Ana Paula Aires, Helena Campos, Ricardo Poças

RACIOCÍNIO GEOMÉTRICO *VERSUS* DEFINIÇÃO DE CONCEITOS: A DEFINIÇÃO DE QUADRADO COM ALUNOS DE 6.º ANO DE ESCOLARIDADE

Geometric reasoning *vs.* definition of concepts: The definition of square with 6th grade students

RESUMEN

La geometría a pesar de ser considerada un tema de gran importancia sigue siendo, sin embargo, un tópico en el cual los estudiantes muestran, todavía, muchas dificultades. En este trabajo, hemos analizado la forma en cómo visualizan y presenta la idea de cuadrado un grupo de estudiantes del sexto grado. Esta investigación ha permitido caracterizar la posición del razonamiento geométrico de cada estudiante teniendo como base los niveles de van Hiele. Los resultados obtenidos permiten concluir que el nivel de razonamiento geométrico de los alumnos es menor de lo deseable y necesario a esta fase de aprendizaje en Geometría. Además, la definición del cuadrado presentada por la mayoría de los estudiantes está basada solamente en la congruencia de los lados. Así ambos resultados muestran que los alumnos tienen dificultades en la jerarquía de las propiedades geométricas, hecho que los autores consideran pertinente para seguir investigando, sea en el campo de las posibles causas, sea en cómo intervenir en el aula, así como la formación inicial y continua de los profesores.

PALABRAS CLAVE:

- *Razonamiento geométrico*
- *Niveles de van Hiele*
- *Conceptos geométricos*
- *Definición*
- *Cuadrado*

ABSTRACT

Despite being considered a major issue, Geometry remains as a topic in which students still show many difficulties. In this paper, we analyzed how the square concept is displayed and presented to a sixth grade group. Based on van Hiele levels, the research allow us characterized the geometric reasoning of each student. The results indicate that the reasoning level reached by them is lower than the one we desire and need on in this phase of Geometry learning. Furthermore, in most of the cases, the square definition presented by them is based only on the consistency

KEY WORDS:

- *Geometric reasoning*
- *van Hiele levels*
- *Geometric concepts*
- *Definition*
- *Square*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2015) *18* (2): 151-176.
Recepción: Noviembre 8, 2012 / Aceptación: Diciembre 16, 2013. DOI: 10.12802/relime.13.1821

of the sides. Evidence shows too that students have difficulties on the geometrical properties hierarchy, a fact which the authors consider relevant for further research, whether in the field of possible causes, either in how to intervene in the classroom as well as on initial and continuous teachers training.

RESUMO

A geometria apesar de ser reconhecidamente considerada um tema de grande importância, continua, no entanto, a ser um tópico em que os alunos revelam, ainda, muitas dificuldades. Com este trabalho, analisou-se um grupo de alunos do 6.º ano de escolaridade, relativamente à forma como eles visualizam e apresentam a definição do conceito de quadrado. Esta investigação permitiu caraterizar o posicionamento de cada um dos alunos quanto ao seu raciocínio geométrico, tendo por base os níveis de van Hiele. Os dados recolhidos permitem concluir que o nível de raciocínio geométrico apresentado pelos alunos é inferior ao desejável e necessário para alunos nesta fase de aprendizagem da Geometria. Além disso, também a definição de quadrado apresentada pela maioria dos alunos baseia-se apenas na congruência dos lados. Deste modo, ambos os resultados revelam que os alunos possuem dificuldades na hierarquização de propriedades geométricas, facto que os autores consideram pertinente continuar a investigar, quer no domínio das possíveis causas, quer ao nível de formas de intervenção na sala de aula, bem como na formação inicial e contínua de professores.

PALAVRAS CHAVE:

- *Raciocínio geométrico*
- *Níveis de van Hiele*
- *Conceitos geométricos*
- *Definição*
- *Quadrado*

RÉSUMÉ

La géométrie malgré d'être considéré comme un problème majeur reste, cependant, un sujet dans lequel les élèves révèlent encore beaucoup de difficultés. Dans cet article, nous avons analysé un groupe d'étudiants de la 6eme année, sur la façon dont ils voyaient et présentaient la définition de carré. Cette recherche a permis de caractériser la position de chacun des élèves face à son raisonnement géométrique, basé sur les niveaux de van Hiele. Les résultats obtenus permettent de conclure que le niveau de raisonnement géométrique présenté par les étudiants est moins que souhaitable et nécessaire pour les étudiants à ce stade de l'apprentissage de la géométrie. En outre, la définition d'un carré présenté par la plupart des étudiants est basée uniquement sur les compatibilités des côtés correspondants. Ainsi, les deux résultats montrent que les élèves ont des difficultés dans la hiérarchie des propriétés géométriques, fait que les auteurs considèrent pertinent d'étudier plus avant, dans le domaine des causes possibles, à la fois en termes de formes d'intervention dans la salle de classe et dans la formation initiale et continue des enseignants.

MOTS CLÉS:

- *Raisonnement géométrique*
- *Niveaux de van Hiele*
- *Concepts géométrique*
- *Définition*
- *Carré*

1. Introdução

1.1. *A importância da Geometria na educação escolar*

O domínio da visualização e do raciocínio espacial é reconhecido de extrema importância como uma área da geometria na aprendizagem matemática (NCTM, 1991; 2007). O desenvolvimento da visualização espacial, através da construção e manipulação de representações mentais de objetos, constitui um aspeto essencial do raciocínio espacial e do raciocínio geométrico (Battista, 2007). No entanto, esses mesmos domínios são frequentemente ignorados ou minimizados na educação dos primeiros anos (Sarama & Clements, 2009), sendo mesmo um tópico em que os alunos revelam ainda muitas dificuldades (Battista, 2007).

A aprendizagem de conceitos geométricos sempre foi um aspeto da matemática em que muitos alunos sentem dificuldades e a sua aprendizagem por vezes é realizada com lacunas ou erros (Fuys, Geddes & Tichler, 1988). Deste modo, os alunos quando chegam ao 2.º ciclo do ensino básico português[1] já experimentaram situações e atividades em que se proporcionava a oportunidade de desenvolver conceitos, propriedades e raciocínios geométricos. Assim, o nível de conhecimentos, procedimentos, comunicação, raciocínio e pensamento geométrico em que cada um dos alunos se encontra pode ser diferente. Vários estudos confirmam essa diversidade, tais como van Hiele (1986), Senk (1989), Gutiérrez (1996), Pandiscio e Orton (1998), Gray e Tall (2002), Tall (2004), entre outros.

O programa de Matemática do Ensino Básico Português (Ponte et al., 2007) refere que o propósito principal de ensino para o tema da geometria, ao longo dos três ciclos do ensino básico, se centra no desenvolvimento "do sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão das propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço" (p.20, 36, 51). Nesta perspetiva torna-se pertinente identificar os conhecimentos matemáticos e o nível de raciocínio geométrico que os alunos revelam nesta fase. Consoante o seu nível de raciocínio, será que a sua capacidade de definição e compreensão de um conceito geométrico é semelhante? Que relação pode existir entre as propriedades que os alunos identificam e a definição que eles apresentam para um dado conceito geométrico? Compreendendo as dificuldades dos alunos na identificação de propriedades ou na definição de um conceito, podem estabelecer-se estratégias e tarefas geométricas adequadas que conduzam a uma progressão no seu

[1] O ensino básico português é constituído por três ciclos: 1.º ciclo, do 1.º ao 4.º ano (6 aos 10 anos); o 2.º ciclo, do 5.º ao 6.º anos (11 e 12 anos); 3.º ciclo, do 7.º ao 9.º ano (13 aos 15 anos).

raciocínio e na sua capacidade de definir conceitos geométricos. Reconhecendo os erros que os alunos apresentam na definição de conceitos geométricos pode, futuramente, intervir-se na formação e no desenvolvimento profissional dos professores, nomeadamente, dos primeiros anos de escolaridade.

