Arturo Mena-Lorca, Jaime Mena-Lorca, Elizabeth Montoya-Delgadillo,
Astrid Morales, Marcela Parraguez

EL OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO DEL INFINITO ACTUAL: PERSISTENCIA, RESISTENCIA Y CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

The epistemological obstacle of the actual infinity: Persistence, resistence and categories of analysis

RESUMEN

Los *obstáculos epistemológicos* suelen tener raíces profundas en la propia Matemática, que pueden pesquisarse en la historia de la disciplina, y se caracterizan a la vez por la persistencia con la cual reaparecen en diversas situaciones y lo determinante que son para el logro de los aprendizajes. Estos obstáculos con frecuencia no son advertidos por el docente, bien sea porque ha reemplazado oportunamente sus propias concepciones (semánticas) por otras de carácter teórico –superando así el obstáculo, sin reparar explícitamente en ello–, o porque no ha logrado aun hacer esa substitución. En este trabajo presentamos una ilustración particularmente relevante de lo anterior, que se refiere a la persistencia de un obstáculo ligado al concepto de infinito en personas en distinto estadio de formación. Luego mostramos una característica adicional del obstáculo que llamamos *resistencia*. Posteriormente, utilizamos diversas perspectivas teóricas propiamente didácticas para adentrarnos en la cuestión. Finalmente, proponemos algunas reflexiones que se pueden derivar de nuestro estudio.

PALABRAS CLAVE:

- *Infinito potencial*
- *Infinito actual*
- *Epistemología*
- *Obstáculo epistemológico*

ABSTRACT

Epistemological obstacles often have deep roots in Mathematics itself; those roots can be explored in the history of the discipline, and are characterized both by the persistence with which they reappear in various situations and the determining role that they play for the achievement of learning. These obstacles often remain unnoticed by the instructor, either because he/she has replaced in time his/her own (semantic) conceptions by

KEY WORDS:

- *Potential infinity*
- *Actual infinity*
- *Epistemology*
- *Epistemological obstacle*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2015) *18* (3): 329-358.
Recepción: Noviembre 15, 2010 / Aceptación: Diciembre 27, 2012. DOI: 10.12802/relime.13.1832

others of a theoretical nature – overcoming thus the obstacle, but not being aware of it – or else because he/she has not yet made that substitution. In this paper, we present a particularly relevant illustration of the above, which refers to the persistence of an obstacle related to the concept of infinity in different stages of learning. Then we show an additional characteristic of the obstacle, that we call *resistance*. Subsequently, we use various theoretical approaches, properly didactic, to go into the question. Lastly, we put forward some reflections that can be derived from our study.

RESUMO

Os *obstáculos epistemológicos* muitas vezes têm raízes profundas na própria matemática, que podem-se indagar na história da disciplina, e caracterizam-se ao mesmo tempo pela persistência com que reaparecem em diferentes situações e o decisivas que são para o secesso da aprendizagem. Estes obstáculos muitas vezes não são notados pelo professor, ou porque ele substituiu no momento oportuno suas próprias concepções (semânticas) por outras de carácter teórico – superando assim o obstáculo sem reparar explicitamente em isso –, ou porque não fez ainda essa substituição. Neste artigo apresentamos uma ilustração particularmente relevante do anterior, que refere-se à persistência do obstáculo ligados ao conceito de infinito em pessoas em diferentes estágios de formação. Após, nos mostramos um recurso adicional que nomeamos de *resistência*. Posteriormente, utilizamos diversas perspectivas teóricas de ensino proprias da didática, para entrar na questão. Finalmente, nos propomos algumas reflexões que podem-se derivadar de nosso estudo.

PALAVRAS CHAVE:

- *Infinito potencial*
- *Infinito atual*
- *Epistemologia*
- *Obstáculo epistemológico*

RÉSUMÉ

Les *obstacles épistémologiques* ont des racines profondes dans la Mathématique, racines qu'on peut reconnaître dans l'histoire de la discipline ; elles se caractérisent tant par sa persistance, réapparaissant en des diverses situations, et parce qu'elles son déterminantes pour l'acquisition des connaissances. Néanmoins, ces obstacles demeurent souvent inaperçus par l'enseignant, parfois parce qu'il a remplacé ses propres conceptions (sémantiques) par d'autres, théoriques, ou bien justement parce qu'il n'a pas encore fait cette substitution. Dans ce travail nous présentons une illustration particulièrement remarquable de ce qui précède, qui se rapporte à la persistance

MOTS CLÉS:

- *L'infini potentiel*
- *L'infini actuel*
- *L'épistémologie*
- *Obstacle épistémologique*

d'un obstacle lié au concept d'infini chez des sujets possédant des niveaux de formation différents. Ensuite nous exhibons une caractéristique additionnelle de l'obstacle que nous appelons *résistance*. Après, nous utilisons diverses approches théoriques, proprement didactiques, pour aborder la question. Finalement, nous présentons quelques réflexions qui découlent de notre étude.

1. Introducción

En Matemáticas se acostumbra trabajar con conjuntos infinitos, y todo estudiante tiene alguna noción de que, por ejemplo, los sistemas numéricos lo son. Sin embargo, no se puede decir sin más que el alumno común haya construido una noción coherente de infinito. De hecho, Fischbein (2001), por ejemplo, reporta que ciertos modelos inconscientes llevan a interpretaciones erróneas, contradicciones y paradojas. El infinito presenta, en realidad, lo que Bachelard (1970) llamó un *obstáculo.*

Para fomentar una construcción apropiada de infinito es conveniente plantear situaciones cuya resolución requiera que el aprendiz enfrente las limitaciones de la noción que va construyendo. Las primeras de esas preguntas refieren, naturalmente, al infinito numerable. Ejemplos de estas son, para los números racionales, preguntas tales como "¿cuál es el número que sigue de 0?", "¿qué número está inmediatamente antes que 1?", y aun "¿es 0,999…[1] igual a 1?". Las tres anteriores apuntan a una misma cuestión, cuya raíz está en la insuficiencia de la lógica habitual, acostumbrada a trabajar con procesos que siempre finalizan, para aprehender procesos interminables. (Fischbein, Tirosh & Hess 1979).

Observemos que la notación 0,999… sugiere un *infinito potencial*, y que la cuestión de si acaso 0,999… =1 se refiere al *infinito actual*, pues pregunta acerca del resultado cuando se haya desplegado *toda* la expansión decimal de 0,999… Es la confrontación de ambos tipos de infinito, en este caso uno que se va progresivamente construyendo y otro que es el resultado final de esa construcción, lo que provoca el *obstáculo (de origen) epistemológico.*

En la sección número 2, explicitamos la problemática en 2.1 y nuestro objetivo en 2.2.

[1] Usamos puntos suspensivos para señalar expansión decimal periódica.

En la tercera sección, para adentrarnos en el tema, siguiendo el consejo de Brousseau (1983), damos una breve reseña de las dificultades que se aprecian en el desarrollo de la noción de infinito en la historia.

La sección 4 está destinada a los obstáculos. En 4.1 traemos a colación algunas nociones básicas acerca de los obstáculos, y consideramos el infinito como uno de ellos en 4.2. A continuación, en 4.3, explicitamos una experiencia con la que hemos venido estudiando la cuestión, la cual permite ejemplificar las dificultades respecto de ese concepto que se encuentran hoy día en las aulas. En 4.4 incluimos algunos datos que ilustran la *resistencia* de este obstáculo.

En la sección 5, estudiamos brevemente la situación planteada en esa experiencia desde cuatro perspectivas teóricas, las cuales, en relación con la construcción del conocimiento matemático, ponen énfasis ya sea en lo cognitivo, en lo semántico, en lo social y/o en lo paradigmático. Nuestro propósito aquí es múltiple: por una parte, señalar cómo esas perspectivas ayudan a esclarecer las dificultades que entraña aprehender el concepto de infinito; por otra, ilustrar la diversidad de posibilidades de análisis que aquellas ofrecen, y, finalmente, sugerir que determinados problemas pueden ser más –o bien menos– afines a las diferentes teorías.

La sección 6 contiene conclusiones y comentarios.

2. El problema

2.1. *La problemática*

El infinito es una noción compleja de abordar en distintos niveles escolares y que aparece en el aprendizaje de ciertos tópicos matemáticos indispensables tales como, entre otros, límites, series, axioma del supremo, procesos recursivos, conjuntos infinitos y acotados.

