

# Le travail mathématique en interaction avec un logiciel de géométrie dynamique tridimensionnelle

The mathematical work in interaction with a tridimensional dynamic geometry software

*Mathieu Blossier, Philippe R. Richard*

## RESUMEN

Los tutoriales para enseñar matemáticas se suelen referir a modelos informáticos, dejando implícitos los modelos de aprendizaje que derivan del uso de la herramienta y que hubieran podido contribuir a su diseño. En el juego de ida y vuelta entre diseñadores y usuarios, si las nuevas posibilidades de desarrollo comunitario pueden facilitar el perfeccionamiento de la herramienta informática en función de las exigencias docentes, favorece también la apropiación al comportamiento humano que utiliza ya la herramienta. No es tanto en las matemáticas representadas donde hace falta buscar modelos de aprendizaje, sino más bien en las interacciones del usuario cuya acción «interroga» un medio informático que le «responde». Considerando las concepciones del alumno y el espacio de trabajo matemático que emergen de las interacciones reales o potenciales, nuestro propósito tiene como objetivo dar cuenta del trabajo matemático que genera el uso del software de geometría dinámica tridimensional GeoGebra 3D.

## ABSTRACT

It often happens that software for teaching mathematics is built on data-processing models, leaving implicit the learning models that arise from the usage of the tool and that could have helped to its conception. In the back and forth game between designers and users, if the new possibilities of joint development enable the software refinement according to educational needs, it promotes as well the adaptation to human behavior already used by the tool. It is not so much in represented mathematics where we should search for learning models, but it is by turning to the interactions of the one which actions “question” software medium that “answers back”. Considering student’s

## PALABRAS CLAVE:

- *Matemática Educativa*
- *Modelización instrumentada*
- *Representación*
- *Concepción*
- *Espacio de Trabajo Geométrico*
- *Geometría dinámica tridimensional*

## KEY WORDS:

- *Didactics of Mathematics*
- *Instrumented modeling*
- *Representation*
- *Conception*
- *Geometrical Working Space*
- *Tridimensional dynamic geometry*



conceptions and the mathematical working space that emerge from real or potential interactions, our purpose aims to put on display the mathematical work generated by the use of the tridimensional dynamic geometry software GeoGebra 3D.

## RESUMO

Os tutoriais para ensinar matemática referem-se frequentemente a modelos informáticos, deixando implícitos os modelos de aprendizagem decorrentes da utilização da ferramenta e que poderiam ter contribuído para o seu design. Nas discussões entre designers e utilizadores, se as novas possibilidades de desenvolvimento comunitário podem facilitar o desenvolvimento da ferramenta de software com base em requisitos de ensino, também favorecem a apropriação do comportamento humano que já utiliza essa mesma ferramenta. Não são portanto as matemáticas representadas que poderão dar indicações sobre a origem dos modelos de aprendizagem, mas sobretudo as inteirações observadas: o utilizador, que «interroga» pela sua ação um software que lhe «responde». Tendo em conta as concepções dos alunos e o espaço de trabalho matemático decorrente de inteirações reais ou potenciais, o nosso propósito é destinado a explicitar o trabalho matemático gerado pelo uso de software de geometria dinâmica tridimensional GeoGebra 3D.

## RÉSUMÉ

Il arrive souvent que les didacticiels pour l'enseignement des mathématiques se constituent en référence à des modèles informatiques, laissant implicites les modèles d'apprentissage qui découlent de l'usage de l'outil et qui auraient pu contribuer à sa conception. Dans le jeu des allers et retours entre les concepteurs et les usagers, si les nouvelles possibilités de développement communautaire facilitent déjà le raffinement de l'outil logiciel selon les demandes enseignantes, il favorise aussi l'appropriation au comportement humain qui utilise déjà l'outil. Ce n'est donc pas tant dans les mathématiques représentées qu'il faut chercher les modèles d'apprentissage, mais plutôt en regardant les interactions de celui dont l'action «interroge» un milieu logiciel qui lui «répond». En considérant les conceptions de l'élève et l'espace de travail mathématique qui émergent d'interactions réelles ou potentielles, notre propos vise à rendre compte du travail mathématique engendré par l'usage du logiciel de géométrie dynamique tridimensionnelle GeoGebra 3D.

