

Un Espace de Travail Mathématique pour la mise en évidence des significations géométriques de la multiplication de nombres réels et complexes : médiation semiotique et parcours des élèves

A Mathematical Work Space for the Explanation of the Geometrical Meanings of Multiplication of real and complex numbers: Semiotic Mediation and Students' Chosen Paths

Raquel Isabel Barrera Curin

RESUMEN

Este trabajo contribuye, por un lado, a determinar las implicaciones didácticas de un análisis de trabajos epistemológicos que relacionan números, cálculo y geometría y, por otro lado, a constituir un marco teórico que favorece el análisis del trabajo matemático de los alumnos en el proceso de encuentro entre un objeto matemático y la construcción de su sentido en geometría. El marco teórico consiste en una articulación de elementos asociados al Espacio de Trabajo Matemático y a la mediación semiótica. El método de análisis será bosquejado para presentar finalmente una parte de nuestros resultados de la investigación. Estos resultados corresponden a la determinación de trayectorias de individuos, las cuales resultan de diversas interacciones producidas entre los diferentes planos del Espacio de Trabajo Matemático. Las producciones de los alumnos dan cuenta tanto de los obstáculos como de los inicios que les permitieron relacionar la multiplicación y algunas de sus significaciones geométricas.

ABSTRACT

This work contributes, on one hand, to determine the didactical implications of an analysis of epistemological works on the association of numbers, calculus and geometry, and, on the other hand, to constitute a theoretical framework favoring the analysis of students' mathematical work at the meeting point between a mathematical object and its sense in geometry. Our theoretical framework concerns mostly the Mathematical Working Space and the semiotic mediation. The analysis method will be sketched to ultimately present a part of our research results. These results relate to the determination of a personal path resulting from interactions produced among the diverse Mathematical Working Space dimensions. Their produced results draw attention to the obstacles and cues allowing the association of multiplication to certain geometrical significations.

PALABRAS CLAVE:

- *Espacio de Trabajo Matemático*
- *Mediación semiótica*
- *Registros de representación*
- *Trayectorias de los alumnos*
- *Producto de números reales y complejos*
- *Signo-artefacto*

KEY WORDS:

- *Mathematical Working Space*
- *Semiotic mediation*
- *Representation records*
- *Students' personal paths*
- *Product of real and complex numbers*
- *Sign-artifact*



RESUMO

Este trabalho contribui tanto para a determinação das implicações didáticas de uma análise de trabalhos epistemológicos sobre a ligação entre números, cálculo e geometria, quanto para o estabelecimento de um arcabouço teórico que favoreça a análise do trabalho matemático dos alunos, no encontro entre um objeto matemático e seu sentido na geometria. Nossa articulação teórica aborda principalmente o Espaço de Trabalho Matemático e a mediação semiótica. O método de análise será esboçado para apresentar uma parte de nossos resultados de pesquisa. Esses resultados abordarão a determinação das trajetórias individuais, resultantes das interações produzidas entre os diferentes planos de um Espaço de Trabalho Matemático. As produções dos alunos levam em conta tanto os obstáculos quanto os indícios que lhes permitam de relacionar a multiplicação a algumas de suas significações geométricas.

PALAVRAS CHAVE:

- *Espaço de trabalho matemático*
- *Mediação semiótica*
- *Registros de representação*
- *Trajectoria dos alunos*
- *Produto dos números reais e complexos*
- *Signo-artefato*

RÉSUMÉ

Ce travail contribue, d'une part, à déterminer les implications didactiques d'une analyse des travaux épistémologiques portant sur la mise en relation entre nombres, calcul et géométrie et, d'autre part, à constituer un cadre théorique favorisant l'analyse du travail mathématique des élèves lors de la rencontre entre un objet mathématique et son sens en géométrie. Notre articulation théorique porte principalement sur l'Espace de Travail Mathématique et la médiation sémiotique. La méthode d'analyse sera esquissée pour finalement présenter une partie de nos résultats de recherche. Ces résultats portent sur la détermination de parcours d'individus résultant des interactions produites entre les différents plans d'un Espace de Travail Mathématique. Les productions des élèves rendent compte des obstacles ainsi que des indices leur permettant de mettre en lien la multiplication et certaines de ses significations géométriques.

MOTS CLÉS:

- *Espace de Travail Mathématique*
- *Médiation sémiotique*
- *Registres de représentation*
- *Parcours des élèves*
- *Produit de nombres réels et complexes*
- *Signe-artefact*

1 Des relations entre des analyses épistémologique et didactique d'un objet mathématique a la conception d'un outil théorique pour l'analyse du travail mathématique des élèves

Tout au début de cette recherche nous nous sommes intéressés aux relations entre nombres, calcul et géométrie dans l'histoire (i.e. Hérodote, s.d./ 1964 ; Bkouche, 1994, 2009a, 2009b) et, plus particulièrement, aux études rendant compte d'une analyse épistémologique (Glaeser, 1981 ; Ribeiro, 1997 ; Freudenthal 2003; Bruter, 2000 ; Flament, 2003) et didactique (Douady, 1986 ;

Brousseau, 1996 ; Conne & Lemoyne, 1999 ; Davis & Simmt, 2006) de la multiplication. Cette analyse, qui porte sur cet objet mathématique et qui vise la détermination des conditions de sa compréhension (Sierpiska, 1991), a constitué le premier pas méthodologique pour le démarrage de notre recherche. Notre intérêt aux travaux historico-épistémologiques et didactiques, portant sur les liens entre des représentations géométriques et calcul numérique, enrichit une analyse didactique actuelle des processus mettant en relation la multiplication et certaines de ses significations à travers la géométrie. De ce fait, l'acceptation d'une mise en relation entre ces deux analyses permettrait, d'une part, que les objets mathématiques en jeu se déprennent de leur simplicité (Artigue & Robinet, 1982) et, d'autre part, que la construction de futurs processus d'enseignement favorise l'acquisition de significations de ces objets. Compte tenu de ce qui précède, nous avons été conduits à la conception d'une séance expérimentale nous permettant d'étudier en profondeur, grâce au travail de plusieurs élèves, la maîtrise qu'ils manifestent ou au contraire les obstacles qu'ils rencontrent, à l'intérieur d'un travail mathématique qui a nécessairement besoin de différentes représentations sémiotiques dans le processus visant la rencontre entre un objet mathématique et sa signification (Duval, 1993).

