

Quel espace de travail géométrique pour les élèves au Québec et pour les futurs enseignants ?

Which Geometric Working Space for the Students and Future Teachers in Quebec?

Annette Braconne-Michoux

RESUMEN

Esta colaboración intenta describir los diferentes espacios de trabajo geométrico relacionados con los programas educativos de primaria y secundaria en Quebec: los que son puestos en práctica en los libros de texto y en las clases y aquel en el cual se desempeñan un buen número de estudiantes en el marco de la formación inicial de profesores de educación básica. Estos diferentes estudios dejan ver de que la distinción entre los ETG para primaria y para secundaria no está claramente explicitada, parece que estos se basan más bien en una geometría GII fragmentada (GII/GI) pero que los alumnos pueden tener éxito trabajando en un ETG personal más próximo a una geometría GI asumida (GI/gII). Esta constancia arroja que los futuros profesores de primaria funcionan en un ETG personal parecido (sino es que idéntico) al del estudiante de primaria. El reto de los cursos de didáctica en la formación inicial de profesores educación básica es, por tanto, llevar a los futuros educadores de primaria a un ETG personal distinto a aquel de sus futuros alumnos.

PALABRAS CLAVE:

- *Geometría, espacios de trabajo geométrico*
- *Formación inicial de profesores de educación básica*

ABSTRACT

This paper aims to describe the different geometrical working spaces related to curricula implemented in primary and secondary schools in Quebec, those which are assumed in the textbooks and classes, and that upon which a good number of teachers in early formation stages rely. It results from these different investigations that the distinction between GWS in primary and secondary schools is not clearly explicit. They seem to be based upon a parceled Geometry GII (GII/GI) but learners can succeed when working in a personal GWS proximate to an assumed Geometry (GI/gII). It stems from this report that the primary school teachers in formation function in a personal GWS close or identical to that of the primary school

KEY WORDS:

- *Geometry, Geometric working spaces*
- *Initial formation of primary school teachers*



student. Thus, the challenge that the teacher formation early courses on didactics face is to take the prospective teachers to a personal GWS distinct from that of their future pupils.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo descrever os diferentes ETG pode ser encontrado na Educação em Quebec, em livros e salas de aula, em comparação com ETM usado por estudantes universitários que participam em programas de aprendizagem escolas primárias. Acontece que a distinção entre a ETG aos níveis primário e secundário de educação não é clara. Eles tendem a ser ligado a algum tipo de parcelar GII (GII / GI), mas um estudante pode ter sucesso quando se trabalha em um GI assumiu (GI / gII). Assim, os estudantes universitários que participam em programas educacionais para escolas de ensino fundamental operar em uma ETG pessoal pode estar perto de seus futuros alunos. O desafio é oferecer aos estudantes universitários a oportunidade de trabalhar em outro ETG durante a sua sessão de ensino de geometria.

PALAVRAS CHAVE:

- *Geometria*
- *Espaços do Trabalho geométrico de futuros professores de Educação na escola primária*

RÉSUMÉ

Cette contribution vise à décrire les différents espaces de travail géométrique liés aux programmes de formation de l'école québécoise au primaire et au secondaire, ceux qui sont mis en œuvre dans les manuels et dans les classes et celui dans lequel fonctionnent bon nombre d'étudiants dans le cadre de la formation initiale des maîtres. Il résulte de ces différentes études que la distinction entre les ETG visés au primaire et au secondaire n'est pas clairement explicitée. Il semble que ceux-ci s'appuient plutôt sur une géométrie GII morcelée (GII/GI) mais que les élèves peuvent réussir en travaillant dans un ETG personnel relevant d'une géométrie GI assumée (GI/gII). Il découle de ce constat que les futurs enseignants du primaire fonctionnent dans un ETG personnel proche de, voire identique, à celui de l'élève du primaire. Le défi des cours de didactique en formation initiale des maîtres est donc d'amener les futurs enseignants du primaire à un ETG personnel distinct de celui de leurs futurs élèves.