La enseñanza del concepto de infinito ha sido el objeto de múltiples trabajos, y no parece posible reseñarlos todos en un breve espacio (al respecto, se puede obtener una visión panorámica y reunir una bibliografía comprensiva a partir de D’Amore, 2011). Una cantidad apreciable de ellos alude a ciertas polaridades que presenta su construcción al estudiante: un divorcio entre la intuición (variada) del infinito y la necesidad de su formalización (Lestón, 2011); cierta interferencia de las intuiciones y los modelos pictóricos tácitos descritos por Fischbein

(Fischbein, Tirosh & Hess, 1979) con el razonamiento de los estudiantes (Brown, McDonald & Weller, 2008); la complejidad del concepto y los obstáculos promovidos por la enseñanza (Hitt, 2003); los esquemas lógicos, diseñados para realidades finitas, y el propio concepto de infinito, que los excede (Fischbein et al., 1979). Por su parte, Garbin y Azcárate (2002) distinguen, en el aprendizaje de la Matemática, las inconsistencias –que se caracterizan por producirse en el trabajo al interior de una teoría– de las *incoherencias* –que ocurren cuando deben resolver un mismo problema en diferentes lenguajes matemáticos–. De esa manera, esos autores encuentran distintos grados en las inconsistencias y en la construcción del infinito actual, y proponen una tarea permanente al profesor, de *conexión* en la actividad matemática, para desarrollar un pensamiento coherente en relación con la noción del infinito, labor que sería paralela a la que se realiza de cambio y de coordinación de registros de representación; ambas tareas serían mutuamente influyentes.

2.2. *El objetivo*

Nos interesa aquí estudiar la noción de infinito en cuanto obstáculo epistemológico, y evidenciar tanto la profundidad y persistencia que le son característicos (Brousseau, 1983), como cierta *resistencia* por parte de los aprendices, que hemos detectado. Para ello, hemos utilizado la pregunta de si acaso 0,999… es igual a 1[2].

3. Breve reseña histórica

La consideración del infinito aparece en varias culturas y en diversos ropajes: ¿acaso el mundo es eterno?, ¿es el espacio ambiente ilimitado?, ¿se puede dividir la materia indefinidamente?…

A lo largo de la historia se puede observar que tanto matemáticos como filósofos –varios de los cuales poseen ambas filiaciones– intervienen de manera determinante en prolongados debates acerca de la naturaleza del infinito[3]. No podemos pretender aquí reseñar la discusión en ninguno de los dos campos,

[2] Se notará la relación de esta pregunta con las expresiones "tiende a" y "es", que se utilizan en relación con los límites. (Cf. Hitt, 2003).

[3] Inclusive Bishop (1975), una figura muy reconocida en Educación Matemática, invita a no descuidar los temas filosóficos en relación con el infinito.

pero daremos, sin embargo, algunas referencias para sugerir la dificultad que la humanidad ha experimentado respecto de la comprensión del tema que nos ocupa.

Hacia el siglo IV a. C., algunos *atomistas,* como Leucipo y su discípulo Demócrito, pensaban que la materia estaba compuesta de un número infinito de *indivisibles* (Lucrecio, trad. 1985), y postulaban además un universo infinito. Parménides y su discípulo Zenón, quien señaló varias paradojas acerca del infinito, estaban en desacuerdo. En el diálogo *Parménides*, Platón (trad. 1969) sitúa a Sócrates y Aristóteles con los dos anteriores discutiendo acerca del movimiento y considerando cómo la postura atomista y su contraria llevarían ambas a contradicciones.

Aristóteles, en su *Metafísica* (Aristóteles, trad. 1985) distingue entre el ser *en potencia* y el ser *en acto,* conceptos para él tan fundamentales que solo admiten explicación y descripción, de modo que no los define sino que los ilustra: una estatua ya esculpida está en acto, pero ella estaba ya en potencia en el bloque de madera en que se la esculpió (Aristóteles, trad. 1985). Para él, el infinito no existe potencialmente en el sentido de que alguna vez tendrá existencia actual, "sino solo para el conocimiento; por ejemplo, la división de un trazo nunca termina, pero el infinito no existe separadamente" (Aristóteles, trad. 1985, p. 1048), y agrega en su *Física*: "nuestro relato no priva a los matemáticos de su ciencia… ellos no necesitan el infinito y no lo usan. Ellos solo postulan que [un segmento de] la recta finita puede ser prolongada tanto como desean" (Aristóteles, trad. 1985, p. 354). Cabría preguntarse si Aristóteles no se da cuenta de que ese segmento es ya infinito; como sea, lo anterior comportará que, por ejemplo, Euclides (trad. 1956, p. 412) no diga que los números primos son infinitos, sino que "son más que cualquier multitud asignada de números primos".

La autoridad de Aristóteles en el pensamiento medieval será determinante, en este como en otros aspectos (Arrigo & D'Amore, 1993). Agustín de Hipona (426/1965) había reservado solo a Dios el conocimiento del infinito actual, pero los escolásticos, en general, seguirán el *dictum* de Aristóteles (trad. 1985, p. 348), "…el infinito no puede ser una cosa actual…", que recogerán como *Infinitum actu non datur* (Dauben, 1979, p. 122). Tomás de Aquino (1274/1966, p. 108) explicitará "…Por tanto, no es posible que pueda existir una multiplicidad infinita actual[4]".

Más adelante, Descartes (1643/1991, p. 194) expresará que, acerca de la cuestión del infinito y de Dios, "…debemos considerar no lo que no podemos comprender –porque sabemos que están bastante más allá de la

4 *Unde non est possibile esse aliquam multitudinem actu infinitam.*

comprensión– …". Galileo (1638/2010, p. 34), tras observar en su lenguaje que los números naturales están en correspondencia biunívoca con sus cuadrados, que los conjuntos correspondientes son infinitos y que la cantidad de cuadrados sería menor que la de los números naturales, concluye que "los atributos 'igual', 'mayor' y 'menor' no tienen sentido cuando se habla de infinitos".

El nacimiento del *Cálculo Infinitesimal* pondrá nuevamente el infinito como materia de discusión, a propósito de la noción de *cantidades infinitamente pequeñas pero distintas de cero,* y, con ello, el concepto de límite y varios otros que en él se basan (Kline, 1980).

Pasados estos debates, matemáticos importantes manifiestan una posición un tanto incongruente ante estas materias. Euler (entre otros) había extrapolado sin mucho escrúpulo las operaciones algebraicas para tratar series[5]. Cauchy se preocupó, por el contrario de establecer algunos criterios de convergencia para trabajar con ellas en su *Cours d'Analyse*, pero, en la práctica, no siempre los utilizaba (Kline, 1980). Gauss, por su parte, en 1831, en una carta a Schumacher, había expresado: "Protesto en contra del uso de la magnitud infinita como algo completo, lo cual en matemáticas nunca es permisible. Infinito es meramente una manera de hablar[6], cuyo verdadero significado es el límite de algunas razones al cual ciertas razones se aproximan infinitamente cerca, mientras que a otras se les permite incrementar sin restricción" (citado en Maor, 1991, p. 55).

En 1851, Bernhard Bolzano (1991) reunirá en *Paradojas del Infinito* una serie de reflexiones que habían comenzado con los trabajos de *exhaución* de Eudoxio, continuado con Arquímedes y reaparecido con las aproximaciones infinitesimales de Leibniz y Newton y sus antecesores inmediatos, y les dará un nuevo marco, que apunta ya hacia la teoría de conjuntos. Es notorio, sin embargo, que, aun siendo Bolzano el primero en admitir por escrito la existencia del concepto en su acepción *actual* (y platónica, además), entienda que el infinito se comporta de manera paradójica[7]. En todo caso, *paradójica* pero no *contradictoria*: el infinito puede desafiar lo que llamamos nuestra intuición, pero el edificio matemático que Bolzano comienza a erigir tiene la suficiente solidez como para abordar las paradojas implícitas.

---

5 Por ejemplo, la suma de la sucesión alternante (1, -1, 1, -1…) es para Euler igual a ½ (Kline, 1983; Dhombres, 1978). En una carta a su profesor Holmboe, el 16 de enero de 1826, Abel se queja: "Se hace toda clase de operaciones sobre las series infinitas, como si fueran finitas, pero, ¿está eso permitido? Nunca jamás". (Abel, 1902, p. 19).

6 La traducción de la referencia de Maor es nuestra.

7 Por ejemplo: existen conjuntos infinitos mayores que otros conjuntos infinitos (Bolzano, 1991, N°19); el cicloide tiene una curvatura infinitamente grande en el punto que interseca su línea base (Bolzano, 1991, N°47). Bolzano analiza una larga lista de 'paradojas'.

Brouwer, creador del *intuicionismo*, aceptaba solo el infinito potencial (Placek, 1999). No obstante, Cantor (1932) había reclamado que la existencia del concepto de infinito potencial depende de un concepto previo de infinito actual.