1.1. *Espace de Travail Mathématique (ETM) et registres de représentation sémiotique : la géométrie comme intermédiaire entre un objet mathématique et sa compréhension*

Aujourd'hui, le fait que la notion de multiplication soit intimement liée à l'idée de calcul peut bloquer les possibilités d'envisager une représentation géométrique du produit. De même, l'association des nombres réels à la notion de grandeur peut aussi constituer un élément de blocage lorsqu'il s'agit de représenter les nombres négatifs ainsi que de donner un sens au produit de deux nombres négatifs. De ce fait, la multiplication des entiers négatifs ne permet pas une représentation géométrique à moins que ces « quantités » soient traitées en termes de sens et de direction (Argand, 1806). En outre, le sens du produit de deux fractions ne peut être trouvé que dans les réductions et les agrandissements (Brousseau, 1996). En ce qui concerne les nombres complexes, l'extension de la définition de leurs opérations est liée à la représentation des quantités imaginaires par des vecteurs ou des segments de droite de Wessel (Flament, 2003). En conséquence, la géométrisation de la multiplication pour différents ensembles de nombres peut être rencontrée dans un contexte géométrique de transformation.

Pour nous, les représentations en géométrie portant ces transformations répondent à un système de représentation sémiotique complémentaire du

système numérique et mobilisent des variables cognitives qui visent à favoriser la compréhension d'un objet mathématique. En outre, les concepts algébriques et arithmétiques ne sont représentés qu'à travers un schéma symbolique (Radford, 2003) où un *signe* « bears an arbitrary or non-motivated relationship to its signified » (Radford, 2003, p.5). De ce fait, un intermédiaire, outre ces signes-représentants, entre une conception et l'accès à ses significations nous semble toujours nécessaire, étant donné que « there is not mathematical thinking without using semiotic representations » (Duval, 2008, p.1).

Grace à la notion d'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011) nous pouvons rendre compte de la complexité mathématique et cognitive des élèves lorsqu'ils résolvent des problèmes de ce type. Cette notion suppose une mise en réseau de deux niveaux, l'un cognitif et l'autre épistémologique, et cette mise en réseau s'appuie sur un certain nombre de *genèses* notamment *sémiotique* (entre les représentations géométriques et la visualisation des objets mathématiques), *instrumentale* (entre la prise en main des instruments et la construction mathématique) ou *discursive* (entre le référentiel théorique et l'accès à la preuve) (voir Kuzniak & Richard, 2014, figure 2). Nous nous sommes intéressés donc à l'analyse de cette relation bilatérale en vue de la caractériser selon sa nature, ce qui nous a permis d'élargir notre domaine de connaissance théorique des espaces de travail mathématiques pour l'analyse de *parcours d'action* de différents individus. Ces actions se produiront au milieu d'une situation expérimentale qui vise : la mise en œuvre de connaissances mathématiques anciennes, l'interprétation géométrique d'un objet mathématique, l'analyse des représentations géométriques, un travail collaboratif et la mise en fonctionnement d'un raisonnement déductif à l'intérieur d'une situation non traditionnelle d'apprentissage. D'un point de vue plus classique, le point de départ des *genèses* articulant les deux plans de l'ETM se trouverait prioritairement au niveau épistémologique. Néanmoins, l'action des composantes du plan épistémologique peut bien être déclenchée par des besoins du niveau cognitif. Dans ces processus articulant les deux plans d'un ETM appelés *genèses*, nous pouvons préciser non seulement l'existence mais aussi les permanentes interactions et conversions entre différents registres de représentations sémiotiques. Comme le souligne Duval, « mathematical objects are never accessible by perceptions or by instruments. The only way to have access to them is using signs or semiotic representations » (Duval, 2006, p. 107). En conséquence, une hypothèse émerge concernant la possibilité d'une entrée cognitive au travail mathématique : avoir conscience de la signification *métaphorique* (caractéristiques sémantiques produites par visualisation ou reconnaissance des significations dans un contexte visuel) d'un objet mathématique permettrait une entrée cognitive à l'action à l'intérieur d'un ETM ce qui en même temps favoriserait la manipulation des composants du plan épistémologique.

1.2. *Espace de Travail Mathématique et l'élargissement de l'aspect cognitif : médiation sémiotique et l'intervention des signes-artefacts dans un espace d'interactions sociales*

Au sein des différents travaux portant sur les notions sémiotiques présentes dans des processus d'apprentissage-enseignement des mathématiques, qu'ils aient intégré ou non des outils informatiques, qu'ils restent sur les registres de représentation sémiotiques ou qu'ils fassent une spéciale attention au rôle du langage et à la compréhension des objets mathématiques, toutes ces positions, « autour du rapport entre mathématiques et sémiotique, investissent des questions d'ordre épistémologique, cognitif et socioculturel » (Falcade, 2006, p. 3-4). En prenant en compte notre intérêt spécifique à la genèse sémiotique à l'intérieur d'un ETM, les limitations de l'approche sémiotique déjà existante ainsi que la délimitation théorique donnée aux artefacts au sein de l'approche de l'Espace de Travail Géométrique nous ont amenés à la recherche d'autres approches théoriques portant sur la médiation sémiotique et sur la construction sociale de connaissances mathématiques. Pour cela, nous avons travaillé notamment concentrés sur les travaux de Bartolini Bussi et Mariotti (2008) concernant la Théorie de la Médiation Sémiotique (TMS) ainsi que sur certaines réflexions associées à la construction sociale de connaissances mathématiques et à la complexité du processus de compréhension d'un objet mathématique de Radford (2000, 2004) et Sfard (2008). Cela dit, nous intégrons l'ETM dans un processus socioculturel de l'apprentissage (fondement épistémologique de la TMS) où les dimensions socioculturelle et sémiotique s'intègrent dans la *zone de développement proximale* définie par Vygotsky (1934-1997). C'est dans cette zone, fondamentale pour l'articulation des deux plans de l'ETM, que des *signes-artefacts, historiques ou technologiques*, remplissent leur rôle de médiateurs (Vygotsky, 1931-1978) se transformant en signes mathématiques porteurs du sens. De ce fait, il nous semble approprié d'intégrer explicitement des *intermédiaires médiateurs* là où les différentes genèses (Kuzniak, 2012) se produisent, à l'endroit où la recherche et l'acquisition de sens des objets mathématiques peuvent devenir accessibles grâce à la médiation sémiotique et, quand cela est possible, grâce aussi à la médiation sociale. Notre intérêt à l'aspect social des processus d'apprentissage, ainsi qu'à l'étude des processus de médiation sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) favorisant la construction collaborative d'un objet mathématique, nous ont conduits à l'élaboration d'un cadre théorique articulant des éléments cognitifs et didactiques (Barrera Curin, 2012). Notre approche s'intéresse aux interprétations métaphoriques des connaissances mathématiques et aux utilisations médiatiques de ces interprétations jusqu'à ce que la compréhension de nouvelles connaissances devienne *explicitable* et *interprétable* grâce à sa verbalisation dans une situation de communication. De ce fait, nous avons commencé par donner un contexte à notre point de départ

concernant le rôle des représentations géométriques pour l'apprentissage d'objets mathématiques usuellement représentés dans un autre cadre mathématique : l'importance de la visualisation ainsi que l'importance de prendre en compte la complexité cognitive des situations d'apprentissage qui impliquent nécessairement des changements de registres de représentation sémiotique. Ensuite, l'analyse de l'Espace de Travail Mathématique nous a conduits à une proposition théorique (voir le schéma présenté dans l'*annexe 1*) qui rend compte, d'une part, de l'aspect dynamique de ses composantes et, d'autre part, de l'articulation des plans épistémologique et cognitif grâce à l'action du signe-artefact dans un contexte de médiation sémiotique. De ce fait, nous rendons compte des fondements de nos propositions didactiques et confirmons une nouvelle conception de l'enseignement de mathématiques.