1.2. *O presente trabalho*

Para o presente estudo, entre os vários conceitos geométricos, escolheu-se a noção de quadrado, pois esta figura geométrica é recorrente nas várias tarefas matemáticas propostas aos alunos pelo professor, pelos manuais ou no seu quotidiano. Contudo esta noção é explorada desde cedo, pelos educadores do Pré-Escolar[2] e pelos professores do 1.º ciclo do ensino básico. Até ao final do 6.º ano de escolaridade, os alunos já utilizaram o conceito de quadrado e algumas das suas propriedades em múltiplas situações. No entanto, a introdução formal do estudo das propriedades dos quadriláteros, e do quadrado em particular, apenas se concretiza curricularmente no 7.º ano de escolaridade, o que pode conduzir à compreensão deste conceito de uma forma imprecisa, com erros ou lacunas, que podem comprometer a aprendizagem progressiva da sua classificação e ordenação das suas propriedades.

A referência ao quadrado, no Programa de Matemática (Ponte et al., 2007), até ao final do 2.º ciclo, surge em vários momentos. É por isso desejável que os alunos já tivessem atingido os seguintes objetivos específicos de aprendizagem: no 1.º ciclo, "identificar polígonos (…) nos sólidos geométricos e representá-los" e "reconhecer propriedades de figuras no plano e fazer classificações", as notas associadas clarificam, dando como exemplo, que se deve "solicitar o desenho de polígonos (…, quadrado, …) (…) contornando superfícies planas de modelos de sólidos geométricos", assim como também, "salientar que o quadrado pode ser visto como caso particular do retângulo" (Ponte et al., 2007, p. 22). No 2.º ciclo, não é feita qualquer referência explícita ao quadrado, surge no entanto, que os alunos devem "(…) classificar polígonos" (Ponte et al., 2007, p. 37) e "determinar o perímetro de polígonos regulares" (Ponte et al., 2007, p. 38). Assim, pelos objetivos específicos indicados é suposto que os alunos sejam capazes de classificar o quadrado e identificar algumas das suas propriedades. No início do 3.º ciclo, estariam, deste modo, em condições de abordar o tópico "Quadriláteros", desenvolvendo o objetivo de aprendizagem "classificar quadriláteros", acrescentando a nota "salientar o quadrado como caso particular do losango" (Ponte et al., 2007, p. 52), ou seja, serem capazes de, neste momento, ordenar logicamente propriedades de uma figura geométrica.

[2] O Ensino Pré-Escolar em Portugal contempla crianças dos 3 aos 5 anos.

1.3. *Objetivos do estudo e questões de investigação*

Neste sentido, e tendo em atenção o nosso foco de investigação definiram-se como objetivos:

- Caraterizar o nível de raciocínio geométrico apresentado pelos alunos do 6.º ano de escolaridade antes do estudo formal da definição e propriedades dos quadriláteros, em particular do quadrado;
- Identificar a definição de quadrado que os alunos apresentam neste contexto;
- Analisar a relação existente entre o nível de raciocínio geométrico apresentado pelos alunos e a sua capacidade para definir conceitos geométricos.

Destes objetivos decorreram as seguintes questões de investigação:

- Como se carateriza o nível de raciocínio geométrico apresentado pelos alunos do 6.º ano de escolaridade antes do estudo formal da definição e propriedades dos quadriláteros, em particular do quadrado?
- Qual o conceito de quadrado que os alunos apresentam neste nível de escolaridade?

Conhecendo e compreendendo o nível de raciocínio geométrico dos alunos, pode questionar-se em que condições a aprendizagem desse tópico se desenvolve quando os alunos estão situados em níveis diferentes ou ainda, se a definição de quadrado, bem como das suas propriedades, ainda apresentam imprecisões. Deste modo, pode equacionar-se uma proposta de intervenção que permita aos alunos progredirem para o nível de raciocínio geométrico desejado e, consequentemente, que a sua definição de quadrado se torne a mais correta possível.

2. Enquadramento teórico

2.1. *Definição de conceitos.*

A linguagem utilizada em matemática é um elemento básico para a comunicação, entre professor-aluno e aluno-aluno, e para a compreensão da informação estabelecida na sala de aula. Para isso, torna-se necessário conhecer qual a linguagem e o vocabulário que é comum aos intervenientes no processo de ensino e aprendizagem, já que não é possível definir um conceito se a linguagem utilizada não for compreendida. Freudenthal (1973) afirma mesmo que não é possível definir-se algo antes de se saber o que pretende definir, que na maioria dos casos, as definições não são prévias mas sim o resultado da organização ou conclusão de uma atividade específica. Para o mesmo autor, definir um conceito é mais do que o descrever, é um meio de organizar dedutivamente as suas propriedades. A definição relaciona o objeto com todos os outros, construindo desta forma um sistema orgânico de definições. Descrevem-se, assim, dois processos de definição de conceitos, um descritivo (*a posteriori*) e outro construtivo (*a priori*) (de Villiers, 1998).

No primeiro processo sobressai a indicação de algumas propriedades caraterísticas do objeto conhecido. Esta definição (*a posteriori*) significa que o conceito e as suas propriedades já eram conhecidos previamente, pelo que a definição é alcançada pela seleção de propriedades deduzidas do conjunto de propriedades desse objeto. No segundo processo são modelados novos objetos a partir de outros já familiares. A construção (*a priori*) da definição do conceito acontece quando esta é alterada através da exclusão, generalização, especialização, substituição ou acréscimo de propriedades à definição anterior, de tal modo que um novo conceito é construído durante o processo. Este novo conceito abarca todas as propriedades que possam ser experimentalmente ou logicamente exploradas, podendo, assim, sistematizar o conhecimento existente e consequentemente produzir novo conhecimento (Freudenthal, 1973).

A definição de um conceito geométrico por parte do aluno, num processo descritivo, pressupõe que o aluno já possua ou domine um conjunto de propriedades e caraterísticas desse mesmo objeto. Só deste modo é possível que o aluno desenvolva atividades que envolvam a abstração, o raciocínio e o pensamento sobre o mesmo. À partida, pressupõe-se que todos os alunos, num determinado ano de escolaridade, possuem a mesma definição relativamente a um conceito geométrico específico. Contudo, dados empíricos (Gutiérrez, 1996; Clements, Battista & Sarama, 2001) facilmente nos indicam o contrário, sugerindo ainda que esses mesmos alunos podem encontrar-se em diferentes níveis de abstração e de raciocínio geométrico.

2.2. *Níveis de raciocínio ou pensamento geométrico e níveis de abstração*

O casal van Hiele (1986), no seu modelo, que permite hierarquizar o desenvolvimento de conceitos geométricos e raciocínio geométrico, considera que a aprendizagem se processa através do desenvolvimento de conceitos e de raciocínio ao longo de vários níveis. Em termos educacionais admite-se que estes níveis são sequenciais e hierárquicos, sendo a transição entre eles fixa. O progresso não depende da idade ou maturidade de um aluno, mas é mais dependente das experiências educacionais vividas. Este conceito aproxima-se da noção de "zona de desenvolvimento proximal" apresentada por Vygotsky (1978), como sendo "a distância entre o atual nível de desenvolvimento determinado por uma resolução individual de um problema e o nível potencial de desenvolvimento da resolução desse problema através do acompanhamento de um adulto ou da colaboração com pares mais capazes" (pp.85-86).