## PALAVRAS CHAVE:

- *Didática das matemáticas*
- *Modelização instrumentada*
- *Representação*
- *Concepção*
- *Espaço de Trabalho Geométrico*
- *Geometria dinâmica tridimensional*

## MOTS CLÉS:

- *Didactique des mathématiques*
- *Modélisation instrumentée*
- *Représentation*
- *Conception*
- *Espace de travail géométrique*
- *Géométrie dynamique tridimensionnelle*

## 1 Introduction : place de la géométrie dans l'espace

**S**i l'institution, dans la description du curriculum de l'enseignement public français ou québécois, insiste sur la place importante à donner à l'étude de la vision dans l'espace et à la manipulation des figures à trois dimensions, on constate chez les élèves une faible culture de cette géométrie. En France, la disparition progressive des problèmes de géométrie du plan, au lycée, n'est que plus flagrante pour ce qui est de l'espace. Les derniers programmes, initiés en 2009, font le lien avec les connaissances du collège, mais ne les approfondissent que très légèrement ; la géométrie dans l'espace ne semble plus qu'être un contexte pour s'exercer dans les autres domaines mathématiques. Au Québec, une lecture attentive des principaux manuels scolaires montre en outre que la géométrie dans l'espace se limite essentiellement à un calcul d'aire ou de volume, avec parfois quelques descriptions de propriétés des solides. Toutefois, les situations proposées n'engagent pratiquement jamais le sens proprement géométrique ni la réflexion dans l'espace. Le sens spatial de l'élève est quand même sollicité, mais le modèle géométrique se subordonne aux autres contenus de formation (arithmétique, algèbre et analyse fonctionnelle), ce qui restreint malheureusement les possibilités d'interprétation géométrique des phénomènes de l'espace.

Par ailleurs, dans nos sociétés très modélisées, les enjeux sociaux, économiques et politiques n'ont jamais accordé autant d'importance au contrôle de l'espace. De l'aménagement urbain jusqu'à la production d'images pour le cinéma ou les jeux vidéo, le citoyen en devenir est sans cesse confronté à la nécessité d'une analyse cohérente de son environnement. L'école et la société évolueraient-elles en sens opposé?

La question précédente a des allures provocatrices, mais elle a le mérite de poser pourquoi l'institution scolaire en est-elle arrivée là. Y aurait-il un décalage entre une approche traditionnelle de la géométrie, où la représentation statique des figures est au cœur de l'étude des propriétés du curriculum, et les caractéristiques dynamiques du raisonnement, de la visualisation, de la figuration et de l'instrumentation (Richard, Swoboda, Maschietto, & Mithalal, 2013), aussi bien dans l'exercice de la géométrie que dans l'interprétation des phénomènes de l'espace? Ne peut-on pas favoriser le travail mathématique de l'élève au sein d'un Espace de Travail Géométrique (ETG) idoine (Kuzniak, 2006) qui intègre l'usage d'un outil de géométrie dynamique tridimensionnelle, surtout lorsque cet outil se développe conjointement en référence au modèle géométrique et à l'activité de l'élève?

En toile de fond, la notion d'espace de travail qui soutient notre propos reprend la perspective de Coutat et Richard (2011) dans laquelle l'ETG se considère expressément en interaction avec le sujet, c'est-à-dire l'espace de travail qui se crée aussi par une démarche, soit-elle en instance de réalisation. Elle se prolonge avec la généralisation aux compétences mathématiques cognitives des ETM que l'on retrouve à la Figure 3 de l'introduction de ce numéro spécial.

L'outil de géométrie dynamique que nous employons est le logiciel libre GeoGebra, dans sa composante «3D»<sup>1</sup>. Il s'agit d'un logiciel pour lequel participe un grand nombre de développeurs et qui s'enrichit à la suite de son usage dans les écoles. Bien que la géométrie tridimensionnelle marque la continuité thématique de notre texte, nous portons une attention particulière à deux types de visualisation des figures dans l'espace : la projection perspective classique (au sens de la peinture de la Renaissance) et la projection stéréoscopique (celle qui permet de voir le relief dans les salles de cinéma). Le succès relativement récent du « cinéma 3D » peut-il être transposé à l'activité géométrique dans l'espace ?

Formulons notre propos à partir d'une question précise : existe-t-il une classe de problèmes pour laquelle la projection stéréoscopique améliore de manière significative le caractère idoine de l'espace de travail géométrique, par rapport à la projection perspective ? À ce stade de notre recherche, la classe de problèmes étudiée s'articule autour de deux activités d'apprentissage. La première est un questionnaire s'appuyant sur un dessin statique : la projection stéréoscopique élargit-elle son domaine de fonctionnement ? La seconde est plus complexe, et permettra dans une recherche aboutie d'évaluer les possibilités du sujet à s'engager dans le travail mathématique.

Nous analysons a priori les observables attendus, en nous référant au modèle des ETG de Kuzniak (2006) et au modèle de connaissances de Balacheff et Margolinas (2005) afin d'offrir un double regard sur l'interaction sujet-milieu (Blossier & Richard, 2011). C'est-à-dire que, même si l'espace de travail, dans son aspect de démarche potentielle, et la conception connaissance particulière par rapport à un sujet donné, sont tous deux caractéristiques du système sujet-milieu, le premier focalise le sujet et le second, le milieu.

Nous appuierons cette analyse par les premiers résultats expérimentaux, qui nous permettent d'envisager une poursuite féconde de notre recherche.