2 Methodologie

L'expérimentation a été mise en place dans l'Île de France dans quatre classes de Terminale S (dernière classe du lycée scientifique, élèves d'entre 17 et 18 ans) par les professeurs de ces classes. 34 groupes de deux à quatre élèves ont effectué le travail demandé sur une séance de deux heures de recherche. Cette séance expérimentale a été intégrée à la progression des enseignants qui venaient de commencer le chapitre sur les nombres complexes. Les enseignants participant à cette expérience partageaient nos réflexions sur le fait que les représentations géométriques des nombres complexes sont nécessaires pour développer l'acquisition générale de ces nombres (Panaoura, A., Elia, I., Gagatsis, A., & Giatilil, G., 2007). Les élèves ont eu à résoudre une suite de cinq questions proposant une approche géométrique de la multiplication de nombres réels et complexes. Dans un premier temps, les élèves devaient effectuer la construction géométrique du produit de deux nombres réels dans le cadre proposé par Descartes dans sa *Géométrie* (1637/2009). Puis, il leur était demandé de trouver une relation entre des points donnés dans le plan et la multiplication de nombres complexes. En s'appuyant sur ces activités, notre but était de décrire et de caractériser des *parcours* d'élèves dans l'ETM en précisant notamment leurs possibilités de rencontrer les significations géométriques de la multiplication à partir de l'analyse de la représentation géométrique de la multiplication de Descartes. Cette représentation géométrique représente aussi un icône du théorème de Thalès dont sa relevance dans l'enseignement français nous a permis de lui attribuer le rôle d'un signe-artefact, destiné à être interprété et à évoluer jusqu'à être visualisé comme une représentation géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres.

La dernière question de la séquence ou question de synthèse (*annexe 2*) sollicite un retour réflexif des élèves sur l'ensemble de l'activité. Elle est fondamentale dans le processus de recherche et son analyse doit permettre une première description des parcours effectués par les élèves dans le travail mathématique. 24 groupes ont répondu à cette question de synthèse. Pour décrire le rôle de la géométrisation dans l'approche de la multiplication chez les élèves, nous avons étudié leur manière de résoudre des problèmes de construction géométrique mettant en jeu la multiplication des nombres réels et des nombres complexes. Petit à petit nous sommes amenés à répondre une question qui articule nos recherches dans les contextes épistémologique et expérimentale : y a-t-il des interactions entre les plans cognitif et épistémologique de l'ETM approprié par les élèves rendant compte d'une compréhension géométrique de la multiplication ?

Je précise que la phase expérimentale de cette recherche n'est présentée que partiellement dans cet article.

3 Parcours des élèves : analyses de quelques résultats

Les groupes de travail faisant partie de notre expérimentation - appelés *individus* tout au long de l'analyse puisqu'ils ont été considérés comme des entités étant donné leur dépendance dans ce processus collaboratif d'apprentissage - ont tout d'abord été classés *à la main* en fonction de leurs réponses à la dernière question : nous avons étudié chaque séquence et chacune des réponses à la dernière question en cherchant des éléments de réponse en concordance ou non avec ceux que nous avons déterminé *a priori*. Il en est résulté une première classification avec trois types de réponses possibles. Puis un traitement sur quinze variables binaires a été effectué avec le logiciel C.H.I.C. dont l'arbre de similarité (*annexe 4*) associé à l'analyse nous a permis d'identifier, avec quelques variations bien sûr, étant donné la quantité réduite de données (ce qui ne permet pas la visualisation de relations de similarité significatives), les trois groupes déjà trouvés *à la main* : Transformation (T ; des réponses se référant aux réductions, agrandissements, déplacements ainsi qu'à une rotation ou à une homothétie) ; Proportionnalité et théorème de Thalès (PTTh ; des réponses explicitant les relations de proportionnalité ou le théorème de Thalès avec ou sans représentations géométriques et mentionnant ou non la multiplication des nombres complexes) ; Complexe (C ; des réponses se référant exclusivement aux propriétés de la multiplication des nombres complexes, sans faire référence explicite aux transformations géométriques). Un aspect très intéressant qui résulte de cette première classification mise à l'épreuve du logiciel de statistique implicite est l'isolement du groupe associé aux « propriétés de la multiplication de nombres complexes » par rapport aux deux autres groupes. Ce point est intéressant dans notre étude

didactique car il est important de savoir le type de travail géométrique accompli par les élèves qui ont repéré les propriétés géométriques de la multiplication des complexes. Un regard approfondi sur chacune des réponses nous a permis d'identifier un autre facteur à prendre en compte qui pourrait intervenir d'une façon très intéressante dans l'étude des interactions entre différents cadres mathématiques : il s'agit de l'existence ou non d'une référence explicite ou implicite à la règle de signes (RS) dans les réponses à la dernière question. Pour avancer dans l'identification de parcours caractéristiques, nous avons fait une analyse très fine de chacune des autres questions de la séquence. Un de nos objectifs était d'apporter une réponse aux interrogations suivantes apparues à l'issue de l'analyse de la question de synthèse (dernière question de la séquence) :

- Serait-il possible d'établir des relations entre le pôle propriétés de la multiplication de nombres complexes et les éléments de réponse concernant les transformations ? Comment s'explique l'existence d'un groupe d'élèves qui ne concluent que sur les propriétés algébriques des nombres complexes sans mettre en relation ce résultat avec le travail géométrique effectué pendant la séance ? Comment les propriétés de la multiplication de nombres complexes ont influencé le travail des individus surtout face aux questions portant sur les significations géométriques de la multiplication et sur les constructions ? - Quel appui sur le figural peut-on identifier au cours de la séance ? A quel moment et de quelle façon se fait-il présent ? Quelle influence a pu exercer notre signe-artefact sur la suite du processus de compréhension de la multiplication ?

Nous ne donnerons ici que quatre exemples de parcours rencontrés de manière à illustrer quelques-uns des résultats obtenus. Nous présentons une réécriture des réponses des élèves pour faciliter la lecture. Pour accéder aux productions originales voir Barrera Curin (2012).