Originalmente, os níveis foram numerados por van Hiele de 0 a 4, e alguns autores, posteriormente, apresentaram outra numeração de 1 a 5, permitindo inclusive a introdução de um pré-nível 0, denominado por pré-visualização. Neste nível os sujeitos apenas reconhecem ou identificam um subconjunto das caraterísticas visíveis de um objeto, não fazendo ainda distinção entre figuras (Senk, 1989; Clements & Battista, 1992). Cada um destes níveis descreve a forma como os alunos raciocinam sobre conceitos geométricos, como por exemplo, formas geométricas, sendo identificados por "visualização", "análise", "ordenação", "dedução" e "rigor" (Tabela I).

TABELA I
Níveis de van Hiele (Clements & Battista, 1992)

Nível		*Descrição*
1	Visualização	As figuras são entendidas de acordo com a sua aparência.
2	Análise	As figuras são caraterizadas pelas suas propriedades.
3	Ordenação	As propriedades são ordenadas logicamente.
4	Dedução	A Geometria é entendida como um sistema axiomático.
5	Rigor	Os sistemas axiomáticos são estudados.

No nível "visualização", os alunos reconhecem as figuras apenas pela sua aparência como um todo, muitas vezes por comparação com um estereótipo. As propriedades da figura não são compreendidas e na resolução de problemas utilizam propriedades gerais e técnicas (por exemplo, sobreposição ou medição). Usam uma linguagem informal, tomam decisões baseadas na perceção e não no raciocínio e não são capazes de analisar a figura nas suas componentes ou elementos.

Os alunos, no nível "análise", reconhecem e descrevem figuras ou formas em termos das suas propriedades, mas sem estabelecer relações entre elas. Descobrem, experimentalmente, propriedades por observação, medição, desenho e modelação, são capazes de usar uma linguagem formal e simbólica e de enumerar todas as propriedades que conhecem. Contudo, não são capazes de discernir quais são as propriedades necessárias e quais são as suficientes para a definição de uma figura e não compreendem a necessidade de provar ou demonstrar algumas generalizações que descobrem empiricamente (indutivamente).

Relativamente ao nível “ordenação”, os alunos já são capazes de estabelecer relações entre propriedades e entre figuras e de apresentar definições com significado, podem formar definições abstratas distinguindo o suficiente do necessário. Usando um conjunto suficiente de propriedades utilizam argumentos informais para justificar o seu raciocínio, descobrem novas propriedades por dedução, compreendem implicações lógicas e a inclusão de classes, mas ainda não entendem o significado de uma dedução formal ou de um sistema axiomático.

No nível “dedução”, os alunos reconhecem e usam termos, definições, postulados e teoremas para construir uma demonstração, conhecem o significado de condições necessárias e suficientes, são capazes de comparar diferentes demonstrações, mas ainda não são capazes de fazer a distinção entre sistemas axiomáticos.

Finalmente, no nível “rigor”, os alunos percebem os aspetos formais de uma dedução, estabelecendo e comparando sistemas matemáticos e são capazes de compreender sistemas não-euclidianos ou geometrias euclidianas e não-euclidianas.

Na transição do nível de “visualização” para o de “análise”, relativamente à definição de conceitos matemáticos, a linguagem é introduzida para descrever as figuras observadas. Esta descrição é gradualmente desenvolvida como suporte para uma nova estrutura, facilitando a comunicação. Na transição do nível de “análise” para o de “ordenação”, os alunos ainda não conseguem utilizar uma linguagem que seja utilizada para descrever raciocínios. No entanto, no nível de “dedução”, já é possível os alunos construírem argumentos de uma forma sequencial.

Na proposta inicial de van Hiele, os níveis eram considerados discretos, sendo que um aluno só transitava para o nível seguinte quando tivesse desenvolvido as caraterísticas dos níveis anteriores. Atualmente, estes são vistos mais como camadas que caraterizam o pensamento/raciocínio geométrico. Pandiscio e Orton (1998) apresentam como críticas ao modelo de van Hiele a falta de generalização, o que conduz a que cada situação ou estratégia aplicada tenha de ser revista para diferentes domínios da geometria. Por outro lado Senk (1989), refere a ausência de um “não nível” como uma lacuna ao modelo de van Hiele, que considerava que todos os alunos deviam já ter a habilidade de identificar caraterísticas geométricas comuns, pelo menos através da observação. Esta ideia é corroborada por Clements e Battista (1992) ao defenderem a existência de um pré-nível abaixo do nível “visual”. Gutiérrez, Jaime e Fortuny (1991) argumentam que alguns alunos podem desenvolver dois níveis de van Hiele simultaneamente, permitindo que usem vários níveis de raciocínio, dependendo do conceito ou do contexto geométrico em causa. Assim, salientam que não deve ser atribuído um único nível de raciocínio a cada aluno e também, tal como é afirmado por Clements, Battista e Sarama (2001), podem coexistir diferentes níveis e ainda, podem desenvolver-se, simultaneamente, mais do que um nível.

A definição de conceitos e a capacidade de raciocínio ou pensamento geométrico não estão desligadas da capacidade de abstração de cada um dos alunos. Gray e Tall (2002) afirmam que o termo "abstração" é um processo dual de desenhar/representar uma situação e também o conceito que surge por esse processo. Os mesmos autores, Gray e Tall (2002) e Tall (2004), identificam três tipos de abstração:

(i) abstração empírica focada nos objetos e nas suas propriedades;
(ii) abstração pseudo-empírica focada em ações que são mentalmente traduzidas em conceitos;
(iii) abstração refletida focada nas propriedades e na dedução lógica.

Pensando em objetos geométricos, o primeiro nível é o "mundo real", o segundo nível são os desenhos e, o nível mais elevado, o dos axiomas e definições. Na abstração empírica, os alunos focam-se no objeto e na descoberta das suas propriedades – manipulação de objeto físico real. Na abstração pseudo-empírica, os alunos são capazes de manipular representações do objeto num ecrã de computador ou desenhar as suas representações em papel. Na abstração refletida, existe uma manipulação mental por indução e dedução dos objetos geométricos por parte do aluno.

3. Metodologia

Tendo em consideração as questões e o foco do estudo apresentado, optou-se por um estudo com uma abordagem qualitativa, com carácter interpretativo. Esta opção permitiu compreender e analisar com maior profundidade as questões propostas com o estudo. A escolha teve por base: a fonte direta dos dados recolhidos ter sido em ambiente natural (a sala de aula de Matemática); o investigador ter sido o agente na recolha desses mesmos dados (observação direta, produções dos alunos e questionários); e os dados recolhidos serem essencialmente de caráter descritivo (Bogdan & Biklen, 1994; Cohen, Manion & Morrison, 2007).

3.1. *Participantes*

Para a realização do estudo foram escolhidas três turmas, de entre as seis do 6.º ano de escolaridade existentes numa escola pública do ensino básico português, localizada em arredores citadinos, provenientes de meios socioeconómicos médio e médio-baixo. A razão desta escolha deveu-se, essencialmente, a dois fatores: um dos investigadores ser também o docente de duas das turmas (Y e Z) e a docente da terceira turma (X) aceitou colaborar na investigação. A caraterização das turmas encontra-se na tabela seguinte:

TABELA II
Distribuição dos alunos por turma

Turma	X	Y	Z	Total
Masculino	14	13	12	39
Feminino	7	15	14	36
Total	21	28	26	75

De salientar que, nas turmas Y e Z existiu continuidade pedagógica durante os dois anos de escolaridade do 2.º ciclo, enquanto na turma X, esse facto não se verificou. Importa ainda referir, que os 75 alunos pertencentes a estas três turmas, eram provenientes de quatro turmas distintas do 1.º ciclo, do mesmo agrupamento, mas de escolas distintas.