La perspectiva de los matemáticos contemporáneos acerca del infinito, en su inmensa mayoría seguidores del *formalismo* de Hilbert (Davis & Hersh, 1981), es la de Cantor. Desde 1872, este comenzó a establecer la teoría de los cardinales, que incluye infinitos de diversas magnitudes. En un comienzo, él fue rechazado y aun abominado por algunos matemáticos[8]. Sus argumentos son tan alejados de la primera intuición que él mismo dirá, en algún momento, "Lo veo y no lo creo" (citado en Dauben, 1979, p. 115); sin embargo, más adelante agregará "Mi teoría está firme como una roca…" (citado en Dauben, 1979, p. 298). El propio Hilbert (1926) cerrará la discusión: "Nadie podrá expulsarnos del paraíso que nos legó Cantor" (p. 170).

Así, pues, pese a cierta prolongada hesitación, la comunidad matemática terminó aceptando el infinito, o, mejor, la infinidad de infinitos que habitan aquel sólido paraíso legado por Cantor.

4. El obstáculo del infinito

4.1. *Obstáculos epistemológicos*

Bachelard (1970) señala que los *obstáculos* son conocimientos aparentes, que impiden tener acceso a nuevos conocimientos y que, ocasionalmente, al ser movilizados, se develan precisamente como impedimentos. Brousseau (1983) ha precisado que no siempre los errores son el producto de ignorancia o de inexactitud; que un *obstáculo* puede ser un conocimiento o se comporta como tal en un cierto hábitat, pero que, modificado este, puede volverse insuficiente e inadaptado y ser fuente de errores o presentarlos; y que se caracterizan además por reaparecer "de manera intempestiva y obstinada" (Brousseau, 1983, p. 169) aun después de haberse tomado consciencia de ellos.

Se distinguen tres tipos de obstáculos: los *ontogenéticos* se originan en las características del desarrollo del aprendiz –en general, un niño de 7 años no aprende álgebra abstracta–; los *didácticos* son producto de la enseñanza –el

[8] Su propio profesor, Leopold Kronecker, lo tratará de "científico charlatán" y de "renegado" (Schoenflies, 1927, p. 2) y aun, "como investigador y como docente, un corruptor de la juventud" (Dauben, 1979, p. 221).

producto de números (¡naturales!) es mayor que cada factor–; los *epistemológicos* se relacionan intrínsecamente con la matemática bajo estudio.

El origen del problema que enfrenta el individuo ante un obstáculo epistemológico se puede pesquisar en lo que la propia historia nos muestra respecto de las dificultades que los matemáticos tuvieron que sortear ante situaciones de carácter similar: a pesar de la eventualidad de disponer de mayor información, mejor conceptuación y simbología más clara, aquel individuo debe resolver un problema de envergadura comparable. La breve reseña histórica anterior, que no pretende ser propiamente un análisis epistemológico, justamente sugiere algunas de las dificultades que entraña la concepción de los infinitos: ¿qué pasa cuando se divide indefinidamente un trazo?, (¿qué significa aproximarse indefinidamente a un número?), ¿cómo se relaciona lo infinitamente pequeño con lo infinitamente grande?; más aun, ¿podemos concebir el infinito potencial?, ¿podemos concebir el infinito actual?; todavía peor, el infinito parece paradójico y ¡hay infinitos más grandes que otros!...

Duval (1995) ha mostrado que los aprendizajes en Matemáticas comportan el reemplazo de concepciones *semánticas* que los individuos pueden poseer acerca de objetos y propiedades matemáticas, por otras propiamente *teóricas*, obtenidas ya sea directamente desde los axiomas o bien mediante deducciones a partir de ellos. Ahora bien, los matemáticos profesionales suelen hacer ese tránsito con escasa consciencia de ello, y parecería natural que no advirtieran que sus eventuales estudiantes enfrentan dificultades graves para dar ese paso. Los profesores de aula, por su parte, podrían tener mayor disposición para percibir obstáculos en esa transición; sin embargo, es posible que ellos mismos no hayan superado algunos obstáculos, lo cual les impedirá tener claridad al respecto. Unos y otros, sin embargo, enfrentarán sin duda situaciones en las cuales la enseñanza que imparten es dificultada por algún obstáculo epistemológico que los alumnos deben superar, y la ausencia de la constatación de la existencia del obstáculo puede traducirse en que aquellos preparen secuencias de enseñanza que les parezcan apropiadas, pero que, en realidad, sean inadecuadas para lograr los aprendizajes esperados.

4.2. *El infinito como obstáculo*

Los estudios, en general, coinciden en que el aprendizaje del infinito entraña dificultades: se trata de un obstáculo epistemológico (Waldegg, 1996; Artigue, 1995); Sierpinska (1985) habla incluso del "*horror infinity*".

Los diferentes autores proponen estrategias diversas para ese aprendizaje: Lestón (2011, p. 116), por ejemplo, considera que, dado que el infinito no ha surgido desde la matemática, y que se construiría social antes que matemáticamente, "debe incluirse en la escuela el medio social y las ideas construidas en ese medio dentro de la escuela". Varios de los trabajos consultados introducen empleo de tecnología; Sacristán (2003) y Sacristán y Noss (2008), por ejemplo, incluyen secuencias por computadoras para acercarse a la noción de un número infinito de pasos. Sin embargo, esos mismos autores declaran más o menos abiertamente que no tienen "una solución" para la enseñanza del infinito. Hitt (2003, p. 110), por ejemplo, señala que "Es importante iniciar una discusión entre los profesores…"; Sacristán (2003, p. 277), explicita que *no* afirma que "con estas experiencias… los alumnos hayan generado un aprendizaje formal del infinito matemático". De hecho, (refiriéndose al infinito en el Cálculo) Artigue (1995, p. 135) enfatiza que se deberá proceder "por medio de aproximaciones provisionales", y llama "a desconfiar un poco de los discursos muy entusiastas" acerca de la utilización de tecnologías informáticas, a pesar de que proveen al estudiante con un contacto enriquecedor con algunos fenómenos u objetos relevantes.

Ahora bien, varios autores han usado la cuestión de si acaso 0,999... =1. Schwarzenberger y Tall (1978, p. 44, citado en Hitt, 2003, p. 99) reportan que la mayoría de los encuestados piensa que 0,999… es menor que 1, que el primero es el más inmediato al segundo, que hay una "diferencia infinitamente pequeña" entre ellos. Brown et al. (2008) agregan que para analizar este caso el individuo puede proceder desde múltiples instanciaciones de un proceso iterativo finito, y luego imaginar que todos los pasos han sido llevados a cabo. Ello coincide con Dubinsky (2005a, 2005b) que postula además que así han procedido los matemáticos a través de la historia. Un caso interesante –el cual, de acuerdo a los antecedentes obtenidos, los autores no comparten– es el de Lakoff y Núñez (2000, p. 158), quienes basándose en lo que llaman la "metáfora fundamental del infinito" proponen que la concepción del infinito actual es metafórica, y que, por tanto, la respuesta a la pregunta depende de la base conceptual que se escoja.

4.3. *Una experiencia*

Anotamos aquí $k = 0{,}999\ldots$

Para nuestro estudio, preguntamos a estudiantes de pedagogía y profesores de Matemáticas de enseñanza primaria y secundaria (Chile), a estudiantes de maestría en enseñanza de las Matemáticas (Chile y Colombia) y a profesores universitarios de Matemáticas y de Ingeniería (Argentina), si acaso $k<1$, $k=1$ ó $k>1$.

Para ello, diseñamos una experiencia que incluye una secuencia de preguntas que se realizan de acuerdo a la preparación de los participantes, y que se utilizó una docena de veces en un lapso de tres años. La secuencia es la siguiente:

1. Como consideración preliminar, recordamos el pasaje entre las escrituras fraccionaria y decimal periódica de un número racional. Luego preguntamos si queda alguna duda de que, digamos, 2322 / 99 = 23,4545… o inversamente[9]. Nadie nos ha manifestado jamás alguna duda al respecto[10].
2. Preguntamos luego si acaso $k<1$, $k=1$ ó $k>1$, y registramos las respuestas[11]. Invariablemente, la respuesta $k<1$ es ampliamente mayoritaria.
3. A continuación, *demostramos* que $k=1$, siguiendo el procedimiento señalado en el punto 1.: $10k=9,999\ldots$, de modo que $10k-k=9k=9$, y entonces $k=1$.

Luego, hacemos nuevamente la pregunta. La respuesta mayoritaria suele ser todavía $k<1$.

4. Si el público conoce de suma de series, mostramos que k es la suma de una progresión geométrica de primer término 0,9 y razón 0,1 de modo que $k=0,9/(1–0,1)=0,9/0,9=1$.