3.1. Comparaison de deux groupes de la classe « C » avec une synthèse portant uniquement sur les propriétés de la multiplication des nombres complexes

Ces deux premiers groupes appartenant à la même classe (C), diffèrent dans le formalisme présenté dans leur réponse à la dernière question (*figure 1*).

La multiplication est une addition d'angle et une addition des longueurs par rapport à l'origine.

$$\|\overline{OE}\| = \|\overline{OA}\| \times \|\overline{OB}\|$$

$$\widehat{UOE} = \widehat{UOA} + \widehat{UOB}.$$

Multiplier 2 nombres représentés géométriquement permet d'en trouver un troisième géométriquement défini par somme de son vecteur et son angle.

Figure 1. En bas, synthèse du groupe C2-I7 (classe 2, individu 7). En haut, synthèse du groupe C1-I4 (classe 1, individu 4)

Cette différence nous a orientés dans l'étude des parcours des individus en nous donnant un critère qui sera le point d'entrée dans cette analyse : la mise en relation des genèses discursives portant sur les propriétés mathématiques - référence théorique pour l'interprétation des énoncés, la preuve et la construction - et les genèses sémiotiques qui sont le cœur de la relation entre les différents plans de l'Espace de Travail Mathématique et que notre séquence visait à faire émerger ou à identifier. Dans les réponses observées dans la *figure 1*, nous pouvons observer que ces deux individus ne font aucune allusion au reste de la séance et leur réponse ne fait apparaître aucune mise en relation avec les éléments figuraux présents dans l'activité. Lorsque nous examinons leurs productions sur d'autres questions de la séquence, nous constatons un travail de construction très précis avec les mesures effectuées sur les figures. Le groupe C2-17 (*figure 2*) s'appuie sur sa construction et sur l'usage des normes comme des longueurs. Il reste attaché à ses connaissances théoriques antérieures à la séance et ne s'appuie que de manière superficielle sur la situation donnée en classe qu'il se contente d'effectuer sans mettre en relation avec le but recherché.

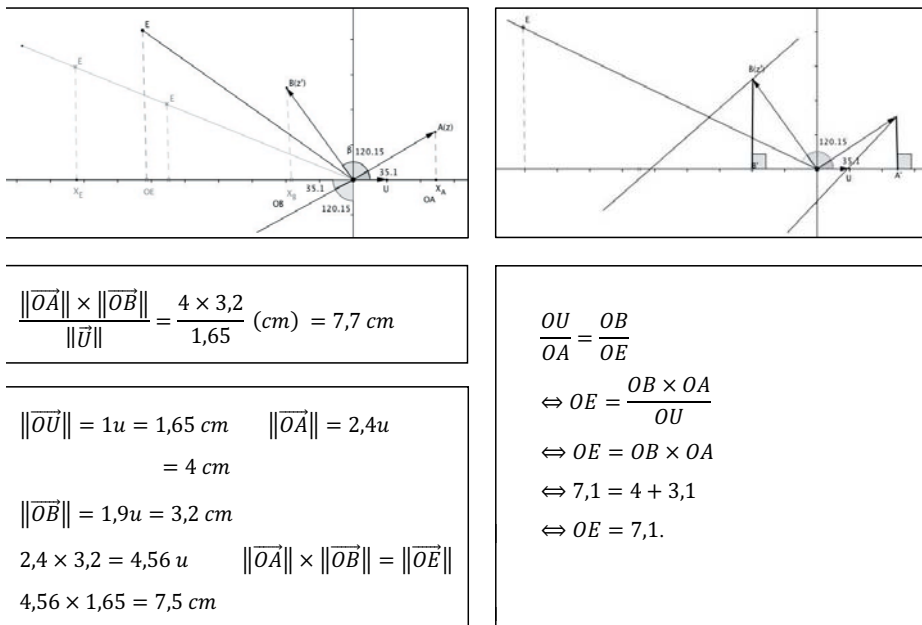


Figure 2. A gauche, réponse 4.b pour C2-17. A droite, réponse 4.b pour C1-14

Quant au second groupe, il ne parvient pas à faire la construction du produit des mesures pour le produit des affixes et effectue une addition. Plus précisément, le fait de rester rattachés aux connaissances théoriquement préalables avec

quelques influences du travail fait pendant la séance peut bien expliquer la procédure de réponse de C2-17 : la multiplication des normes sur l'unité peut être influencée par la multiplication de Descartes (justifié par le théorème de Thalès) et les traces perpendiculaires supposent qu'il fallait suivre les indications qui orientaient le travail dans la question précédente. La mesure en centimètres a bien été présente étant donné qu'il n'y a pas de coordonnées à multiplier. Puis une bonne relation entre unité et centimètres ainsi que la somme d'angles ont permis de calculer la position du produit.

On peut penser qu'il n'y a pas des influences discursives formelles par rapport à la multiplication de nombres complexes outre les propriétés apprises, de même qu'il n'y a pas une profonde réflexion sur le travail développé au cours de la séance. Cela a bien pu être une contrainte sous-jacente à l'aspect non-traditionnel de la séance. Quant à la représentation géométrique de la multiplication de C1-14 (*figure 2*) nous observons qu'elle présente des différences et de ressemblances avec celle de C2-17 : parmi les similarités, nous pouvons mentionner la présence des projetés orthogonaux et les tracés de mesures. Des erreurs dans le calcul sont aussi observables car la multiplication exprimée dans l'expression algébrique est devenue addition dans le passage au numérique, ce qui explique l'erreur de formulation dans la réponse à la dernière question. Par contre, nous nous intéressons à ce qui est observable mais pas tout à fait explicable dans la construction du produit : deux triangles et deux droites qui semblent être des droites parallèles. Ces éléments, seraient-ils l'indice d'une influence du signe-artefact qui commence à devenir signe mathématique et notamment un représentant de la multiplication ? Et de quelle relation entre multiplication et transformation cette influence rend-elle compte ? En restant dans l'analyse de l'écrit, ces questions ne peuvent que donner lieu à des hypothèses. Les conclusions élaborées dans la synthèse de chacun de ces individus, semblent s'appuyer sur une genèse instrumentale privilégiant la construction qui vient même faire obstacle à la genèse discursive articulée avec la visualisation. Les élèves ont donné une solution qui est bien de type constructif et permet de réaliser le produit de deux nombres complexes dans le plan avec le défaut de la construction des projetés orthogonaux. Une possible influence du signe-artefact a probablement aussi été présente.

3.2. *Comparaison entre deux groupes se rattachant à deux synthèses différentes, Thalès (PTTh) et Transformation (T).*

Les deux groupes suivants appartiennent à deux classes différentes (PTTh et T) et nous allons comprendre leur différence au-delà de certaines similitudes sur la dernière question (*figure 3*).