3.2. *Tarefas desenvolvidas durante o estudo*

Para a realização deste estudo foram elaboradas duas tarefas distintas, aplicadas em sala de aula em dois momentos diferentes, janeiro e abril de 2012. O número de alunos que completou cada uma das tarefas, foi, por motivos de várias ordens, variando relativamente ao número total de participantes do estudo.

A Tarefa I – "As propriedades de uma figura geométrica" (Figura 1), foi aplicada em janeiro de 2012, simultaneamente nas três turmas na mesma semana, com a duração de 30 minutos, aquando do início do estudo do tópico de ensino "Reflexão, rotação e translação", do tema de Geometria do Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007).

Tarefa I.
Enuncia ou descreve todas as propriedades da figura geométrica fornecida.

Figura 1. Enunciado da Tarefa I "As propriedades de uma figura geométrica"

Para a realização desta tarefa, distribuiu-se a cada aluno uma folha para registar as suas respostas e uma figura em papel com a forma de um quadrado, sendo o enunciado desta escrito no quadro pelo respetivo professor. Durante a resolução da tarefa os professores tiveram a atenção de nunca referir a palavra "quadrado". A tarefa foi realizada individualmente por cada um dos alunos, sem a ajuda do professor ou dos colegas da turma.

Entre a realização da tarefa I e a tarefa II, além da conclusão deste tópico "Reflexão, Rotação e Translação", foram lecionados tópicos dos temas de Números e Operações e Organização e Tratamento de Dados. A tarefa I não foi corrigida formalmente por cada um dos professores das turmas, mas após a sua realização estabeleceu-se um momento de diálogo entre os alunos e entre o professor e os alunos, sobre as respostas dadas. A título de exemplo, apresentamos um excerto de um dos diálogos estabelecido numa das turmas como um dos professores:

João: Professor, houve alguns colegas da turma que escreveram muitas coisas que não têm nada que ver com o quadrado!
Professor: Porque dizes isso? E como sabes que era um quadrado?
João: Escreveram coisas sobre a folha ser branca, que se dobrava…
Bruna: Isso foi a folha que o professor deu!
Professor: Mas o que representava essa folha? E porque dizes que é um quadrado?
Tiago: A folha representava o quadrado, mas não era um quadrado.
Bruna: (interrompendo) E sabíamos que era quadrado pois medi os lados e os ângulos.
João: Então estava errado dizer coisas sobre a folha?
Professor: Nada estava errado, o que se pretendia era que indicasses as propriedades que conhecias ou que conseguias verificar ou provar que essa representação do quadrado tinha.
Bruna: Ah! Então tudo o que escrevi está certo, pode é não estar completo!
Tiago: (rindo) Bem, alguns podem ter escrito coisas erradas sobre o quadrado!

Os diálogos estabelecidos não apresentaram um elencar de todas as propriedades do quadrado, apenas esclareceram algumas dúvidas que podiam ter surgido relativamente ao que era pretendido com a tarefa. Pontualmente, os professores apresentaram algumas das propriedades que os alunos podiam ter escrito, bem como, informações que poderiam ter acrescentado, em alguns casos, de modo a suportarem as suas descrições, quer através de uma argumentação quer através de uma demonstração.

A Tarefa II – "A definição de uma figura geométrica", composta por duas questões, foi aplicada em abril de 2012, igualmente nas três turmas, mas em semanas consecutivas. As duas questões foram apresentadas em momentos distintos da mesma aula, sendo o tempo de realização para cada uma das questões de 10 e 5 minutos, respetivamente. Os alunos realizaram esta tarefa individualmente e sem auxílio do professor ou dos colegas da turma.

Tarefa II.

Questão 1.

Define a figura geométrica apresentada.

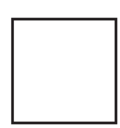

Figura 2. Enunciado da Tarefa II – Questão 1

Para a realização da primeira questão da tarefa II (Figura 2), disponibilizou-se aos alunos uma folha para registarem as suas respostas, sendo o enunciado apresentado no quadro. De salientar que o professor mencionou aos alunos que a figura apresentada era a mesma que eles tinham utilizado para responder à tarefa I. Note-se que, os alunos quando responderam às questões desta tarefa, não tiveram acesso às suas respostas da tarefa anterior. Decorrido o tempo previsto para a realização da Questão 1, foi solicitado aos alunos que guardassem a folha de registo e respondessem a uma nova questão – Questão 2 da tarefa II (*Figura 3*). Para a operacionalização da tarefa, o professor escreveu novamente o enunciado no quadro, pedindo aos alunos que respondessem numa nova folha.

Tarefa II.

Questão 2.

O que é um quadrado?

Figura 3. Enunciado da Tarefa II – Questão 2

De notar que em todas as tarefas, os alunos completaram sempre as suas respostas no prazo estabelecido para a sua resolução.

3.3. *Definição das categorias de análise*

Com a aplicação da Tarefa I – "As propriedades de uma figura geométrica", procurou-se dar resposta à primeira questão da investigação - Como se carateriza o nível de raciocínio geométrico apresentado pelos alunos antes do estudo formal da definição e propriedades dos quadriláteros, em particular do quadrado?

De acordo com o marco teórico escolhido, definiram-se como categorias de análise os níveis de van Hiele, nível[3] 0 a 3, procurando assim posicionar cada um dos participantes do estudo num nível de raciocínio geométrico, relativamente à definição de quadrado. De salientar que, os níveis 4 (Dedução) e 5 (Rigor), não foram incluídos como categorias de análise neste estudo, uma vez que, nas respostas dos alunos não se registaram propriedades do quadrado que o justificassem, revelando-se assim, os restantes níveis suficientes para esta investigação. A cada uma das unidades de registo, neste caso, as propriedades do quadrado identificadas, foi associado um código com dois algarismos, sendo que

[3] Aos níveis iniciais de van Hiele de 1 a 5, acrescentou-se o pré-nível 0 (Senk, 1989; Clements & Battista, 1992).

o algarismo das dezenas representa o nível/categoria de van Hiele e o algarismo das unidades corresponde a uma enumeração das propriedades, tal como indicado na tabela seguinte.

TABELA III

Categoria de análise em cada um dos Níveis de van Hiele identificados

Nível 0 *Pré-visualização*	*Nível 1* *Visualização*	*Nível 2* *Análise*	*Nível 3* *Ordenação*
01 – É uma figura geométrica. 02 – Comparação/ referência ao cubo.	11 – É um quadrado. 12 – Tem 4 lados. 13 – Tem 4 vértices. 14 – É um quadrilátero. 15 – Tem os 4 ângulos retos. 16 – A amplitude dos ângulos internos é 90º. 17 – Tem 4 eixos de simetria axial ou de reflexão. 18 – Tem 4 simetrias de rotação, com amplitudes de 90º, 180º, 270º e 360º. 19 – É uma figura plana. 1A – Indicação de obtenção de figuras geométricas por dobragem ou desenho dos eixos de simetria axial.	21 – É um polígono. 22 – Tem os lados congruentes. 23 – Tem os ângulos congruentes. 24 – Os lados opostos são paralelos. 25 – Os lados adjacentes são perpendiculares. 26 – O perímetro determina-se como o quádruplo da medida de comprimento do lado. 27 – A área determina-se elevando a medida de comprimento do lado ao quadrado. 28 – As suas diagonais bissetam-se.	31 – É um quadrilátero regular. 32 – É um retângulo. 33 – É um losango. 34 – O ponto de intersecção das diagonais é o centro de uma circunferência circunscrita ao quadrado.