Reiteramos la pregunta. La respuesta ha variado muy poco (si bien comparativamente esta última demostración ha resultado más convincente).

5. Para públicos más conocedores de matemáticas, demostramos aun que si a, b son números reales, $a=b$ si y solo si, para cada $\varepsilon>0$, se tiene que $|a- b|< \varepsilon$. Luego, dado $\varepsilon>0$, invocamos el principio de Arquímedes para fijarnos en el decimal $(n+1)$-ésimo de k: hay un número natural n tal que $|k–1|<1/(10^n)< 1/n< \varepsilon$, lo que nuevamente demuestra que $k=1$.

Reiteramos una vez más la pregunta. No hay variación sensible en las respuestas.

6. En todo caso, preguntamos si alguien duda de que 1/3=0,333...; nunca recibimos una respuesta afirmativa. Inquirimos luego cuánto es 1/3+1/3+1/3; el público responde unánimemente que 1. Preguntamos entonces cuánto es 0,333… + 0,333… + 0,333…; el público declara sin reservas que la respuesta es 0,999…

Hacemos ahora notar la conclusión que se sigue y preguntamos una vez más si acaso se tiene que $k=1$. El público (que sonríe ante la evidencia[12]) se inclina todavía en gran parte por $k<1$.

[9] En la experiencia, escribimos siempre las fracciones con la barra horizontal.

[10] Fischbein (2001), sin embargo ha reportado que se produce alguna hesitación sobre el asunto.

[11] En la experiencia, no usamos el símbolo k para preguntar, sino 0,999….

4.4. *Algunas evidencias*

Nuestra intención aquí no es dar cuenta de la totalidad de las evidencias reunidas en las diferentes versiones de la experiencia realizadas, sino mostrar algunas, representativas, y relevantes desde un punto de vista cognitivo.

Hemos escogido las que siguen porque se obtuvieron en un congreso internacional de educación matemática realizado en Puerto Montt, Chile, dado que los participantes –asistentes a un curso breve y quienes se prestaron generosa y gustosamente a la experiencia– eran profesores, académicos y estudiantes especialmente preocupados por la enseñanza de la Matemática.

La pregunta:

Elija, entre las siguientes, la alternativa que a usted le parezca correcta:

a. 0,999…>1

b. 0,999…=1

c. 0,999…<1

En cada oportunidad, las respuestas se recogieron en papeles de distinto color, de modo de separarlas convenientemente.

La tabla a continuación (Tabla I) registra dos momentos de la secuencia antes enunciada; el segundo corresponde a una pregunta realizada tras la correspondiente demostración.

TABLA I
Registro de dos momentos de la secuencia

Pregunta		*1ª. vez*	*2ª. vez*
a.	0.999 >1	1	1
b.	0.999 =1	14	18
c.	0.999 <1	23	16
No responde		2	5

Comparando las columnas de respuesta (tabla I), queda de manifiesto que para muchos participantes la prueba no fue convincente, ya que solo 4 de entre ellos cambiaron su respuesta a la alternativa *b.,* y 3 no respondieron, aumentando

[12] Fischbein (2001), refiriéndose también al infinito, encuentra reacciones similares: se reconoce la corrección formal de un argumento, pero la intuición lo hace aparecer inaceptable.

de esta forma la incertidumbre[13] respecto del valor real que tiene 0,999.... Así también, se puede observar que, para al menos 16 participantes, la prueba fue innecesaria. (La persona que eligió la alternativa *a*. explicó que 0,999… tenía 'más números' que 1).

Otro antecedente, del mismo tenor –como todos los otros– lo obtuvimos en estudiantes de un curso de maestría en educación matemática, con una experiencia docente de 3 a 11 años, de los cuales uno trabaja en enseñanza superior, tres en básica y los restantes en secundaria (Ver Tabla II).

TABLA II
Dos momentos de la secuencia en estudiantes de maestría

Pregunta	*1ª. vez*	*2ª. vez*
a. 0.999 >1	0	0
b. 0.999 =1	7	11
c. 0.999 <1	12	8
No responde	0	0

De acuerdo a nuestras observaciones, no parece obvio que quienes cambiaron de opinión mantendrán la última en lo sucesivo.

5. Aproximaciones teóricas

Ofrecemos a continuación las explicaciones de carácter general que elaboramos, a partir de distintas teorías, acerca de los resultados de la experiencia.

5.1. *La teoría de registros: semántico vs. teórico*

La teoría de *Registros de Representación Semiótica* –en lo sucesivo, *registros*– fue creada por Duval (1995). Un registro para trabajar una situación matemática puede ser el lenguaje natural, otro el simbólico matemático, otro el (registro) gráfico de algún tipo. No es una especie de cuadro inmóvil de una situación dada; por el contrario, su propiedad fundamental es su capacidad de transformarse en

[13] Algunos educadores dudaban de su respuesta hasta el grado de comentar "yo anoté la alternativa *b.* pero no lo creo".

otras representaciones, que conservan parte o todo el contenido de la situación, ya sea al interior del registro (*tratamiento*) o bien de un registro a otro (*conversión*)[14] (Duval, 1995).

Ahora bien, dado que la actividad matemática está intrínsecamente ligada al lenguaje (Duval, 1995), ella no se puede realizar sin recurrir a registros, de hecho, a una multiplicidad de ellos, y es precisamente en el paso de uno a otro donde radica la mayor oportunidad de aprendizaje. Esto último, sin embargo, requiere de que el estudiante mantenga cierta independencia respecto del registro que utiliza: este no es el objeto de estudio sino una representación, y aquel debería poder reemplazarla por otra si lo necesita o desea (Duval, 1995). Ocurre, sin embargo, que el estudiante, siguiendo sin más ya sea las instrucciones del profesor o bien lo que expresan sus pares –i. e., el *contrato didáctico* (Brousseau, 1990)–, acepte lo que se le dice como una verdad –aceptación que es casi necesariamente provisoria, pues el obstáculo, si lo es, aparecerá en cualquier momento en que el concepto sea requerido (Brousseau, 1983)–.

Para nuestro caso, aceptemos, por un momento, que se tiene efectivamente que 0,999…=1. En la igualdad, el número ha sido escrito en un mismo tipo de registro (notación simbólica matemática elemental), pero la manera de anotarlo a la izquierda del signo de igualdad es distinta de la manera de la derecha. Precisamente, si la persona entiende que se trata del mismo número, podrá transitar de una notación a la otra sin más trámite, pero es bien posible que no pueda hacerlo, por no disponer de claridad conceptual suficiente.

Por otra parte, la teoría de registros pone de relieve algo que nos es familiar: el individuo se aproxima a la Matemática con ciertos conocimientos o ideas acerca de ella, pero el aprendizaje de esa disciplina comporta reemplazar, cuando se lo requiere, esas concepciones por aquello que indica la teoría; esto es, ha de sustituir la idea que tiene acerca de la veracidad o falsedad de una determinada proposición[15] por aquello a lo que le llevan a concluir los axiomas o ciertos principios más o menos explícitos en la matemática que recibe o genera –la concepción *semántica* debe dar paso a la *teórica*–.

Precisamente, la concepción semántica habitual acerca de nuestra pregunta es que 0,999… es "un poco" menor que 1 –a ello le inclina a pensar la simbología–. Posiblemente, esto se debe, además, al hecho de que el razonamiento que un ser

[14] Se notará la similitud entre la relevancia de estas transformaciones propuestas por Duval por razones cognitivas y semánticas por una parte y, por otra, la importancia y ubicuidad de los homomorfismos de variado tipo a través de la Matemática. (Mena, 2007).

[15] Sugerida, por ejemplo, por el enunciado que lee o escucha.

humano realiza en su vida diaria –parte de su herencia evolutiva– siempre tiene un término, un final, pues todo fenómeno físico se agotará en algún momento; pero precisamente la cuestión que hemos puesto procura averiguar la concepción que se posee acerca de un proceso que, por el contrario, no tiene fin.

5.2. *La teoría APOE: proceso vs. objeto*

Dubinsky (1996), el creador de la Teoría APOE, toma como fundamento el concepto de *abstracción reflexiva* (Piaget, 1970; Piaget & García, 1989), que él y sus asociados utilizan para describir cómo un individuo eventualmente adquiere un concepto determinado. Considera cinco tipos de abstracción reflexiva o *mecanismos mentales*: la *interiorización*, la *coordinación*, la *encapsulación*, la *generalización* y la *reversión*; ellos originan lo que llama las *construcciones mentales: acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas* –de donde la sigla APOE– (Dubinsky, 1991b).

