en que ha de ser fraccionada la figura de partida. Con respecto al contenido, hay que hacer un nuevo cambio de focalización relacionado con la definición de triángulo rectángulo para comprobar si las figuras obtenidas cumplen la definición. Por último, la representación de uno de los triángulos en una posición distinta de la habitual exige la aplicación de una rotación.

4.2. Control por refuerzo

Cuando son varios los elementos generadores de control introducidos en la tarea propuesta, que en conjunto imponen una única manera de ver pertinente a su desarrollo o comprensión, se habla de control por refuerzo. A diferencia del control disjunto, en este caso, más de un elemento de la estructura de control suscita focalizar la atención en un mismo aspecto de la secuencia visual a considerar.

Ejemplo:

Con un rombo, hacemos un rectángulo

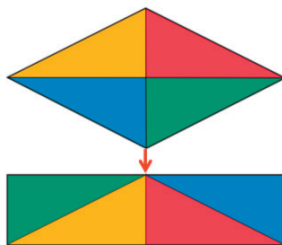


Ilustración 10. Imagen Tomada de Matemáticas 3. Editorial Anaya (España), p. 183

Este ejemplo pone en evidencia la transformación de un rombo en una figura rectangular con igual área. Figuralmente, se representan ambas figuras descompuestas en cuatro sub-figuras de forma triangular (todas con igual área). Se incluye además una flecha para indicar la dirección de la transformación aplicada. El texto escolar realiza un despliegue parcial del procedimiento de resolución aplicado: representa las figuras de inicio y de llegada, las “muestra” descompuestas en las partes claves a considerar en la transformación e introduce colores iguales para designar las sub-figuras correspondientes de ambas.

Para comprender cuál fue el camino seguido para transformar una figura en la otra, quien sigue el desarrollo de la tarea debe asumir las figuras de inicio y de llegada, y compararlas entre sí. Además, hay que comparar las sub-figuras, lo que viene condicionado por la utilización de los mismos colores para realizar dicha comparación. De esta manera, se pone en evidencia que las sub-figuras designadas con color rojo y amarillo fueron trasladadas verticalmente hacia abajo en el proceso de reconfiguración, mientras que a la verde y a la azul se les aplicó una composición de traslaciones (vertical y horizontal). Esto supone que, primeramente, hay que considerar la figura de inicio, centrar la atención en una de sus sub-figuras y reconocer la operación aplicada en ella, regresar a la figura de partida y repetir el proceso, y replicar esta manera de proceder un par de veces más.

En este caso son dos los elementos de control introducidos por el libro de texto: procedimiento y visibilidad. El procedimiento aparece en la consigna de la tarea cuando se señala la acción a considerar y cuando tanto figura de partida como de llegada se muestran descompuestas una y otra en sus partes claves, para comprender cómo fue realizada la transformación. Por último, la visibilidad está demarcada por la introducción de colores, marcas (flecha) y fraccionamiento. Estos elementos minimizan la complejidad que subyace para identificar cómo fue reconfigurada una representación en otra.

4.3. Control ambiguo

Cuando varios elementos ejercen control sobre la manera de ver en la figura; algunos introducen maneras de ver pertinentes para la resolución de la tarea propuesta, mientras que otros, por el contrario, suscitan visualizaciones de naturaleza distinta a las tratadas en el tópic en estudio y/o no pertinentes a la resolución de la tarea propuesta, por lo que se produce un control ambiguo. Así mismo, la ambigüedad puede introducirse por la presencia parcial de elementos de control.

Ejemplo:

Obtén el área de la siguiente figura

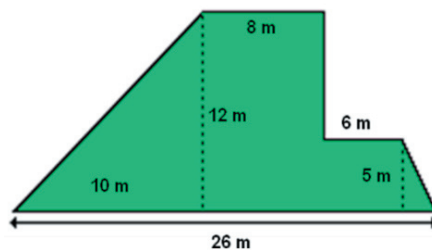


Ilustración 11. Imagen tomada de Matemáticas 1 ESO. Editorial Santillana (España), p. 215

En la tarea de la ilustración anterior se pide calcular la medida de la cantidad de área de un polígono irregular para el que no se ha dado una fórmula a aplicar, por tanto es necesario realizar previamente un fraccionamiento en figuras para las que se conozcan fórmulas del cálculo de área.