Com a aplicação da Tarefa II procurou-se, agora, dar resposta à segunda questão em estudo - Qual o conceito de quadrado que os alunos apresentam neste nível de escolaridade?

Para a análise das respostas dos alunos, a congruência foi a caraterística escolhida para definir as quatro unidades de registo seguintes:

- Ausência de congruências;
- Congruência dos lados;
- Congruência dos ângulos;
- Congruência dos lados e dos ângulos.

4. Desenvolvimento de alguns exemplos e análise dos resultados

4.1. *Caraterização do nível de raciocínio geométrico apresentado pelos alunos*

Após efetuada a codificação das unidades de registos nas transcrições das respostas à Tarefa I dos 65 alunos que realizaram todas as tarefas propostas, no universo dos 73 alunos, cada um deles foi colocado num dos níveis de van Hiele, de acordo com a predominância do algarismo das dezenas nos códigos estabelecidos para as unidades de registo. Esses dados sumarizam-se na seguinte tabela:

TABELA IV
Distribuição dos alunos por níveis de van Hiele

Turma	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Total
X	3	8	2	0	13
Y	2	23	1	0	26
Z	3	20	3	0	26
Total	8	51	6	0	65
Percentagem	12%	78%	9%	0%	100%

O estudo realizado apresenta uma distribuição dos alunos por três níveis diferentes, ou seja, apesar de estarem no mesmo ano de escolaridade o seu nível de raciocínio geométrico é diversificado, tal como é referido nos trabalhos de van Hiele (1986), Senk (1989), Gutiérrez (1996), Pandiscio e Orton (1998), Gray e Tall (2002), Tall (2004) e Sarama e Clements (2009).

De destacar uma predominância significativa de alunos no nível 1. De facto, 78% dos alunos situa-se neste nível "visualização", ou seja, as propriedades são enunciadas pela aparência da figura geométrica apresentada ou por comparação com figuras geométricas semelhantes que o aluno já conhece, sendo que algumas das propriedades enunciadas são obtidas também por sobreposição, dobragem ou medição (Clements & Battista, 1992). Contudo este nível é inferior ao desejável para o início da aprendizagem do tópico de “Quadriláteros” no ano seguinte de escolaridade (7.º ano), tal como é sugerido no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007). Note-se que apenas 9% dos alunos se encontrava no nível 2. É interessante notar que resultados análogos, predominância do nível 1, se verificam em estudos realizados (Swafford, Jones & Thorton, 1997; Jones, 2002; Clements, 2003), não com alunos mas com professores de Matemática de vários níveis de ensino, nomeadamente no Reino Unido.

De realçar que, por um lado, nenhum aluno se situa já no Nível 3 – Ordenação e, por outro lado, existe um número significativo de alunos (12%) que se situa apenas no pré-nível de raciocínio geométrico. Estes alunos reconhecem um número muito limitado de propriedades do quadrado ou enunciam um conjunto de noções geométricas sem relevância para a definição de quadrado como se exemplifica na Figura 4.

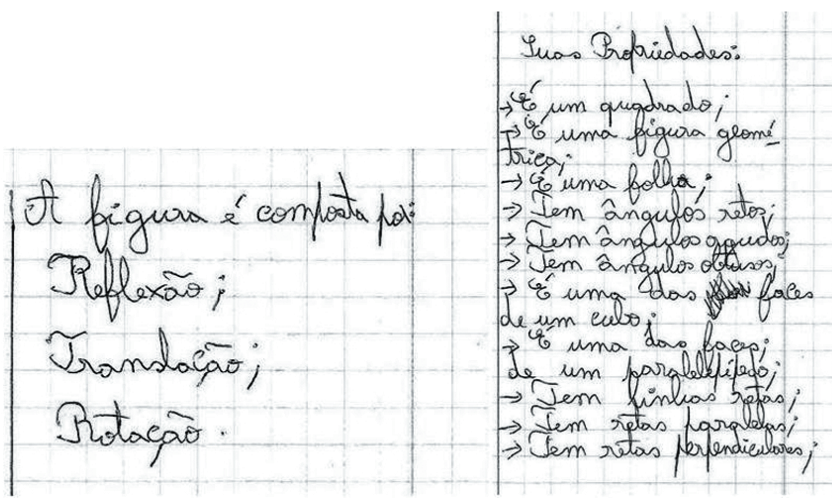

Figura 4. Resolução da Maria João, turma Z à Tarefa I

Esta primeira análise permitiu colocar cada um dos alunos num dos níveis de van Hiele. Observando a tabela IV, constatamos que a distribuição dos alunos pelos quatro níveis é idêntica nas três turmas, pelo que se optou por analisar mais pormenorizadamente apenas uma das turmas: a turma Z. Para levar a cabo esta segunda análise, recorreu-se ao programa de análise qualitativa NVivo8, estudando novamente as resoluções dos alunos relativamente à Tarefa I, calculando agora a frequência de cada uma das unidades de registo, resultados sintetizados na tabela V:

TABELA V

Frequência das propriedades de quadrado enunciadas pelos alunos

Unidade de registo	*Frequência (por aluno)*	*Frequência (por ocorrência)*
01 – É uma figura geométrica.	8	8
02 – Comparação/referência ao cubo.	12	19
11 – É um quadrado.	19	19
12 – Tem 4 lados.	4	4
13 – Tem 4 vértices.	9	9
14 – É um quadrilátero.	2	2
15 – Tem os 4 ângulos retos.	12	12
16 – A amplitude dos ângulos internos é 90º.	6	6
17 – Tem 4 eixos de simetria axial ou de reflexão.	9	9
18 – Tem 4 simetrias de rotação, com amplitudes de 90º, 180º, 270º e 360º.	3	3
19 – É uma figura plana.	-	-
1A – Indicação de obtenção de figuras geométricas por dobragem ou desenho dos eixos de simetria axial.	16	22
21 – É um polígono.	-	-
22 – Tem os lados congruentes.	15	16
23 – Tem os ângulos congruentes.	-	-
24 – Os lados opostos são paralelos.	5	5
25 – Os lados adjacentes são perpendiculares.	5	5
26 – O perímetro determina-se como o quádruplo da medida de comprimento do lado.	9	9
27 – A área determina-se elevando a medida de comprimento do lado ao quadrado.	11	11
28 – As suas diagonais bissetam-se.	1	1
31 – É um quadrilátero regular.	-	-
32 – É um retângulo.	-	-
33 – É um losango.	-	-
34 – O ponto de intersecção das diagonais é o centro de uma circunferência circunscrita ao quadrado.	-	-

Outras:		
Faz a medição dos lados	11	12
Indica a existência de simetrias axiais	13	13
Indica a existência de simetrias rotacionais	12	13
Menciona a sua utilidade	6	17

A unidade de registo mais mencionada, por 19 alunos, foi a 11 “É um quadrado”, sendo que, quase todos estes alunos escreveram esta referência no início da resolução da tarefa (Figura 4), deduzindo este facto por visualização e não pela análise das propriedades da figura. É interessante notar que, mais de metade dos alunos (16), relacionaram esta tarefa com o tópico ”Reflexão, rotação e translação” (Ponte et al., 2007), uns fazendo a referência a estas transformações geométricas e outros realizando dobragens ou reproduções do quadrado (Figura 5).