Sur les figures, géométriquement, on utilise Thalès.

On généralise dans le plan de réels et on trouve $x_E = x_C \times x_D < 0$.

(x_C et x_D n'ont pas le même signe).

On généralise ensuite dans le plan complexe et on

a : $z'' = zz' \Leftrightarrow |z''| = |z \times z'|$ et $\arg(z'') = \arg(zz')$.

Lorsqu'on introduit un repère si le signe négatif intervient dans la multiplication, alors le produit sera négatif.

On peut onc dire que la multiplication de Descartes obéit à la règle de signes de la multiplication de termes de toute nature qu'ils soient.

Si $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$ alors le produit sera positif (et la norme et l'angle rentrent en jeu).

Si $\theta \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$ alors le produit sera négatif.

Si l'angle est nul, alors seules les normes ou longueurs rentrent en jeu, donc le produit sera positif

Si l'angle est plat, le signe « - » rentre en jeu, produit négatif.

Figure 3. En haut, synthèse du binôme C3-I1 (PTTh ; classe 3, individu 1).

En bas, synthèse du binôme C1-I9 (T ; classe 1, individu 9).

Le groupe C1-I9 (T) (*figure 3*) base sa synthèse sur un lien immédiat entre la multiplication et la règle de signes obtenu dans un repère. Puis il élargit cette relation à la multiplication de Descartes ainsi qu'à toute multiplication où interviennent des facteurs de *toute nature*. Par contre, le jeu de cadre qui apparaît autour de la règle des signes méritait d'être retravaillé dans le sens où nous ne pouvons pas accepter une mise en relation entre la règle des signes et la généralisation géométrique autour des nombres complexes que l'élève est en train d'évoquer. Il faut noter la précision de sa réponse en fonction de la nature des angles et notamment l'étude de l'angle nul et de l'angle plat qui permet d'articuler nombres réels et nombres complexes dans le cadre de la configuration géométrique étudiée.

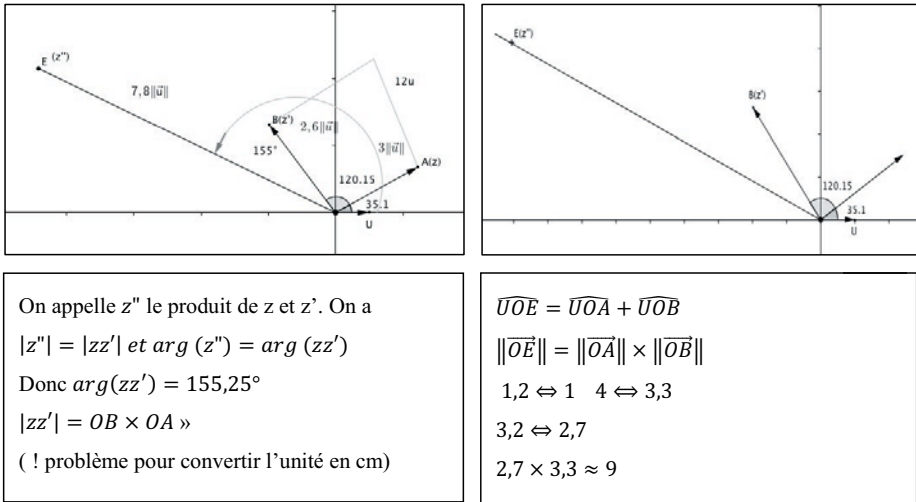


Figure 4. A gauche, réponse 4.b pour C3-I1 (PTTh). A droite, réponse 4.b pour C1-I9 (T)

L'individu C3-1 (PTTh) (*figure 3*) rend compte dans sa synthèse des différents moments de la séance en intégrant l'un dans l'autre : il a donné une interprétation géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres (réels et complexes) en généralisant dans le plan complexe. Peut-on dire que le mot *généralisation* rend clairement compte d'une mise en relation entre les différents moments de la séance ? D'une certaine manière oui puisqu'il s'agissait d'étendre les ensembles de nombres, mais pas réellement d'un point de vue géométrique puisque les règles en jeu sont différentes. Pour approfondir cette analyse il faut, bien sûr, observer les réponses apportées par ces deux groupes à la question 4.b (*figure 4*). Il apparaît clairement que les connaissances algébriques sur les nombres complexes ont guidé la construction géométrique qui ne s'appuie pas sur les autres constructions de la séance. Dans leurs réponses, nous n'avons aucun élément qui permet de rendre compte, d'une façon explicite, de la visualisation et de la compréhension géométrique de la multiplication de nombres complexes comme une transformation dans le plan. L'entrée dans l'ETM pour cette question est donc épistémologique avec pour résultat une *construction* à la règle graduée permettant de visualiser dans le plan le placement du produit de la multiplication de deux nombres complexes. Dans cette séance, les deux groupes ont eu une approche différente de la question 2b (*figure 5*).

Cette fois, seul le groupe C1-I9 (T) a utilisé les transformations dans sa réponse à une des premières questions de la séquence. Ce qui est très intéressant dans l'analyse de cette réponse est le fait de parler d'une réduction et d'un agrandissement du triangle BCA.

2) On place le point D et on construit la ($//$) à (CA) passant par D.

Construction analogue à celle de la figure A, sauf que le triangle BOE est une réduction du triangle BCA, contrairement à la figure A, où BDE était un agrandissement de BCA. Donc :

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$$

$$BE \times BA = BD \times BC$$

Or $BA = 1$ donc $BE = BD \times BC$.

Figure 5. En haut, réponse 2.b pour C3-I1 (PTTh). En bas, réponse 2.b pour C1-I9 (T)

De ce fait, la relation de proportionnalité sous-jacente au théorème de Thalès ainsi qu'à la représentation géométrique de la multiplication de Descartes a été : soit transposée à la visualisation de triangles semblables, c'est-à-dire l'entrée épistémologique à l'ETM par le théorème de Thalès a produit une genèse sémiotique vers le plan cognitif permettant la visualisation des triangles semblables réduits ou agrandis selon la nature du facteur BD opérant sur BC ; soit elle a été induite par la visualisation de triangles semblables, c'est-à-dire l'entrée cognitive à l'ETM a permis de visualiser la transformation d'une figure en termes d'agrandissement ou de réduction et de l'interpréter grâce au référentiel théorique disponible comme le résultat d'une relation multiplicative inhérente, dans ce cas, au théorème de Thalès. Si nous revenons à la réponse à la dernière question donnée par le même individu (C1-9) (*figure 3*), l'observation la plus frappante que nous pouvons faire et qui montre des relations étroites entre les genèses figurale et discursive est la mise en relation de la règle de signes avec les angles des affixes. Le jeu de cadre qui apparaît autour de la règle des signes est probablement la conséquence de notre activité car cette règle des signes n'est pas traitée géométriquement dans l'enseignement obligatoire. Les réponses des deux groupes rendent compte de leur engagement au travail tout au long de la séance. L'un d'entre eux, a réussi à tenir un discours mathématiquement correct en associant l'icône du théorème de Thalès à la représentation géométrique de la multiplication de deux nombres réels. L'autre, le groupe rattaché à T, a pu mettre en œuvre au moins partiellement, les processus cognitifs pertinents lui permettant de faire interagir les genèses figurale et discursive en intégrant les différents éléments de son Espace de Travail Mathématique personnel pour interpréter le produit de deux nombres réels comme une transformation dans le plan.