## ② La géométrie dynamique tridimensionnelle : un obstacle didactique singulier

### 2.1. *La géométrie dynamique en tant qu'outil*

Dans la construction d'un ETG idoine (au sens de Kuzniak, 2006), la géométrie dynamique occupe une place qui requiert une attention particulière. Ses rapports avec les référentiels théoriques de Géométrie I, II et III ne sont pas toujours bien définis et explicites. Selon Houdement et Kuzniak (2006) :

---

<sup>1</sup> Voir <http://www.geogebra.org/> .

Quand l'élève construit son espace de travail, il a tendance à écraser le pôle théorique pour se replier sur le dipôle espace-artéfact plus évident et matériel. Il lui accorde ainsi une fonction de validation indépendamment de l'horizon visé.

Ces auteurs précisent ainsi la notion d'ETG personnel. Selon Coutat et Richard (2011), en tant que support expérimental, la géométrie dynamique offre une articulation entre les paradigmes géométriques GI et GII, de même qu'entre les ETG personnel, idoine et de référence. L'enjeu de cette articulation se concentre dans les démarches de modélisation et (surtout) de validation. En revanche, la démarche de découverte est moins problématique, peut-être dans la mesure où il s'agit de géométrie du plan : pour la perception visuelle statique, les écrans offrent aujourd'hui un rendu de qualité équivalente, sinon supérieure, au papier-crayon.

La démarche de découverte, dans le cas de la géométrie dans l'espace, est plus complexe : hormis la maquette, les supports classiques (tableau, papier, écran) sont par nature à deux dimensions, tandis que le monde est perceptible dans trois dimensions. Comme le souligne Chaachoua (1997), en géométrie dans l'espace, le choix du mode de représentation des objets devient primordial, et conditionne la mise en relation du dessin et de la figure.

Dans la conception d'un ETG idoine s'appuyant sur un outil de géométrie dynamique 3D, le contrôle devra s'exercer - en addition des contrôles liés à la géométrie dynamique - sur les ambiguïtés et les limitations engendrées par le mode de représentation choisi : en essayant de les éviter (dans le cadre actuel de notre recherche) ou de les exploiter (Mithalal, 2010).

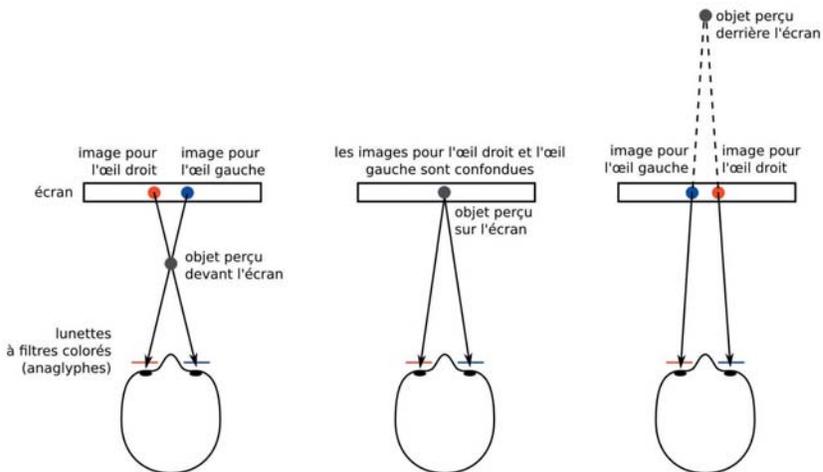


Figure 1. Principe de la projection stéréoscopique (vue de dessus). Deux images du même objet, une pour chaque œil, sont projetées sur l'écran. Grâce aux filtres, chaque œil ne perçoit que l'image qui lui est destinée (dans la figure, le filtre rouge masque à l'œil gauche toutes les images rouges, qui se confondent avec le blanc de l'écran). Le cerveau fusionne les images perçues et « place » l'objet devant, sur, ou derrière l'écran.

## 2.2. Reconstituer sur un écran le réel dans ses trois dimensions

Ces questions sont étudiées depuis longtemps par le cinéma, qui n'a cessé de chercher à rendre l'espace dans sa réalité la plus complète. Lipton (1982) décrit avec précision les conditions techniques et physiologiques liées à la production de « l'effet de relief ».

De nombreux indices permettent de transmettre l'information de profondeur : le plus ancien est sans doute la taille relative des objets (plus un objet est éloigné, plus il est vu petit) et la perspective (telle qu'apparue en Europe à la Renaissance) ; on peut également citer l'occlusion partielle (un objet situé derrière un autre n'est pas visible en totalité), la lumière et les ombres, la texture, l'effet de parallaxe... Tous ces indices sont dits « monoculaires » : ils ne nécessitent pas l'usage des deux yeux pour être perçus. À cette catégorie, on doit ajouter celle des indices « binoculaires » : l'écart entre l'image vue par l'œil gauche et celle vue par l'œil droit permet au cerveau de reconstituer l'information de profondeur - c'est le fondement de la projection stéréoscopique (celle utilisée dans les films 3D, Figure 1) ; il faut ajouter à cet indice principal celui de la convergence (les axes de vision de chaque œil se croisent sur l'objet fixé) et d'accommodation du cristallin (pour créer une image nette de l'objet fixé).