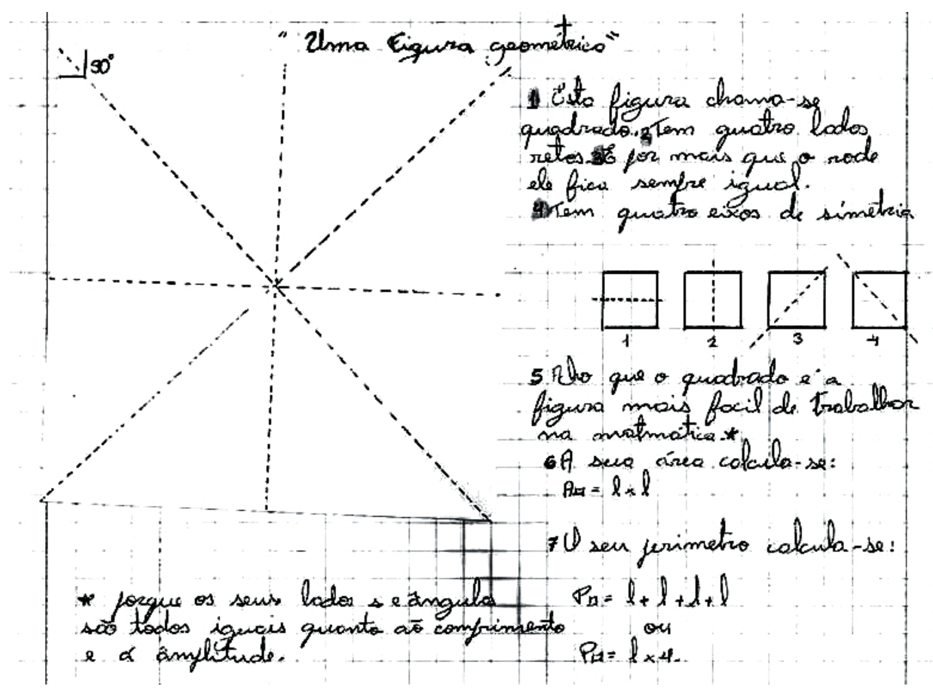

Figura 5. Resolução da aluna Alexandra, turma Z (excerto 1)

Tendo em conta os níveis de abstração, definidos na secção 2.3. por Gray e Tall (2002) e Tall (2004), podemos concluir que estes alunos se encontram num nível de abstração pseudo-empírica. De facto, as suas resoluções são suportadas pela apresentação de dobragens do quadrado em papel (Figura 5), distribuído pelo professor, ou pela reprodução dessa figura, desenhando a tracejado os seus eixos de simetria (13 alunos referem a existência de simetrias axiais e 12 alunos a existência de simetrias rotacionais) e possíveis transformações do quadrado, no plano, e identificando algumas das suas propriedades (Figura 6).

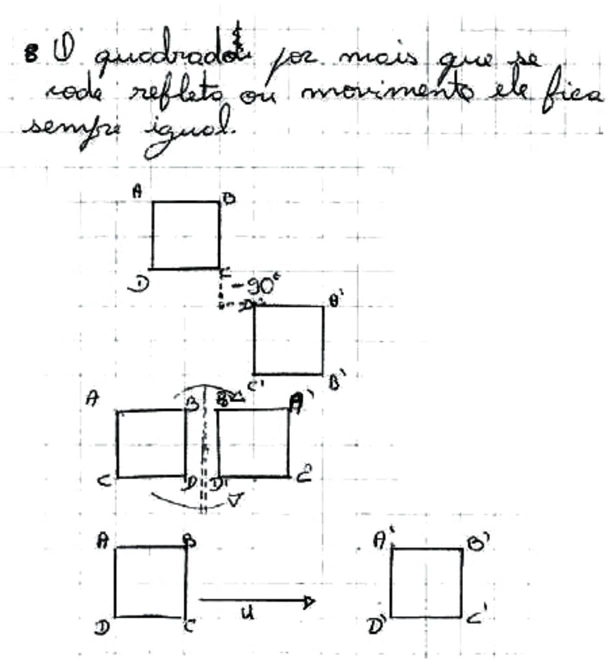

Figura 6. Resolução da aluna Alexandra, turma Z (excerto 2)

Comparativamente, constata-se a existência de alunos a referir a congruência de lados (15) e nenhum a congruência de ângulos. Acresce a indicação que 9 alunos referem a medição dos lados e apenas 6 alunos assinalada a amplitude dos ângulos internos, embora 12 alunos mencionem que os ângulos internos são retos.

Salienta-se ainda a existência de 12 alunos que ao enunciar as propriedades da figura geométrica em questão, a comparam com o cubo ou indicam que a esta é uma face do cubo ou referem ainda como propriedades da figura a existência de "4 arestas" ou "1 face" (Figura 7). Este facto poderá estar relacionado com um dos objetivos específicos enunciado no Programa de Matemática, em que no 1.º ciclo os alunos identificam e representam polígonos através dos sólidos geométricos (Ponte et al., 2007, p.22).

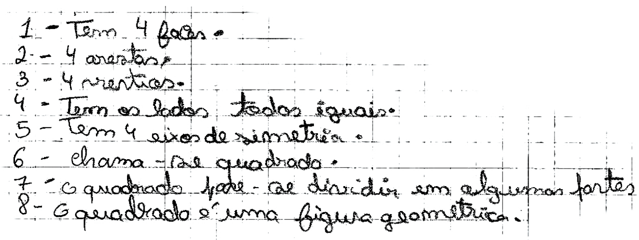
1 - Tem 4 faces.
2 - 4 arestas,
3 - 4 vertices.
4 - Tem os lados todos iguais.
5 - Tem 4 eixos de simetria.
6 - chama-se quadrado.
7 - O quadrado pode-se dividir em algumas partes
8 - O quadrado é uma figura geometrica.

Figura 7. Resolução da aluna Francisca da tarefa 1

De referir ainda que, alguns alunos apresentam como propriedades da figura geométrica, a existência de uma medida de perímetro, 9 alunos, e uma medida de área, 11 alunos (Figuras 5 e 8), tendo na sua maioria calculado o valor dessas medidas. Esta situação poderá encontrar justificação no facto da lecionação dos tópicos de "Perímetros" e "Áreas" ter sido desenvolvida no ano anterior e constituir uma atividade recorrente que os professores de Matemática propõem aos alunos.

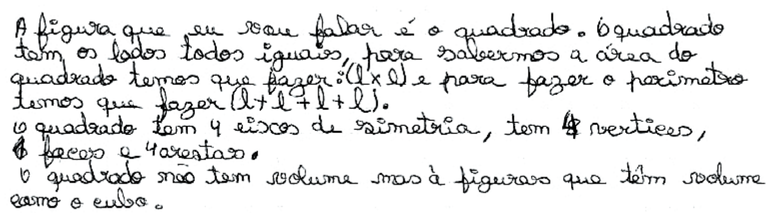
A figura que eu vou falar é o quadrado. O quadrado tem os lados todos iguais, para sabermos a área do quadrado temos que fazer: (l×l) e para fazer o perímetro temos que fazer (l+l+l+l).
O quadrado tem 4 eixos de simetria, tem 4 vertices, 4 faces e 4arestas.
O quadrado não tem volume mas à figuras que têm volume como o cubo.