4 Conclusion

Cet article rend compte de la mise en relation entre certains éléments épistémologiques, théoriques, méthodologiques et expérimentaux autour de l'étude de la rencontre entre un objet mathématique - la multiplication - et ses significations en géométrie. Les productions des élèves classifiées selon leur parcours à l'intérieur d'un ETM ont été caractérisées non seulement en fonction de leur réponse à la dernière question de la séquence, mais aussi en fonction d'un attachement ou non au référentiel théorique prédominant, lequel favorisait ou empêchait des entrées cognitives au travail mathématique.

Les analyses présentées nous ont permis de constater un point en commun entre les différents parcours : la puissance du discours (propriétés de la multiplication de nombres complexes) qui a conduit la plupart des groupes à favoriser une genèse instrumentale dans la question 4.b (cf. *Figures 2 et 4*). Nous avons aussi essayé de comprendre les groupes qui ne concluent que sur les propriétés algébriques du produit de deux nombres complexes sans mettre en relation ce résultat avec le travail géométrique effectué pendant la séance. L'analyse didactique du reste de leur parcours donne déjà quelques éléments de réponse. Une explication possible pourrait venir d'un blocage lié au passage à l'interaction entre l'instrumental et le discursif lorsque les éléments de preuve ne sont pas tout à fait congrus aux instruments utilisés, ici par exemple l'homothétie et la rotation, de la manière que nous nous attendions à la compréhension de la dynamique entre Thalès, multiplication, facteurs, opérateurs et transformations. En conséquence des nouveaux questionnements émergent grâce à la diversité des synthèses ainsi qu'aux ressemblances et différences entre les parcours étudiés. Les réponses obtenues rendent compte de l'engagement des élèves tout au long de la séance. Elles montrent aussi la difficulté à gérer les différentes genèses propres aux ETM ainsi que la complexité cognitive de l'activité proposée. Ceci nous amène à situer le travail des élèves à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique où la signification des objets mathématiques doit émerger grâce à l'action d'une genèse cognitive. Cette genèse suppose des enjeux sémiotiques complexes tels que ceux qui ont été décrits par D'Amore et Fandino (2007) pour rendre compte des difficultés de passage entre différentes représentations. La transposition du produit de Descartes à un produit opérant directement sur des nombres représentés géométriquement, ne peut être que le résultat d'une assimilation du fait que le travail porte sur une *idée mathématique* qui sort complètement des connaissances traditionnelles de l'objet mathématique en jeu. Nous ne travaillons plus par rapport aux techniques de calcul ni par rapport à la démonstration. Nous travaillons par rapport aux idées, et la compréhension de ces idées ne pourrait se produire que sous une entrée cognitive à l'ETM et ceci ne serait possible que grâce à une disposition implicite, non habituelle, mais mobilisable pour les élèves (Lakoff & Nunez, 1997).

Ainsi, la multiplication peut devenir interprétable géométriquement : les transformations, telles qu'agrandissement ou réduction, peuvent devenir des déplacements pour décrire la représentation géométrique du produit. De ce fait, la richesse de l'ETM proposé ainsi que la diversité des ETM personnels, nous conduisent à souligner l'importance de la médiation introduite par le professeur pour progresser vers une institutionnalisation intégrant toute la richesse de l'activité proposée. En plus de la médiation liée au signe mathématique (ici le signe Théorème de Thalès), il nous a clairement manqué cette deuxième médiation culturelle (Radford, 2004) laquelle a dû être portée, dans notre cas, par l'enseignant dans la classe. Dans cette médiation culturelle, l'enseignant acquiert un rôle fondamental de guide à l'intérieur de la diversité des Espaces de Travail Mathématiques résultant d'une seule proposition didactique. L'analyse des résultats dont une partie a été présentée dans cet article s'intègrent à des nouvelles perspectives de recherche concernant le développement d'une conception de l'enseignement portant sur la relation entre pensée et communication et entre apprentissage et médiation. Nous ne pouvons que revenir sur l'importance de réfléchir à des situations qui permettent aux élèves de s'exprimer, de développer leurs pensées et de répondre à leurs questionnements sous une médiation plus active de l'enseignant. Nous tenons donc à ce qu'un travail collaboratif puisse être motivé et développé dans le cadre de la formation initiale et continue des enseignants : un travail fondé sur des réflexions épistémologiques des contenus mathématiques fondamentaux ainsi que sur l'analyse de processus cognitifs intervenant dans leur compréhension.

Références

- Argand, R. (1806). *Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Paris: chez Mme Vve Blanc.
- Artigue, M., & Robinet, J. (1982). Conception du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(1), 5-64.
- Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques. *Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive (C.H.I.C.)* [logiciel d'analyse de données]. France : ARDM.
- Barrera Curin, R. I. (2012). *Etude des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot-Paris 7, France. Paris : IREM de l'Université Paris Diderot - Paris 7.
- Bartolini Bussi, M. G. & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In English, L., Bartolini Bussi, M., Jones, G., Lesh, R. & Tirosh, D. (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (second revised edition). Mahwah, États - Unis: Lawrence Erlbaum.
- Bkouche, R. (1994). *Autour du théorème de Thalès*. Lille, France : IREM de Lille.
- Bkouche, R. (2009a). *Grandeurs et Nombres*. Lille, France : IREM de Lille.