Beaucoup ont pu faire l'expérience « réelle » de la profondeur en étant spectateur du cinéma « en relief ». Cette technique de stéréoscopie est souvent perçue comme surpassant tous les autres indices de profondeur. Pourtant, de nombreuses difficultés techniques en rendent l'usage encore expérimental (Blondé, Borel & Doyen, 2010). Par ailleurs, d'après la recension et les études de Lipton (1982), on peut estimer que dans la population, entre 2% et 5% n'ont pas de vision stéréoscopique, et entre 10% et 15% en ont une perception différente, qui les rend insensibles aux systèmes de projection courants.

Le rendu d'une figure dans l'espace est donc un exercice complexe, qui demande de tirer parti des différents indices de profondeur : ils doivent se combiner pour fournir une information la plus riche possible, et éviter de se contredire les uns les autres (Figure 2).



Figure 2. Cube impossible (photomontage, Okami No Ti<sup>2</sup>). La structure générale, la perspective et la texture suggèrent qu'il s'agit d'un cube composé de poutres à section carrée. Cependant, l'occlusion partielle du second poteau est un indice contradictoire typique des figures impossibles, comme celles qui sont exploitées par Vicente Meavilla<sup>3</sup> dans l'enseignement des mathématiques.

<sup>2</sup> Licence d'œuvre en usage partagé : <http://im-possible.info/english/art/montage/okami-no-ti.html>

<sup>3</sup> Voir le site : <http://im-possible.info/english/art/vicente/index.html>

### 2.3. GeoGebra 3D

Nous nous attachons ici à décrire les principes généraux qui président au développement de la géométrie dans l'espace pour GeoGebra et au comment ces principes entrent en résonance avec notre recherche depuis la didactique des mathématiques.

La production des indices pour l'information de la profondeur peut être séparée en deux familles. D'une part, il y a les indices « synthétisés » (projection perspective, stéréoscopie, éclairage, parallaxe, etc.), et d'autre part, les indices « symbolisés » (projection parallèle ou perspective cavalière, codage des parties cachées, lignes de rappel, etc.). Ces indices raffinent les enjeux des genèses vidéos-figurales et discursivo-graphiques dans l'interaction entre l'élève et le milieu (voir introduction, figures 3 et 4).

Nous désignons comme « synthétisés » les indices qui reproduisent le réel à la manière de l'appareil photo, de la caméra, de l'œil ou des deux yeux (Figure 3a) ; par exemple la parallaxe est synthétisée par le logiciel lorsque la figure est tournée, à la manière du four à micro-ondes qui fait tourner une tasse. Nous désignons comme « symbolisés » les indices qui sont de l'ordre du codage (Figure 3b). Dans la terminologie utilisée par Chaachoua (1997), les premiers interviennent dans le dessin comme modèle du monde réel, les seconds sont des conventions qui permettent d'étendre le domaine de fonctionnement du dessin.

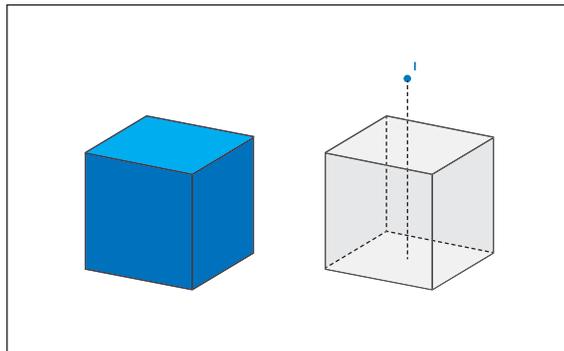


Figure 3. a) Indices synthétisés : perspective à points de fuite, éclairage ;  
b) Indices symbolisés : perspective parallèle, segments cachés en pointillés, ligne de rappel du point I.

Du point de vue didactique, les indices synthétisés relèvent essentiellement de la genèse vidéo-figurale : ils sont essentiellement perceptifs. Les indices symbolisés s'appuient sur des conventions de représentations et, plus généralement, ils se placent en partie sur la genèse discursivo-graphique.

Ces indices sont communément utilisés par les logiciels de géométrie dynamique dans l'espace - auxquels on peut adjoindre entre autres les logiciels de conception assistée par ordinateur. Une partie importante de notre recherche se concentre sur ces indices afin d'en mesurer les effets sur le sujet ; c'est le cœur de l'activité d'apprentissage que nous développons ci-après.

Dans la suite, nous nous intéressons précisément à la projection stéréoscopique en lien avec les différentes genèses.