Esta figura a medir es susceptible de dos tipos de descomposición, a saber:

- Por un lado, la figura está parcialmente fraccionada por la introducción de ciertas medidas lineales. Se encuentra dividida en dos triángulos (uno de base 10 m y altura 12 m, el otro, de altura 5 m y base desconocida). Por otra parte, las características del contorno de la figura de inicio, junto a la presentación previa al tópico de área en estudio de la fórmula para el cálculo del área de figuras rectangulares, suscita la descomposición del resto de la figura en dos sub-figuras más: un rectángulo de altura 12 m y otro de base 6 m.
- Teniendo en cuenta que la tarea está en el tema en el que se introduce la fórmula para calcular áreas de trapecios, se puede dividir la figura en dos sub-figuras de forma trapezoidal (uno de altura 12 m, el otro de altura 5 m).

Sea cual fuese el fraccionamiento elegido por quien intenta resolver la tarea es necesario, en ambos casos, ser consciente del fraccionamiento inicial, centrar la atención en las sub-figuras en que fue dividida la figura y aplicar en cada una la fórmula correspondiente. Pero, no se han dado todos los datos necesarios para sustituir directamente en la fórmula correspondiente. Por ejemplo, si el fraccionamiento se hace en dos trapecios las longitudes de las bases mayores hay que calcularlas previamente comparando la base total de la figura a medir (26 m) con las bases menores de los dos trapecios y con la de uno de los triángulos, lo que implica operar y aplicar desdoblamiento sobre algunas de las unidades unidimensionales.

En este caso, son dos los elementos de control introducidos por el libro de texto: contenido y visibilidad. El contenido aparece por medio de la consigna de la tarea, haciendo referencia al concepto de área a través de una medida indirecta, lo que implica necesariamente la descomposición de la figura de inicio, en cualquiera de las dos maneras antes descritas, y hacer luego un cambio dimensional. La visibilidad, por su parte, está demarcada por la introducción de flechas, líneas punteadas, fraccionamiento en partes claves y características del contorno de la figura, que no sólo centran la atención en algunas de las unidades unidimensionales a considerar, sino que guían una de las maneras posibles de descomposición.

La ambigüedad en el control es introducida en la primera parte del desarrollo de la tarea. De los fraccionamientos posibles de la figura de inicio, el segundo es coherente con el tópico en estudio, el primero no. Al estar la tarea presentada en un apartado donde se introduce la fórmula de área de un trapecio es lógico esperar que al resolver las tareas presentadas en él su aplicación sea un elemento a considerar, en consecuencia, que la figura, al ser un polígono irregular, sea descompuesta en zonas trapezoidales. El primer fraccionamiento, por su parte, si bien es el que espontáneamente se impone, se relaciona con la fórmula del triángulo y del rectángulo, elementos matemáticos previamente tratados al área de figuras trapezoidales. De esta manera, el contenido, por un lado, suscita un tipo de visualización acorde al tópico en estudio, a la vez que hace posible, junto a la visibilidad, una segunda manera de ver, en este caso de naturaleza distinta a la temática tratada.

En la tabla 2 se presentan sintéticamente las clases de control visual descritas en la investigación, así como los elementos que las caracterizan.

TABLA II
Clases de control visual en los libros de texto al tratar el área de superficies planas

TIPO DE CONTROL VISUAL	DESCRIPCIÓN
Simple o disjunto	Determina el tipo de visualización pertinente al estudio de la tarea propuesta a través de un elemento de control (control simple) o de varios (control disjunto). En caso de ser varios los elementos de control cada uno fija partes distintas de la secuencia visual en juego.
Por refuerzo	Varios elementos de control fijan un mismo aspecto de la secuencia visual contemplada.
Ambiguo	Varios elementos de control determinan distintos tipos de visualización, pero no todos son pertinentes o coherentes al desarrollo de la tarea propuesta.