Figura 8. Resolução da aluna Ana da Tarefa 1

A partir das transcrições dos registos dos alunos referentes à Tarefa 1, a codificação apresentada, permitiu sumariar os tipos e frequência das incorreções ou erros mais comuns verificados, os quais se remetem para a tabela seguinte:

TABELA VI
Tipos e frequência de incorreções enunciados na realização da Tarefa I

Turma	*Confusão ou referência a elementos de sólidos*	*Afirmação "Não é um retângulo"*	*Afirmação "Não é um losango"*	*Referência a isometrias, e.g. translação*	*Determina um volume para o quadrado*	*Apresenta medições erradas (lados ou ângulos)*
X	13	-	-	3	-	-
Y	15	1	3	4	1	-
X	11	-	2	8	-	1
Total	39	1	5	15	1	1

Pela análise da Tabela VI, podemos concluir que existem muitas referências a elementos de sólidos geométricos, concretamente do cubo, para a caraterização das propriedades do quadrado, como por exemplo, "arestas" ou "faces" (Figuras 4, 7 e 8). Também alguns alunos fazem referência a isometrias, nomeadamente, à translação, o que pode ser explicado tendo em atenção que esta tarefa, como já referido anteriormente, foi aplicada no início da lecionação do tópico "Reflexão, rotação e translação" (Figuras 4 e 6).

4.2. *Conceito de quadrado apresentado pelos alunos*

Para analisar a forma como os alunos definem quadrado, implementou-se a Tarefa II – "A definição de uma figura geométrica", composta por duas questões e a codificação das respostas teve em consideração a congruência, quer dos lados quer dos ângulos, como referido anteriormente. Esta tarefa foi realizada por 65 alunos. Essa análise sumariza-se nas seguintes tabelas:

TABELA VII
Tarefa II - Questão 1

Turma	*Ausência de congruências*	*Congruência dos lados*	*Congruência dos ângulos*	*Congruência dos lados e dos ângulos*	*Total*
X	8	2	0	3	13
Y	15	6	0	5	26
Z	12	6	1	7	26
Total	35	14	1	15	65

TABELA VIII
Tarefa II - Questão 2

Turma	*Ausência de congruências*	*Congruência dos lados*	*Congruência dos ângulos*	*Congruência dos lados e dos ângulos*	*Total*
X	9	3	0	1	13
Y	15	7	2	2	26
Z	11	6	2	7	26
Total	35	16	4	10	65

Os dados obtidos nas respostas que os alunos apresentaram às questões "Define a figura geométrica apresentada" e "O que é um quadrado?", Questão 1 e Questão 2, respetivamente, não apresentaram divergências significativas nas categorias indicadas.

Em ambas as questões, mais de metade dos alunos, não considera necessária a referência à congruência para a definição de quadrado, mencionando nas suas respostas outras propriedades comuns a outros polígonos ou referindo caraterísticas de sólidos geométricos (Figura 9).

O que é um quadrado?

Joaquim: É um polígono e é uma das faces de um cubo.
Augusta: É uma figura geométrica com 4 lados.
Filomena: Um quadrado é uma figura geométrica e um polígono.
Gil: É um quadrilátero, é uma figura geométrica, tem 4 vértices, 4 arestas e 1 face.

Figura 9. Resolução da Questão 2 dos alunos: Joaquim e Augusta, turma X; Filomena e Gil, turma Y

O número de alunos que indica nas suas respostas, a cada uma das questões, a congruência de lados e ângulos, é 15 e 10, respetivamente. Mas mesmo estes alunos, nem sempre, consideram essas propriedades suficientes para a definição de quadrado, acrescentando outras (Figura 10).

Por outro lado, cerca de 21% e 25% dos alunos, em cada uma das questões, considera que é suficiente referir a congruência de lados, enquanto, a congruência de ângulos é mencionada por um número residual de alunos (1 e 4, respetivamente em cada questão). Comparativamente, mas agora relativamente a professores de Matemática em vários níveis de ensino, Fuys et al. (1988) afirmam que quase todos os participantes no seu estudo conseguiam desenhar um quadrado, mas cerca de dois terços não mencionavam a congruência de ângulos.

O que é um quadrado?

Anabela: O quadrado é um retângulo com os lados todos iguais, é um quadrilátero, um poliedro e um polígono.
Joana: Todos os lados têm o mesmo comprimento. Todos os ângulos do quadrado são retângulos [retos]. Tem quatro simetrias de reflexão.
Filipa: Um quadrado é um retângulo com todos os lados de igual tamanho. Costuma ter 4 vértices, 4 arestas e 1 lado.

Define a figura geométrica apresentada.

Andreia: É um quadrado. Tem os lados todos iguais. Se nós juntarmos mais 5 quadrados faz um cubo. Ângulos todos iguais 'reto'.

Figura 10. Resolução das Questões 1 ou 2 dos alunos: Joana, turma X; Filipe e Andreia, turma Y; Anabela, turma Z

4.3. *Relação entre o nível de raciocínio geométrico e a definição de quadrado.*

Na procura de uma possível relação entre o nível de raciocínio geométrico apresentado pelos alunos e a sua capacidade de definir quadrado, foram tomadas duas opções: a primeira, consistiu em considerar para análise apenas os alunos das três turmas que realizaram as tarefas I e II (questão 1 e 2), ou seja, 65 alunos; a segunda, baseou-se no cruzamento dos dados obtidos na análise da tarefa I (nas categorias Nível 0, Nível 1 e Nível 2) e dos dados recolhidos na análise da tarefa II (nas categorias Ausência de congruência, Congruência dos lados, Congruência dos ângulos, Congruência dos lados e dos ângulos), nesta segunda opção, a comparação foi levada a cabo para ambas as questões, como se pode constatar nas tabelas IX e X.

TABELA IX

Tarefa I *Vs.* Tarefa II – Questão 1

Definição *Raciocínio*	*Nível 0*	*Nível 1*	*Nível 2*	*Total*
Ausência de congruência	6	27	2	35
Congruência dos lados	1	12	1	14
Congruência dos ângulos	-	1	-	1
Congruência dos lados e dos ângulos	1	11	3	15
Total	8	51	6	65

TABELA X

Tarefa I *Vs.* Tarefa II – Questão 2

Definição *Raciocínio*	*Nível 0*	*Nível 1*	*Nível 2*	*Total*
Ausência de congruência	4	29	2	35
Congruência dos lados	2	13	1	16
Congruência dos ângulos	2	2	-	4
Congruência dos lados e dos ângulos	0	7	3	10
Total	8	51	6	65

Pela análise dos resultados, podemos afirmar que as diferenças registadas entre as respostas às questões 1 e 2, da tarefa II, comparativamente com as repostas à tarefa I, não são significativas quando está em causa o nível de raciocínio geométrico dos alunos *versus* definição de quadrado.

5. Conclusões

Relativamente ao posicionamento dos alunos nos diferentes níveis de van Hiele, o estudo levado a cabo revela que mais de 75% dos 65 alunos participantes se encontra no nível 1, no que concerne ao raciocínio geométrico face à definição de quadrado. De acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al*.,* 2007), o nível 2 seria o desejável para que os alunos prosseguissem para a etapa seguinte da sua escolaridade (3.º ciclo), já que nesta fase, se pressupõe que os alunos estejam numa etapa de raciocínio e pensamento geométrico capaz de desenvolver as aprendizagens esperadas no tópico "Quadriláteros". No entanto, a percentagem de alunos que se situa no nível 2 é cerca de 9%.

No que diz respeito à definição de quadrado apresentada pelos participantes, podemos concluir que mais de metade dos alunos (54%) na resposta às questões 1 e 2 da tarefa II, não menciona qualquer referência à congruência de lados ou de ângulos, sendo a congruência de ângulos a unidade de registo menos citada. Contudo, o número de alunos que, elenca um conjunto de propriedades dispersas (não relacionadas com a congruência) nem sempre necessárias ou suficientes, para definir quadrado é muito elevado. Em particular, o número de alunos (12 num universo de 26, na análise realizada na turma Z) que faz referências ou associa propriedades do quadrado como sendo propriedades do cubo ou de outros sólidos geométricos, é significativo.