- Bkouche, R. (2009b). *Histoire du calcul : de la géométrie à l'algèbre*. Rouen, France : Vuibert.
- Brousseau, G. (1996). *Théorisation de phénomènes d'enseignement des mathématiques* (Thèse de doctorat). Université Bordeaux 1, Sciences et Technologies, France.
- Bruter, C.P. (2000). *La construction des nombres : histoire et épistémologie*. Ellipses.
- Conne F. & Lemoyne, G. (1999). *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Montréal, Canada : Les Presses de l'Université de Montréal.
- D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M.I. (2007). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. *Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI*. Springer.
- Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, 61(3), 293-319.
- Descartes, R. (1637). *La géométrie*. Œuvres complètes tome 3. Paris, France : Gallimard (2009).
- Douady, R. (1986). *Liaison école-collège : nombres décimaux* (Rapport technique). Paris, France.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la Pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol. 5, p. 37-65.
- Duval, R. (2006). Décrire, visualiser ou raisonner : quels « apprentissages premiers » de l'activité mathématique ? *Annales de didactique et sciences cognitives*, 8, 13-62. IREM de Strasbourg.
- Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach. In *Semiotics in Mathematics Education, Epistemology, history, Classroom, and Culture*. Rotterdam, Pays-Bas: Sense Publishers.
- Falcade, R. (2006). *Théorie de situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction* (thèse de doctorat non publiée). Université Joseph Fourier, Grenoble, France.
- Flament, D. (2003). *Histoire des nombres complexes, entre algèbre et géométrie*. Paris, France : CNRS éditions.
- Freudenthal, (2003). *Didactical phenomenology of mathematics structures*. Springer.
- Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303-346.
- Herodote (s.d.). *L'Enquête, livre II*, trad. A Barguet (1964) in: Hérodote, Thucydide, *Œuvres complètes*. Paris, France : Gallimard La Pléiade.
- Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24. IREM de Strasbourg.
- Kuzniak, A. (2012). Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformations. *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. 8 – 15 July. Seoul, Korea.
- Kuzniak, A. & Richard, P. R. (2014). Espaces de Travail Mathématiques. Points de vue et perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (Número Especial TOMO I), pp. 29-39.
- Lakoff, Nunez, (1997). The Metaphorical Structure of Mathematics: Sketching Out Cognitive Foundations for a Mind-based Mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Methaphors and Images*, (21-89). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

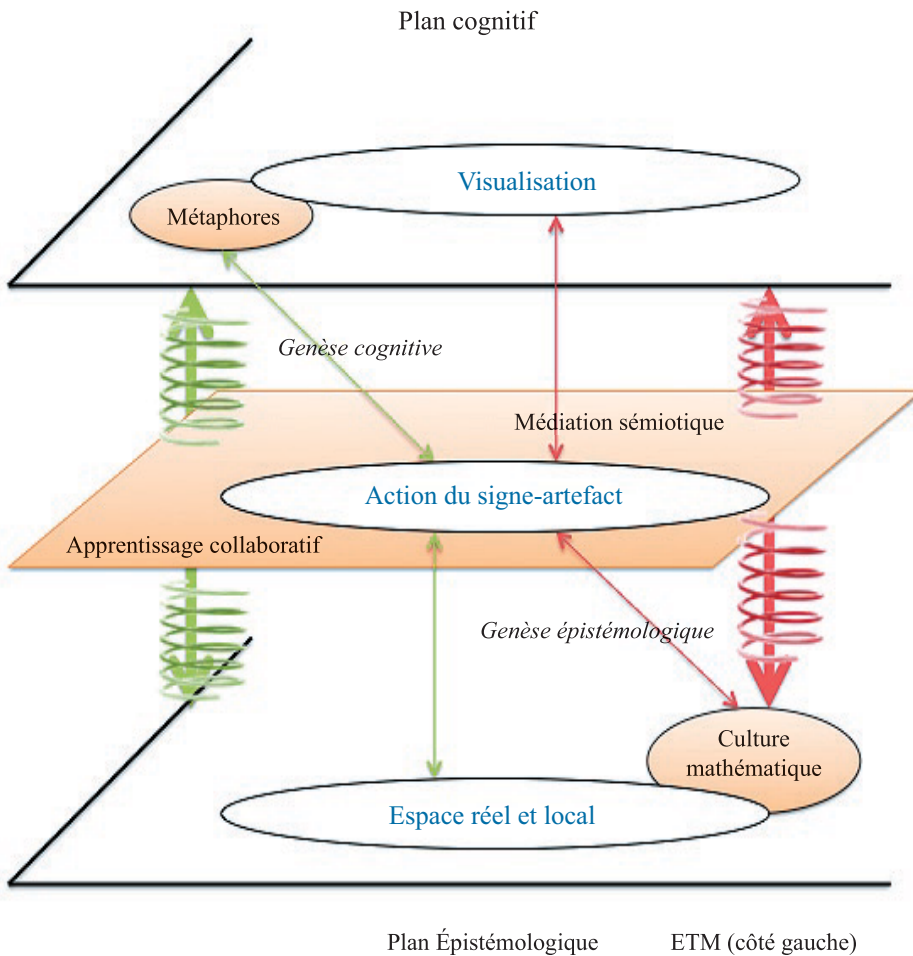
- Panaoura, A., Elia, I., Gagatsis, A., & Giatalis, G. (2007). Geometric and algebraic approaches in the concept of complex numbers. In *International journal of mathematical education in science and technology* (Vol. 37, p. 681-706). Taylor and Francis Online.
- Radford, L. (2003). Gestures, Speech and the Sprouting of Signs: A semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. In *Mathematics thinking and Learning* 5(1), 37-70. Florence, États-Unis: Routledge.
- Radford, L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. In: Arrigo G. (ed.) (2004). *Proceedings of the Ticino Mathematics Education Conference*. Quaderni Alta Scuola Pedagogica. Bellinzona, Suisse: Centro didattico cantonale. 11-27.
- Ribeiro, (1997). On the epistemology of integers, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(2), 211-250.
- Sierpiska, A. (1991). *Quelques idées sur la méthodologie de la recherche en didactique des mathématiques liée à la notion d'obstacle épistémologique* (Rapport technique). Thessalonique, Grèce : Institut Français de Thessalonique.
- Vygotsky, L. (1931-1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, États-Unis : Harvard University Press.
- Vygotsky, L. (1934/1997). *Pensée et langage*. 3^e édition, Paris, France : La Dispute.

Autora

Raquel Isabel Barrera Curin
Université du Québec à Montréal, Canada
barrera_curin.raquel_isabel@uqam.ca

Annexe 1

Schéma rendant compte de l'aspect dynamique des composantes de l'ETM et de l'articulation des plans épistémologique et cognitif grâce à l'action du signe-artefact dans un contexte de médiation sémiotique. Pour plus de détails sur cette articulation théorique voir Barrera Curin (2012).



Annexe 2

Séquence expérimentale d'apprentissage

Travail avec annexe 1

La configuration « Figure A » correspond à ce que Descartes (mathématicien et philosophe, 1596-1650) a considéré comme une représentation géométrique de la multiplication. Nous vous présentons aussi son texte historique la décrivant.