Al reflexionar sobre un concepto o problema, el individuo reconstituye su conocimiento mediante una reorganización de sus estructuras en un nivel más alto, en el cual el nuevo conocimiento es asimilado. De esta manera, las estructuras que ya posee determinan su construcción del nuevo concepto, y las conexiones que establece definen su conocimiento.

Enfrentado a un nuevo concepto matemático, el individuo realiza transformaciones sobre objetos construidos previamente para construir aquel (Dubinsky et al., 2005a);

- si esas transformaciones se realizan obedeciendo a estímulos externos, se dice que él posee una *concepción acción* del nuevo concepto. Por ejemplo, podrá requerir de una fórmula explícita que le indique cómo verificar una determinada propiedad;
- si reitera una acción y reflexiona sobre ella, puede *interiorizarla* en un *proceso* mental; esto es, construye una estructura mental que hace el mismo trabajo que la acción externa. Él posee una *concepción proceso* del concepto cuando puede reflexionar sobre este sin realizar acciones específicas;
- cuando piensa en un proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre su totalidad, ha *encapsulado* el proceso y posee ahora una *concepción objeto* del concepto en cuestión. Se considera que el mecanismo de encapsulación es a la vez el más importante para la construcción del conocimiento matemático y el más difícil de lograr;

- un *esquema* es la construcción más amplia y acabada que el individuo realiza de un concepto: la totalidad de su conocimiento que, para él, está conectado de manera consciente o inconsciente con un tópico matemático particular (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996). Es una estructura inconclusa que evoluciona por la asimilación de nuevos objetos y la reacomodación de las estructuras de acuerdo con las nuevas relaciones que establece; una colección *coherente* de acciones, procesos, objetos y otros esquemas y las relaciones establecidas entre ellos, todos relacionados con el concepto (Dubinsky, 1991a, 1991b, 1996; Parraguez & Oktaç, 2010).

El entendimiento del concepto de la infinitud ha sido parte de un gran proyecto del grupo RUMEC[16], que ha reportado acerca de sus hallazgos en una serie de publicaciones sobre el tema (Dubinsky et al., 2005a, 2005b; Brown et al., 2008). En particular, Dubinsky et al. (2005b) presentan y analizan tres ejemplos muy particulares que se relacionan con el infinito: la construcción del conjunto de los números naturales, la igualdad 0,999… =1, y los infinitesimales; su finalidad es mostrar la importancia de desarrollar estrategias didácticas que ayuden a los individuos a interiorizar las acciones que les van a permitir concebir el infinito como un proceso, e induzcan la encapsulación de este proceso en un objeto.

Nos interesa mostrar aquí la resistencia del obstáculo epistemológico del infinito actual, desde la perspectiva de esta teoría. Escribimos k por 0,9999…

Las acciones que se relacionan con k pueden consistir en elaborar una lista, necesariamente finita, de decimales: 0,9; 0,99; 0,999;… El individuo podrá interiorizar esas acciones en una concepción proceso de k si puede pensar en continuar realizándolas indefinidamente, sin efectivamente realizarlas. Obtendrá, sin embargo, la concepción objeto de k solo si es capaz de *encapsular* ese proceso: debe poder aprehender aquel objeto al cual el proceso se ha dirigido desde siempre y así poder realizar acciones en él.

Ahora bien, si una persona ha encapsulado un objeto matemático, el simbolismo matemático con que se lo presente no ofrecerá problemas para ella; en caso contrario ese simbolismo estará rodeado de dificultades, que provienen de tratar de aplicar rótulos antes que los objetos hayan sido encapsulados. (Dubinsky et al., 2005a).

Para nuestro ejemplo, una persona que considera si acaso *k es igual a* 1 enfrenta un escollo importante: es evidente que la notación 0,999… (y también la habitual que señala el período con una barra superior) sugiere que k es un proceso.

[16] *Research in Undergraduate Mathematics Education at College*, que utiliza la teoría APOE.

Por tanto, aquella debe comparar un objeto completamente determinado, "1", encapsulado, con "0,999…", que no solo no se presenta como un objeto, sino que parece *siempre* un proceso. Desde un punto de vista cognitivo, esa dificultad es manifiesta, y tiende a permanecer irresoluta a pesar de las demostraciones que se presenten sobre la cuestión, lo que da muestra de aquella resistencia, acerca de la cual hemos recogido evidencias.

5.3. *Los paradigmas y el Espacio de Trabajo Geométrico: el referencial y la prueba*

Hemos situado, además, nuestra pregunta en un contexto geométrico y la hemos analizado con la teoría de los *Paradigmas Geométricos* y el *Espacio de Trabajo Geométrico*, ETG.

Tal teoría, propuesta por Kuzniak (2004) y luego por Houdement y Kuzniak (2006), ofrece elementos para que el alumno (y el profesor) construya un ambiente apropiado, el ETG, para enfrentar el estudio de la geometría (por ejemplo, lo que es adecuado para un estudiante universitario no lo es para un escolar, y viceversa). Tal ambiente considera un conjunto de *objetos* sobre los cuales se trabaja, un conjunto de *artefactos* (no siempre materiales) con los cuales se realiza el trabajo, y un *referencial teórico,* cuerpo de conocimientos eventualmente organizado en un modelo teórico (Houdement & Kuzniak, 2006).

De acuerdo a la interpretación de los problemas, la forma de abordarlos y la reflexión en torno a ellos, se distinguen tres tipos de geometrías o *paradigmas geométricos,* denotados GI, GII y GIII, respectivamente (Montoya, 2010).

La teoría esclarece el problema que enfrenta el *geómetra* –el estudiante de geometría– ante una determinada situación. Él utiliza un ETG personal para abordarla: un espacio que ha construido de acuerdo a la enseñanza que se le ha ofrecido. Dicha enseñanza determina una variedad de requisitos a los que aquel está supeditado; por ejemplo, la institución (representada por el profesor) promueve y/o acepta uno u otros tipos de prueba o razonamiento. Sin embargo, es bien posible que el problema planteado requiera de herramientas que no están contempladas en el ambiente geométrico ofrecido para resolverlo, y el geómetra estará entregado a sus propios recursos para encontrar una respuesta –sin una clara noción de si acaso la argumentación que pueda ofrecer sea satisfactoria– (Montoya, 2010).

Para nuestro análisis, distinguimos entre pruebas[17] *pragmáticas* e *intelectuales* (Balacheff, 1987). Las pragmáticas corresponden a razonamientos ligados a la

[17] Es necesario distinguir entre 'pruebas' y 'demostraciones', pero no nos detendremos en eso aquí.

acción y a la experiencia, y las intelectuales a aquellos razonamientos en los cuales se articulan cadenas de argumentos que describen las relaciones de los objetos matemáticos entre sí.

He aquí nuestra pregunta en un contexto geométrico:

> Dibuje un rayo horizontal de origen A. Sobre el rayo ubique un punto B de modo que el segmento AB tenga una longitud de 0,9 unidades. Construya ahora un triángulo ABC, rectángulo en B y de modo que la medida del segmento BC sea el 10% de la medida del segmento AB (ver Figura 1). Sobre el rayo inicial y a continuación del trazo AB, copie el trazo BC, determinando el punto C_1. Forme ahora un nuevo triángulo BC_1C_2 rectángulo en C_1 de modo que la medida del segmento C_1C_2 sea el 10% del segmento BC_1. Itere este proceso, es decir, continúe la construcción de triángulos rectángulos de manera similar y de modo que la medida de uno de sus catetos sea el 10% de la medida del cateto basal anterior. Se pide que determine cuál es la longitud del trazo más pequeño posible que contenga a todos los AC_n.

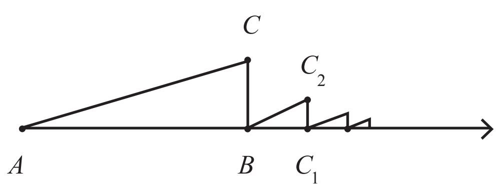

Figura 1. Construcción de los primeros cuatro triángulos

5.3.1. *GI y la prueba pragmática*

Una forma de proceder es utilizar instrumentos geométricos con la finalidad de construir los triángulos y posteriormente medir la longitud del trazo solicitado. En el ETG correspondiente, el geómetra puede afirmar que la longitud del trazo AC_n es “casi” una unidad, pero, debido al error que se produce al usar instrumentos, en realidad ella es menor, pues “nunca” llega a ser igual a 1.

Se aprecia que el uso de instrumentos tiene aquí la finalidad de medir el trazo solicitado y que se manipulan aquellos triángulos con la intención de medir, pero, al tomar conciencia de que el instrumento provoca errores, podría tenderse a afirmar que el trazo resultante efectivamente es de longitud 1. Por otra parte, se visualiza que los triángulos no pueden ser “construidos indefinidamente”, y que la longitud del trazo buscado es siempre menor a una unidad. Esta forma de proceder es lo que caracteriza a GI, y la manipulación del objeto geométrico con el instrumento corresponde a una prueba *pragmática*.