CONCLUSIÓN

La metodología de investigación propuesta, pone en evidencia que los libros de texto generan control sobre los tipos de visualización que privilegian, en particular para la construcción del concepto de área, logrando documentar la existencia de elementos y estrategias específicos que se usaron para ejercer tal control, en formas

distintas. Teniendo en cuenta la importancia que desempeña la visualización en la comprensión de los fenómenos que subyacen a la enseñanza y aprendizaje del área de superficies planas (Dickson, Brown & Gibson, 1991; Kordaki, 2003; Marmolejo, 2010; Marmolejo y González, 2013a, 2013b), así como la necesidad de una reflexión explícita en torno al aprendizaje de esta actividad cognitiva (Duval, 1998; Marmolejo y Vega, 2012; Marmolejo y González, 2013b), el instrumento de análisis aquí presentado se constituye en un importante referente a considerar en la comprensión del papel que desempeñan los manuales escolares en la enseñanza y aprendizaje del área, y de la visualización asociada a las superficies planas. Así pues, esta metodología de análisis permitirá, entre distintos aspectos, no solo identificar en estos materiales didácticos las visualizaciones a privilegiar en el estudio y comprensión del área de superficies planas, sino que, además, se constituye en sí misma como un soporte determinante para aportar elementos que permitan, en futuras investigaciones: identificar cuáles son las posibilidades que brinda la construcción de este objeto métrico en la reflexión de la visualización como objeto de aprendizaje, en los manuales escolares; la discriminación de los elementos de control predominantes como sus posibles combinaciones; los tipos de control privilegiados y los elementos que conforman la secuencia visual sobre los cuales los manuales escolares tienden a ejercer control.

En relación a los tipos de control discriminados, el control por refuerzo y el control ambiguo se imponen como lugares de gran interés para investigaciones futuras, pues, en el primer caso, los libros de texto llaman la atención del lector sobre aspectos particulares de la visualización que se ponen en juego en el estudio del área de superficies planas, en consecuencia, permitirán determinar los elementos visuales sobre los cuales el libro de texto intenta llamar la atención con mayor fuerza y de manera explícita. Por otro lado, en el caso del control ambiguo, hemos podido observar que, si bien los libros de texto ejercen control sobre las maneras de ver, en ocasiones introducen elementos (por ejemplo: el punteado, el color y las representaciones en lengua natural) paralelos a las transformaciones figurales, que suscitan maneras de ver contradictorias, no pertinentes y engorrosas, que en algunos casos pueden dejar de lado o confundir el propósito de la definición, tarea o actividad propuesta. Así pues, la discriminación de los elementos de control y de los elementos visuales que suscitan refuerzo o ambigüedad, son aspectos de enorme importancia a considerar en el análisis de textos escolares usados para la enseñanza y aprendizaje del área de superficies planas.

Finalmente, consideramos necesario llamar la atención sobre el desarrollo de futuras investigaciones que permitan discriminar la estructura de control visual y los tipos de control imperantes en otros conceptos en estudio en la enseñanza de la geometría en la educación básica, por ejemplo, las fracciones. Igualmente, en otros conceptos que susciten la visualización en registros semióticos distintos

al de las figuras geométricas, como los son los gráficos cartesianos, las tablas y los esquemas, por ejemplo. Asimismo, es necesario generar estudios que determinen si los libros de textos favorecen o, por el contrario, obstaculizan el aprendizaje del área de superficies planas y cómo estos recursos didácticos suscitan la construcción auto regulada del concepto de área. En el mismo sentido, es determinante en el estudio de la estructura de control visual, el desarrollo de trabajos que permitan identificar cuál es el papel que profesores y estudiantes asignan a los elementos y tipos de control introducidos por los manuales escolares, al enseñar o aprender no solo el área, sino también otros objetos geométricos y métricos de interés en la educación básica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241. doi: 10.1023/A:1024312321077
- Balacheff, N. & Gaudin, N. (2010). Modeling Students' Conceptions: The Case of Function. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 16, 183-211.
- Brousseau, G. (1982). Les objets de la didactique des mathématiques- Ingénierie didactique. *Actes de la deuxième école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 10-60). Orléans, Francia: IREM d'Orléans.
- Burgermeister, P. et Coray, M. (2008). Processus de contrôle en résolution des problèmes dans le cadre de la proportionnalité des grandeurs: Une analyse descriptive. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 28(1), 63-105.
- Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Una representación visual del polinomio de Lagrange. *Números*, 55, 3-22.
- Cleary, T. J. & Zimmerman, B. J. (2004). Self-regulation empowerment program: A school-based program to enhance self-regulated and self-motivated cycles of student learning. *Psychology in the Schools*, 41(5), 537-550. doi: 10.1002/pits.10177
- Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significado de la medida en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(1), 5-18.
- Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona, España: Editorial Labor S.A.
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processing. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142-157). Berlin, Germany: Springer.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales* (M. Vega Restrepo, Trad.), (1^a ed.). Cali, Colombia: Artes Gráficas Univalle.

- Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 41–76). Distrito Federal, México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et sciences cognitives*, 10, 5-53.
- Garofalo, J. & Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3), 163–176. doi: 10.2307/748391
- Gettinger, M. & Seibert, J. K. (2002). Contributions of study skills to academic competence. *School Psychology Review*, 31(3), 350–365.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry search of a framework. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.1, pp. 3–19). Valencia, España: Universidad de Valencia.
- Kordaki, M. (2003). The effect of tools a computer microworld on student's strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics*, 52(2), 177–209. doi: 10.1023/A:1024065107302.
- Kramarski, B., Weisse, I. & Kololshi-Minsker, I. (2010). How can self-regulated learning support the problem solving of third-grade students with mathematics anxiety? *The International Journal on Mathematics Education*, 42(2), 179–193. doi: 10.1007/s11858-009-0202-8.
- Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior*, 23(4), 405-427. doi:10.1016/j.jmathb.2004.09.003
- Love, E. & Pimm, D. (1996). "This is so": a text on texts. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 371-409). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Malmivuori, M. L. (2006). Affect and Self-Regulation. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 149-164. doi: 10.1007/s10649-006-9022-8.
- Marmolejo, G. A. (2007). *Algunos Tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras. Procesos de visualización y factores de visibilidad* (Tesis de maestría no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Marmolejo, G. A. (2010). La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. Posibilidades y complejidad. *Sigma*, 10(2), 10-26.
- Marmolejo, G. A. y González, M. T. (2013a). Función de la visualización en la construcción del área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto. *Revista Integración*, 31(1), 87-106.
- Marmolejo, G. A. y González, M. T. (2013b). Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares. *Educación Matemática*, 25(3), 61-102.
- Marmolejo, G. A. y Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática*, 24(3), 7-32.
- Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, 56 (2), 255–286. doi: 10.1023/B:EDUC.0000040409.63571.56.
- Mesa, V. (2010). Strategies for Controlling the Work in Mathematics Textbooks for Introductory Calculus. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 16, 235-260.

- Padilla, V. (1992). *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des Mathématiques* (Thèse de doctorat non publié). Université de Strasbourg, Strasbourg, France.
- Pape, S. J., Bell, C. V. & Yetkin, I. E. (2003). Developing Mathematical Thinking and Self-Regulated Learning: A Teaching Experiment in a Seventh-Grade Mathematics Classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 53(3), 179-202. doi: 10.1023/A:1026062121857.
- Pepin, B., Haggarty, L. & Keynes, M. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning culture. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33(5), 158-175.
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205-235). Rotterdam, Netherland: Sense Publishers.
- Rock, I. (1985). *La percepción*. Barcelona, España: Prensa Científica.
- Schmidt, W. H., Jorde, D., Cogan, L. S., Barrier, E., Gonzalo, I., Moser, U., ... Wolfe, R. G. (1996). *Characterizing pedagogical flow. An investigation of Mathematics and Science Teaching in Six Countries*. Dordrecht, Netherlands: Kluwers Academic Publishers.
- Schneider, W. & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education*, 42(2), 149-161. doi: 10.1007/s11858-010-0240-2.
- Schoenfeld, A. H. (1987). What's the fuss about metacognition? In A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). Hillsdale, NJ: Erlbaum
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York, United States of America: Macmillan.
- Schunk, D.H. (1996). Goal and self-evaluative influences during children's cognitive skill learning. *American Educational Research Journal*, 33(2), 359-382.
- Villani, V. (1998). Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century (Discussion Document for an ICMI Study). In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 337-346). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Whitebread, D. & Coltman, P. (2010). Aspects of pedagogy supporting metacognition and mathematical learning in young children; evidence from an observational study. *The International Journal on Mathematics Education*, 42(2), 163-178. doi: 10.1007/s11858-009-0233-1.
- Zimmerman, B. J. (2002). Achieving self-regulation: The trial and triumph of adolescence. In F. Pajares & T. Urdan (Eds.), *Academic motivation of adolescents* (Vol. 2, pp. 1-27). Greenwich, CT: Information Age.
- Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is Mathematical Visualization? In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-8). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Autores

Gustavo-Adolfo Marmolejo. Universidad de Nariño, Colombia. usalgamav@gmail.com

María Teresa González Astudillo. Universidad de Salamanca, España. maite@usal.es