I. Lire le texte de Descartes (annexe 1), puis observer la configuration « Figure A » pour répondre à la question suivante :

- a. *Nous proposons $AB = 1 \text{ cm}$. BE , est-il bien le produit annoncé par Descartes ? Qu'en pensez-vous ?*

Travail avec annexe 2

II. Observer la configuration « Figure B » pour répondre aux questions suivantes :

- a. Nous voudrions construire la représentation géométrique d'un produit ayant les caractéristiques de la multiplication de Descartes :
- Sachant que $BA = 1 \text{ cm}$ placer D entre B et A .
 - Construire E pour que BE donne le produit de la multiplication de BD par BC .
- b. Décrire votre construction et expliquer pourquoi elle peut être considérée comme analogue à la multiplication de Descartes.

Travail avec annexe 3

III. Observer la configuration « Figure C » où nous avons repéré sur la droite numérique certains nombres. Du côté positif nous avons placé le point A d'abscisse $+1$ et du côté négatif le point D d'abscisse -2 . (AC) et (DE) sont parallèles.

- a. Projeter orthogonalement les points C et E sur l'axe des abscisses. Pouvez-vous justifier que l'abscisse du point E est le produit des abscisses des points D et C ? Comment ?
- b. Si de manière plus générale, l'abscisse du point C est > 0 et l'abscisse du point D est < 0 , décrire la représentation géométrique du point E sur (BC) d'abscisse $x_E = x_C x_D$.

Travail avec annexe 4

IV. Nous allons étudier une nouvelle configuration, similaire à la configuration précédente, mais celle-ci est située dans le plan complexe avec certains éléments complémentaires.

- a. Soit $(O; \vec{u}, \vec{v})$, un repère orthonormé direct du plan appelé plan complexe. Nous vous rappelons qu'un nombre complexe est appelé affixe d'un point M et d'un vecteur \overrightarrow{OM} . Utiliser les informations données sur la configuration « Figure D » pour répondre aux questions suivantes :
- Pouvez-vous affirmer que dans cette représentation géométrique, la multiplication de z et z' donne toujours le produit z'' (affixe du point E et du vecteur \overrightarrow{BE}) ? Expliquez votre réponse.
 - Dans votre réponse à la question précédente, avez-vous établi des liens entre $\|\overrightarrow{BC}\|$, $\|\overrightarrow{BD}\|$ et $\|\overrightarrow{BE}\|$? Lesquels ? Et entre \hat{AOC} , \hat{AOD} (les angles associés aux facteurs) et \hat{AOE} (l'angle associé au produit) ? Si vous ne les avez pas encore considérés, quels liens établiriez-vous entre ces éléments pour expliquer la représentation géométrique du produit de deux nombres complexes ?

Travail avec annexe 5

- b. Observez les représentations géométriques de deux nombres complexes dans la configuration « Figure E ».
- En prenant en compte tes réponses dans les questions précédentes construire la représentation géométrique du produit de z et z' .
 - Décrire votre construction.
 - Quel lien pouvez-vous établir entre le produit de Descartes et le produit que vous venez de construire ?

Dernière question :

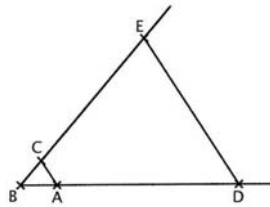
V. En vous appuyant sur le travail que vous avez fait dans cette séance et sur vos connaissances antérieures, quelle *signification géométrique* pouvez-vous donner à la multiplication ?

Annexe 3

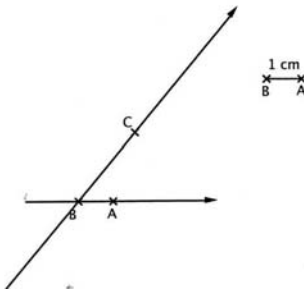
Annexes associées à la séquence expérimentale d'apprentissage

Soit par exemple AB l'unité et qu'il faille multiplier BD par BC ; je n'ai qu'à joindre les points A et C , puis tirer la parallèle à CA , et BE est le produit de cette multiplication (Descartes, 1637).

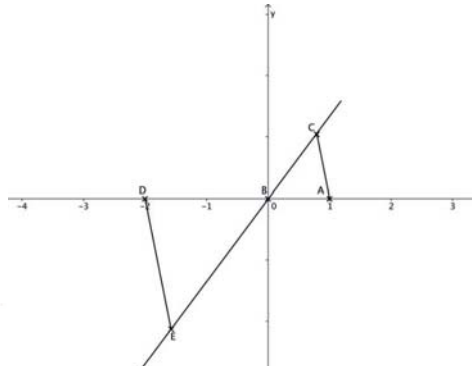
Annexe 1 (Figure A)



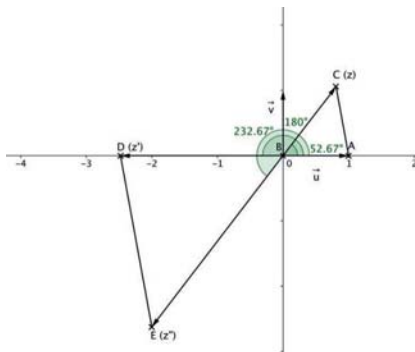
Annexe 2 (Figure B)



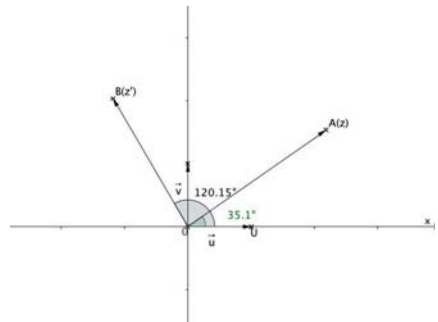
Annexe 3 (Figure C)



Annexe 4 (Figure D)



Annexe 5 (Figure E)



Annexe 4 :

Arbre de similarité obtenu avec le logiciel C.H.I.C.

Liste de variables (éléments possibles de réponse à la dernière question).

Dans l'étude de la dernière question de la séquence, les trois premières classes ont été principalement prises en compte.

Première classe : (T)

R-A : Réduction - agrandissement

D : Déplacement.

T : Le produit comme une transformation.

Deuxième classe : (PTTh)

RS : Règle de signes.

MD : Multiplication de Descartes.

TTh : Théorème de Thalès

RG-TTh : Représentations géométriques du théorème de Thalès pour expliquer la multiplication en géométrie pour des facteurs de différente nature.

MC : Multiplication de nombres complexes.

Troisième classe : (C)

PMC-LN : Propriétés de la multiplication de nombres complexes en langue naturelle.

PMC-LA : Propriétés de la multiplication de nombres complexes en langage algébrique

M « V » : «Multiplication de vecteurs».

AS : Agrandissement ou réduction d'une surface

Quatrième classe :

RH : Rotation et homothétie

PP-NF : Position du produit en fonction de la nature des facteurs.

P : Proportionnalité.