En este ETG, ni los instrumentos ni la prueba se relacionan con el referencial teórico. El geómetra se encuentra con dificultades para abordar el problema con el uso de instrumentos geométricos, puesto que la construcción no es posible de llevar más allá de un número pequeño de iteraciones. De tal manera, en este espacio de trabajo no se aborda siquiera el infinito potencial y, mucho menos, el actual.

5.3.2. *GII y GIII y la prueba intelectual*

Otro procedimiento para abordar la pregunta consiste en considerar las longitudes de los trazos como AB, BC_1, C_1C_2, C_2C_3... y sumar la serie $AB+BC_1+C_1C_2+C_2C_3$... Como se aprecia, en esta prueba los instrumentos que se utilizan para manipular el objeto geométrico son teóricos (propiedades), aun cuando ellos no provienen de los axiomas o propiedades de un sistema geométrico propiamente tal.

Ahora bien, el problema fue propuesto desde el modelo de la geometría de Euclides, cuyos axiomas no son suficientes para probar la igualdad enunciada, de manera que la prueba excede el marco geométrico dado. La persona enfrentada a este problema intenta, por tanto, trabajar en el paradigma GIII, caracterizado por basarse solamente en los axiomas de un modelo geométrico determinado, pero no lo logra. Un caso distinto sería que el geómetra dispusiera de la axiomática de Hilbert, en cuyo caso podría basar su argumentación solo en ella, y estaría trabajando en GIII –el referencial teórico es suficiente–.

Por otra parte, la prueba intentada aquí es *intelectual*; en ella, el infinito actual subyace al problema y queda supeditado al concepto de límite y a otros conocimientos de los cuales el geómetra disponga. En definitiva, para superar el obstáculo así planteado, el geómetra debería entrar en mayor profundidad al referencial teórico, y articular en forma apropiada los planos cognitivo y epistemológico del ETG (Montoya, 2010).

5.4. *La Socioepistemología: categoría vs. objeto matemáticos*

La Socioepistemología atiende a la *construcción social* del conocimiento matemático, y distingue en este cuatro dimensiones que actúan sinérgicamente: epistemológica, didáctica, cognitiva y social.

Ella postula que el *discurso matemático escolar*, DME, es decir, la manifestación del conocimiento matemático normado por creencias de los actores del sistema didáctico acerca de lo que son la enseñanza y la Matemática (Cordero, 2006), no logra construir, en la generalidad de los estudiantes, el conocimiento que pretende, pues se centra en los *objetos* matemáticos. De esta manera el aprendiz solo obtiene una matemática de un nivel utilitario –esto es, solo le queda aplicar un conocimiento ya construido por otros, sin comprender las razones que posibilitan esa aplicación–, y lo que realmente necesita es un conocimiento en un nivel *funcional*, es decir, uno incorporado orgánicamente en sí mismo, que lo transforme y que transforme su realidad (Cordero, 2006).

Para obtener ese conocimiento funcional, el foco ha de ponerse en ciertas *categorías* que están sustentadas por *prácticas sociales* (Cordero, Mena & Montalto, 2010). Tales categorías *resignifican* el conocimiento matemático (Cordero, 2006); es decir, será el uso de este conocimiento en una situación en la que se debata entre su funcionamiento y forma, lo que determine su funcionalidad. Por ejemplo, la linealidad del polinomio se resignifica vía la *variación de parámetros* (Rosado, 2004); y la Serie de Taylor (Morales, 2009), lo hace a través de la *graficación-modelación*.

Respecto de nuestro tema, para la Socioepistemología, por tanto, el foco no es el infinito como objeto matemático sino aquellas categorías que procuran su construcción de modo que sea funcional. El DME no permite esta construcción puesto que el conocimiento del infinito no transforma la vida del aprendiz común ni su realidad, y permanece aislado en el ámbito de la Matemática.

Trabajos socioepistemológicos como el de Lestón (2008, 2011) dan evidencia explícita de que la construcción del infinito potencial está siempre en desarrollo. Tal resultado se puede leer también desde otras perspectivas, como la de Sacristán y Noss (2008), quienes plantean formas de explorar y desarrollar el infinito vía la articulación, a través de un algoritmo explícito, de tres modelos (entendidos como representaciones visuales), de procesos matemáticos y de representaciones numéricas. Podemos concluir, también de este trabajo, que la única forma de franquear ese obstáculo es un proceso de paso al límite, ya que la situación algorítmica que es el hilo conductor en su diseño es simplemente la expresión de una sucesión[18].

Ahora bien, la Socioepistemología del Cálculo (Cordero, 2001, 2008) aborda la noción de límite de manera distinta a la habitual en el DME, y lo resignifica; por ejemplo, la *asintoticidad* (Cordero et al., 2010) se resignifica a través de la categoría *comportamiento tendencial de las funciones.*

Respecto del infinito en sí, el foco de atención debería entonces desplazarse desde el concepto matemático a su resignificación, para así obtener ese conocimiento funcional que transforma al individuo y su entorno. Para un matemático, tal funcionalidad permanece en la dimensión epistemológica

[18] Tal como la que planteamos en nuestra experiencia, en el punto 4 de la sección 2.4.

construida por los propios matemáticos, para sus fines[19]; sin embargo, para la comunidad escolar, lo importante son las categorías, que posibilitan la resignificación que se procura. Al respecto, en el caso específico de la categoría del comportamiento tendencial, la atención no se focaliza en el destino final de ese comportamiento[20], y no se ocupa, por tanto, de la distinción entre infinito actual y potencial. Desde la perspectiva socioepistemológica, la noción de infinito se adecua a las necesidades propias de la comunidad en la cual se construye el conocimiento.

6. Comentarios y conclusiones

Nuestra presentación incluyó aspectos cognitivos, semánticos, epistemológicos, paradigmáticos y culturales que poseen los *obstáculos epistemológicos*, a partir de las teorías de Registros de representación semiótica, APOE, Paradigmas y ETG, y Socioepistemología.

No hemos procurado articular esas teorías, cosa que habría sido necesaria si se hubiera tratado de elaborar una tesis didáctica propiamente tal. Por el contrario, nuestra intención manifiesta fue la de ofrecer una posibilidad de comparar las diversas luces que cada una de ellas arroja sobre una determinada cuestión, la conceptuación diferente que utilizan, el interés diverso que podrían exhibir sobre la cuestión propuesta. En cualquier caso, se reconocerá que una consideración presente en todo el escrito es la de la distinción que hace Duval entre los valores epistémicos semántico y teórico, que nos parece clarificadora para situar el análisis.

Por otra parte, nuestro propósito no fue ofrecer un cúmulo de evidencias, sino solo una muestra de las obtenidas, suficiente, a nuestro parecer, para los objetivos que nos planteamos.

A continuación, nuestros comentarios y conclusiones.

6.1. *El carácter del obstáculo*

Se podría argumentar acerca de un *obstáculo didáctico* ligado al caso que presentamos. En efecto, habitualmente, para determinar cuál de dos números expresados en su versión decimal es menor, se utiliza el orden lexicográfico, que

[19] La funcionalidad aludida es clara en Cantor, e. g.

[20] Por ejemplo, los físicos suelen no requerir de la serie de Taylor, sino solo de una versión truncada ya en el grado 2, que revela la fuerza que actúa en el fenómeno.

se fija en los dígitos según su orden de aparición (0,25 < 0,43, 0,235 < 0,238), y parece natural, entonces, concluir que 0,999… sea menor que 1,000…, pues la enseñanza no suele detenerse en la falta de unicidad de la expansión decimal de algunos números reales. Adicionalmente, la notación de puntos suspensivos utilizada para señalar expansión decimal periódica es ambigua, ya que se usa también para la de números irracionales y, aun, para señalar una sucesión de números cualquiera.

Se puede también señalar un aspecto *ontogenético* del obstáculo del infinito: al fin y al cabo como lo han señalado, por ejemplo, Lakoff y Núñez (2000), no es esta una idea que se pueda plantear a niños pequeños.

Lo anterior no obstante, el carácter de epistemológico del obstáculo del infinito está por encima de esas circunstancias, y se manifiesta por su persistencia y por la *resistencia* que hemos reseñado.