Da análise das resoluções, apresentadas pelos alunos das tarefas I e II, podemos constatar que estes, na sua maioria, conhecem um conjunto de propriedades e caraterísticas do quadrado, e de acordo com de Villiers (1998), poderiam, desse modo, construir (*a posteriori*) uma definição descritiva de quadrado. Contudo, as definições de quadrado expostas pelos alunos, durante esta fase, revelam que estes possuem, ainda, algumas dificuldades relativamente à exclusão, inclusão ou generalização de propriedades que não sejam necessárias ou até à redefinição (*a priori*) das mesmas.

Quando relacionamos o nível de raciocínio geométrico e a capacidade de definição de conceitos geométricos, verificamos que os alunos posicionados nos nível 0 ou 1, na sua maioria, para definir quadrado, não faz qualquer referência a congruências e quando o faz refere-se tão somente à congruência dos lados.

Os resultados obtidos relativamente ao posicionamento dos alunos nos diferentes níveis de van Hiele e ao conceito de quadrado que estes apresentam, podem constituir um condicionante em aprendizagens futuras, pois no tópico "Quadriláteros" é esperado que os alunos consigam compreender e estabelecer uma hierarquização de vários tipos de quadriláteros. Uma vez que o nível de van Hiele apresentado pelos alunos ainda não suporta essa compreensão, o que é também sustentado pelas próprias definições que estes apresentam de quadrado (em que se corrobora essa falta de hierarquização de propriedades), as opções de ensino do professor ficam também condicionadas, tornando-se assim necessário refletir e apresentar possíveis soluções para este problema.

Além disso, diversos estudos realizados com professores de Matemática de vários níveis de ensino, nomeadamente no Reino Unido (Swafford et al., 1997; Jones, 2002; Clements, 2003) e com futuros professores em Espanha (Gútierrez et al., 1991), também identificaram a predominância do nível 1 relativamente ao posicionamento nos diferentes níveis de van Hiele, pelo que seria importante levar a cabo um estudo análogo para analisar a realidade portuguesa. De facto, uma pesquisa na literatura da área revela a inexistência de estudos que nos disponibilize informação sobre o posicionamento dos professores portugueses nos diferentes níveis de van Hiele, relativamente a conceitos geométricos, em particular, do conceito de quadrado.

A necessidade deste estudo torna-se ainda mais pertinente se tivermos em conta que investigações já realizadas (Rowan, Chiang & Miller*,* 1997, Rowland, Martyn, Barber & Heal*,* 2000; Goulding, Rowland & Barber*,* 2002), confirmam a ideia de que o conhecimento dos professores está diretamente relacionado com o desempenho matemático dos seus alunos. Além disso, vários autores como van der Sandt (2007) conjeturaram que melhorando o conhecimento geométrico dos professores também a qualidade da sua prática letiva seria melhorada. Neste contexto, surge a necessidade de proporcionar aos futuros professores experiências enriquecedoras que permitam aprofundar e consolidar o seu conhecimento geométrico, o que passará, certamente, pela envolvência desses professores em tarefas que sejam matematicamente significativas e sejam explicitamente concebidas para explorarem as suas fragilidades (Gomes et al., 2012). Com efeito, é sobejamente sabido que o que os alunos aprendem é, em grande parte determinado pelas tarefas que lhes são propostas, tal como é defendido por Hiebert e Wearn (1993). Abre-se assim caminho a uma nova investigação, procurando compreender como é possível intervir na formação inicial de professores de Matemática, na área da Geometria, nomeadamente, um caminho que os autores, conjuntamente com outros investigadores, apresentam num projeto de investigação mais alargado (Gomes et al., 2012).

Agradecimentos

Este trabalho é financiado pela FCT/MEC através de fundos nacionais (PIDDAC) e cofinanciado pelo FEDER através do COMPETE - Programa Operacional Fatores de Competitividade no âmbito do projeto PEst-C/CED/UI0194/2013.

Referências

Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). NY, United States: NCTM.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto, Portugal: Porto Editora.

Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp.151-178). Reston, United States: National Council of Teacher of Mathematics.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). NewYork, United States: Macmillan.

Clements, D. H., Battista, M.T., & Sarama, J. (2001). Logo and Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *10*, 1-177.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6th Ed.). New York, United States: Routledge.

de Villiers, M. (1998). To teach definitions in Geometry or teach to define? In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 248-255). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Netherlands: Reidel.

Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. (1988). The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education* 3. New York, United States: NCTM.

Gomes, A., Ribeiro, C. M., Martins, F., Aires, A. P., Campos, H., Caseiro, A., Poças, R. (2012). Tarefas em Geometria – Da sala de aula para a formação de formação de professores. Descrição de um projeto. In GTI-APM (Eds.), *Atas do XXIIISIEM – Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 761-763). Coimbra, Portugal: Associação de Professores de Matemática.

Goulding, M., Rowland, T., & Barber, P. (2002). Does it matter? Primary teacher trainees' subject knowledge in mathematics. *British Educational Research Journal*, *28*(5), 689-704.

Gray, E., & Tall, D. (2002). Abstraction as a natural process of mental compression. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 115-120). Norwick, United Kingdom: University of East Anglia.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia, Spain: Universidad de Valencia.

Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to assess the acquisition of van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 237-251.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1993). Instructional Task, Classroom Discourse, and Students' Learning in Second Grade. *American Educational Research Journal*, *30*, 393-425. doi: 10.3102/00028312030002393

Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. In L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics* (121-139). London, United Kingdom: Routledge.

NCTM. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, United States of America: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemática.

Pandiscio, E., & Orton, R. E. (1998). Geometry and metacognition: An analysis of Piaget's and van Hiele's perspectives. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *20*(2-3), 78-87.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação – Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Rowan, B., Chiang, F. S., & Miller, R. J. (1997). Using research on employee's performance to study the effects of teachers on student achievement. *Sociology of Education*, *70*, 256-284.

Rowland, T., Martyn, S., Barber, P., & Heal, C. (2000). Primary teacher trainees'mathematics subject knowledge and classroom performance. In T. Rowland & C. Morgan (Eds.), *Research in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 3-18). London, United Kingdom: British Society for Research into Learning Mathematics.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York, United States: Routledge.

Senk, S. L. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(3), 309-321.

Swafford, J., Jones, G. A., & Thorton, C. A. (1997). Increased knowledge in geometry and instructional practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(4), 467-483.

Tall, D. (2004). Thinking through Three Worlds Of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen, Norway.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A Theory of Mathematics Education*. Orlando, United States of America: Academic Press.

van der Sandt, S. (2007). Pre-service geometry education in South-Africa: Atypical case? *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The journal*, I, 1-9. Acedido desde: http://www.k12prep.math.ttu.edu/journal/journal.shtml.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society, The development of higher psychological processes*. Cambridge, United Kingdom: Harvard University Press.

Autores

Ana Paula Aires. Universidade de Tras-os-Montes e Alto Douro, UTAD, Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (CIDTFF), Portugal, aaires@utad.pt

Helena Campos. Universidade de Tras-os-Montes e Alto Douro, UTAD, Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (CIDTFF), Portugal, hcampos@utad.pt

Ricardo Poças. Universidade de Tras-os-Montes e Alto Douro, UTAD, Portugal, ricardopocas77@gmail.com