### 3 Activités d'apprentissage : un questionnaire et un problème

Notre ingénierie didactique se concentre tout d'abord sur un questionnaire, avant de s'attaquer à une activité de travail mathématique plus riche. Le questionnaire permet d'évaluer la capacité du dessin (statique) à illustrer la situation spatiale d'un point par rapport à un cube. Le problème propose, sur la base d'une question ouverte, de compléter la construction d'une figure à l'aide de GeoGebra, et évalue ainsi la projection stéréoscopique dans la genèse instrumentale. Il pointe également quelques enjeux de cette représentation lors de l'activité d'institutionnalisation au sens de Brousseau (1998).

#### 3.1. *Le point est-il au-dessus ?*

Le questionnaire est constitué d'une série de figures statiques, produite soit selon la projection perspective (Figure 4a), soit selon la projection stéréoscopique (Figure 4b), reconstituée à l'aide de lunettes anaglyphes (Figure 5).

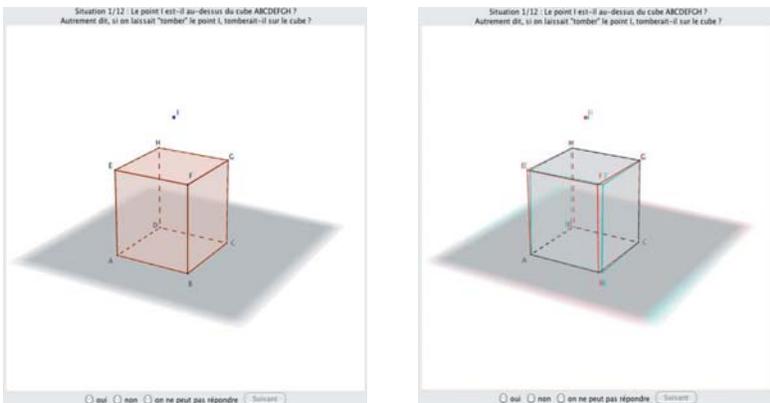


Figure 4. Questionnaire, (a) projection perspective, (b) projection stéréoscopique



Figure 5. Lunettes anaglyphes

Toutes les figures sont composées d'un cube ABCDEFGH et d'un point I : l'élève doit répondre à la question « Le point I est-il au-dessus du cube ABCDEFGH ? Autrement dit, si on laissait 'tomber' le point I, tomberait-il sur le cube ? », en choisissant parmi « oui », « non », « on ne peut pas répondre ». Dans la projection, ce point I n'est jamais situé en-dessous de la droite (GH).

Chaque élève est soumis à la même série de 12 dessins, en commençant en projection perspective, et en poursuivant en projection stéréoscopique avec 12 dessins correspondant aux mêmes 12 figures. Chacune des figures a été produite à l'aide de GeoGebra ; nous avons donné la réponse qui correspond à la position du point I dans représentation interne au logiciel, en 3 dimensions (Figure 6).

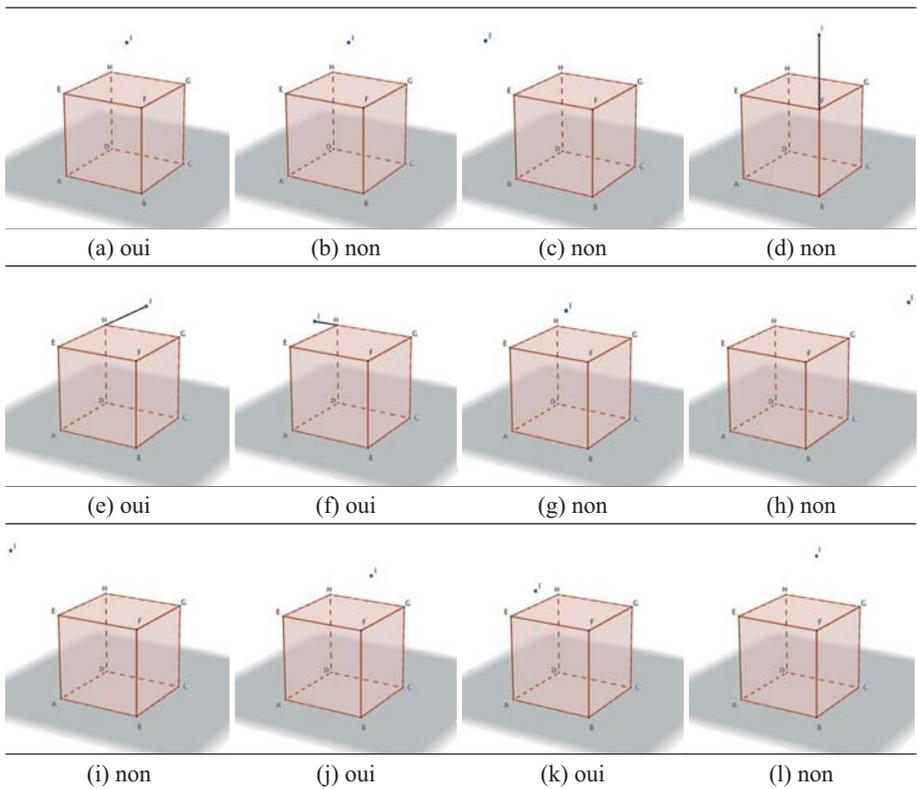


Figure 6. Dessins du questionnaire (projection perspective)

On peut noter, dans les cas (d-e-f), une « contradiction » entre la position du point I dans la représentation interne, et l'indice proposé par le segment qui semble prolonger une arête du cube (on peut rapprocher cette situation de la Figure 2). Les cas (l-j-k) présentent la même position du point I dans l'espace, sans les segments de prolongement.