6.2. *Resistencia del obstáculo*

Los antecedentes históricos planteados al inicio refuerzan la conclusión de que el infinito es un obstáculo epistemológico: el origen del problema que enfrenta la persona al abordarlo se puede pesquisar en lo que la propia historia nos muestra respecto de las dificultades que los matemáticos tuvieron que sortear ante situaciones de carácter similar, y es bien posible que esa persona enfrente dificultades similares a pesar de la (mayor) información previa de la cual pueda disponer. (Por supuesto, se pueden encontrar en la historia otras situaciones que se han resistido al abordaje, eventualmente por siglos –el cero, los números negativos, los irracionales, los imaginarios…–).

Ahora bien, la experiencia que hemos realizado una docena de veces –ya sea como formadores de didactas de la matemática/matemáticos educativos, o bien como divulgadores de la disciplina–, una muestra de las cuales dimos en 2.4, evidencia cómo las personas pueden seguir pensando lo que un enunciado les sugiere, de manera independiente y aun contradictoria a lo que la prueba matemática establece.

Un obstáculo epistemológico se caracteriza generalmente por su persistencia, que le hace reaparecer en diversas situaciones; nosotros hemos mostrado, para este caso, su *resistencia*.

6.3. *Uso de tecnología*

Parece claro (y varios de los trabajos citados así lo manifiestan) que el uso de modelos ‘geométricos’, graficación y tecnología (y otros de ese carácter), pueden ayudar a aproximarse al obstáculo planteado en el problema y lo evidencian como tal, pero no permiten, *per se*, aclarar cómo abordar el obstáculo mismo. Más aun, el uso inapropiado de tecnología o la utilización de herramientas geométricas inadecuadas podría complicar el entendimiento y con ello la superación del obstáculo: al fin y al cabo, el universo numérico y visual de las herramientas tecnológicas es el de (una porción finita de) los números racionales y no el de los números reales.

6.4. *Tipos de prueba*

En relación a los tipos de prueba, que se supone que podrían ayudar a superar el obstáculo, parece claro que solo las de tipo intelectual son apropiadas para abordar o enfrentar el obstáculo del infinito actual como un problema de límite. Entre las demostraciones planteadas en 2.4, hay alguna muy elemental y otras no tan fáciles de asir, pues requieren de conocimientos avanzados. De cualquier modo, aun en el caso de que las demostraciones hubieran sido aprehendidas, parece claro que no siempre resultaron suficientemente convincentes para la mayoría, y que hubo, por tanto, un choque manifiesto entre lo que indican las demostraciones y lo que sugiere la "intuición".

La problemática didáctica subyacente es, por tanto, de envergadura considerable, pues lo natural sería pensar que, precisamente la demostración sería el recurso del que dispondríamos para ayudar a superar el obstáculo, y es obvio que, para nuestro caso, ello no dio resultado (incluso para licenciados en Matemáticas, e. g.). Más allá del problema en cuestión, una conclusión natural es que habrá, seguramente, otros escenarios en los cuales –tal como ha previsto Duval (1995)– la prueba no sea la respuesta apropiada para convencer a un aprendiz.

Pensamos que es esta una conclusión de importancia para los participantes en las diversas instancias de nuestra experiencia, pues es frecuente observar a profesores convencidos de que el rigor matemático terminará por convencer a los estudiantes de la veracidad de los asertos. La teoría de los Paradigmas y el ETG ofrece claridad adicional sobre esta cuestión: según los diferentes 'espacios de trabajo', habrá ciertos tipos de argumentación y prueba apropiados, reconocidos por la comunidad (en este caso, de estudiantes y, ojalá, el profesor). Los beneficios eventuales para los aprendices a cargo de quienes comprendan esta cuestión serían considerables.

6.5. *Investigador investigado*

El caso propuesto enfrentó a la gran mayoría de los participantes en las diversas versiones de la experiencia a dos aspectos de la Didáctica de la Matemática que los proponentes queríamos poner en evidencia.

En primer lugar, una dificultad cognitiva que los participantes experimentaron por sí mismos, al confundir los planos semántico y teórico. En términos de la teoría APOE, fue siempre una minoría de los participantes la que *encapsuló* 0,999… como el *objeto* 1, y el resto posiblemente permaneció en la concepción *proceso* de una cuerda infinita de nueves que no termina. Para estos últimos, que tienen a la vez una concepción *objeto* de 1 y una concepción *proceso* de 0,999…, la igualdad no sería aceptable, pues compara construcciones que obedecen a diferentes estados cognitivos –*proceso* y *objeto*–.

Un corolario interesante de tal situación para los participantes (y que los autores consideraron en el diseño), fue la posibilidad explícita de comprobar por sí mismos que un obstáculo epistemológico tiene, precisamente, una índole epistémica, dado que, por ejemplo, no son solo los niños pequeños quienes los deben enfrentar, sino posiblemente casi todos quienes aprendemos matemáticas[21]. Muchos de los participantes declararon su perplejidad al no poder concluir, finalmente, por sí mismos, cuál era la respuesta correcta a la pregunta.

6.6. *La Didáctica de la Matemática*

Un propósito general que se tuvo presente en el diseño fue mostrar cómo es que la Matemática Educativa, entendida como una disciplina de carácter experimental, provista de marcos teóricos explícitos, aporta información y precisamente marcos de análisis para abordar los problemas que enfrenta una persona que aprende matemáticas. La dificultad intrínseca del tema propuesto, así como los marcos teóricos exhibidos en cada experiencia, permitieron mostrar que, aun en el caso en que la confusión entre semántica y teoría no fuera superada de inmediato, los participantes manifestaron espontánea y públicamente la necesidad de aprender teorías didácticas que les permitieran profundizar en categorías de análisis para estudiar obstáculos de esta naturaleza –varios así lo expresaron y el resto declaró su coincidencia en ello–.

[21] No se explicitó previamente este propósito a los participantes, pero el asunto apareció naturalmente y fue invariablemente evaluado por ellos de manera positiva.

6.7. *Estrategias inapropiadas*

Un investigador en matemática, que habita en el paradigma de su disciplina, ha superado naturalmente el obstáculo y, en consecuencia, suele no preocuparse de ello cuando enseña. Si recuerda que alguna dificultad tuvo como estudiante, en sus clases tratará de disponer ordenadamente los conocimientos previos necesarios, declarar las definiciones, demostrar los asertos, pero no abordará expresamente la problemática de salvar el obstáculo: según vimos (Duval, 1995), su estrategia es insuficiente, y tal vez solo consiga (en términos de APOE) que los alumnos realicen *acciones* referidas al concepto, pero muchos de ellos no lograrán *encapsularlo.*

En términos paradigmáticos y culturales, es fácil que el obstáculo permanezca ya sea como un acuerdo forzado por el *contrato didáctico* (Brousseau, 1990) o bien como una construcción realizada con propósitos determinados, que requerirá de una posterior resignificación (Cf. Cantoral y Farfán, 2003). En ambos casos, habría una superación aparente del obstáculo, pero apenas el concepto sea requerido para trabajar en cuestiones ulteriores, el obstáculo reaparecerá (Bachelard, 1970).

6.8. *Apropiación del infinito*

Según hemos visto, el tránsito del infinito potencial al actual es difícil de lograr y parece claro que, si se desea conseguir que los estudiantes secundarios y otros logren tener un concepto apropiado del infinito, se necesita modificar las estrategias utilizadas, y considerar explícitamente el que también los profesores pueden enfrentar dificultades respecto de ese concepto: como dijimos, persistencia y *resistencia* son típicas de este obstáculo epistemológico.

Al respecto, una pregunta anterior que puede hacerse es si acaso realmente se necesita esa apropiación. Dos razones pueden esgrimirse en contra: en términos genéricos, todos los procesos del universo terminan alguna vez; en la práctica, el teorema de densidad de Stone-Weierstrass garantiza que "siempre" podemos contar con una aproximación apropiada, sea esta la que proviene de la densidad de los números racionales en los reales (como en los cálculos con computadoras), o bien el truncamiento *ad hoc* de una serie de Taylor de una función, etc. Por supuesto, la teoría del caos nos alerta respecto de efectos inesperados del truncamiento de expansiones y, por otra parte, no estamos argumentando en contra de conceptos tales como los de límite, derivada, integral y sus abundantes y decisivas consecuencias en diferentes áreas del conocimiento.

6.9. *Obstáculos de envergadura*

Creemos interesante preguntarse además qué otros obstáculos tienen una envergadura similar a la del infinito. No parece haber muchos, con la excepción, al menos, de los cuantificadores. Estos tienen su propia componente de obstáculo didáctico (desde el escaso relieve que se suele dar a los dominios de las fórmulas que se utiliza desde el secundario, y pasando por el método inductivo de las ciencias experimentales), pero su carácter es claramente más profundo, y se relaciona con la aprehensión de la diferencia de lo particular vis a vis lo universal, y, por tanto, con el proceso de generalización en Matemáticas –y en otras ciencias: nuevamente, un problema con raíces filosóficas–.