Le modèle de Balacheff et Margolinas (2005) permet de décrire avec précision la conception qui intervient dans chaque mode de projection. La classe de problèmes est ici : « situer un point dans l'espace par rapport à un solide » ; les opérateurs mis en œuvre sont l'observation de la projection sur l'écran (en 2D) et le relevé des indices de profondeur (synthétisés ou symbolisés) ; le système de représentation relève de la genèse vidéo-figurale (sorte de comparaison au réel qui se représente lui-même) ou de la genèse discursivo-graphique (langage conventionnel des figures) ; la structure de contrôle consiste, essentiellement dans une démarche de modélisation, en allers et retours entre la figure de référence et ses représentations dans l'espace réel et local.

Une première expérimentation a été opérée sur trois classes d'élèves de 6<sup>ème</sup>, constituant une population de 66 élèves ayant, dans leur cursus antérieur (école primaire), manipulé et décrit notamment le cube et le parallélépipède rectangle :

- comme on pouvait s'y attendre, dans les situations triviales (point à gauche ou à droite du cube, cas b-c-h-i), les élèves répondent correctement dans les deux projections (à plus de 90%)
- en projection anaglyphe, les élèves répondent en accord avec le modèle dans 78% des cas, ce qui s'éloigne significativement du hasard (au seuil de 5%).
- pour les situations avec segment de prolongement, en perspective, les élèves répondent de manière significative (au seuil de 5%) en accord avec le prolongement dans les cas (d) et (f).
- les situations avec segment de prolongement font baisser les performances en projection anaglyphe, de manière significative (au seuil de 5%) ; la réponse attendue reste cependant prépondérante (71% des réponses).
- dans les situations où le point I est « au-dessus » du cube dans la projection, sans segment de prolongement (cas a-g-j-k-l), les élèves répondent « oui » de manière significative en projection perspective (47% des réponses) ; les élèves donnent la réponse attendue de manière significative en projection stéréoscopique (82% des réponses).

Ces résultats indiquent que la projection stéréoscopique construit un ETG plus idoine, du moins dans le cadre de la genèse vidéo-figurale.

### 3.2. Où placer la lampe ?

Dans l'activité précédente, le sujet est soumis à un milieu qui le contraint à une perception passive et statique. Cette situation repose donc essentiellement sur la genèse vidéo-figurale et déborde peu sur les autres genèses en jeu dans l'ETG. Nous abordons maintenant la deuxième activité d'apprentissage afin d'explorer davantage les différentes genèses.

« Une lampe est posée sur une table de chevet de forme cubique. L'ombre portée au sol forme un quadrilatère, dont l'aire est égale à 9 fois l'aire d'une face carrée de la table de chevet. Où se trouve l'ampoule de la lampe ? »

Une maquette du problème est proposée à l'élève dans son milieu de travail (Figure 7).

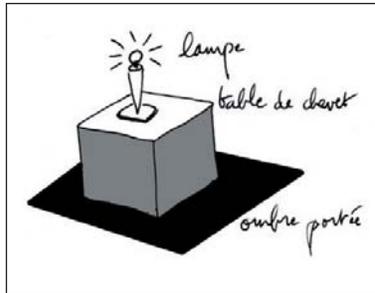


Figure 7. Maquette du problème

Une figure GeoGebra est fournie aux élèves, avec un cube et un point I situé au-dessus du cube, dans une configuration proche de celle de la maquette (Figure 8). Un groupe d'élèves travaille en projection perspective ; un autre groupe en projection stéréoscopique.

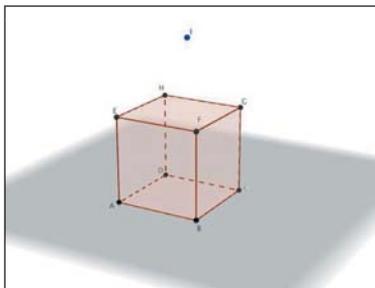


Figure 8. Figure GeoGebra de départ (projection perspective)

Il s'agit de repérer si le caractère idoine constaté dans l'activité précédente est encore prégnant dans ce travail mathématique. L'activité sera proposée à des

élèves de 3<sup>ème</sup> : leur cursus du collège a approfondi leur connaissance des solides de base (dont la pyramide), de plus ils savent appliquer le théorème de Thalès dans des problèmes de géométrie plane.

Dans la suite, nous analysons a priori les étapes attendues dans l'activité de l'élève.

### 3.2.1. Résolution du problème : construction

Il est essentiellement question, pour l'élève, de construire le quadrilatère de l'ombre portée (quadrilatère JKLM à la Figure 9).

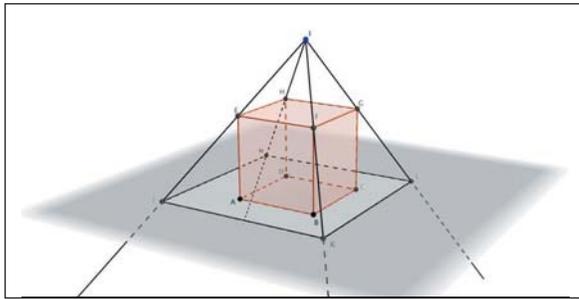


Figure 9. Construction de l'ombre portée

Il s'agit de résoudre le problème : « construire, en trois dimensions, une demi-droite à partir de deux points, et l'intersection d'une demi-droite avec un plan » ; les opérateurs mis en œuvre sont l'observation de la projection et le relevé des indices de profondeur, les outils de construction manipulés à la souris (par exemple, cliquer sur deux points pour construire une demi-droite), l'outil de déplacement d'un point (souris), le déplacement, la rotation et le zoom de la figure ; le système de représentation est la comparaison à la maquette ; la structure de contrôle consiste en l'adéquation à la maquette et la résistance de la figure au déplacement.

Notre hypothèse de travail est que la projection stéréoscopique produit un dessin dont le domaine de fonctionnement est plus proche de celui de la maquette, et permet au sujet d'exercer un meilleur contrôle sur sa construction.

L'expérimentation vise à mesurer le caractère idoine de l'ETG créé avec la projection stéréoscopique, en observant chez l'élève réalisant la figure :

- Le temps de construction ;
- La nécessité de tourner la figure (et sa fréquence) ;
- Le ressenti exprimé par l'élève (réponse à un questionnaire : « la construction t'a-t-elle semblé facile à réaliser ? »).

### 3.2.2. Résolution du problème : conjectures

Le sujet passe ici d'une activité de construction à une activité davantage centrée sur l'expérimentation : l'opérateur principal est le déplacement (point I et figure) à la souris, mais aussi au clavier (flèches pour les 6 directions). La sollicitation par l'élève d'oracles (par exemple pour les aires des carrés ABCD et JKLM, Figure 10) vient compléter la structure de contrôle déjà décrite.

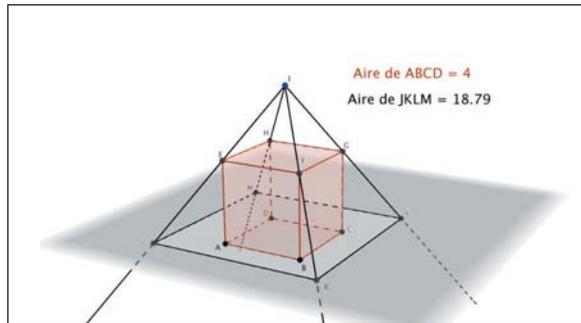


Figure 10. Oracles sur les aires

Maintenant, la rotation de la figure n'est plus nécessaire dans le cas de la projection stéréoscopique : seul le déplacement du point I est en jeu. En projection perspective, le sujet devra s'appuyer sur l'indice donné par la ligne de rappel (segment perpendiculaire au plan de base joignant le point I). Cet indice relève de GII car il fait appel aux connaissances mathématiques et aux conventions de figure.

Il s'agira d'observer, chez le sujet, la capacité de contrôle de la figure dans une démarche de découverte productive. La réussite, le temps d'exécution et la production de conjectures plus ou moins avancées sont les observables que nous relèverons.

Les conjectures attendues sont les propriétés suivantes (qui ne constituent pas une liste exhaustive) :

- Le déplacement horizontal du point I n'influe pas sur l'aire du carré JKLM ;
- Monter le point I diminue cette aire ; descendre le point I augmente cette aire ;
- Le point I doit se situer à une distance égale à la moitié de la longueur d'une arête du cube, au-dessus de la face EFGH.

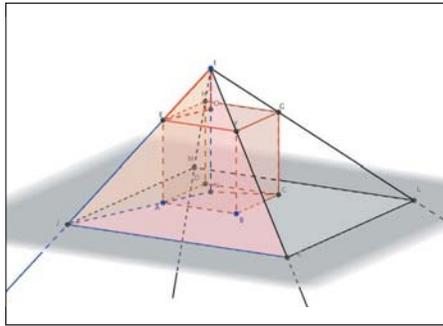


Figure 11. Figure complétée pour une démonstration (projection parallèle)

### 3.2.3. Résolution du problème : démonstration

Nous ne faisons ici qu'évoquer quelques réflexions, qui ne peuvent entrer immédiatement dans le cadre de notre activité d'apprentissage. Le problème de la preuve doit être abordé : sur quel système de représentation l'enseignant peut-il s'appuyer lors de l'institutionnalisation ? Il s'agira, dans une étude ultérieure, d'aborder les points suivants - pour lesquels nous ne produisons maintenant aucune analyse :

- en projection au tableau, pour l'ensemble de la classe, quelle projection fonctionne le mieux ? La perspective parallèle (Figure 11) est-elle préférable puisqu'elle évite le problème du point de vue et des déformations ?
- les sous-figures invoquées sont le plus souvent des figures du plan (Figure 12) : comment le logiciel peut-il afficher conjointement la figure générale en projection et des coupes (sous-figures) dans le plan ?