En cuanto al objeto de este estudio, nuestra conclusión es que, en definitiva, la persistencia y la *resistencia* son elementos que lo caracterizan. Ahora bien, para superar un obstáculo epistemológico, se requiere reconocerlo y enfrentarlo (Brousseau, 1983) y, más aun, "hacer atravesar al estudiante la frontera de sus conocimientos, aumentándolos de manera directa y oportuna" (D'Amore, 2011, p. 25). En nuestro caso, creemos que tal plan, si bien puede apoyarse en formulaciones y actividades que provienen de ámbitos tales como el de uso de tecnología y otros, en último término debe adentrarse en un ámbito estrictamente matemático, aun cuando no sea puramente formal. Al respecto, hemos hecho algunos experimentos alentadores a propósito de *todas* las memorias del *caballero* Tristram Shandy (Russell, 1937), quien demora un año en escribir cada año de su vida, y no muere –como se ve, un problema que reúne los dos obstáculos citados en esta sección–.

Reconocimientos

Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el proyecto FONDECYT N° 1110988. Los autores manifestamos además nuestros agradecimiento por la buena voluntad, la franqueza y el buen humor de los participantes en las diversas ocasiones en que realizamos lo que llamamos la experiencia; en particular, a los asistentes al Curso "*Diferentes aproximaciones didácticas y cognitivas ante el aprendizaje y la enseñanza de un mismo tópico de números*", de la VI CIBEM, realizado en Puerto Montt, Chile, los días 5 y 6 de enero de 2009.

Referencias bibliográficas

Abel, N. H. (1902). *Mémorial publié à l' occasion du centenaire de sa naissance*. J. Dybwad (Ed.). Paris, France: Gauthier-Villars.

Aquino, Tomás de. (1274/1966). *Summa Theologiae*. New York, NY: Mc Graw-Hill.

Aristóteles. (trans. 1985). *The complete works of Aristotle. The revised Oxford translation*. In J. Barnes (Ed.). New Jersey, United States: Princeton University Press.

Arrigo, G., & D'Amore, B. (1993). *Infiniti*. Milano, Italy: Angeli.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (Vol. 6, pp. 1-32). Rhode Island, U.S.A.: American Mathematical Society.

Bachelard, G. (1970). *La formation de l'esprit scientifique*, 7ème édition. Paris, France: Vrin.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176. doi: 10.1007/BF00314724

Bishop, E. (1975). The crisis in contemporary mathematics. *Historia Mathematics, 2*(4), 507-517.

Bolzano, B. (1991). *Las paradojas del Infinito*. D.F., México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 309-336.

Brown, A., McDonald, M. A. & Weller, K. (2008). Step by step: Infinite iterative processes and actual infinity. In F. Hitt, D. Holton, & P. W. Thompson (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education VII* (pp. 115-142). Providence, USA: American Mathematical Society.

Cantor, G. (1932). *Gesammelte Abhandlungen*. In A. Fraenkel & E. Zermelo (Eds.). Berlin, Germany: Springer-Verlag.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6* (1), 27-40.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo: Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(2), 103-128.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della Matemática. *La Matemática e la sua Didattica, 20*(1), 59-79.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cordero, F., Mena, J. & Montalto, M. E. (2010). Il ruolo della giustificazione funzionale in una situazione di risignificazione dell'asintoto. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, 33B*(4), 457-488.

D'Amore, B. (2011). La didáctica del infinito matemático. En J. Rojas (Ed.), *XXIV Coloquio distrital de Matemáticas y Estadística* (pp. 21-27). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Gaia.

Dauben, J. W. (1979). *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. New Jersey, United States: Princeton University Press.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1981). *The Mathematical experience*. London, England: Birkhauser.

Descartes, R. (1643/1991). *The Philosophical writings of Descartes, Vol. III, The Correspondence*. Cambridge, United States: University Press.

Dhombres, J. (1978). *Nombre, mesure et continu. Épistémologie et Histoire*. Paris, France: Cedic/Fernand Nathan.

Dubinsky, E. (1991a). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Dubinsky, E. (1991b). The constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences* (pp. 160-220). New York, USA: Springer-Verlag.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, *8*(3), 25-41.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005a). Some Historical Issues and Paradoxes regarding the Infinity Concept of Infinity: An APOS analysis, Part 1. *Educational Studies in Mathematics, 58*(3)*,* 335-359. doi: 10.1007/s10649-005-2531-z

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005b). Some Historical Issues and Paradoxes regarding the Infinity Concept of Infinity: An APOS analysis, Part 2. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 253-266.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne, Suisse: Éditions Peter Lang.

Euclides (trad. 1956). *The thirteen book of the Elements (Vol. I, II, III)*. New York, USA: Dover.

Fischbein, E. D., Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 10*(1), 3-40. doi: 10.1007/BF00311173

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 309-329. doi: 10.1023/A:1016088708705

Galileo. (1638/2010). *Dialogues concerning two new sciences*. New York, USA: Cosimo.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: Acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias, 20*(1), 87-113.

Hilbert, D. (1926). Uber das Unendliche. *Mathematische Annalen*, *95*(1), 161-190. doi: 10.1007/BF01206605

Hipona, Agustín de. (426/1965). La Ciudad de Dios. En J. Morán (Ed.), *Obras de San Agustín* (Vol. XVI-XVII). Madrid, España: La Editorial Católica.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 91-111). México, D. F.: Fondo de Cultura Económica.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 11*, 175-193.

Kline, M. (1980). *Mathematics, the loss of certainty*. New York, USA: Oxford University Press.

Kline, M. (1983). Euler and infinite series. *Mathematics Magazine, 56*(5), 307-315.

Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques. (Note pour l'habilitation à diriger des recherches).* Paris, France: Institute de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques Paris VII.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000*). Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York, USA: Basic Books.

Lestón, P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares* (Tesis de Maestría no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Lestón, P. (2011). *El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la Socioepistemología* (Tesis Doctoral no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Lucrecio, T. (trad. 1985). *De la naturaleza de las cosas*. Barcelona, España: Orbis.

Maor, E. (1991). *To infinity and beyond: a cultural history of the infinite*. New Jersey, United States: Princeton University Press.

Mena, A. (2007). Why focusing on representation: from a semiotic to a purely mathematical approach. *APEC-Tsukuba International Conference III*. Recuperado el 12 de diciembre de 2008 de http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2008/index_en.php

Montoya, E. (2010). *Étude de la transformation des connaissances géométriques dans la formation universitaire des professeurs de lycée de mathématiques au Chili*. Thèse de Doctorat non publiée, Université Denis Diderot, France, Paris.

Morales, A. (2009). *Resignificación de la Serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento: de la predicción del movimiento a la analiticidad de las funciones* (Tesis Doctoral no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Parraguez, M. & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications, 432*(8), 2112-2124.

Piaget, J. (1970). *Genetic Epistemology*. New York, USA: Columbia University Press.

Piaget J. & García R. (1989). *Psychogenesis and the history of* science. New York, USA: Columbia University Press.

Placek, T. (1999). *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity: A Critical Exposition of Arguments for Intuitionism.* Dordretch, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Platón. (trans. 1969). *Diálogos. La República o el Estado.* Madrid, España: Ediciones y Distribuciones Antonio Fossati.

Rosado, P. (2004). *Resignificación de la Derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica* (Tesis de Maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Russell, B. (1937). *The Principles of Mathematics* (2nd Ed.). London, England: G. Alien & Unwin.

Sacristán, A. I. & Noss, R. (2008). Computational Construction as a Means to Coordinate Representations of Infinity. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*(1), 47-70. doi 10.1007/s10758-008-9127-5.

Sacristán, A. I. (2003). Dificultades y paradojas del infinito: experiencias en un ambiente de exploración computacional. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 262-279). D. F., México: Fondo de Cultura Económica.

Schoenflies, A. (1927). Die Krisis in Cantor's mathematischem Schaffen. *Acta Mathematica, 50*(1), 1-23. doi: 10.1007/BF02421320

Schwarzenberger, R. & Tall, D. (1978). Cognitive conflict and the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching, 82*, 44-49.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistemologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *6*(1), 5-67.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *1*(1), 107-122.

Autores

Arturo Mena-Lorca. Centro de Investigación Avanzada en Educación, e Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso - Chile, arturo.mena@ucv.cl

Jaime Mena-Lorca. Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso - Chile, jmena@ucv.cl

Elizabeth Montoya-Delgadillo. Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile, emontoya@ucv.cl

Astrid Morales. Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso - Chile, ammorale@ucv.cl

Marcela Parraguez. Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso - Chile, marcela.parraguez@ucv.cl