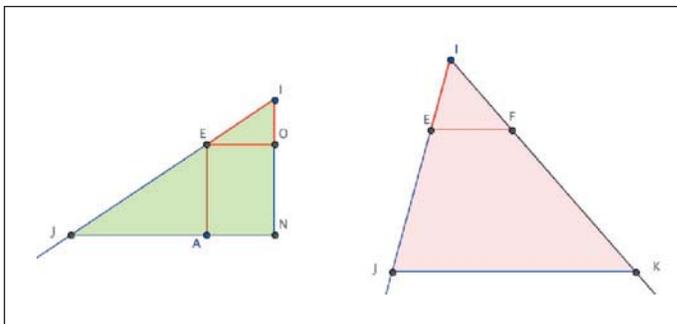


Figure 12. Sous-figures dynamiques en interaction

## ④ Conclusion : un long chemin à parcourir

Nous pouvons seulement entrevoir, à travers ces deux activités d'apprentissage, l'étendue des potentialités que révèle aujourd'hui la géométrie dynamique pour l'espace, en même temps que la profondeur des questions à investir pour optimiser la construction d'un ETG idoine. L'enrichissement et la validation des indices de profondeur dans le rendu de la figure spatiale sont des questions de première importance.

Nous avons vu que dans la genèse vidéo-figurale, la stéréoscopie produit un dessin au domaine de fonctionnement plus étendu que la projection perspective, puisqu'elle permet aux élèves de produire une réponse davantage en adéquation avec la figure sous-jacente. Cependant, le caractère idoine de l'ETG construit avec la projection stéréoscopique résiste-t-elle dans le cadre d'une tâche plus complexe ?

Par ailleurs, la réponse à cette question est également fortement liée aux contraintes techniques du matériel (écrans, lunettes, périphériques d'entrée, sensibilité à la position du sujet par rapport au support d'affichage, etc.) et physiologiques des élèves (sensibilité à la stéréoscopie). La mise en place progressive des deux activités d'apprentissage nous permet en partie d'isoler ces différents facteurs et de valider notre étude sur le plan didactique.

Au retour d'observation, nous pourrions :

- engager une étude systématique des différences entre les projections perspective et stéréoscopique ;
- y adjoindre les projections cavalière et parallèle ;
- dessiner les contours d'une ergonomie minimale de l'outil GeoGebra 3D pour l'élève et pour l'enseignant.

## Références

- Balacheff, N. & Margolinas, C. (2005). *Ck $\phi$* , modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques*, pp. 75-106. Grenoble, France: La Pensée Sauvage.
- Blossier, M. & Richard, P.R. (2011). Modélisation instrumentée et conceptions a priori dans un espace de travail géométrique en évolution: un tour en géométrie dynamique tridimensionnelle. *Actes des journées mathématiques 2011 de l'École Normale Supérieure de Lyon (IFÉ 2011)*. Lyon, France : Institut Français de l'Éducation, pp. 93-101.

- Blondé, L., Borel, T. & Doyen, D. (2010). 3D Stereo Rendering Challenges and Techniques. *44th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS 2010)*, pp. 1-6, Princeton.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, France: La Pensée Sauvage.
- Chaachoua, A. (1997). *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Etude de cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes* (thèse de Doctorat). Université Joseph Fourier, Grenoble, France.
- Coutat, S. & Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, pp. 97-126.
- Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, pp. 175-193.
- Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 6.2, 167-187.
- Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, pp. 9-24.
- Lipton, L. (1982). *Foundations of the stereoscopic cinema, a study in depth*. New York, Etats-Unis : Van Nostrand Reinhold.
- Richard, P. R., Swoboda, E., Maschietto, M. & Mithalal, J. (2013). Introduction to the Geometrical Thinking Working Group. *Actes du Congress of European Research in Mathematics Education (CERME8)*, pp. 1-7.
- Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle* (thèse de Doctorat). Université Joseph Fourier, Grenoble, France.

## Auteurs

---

### Mathieu Blossier

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Rouen, France.  
[mathieu.blossier@ac-rouen.fr](mailto:mathieu.blossier@ac-rouen.fr)

### Philippe R. Richard

Département de didactique, Université de Montréal, Montréal, Canada.  
[philippe.r.richard@umontreal.ca](mailto:philippe.r.richard@umontreal.ca)