MOTS CLÉS:

- *Géométrie*
- *Espaces de travail géométrique, formation initiale des maîtres du primaire*

1 Introduction

Plusieurs recherches se sont intéressées aux difficultés rencontrées par les futurs enseignants du primaire, en mathématiques et tout particulièrement en géométrie (Boublil-Ekimova, 2010). Ces difficultés sont autant de l'ordre

des connaissances géométriques théoriques que des conceptions de l'enseignement de la discipline (Burton, Detheux-Jehin & Fagnant, 1997). Mais, ce constat établi, on peut aussi se poser la question de l'origine de ces difficultés chez les étudiants. En analysant le parcours d'un étudiant au fil de sa scolarité, on peut imaginer trouver une explication au phénomène. Au Québec, les programmes de mathématiques actuels sont implantés depuis 2001 au primaire et 2005 au secondaire. Les manuels appliquant ces programmes sont contemporains et ont été approuvés par le ministère de l'éducation (MELS). Il est donc tout à fait vraisemblable que les connaissances des étudiants ne soient que le reflet (le fruit?) de l'enseignement qu'ils ont reçu et des apprentissages qu'ils en ont retirés. Nous allons donc analyser successivement les programmes du primaire et du secondaire et quelques activités extraites de manuels. Les activités choisies sont extraites de deux collections rédigées par les mêmes auteurs, *Clicmaths au primaire* et *Perspective au secondaire* (Guay et al., 2002, 2003, 2005a, 2005b) et portent sur l'étude des quadrilatères. Nous considérons que cette situation est particulièrement intéressante pour étudier l'évolution dans les attentes des auteurs en lien avec leur interprétation du programme. Les outils théoriques sur lesquels s'appuie cette étude sont les suivants : les paradigmes géométriques tels que définis par Houdement & Kuzniak (2006) et les espaces de travail géométrique (ETG) tel que définis par Kuzniak (2010). En particulier, nous étudierons le passage d'une « géométrie naturelle » (GI) à une géométrie « axiomatique naturelle » (GII), celui-ci ayant été identifié comme difficile à mettre en œuvre dans les classes alors qu'il est déterminant pour les apprentissages des élèves (Braconné-Michoux, 2008). Nous nous attarderons aussi sur le rôle accordé aux instruments de géométrie dans les constructions géométriques, et sur la notion de figure géométrique comme objet théorique.

② Espace de travail géométrique au primaire

On peut lire dans le paragraphe de présentation de la mathématique du *Programme de formation de l'école québécoise* (Gouvernement du Québec, 2006) :

La pratique de la mathématique fait appel à l'abstraction. Bien que son enseignement gagne toujours à prendre appui sur des situations et des objets concrets, il doit néanmoins se donner comme objectif de traiter dans l'abstrait des relations entre les objets ou entre les éléments d'une situation. Ainsi, un objet triangulaire devient une figure géométrique, et donc un sujet d'intérêt pour le mathématicien, à partir du moment où il traite, par exemple, des relations qu'entretiennent entre eux ses côtés, ses sommets et ses angles. (p. 124)

Dans ce préambule le passage de l'objet concret à l'objet abstrait est explicite : « l'objet triangulaire devient une figure géométrique » et le mot « figure » semble avoir le sens défini par Laborde et Capponi (1994), en tant que représentant d'un objet géométrique théorique. En termes de paradigmes géométriques, on pourrait inférer que le but de l'école primaire est d'amener les élèves à travailler dans une géométrie théorique de type GII.

Si l'on s'intéresse aux objectifs à atteindre en géométrie, on peut remarquer que la référence à un paradigme ou un autre n'est pas explicite. En effet pour chacun des cycles de l'école primaire on peut lire :

*Au premier cycle*¹ l'élève [...] dégage des régularités géométriques facilement observables et développe le sens de la mesure pour décrire son environnement, se le représenter et s'y mouvoir. ...

Au deuxième cycle, l'élève [...] décrit et classe des objets géométriques selon leurs attributs. Il construit des relations géométriques complexes et travaille avec des instruments et des unités de mesure non conventionnels relatifs aux surfaces et aux volumes. ...

Au troisième cycle, l'élève [...] poursuit l'étude d'objets géométriques selon leurs attributs, la construction de relations géométriques, ... » (Gouvernement du Québec, 2006, p. 129)

On peut supposer qu'ainsi rédigé, le programme respecte d'une certaine façon la tradition québécoise où les propriétés des figures sont établies sur des cas isolés, validées le plus souvent par la mesure, puis généralisées. La liste des « savoirs essentiels » et la « progression des apprentissages » qui complètent le programme, précisent que les propriétés des figures à connaître concernent les longueurs de côtés, les valeurs d'angles, le parallélisme et la perpendicularité (le mot « diagonale » n'est pas dans le programme). Le classement attendu des figures est le classement inclusif mais les activités qui doivent aboutir à cette classification ne sont pas explicitées. Ce classement est-il établi en travaillant dans GI (visualisation, mesurage), dans GII (déduction), dans une géométrie GI assumée (GI/gII) (où les validations peuvent être faites par mesurage et où « certains théorèmes démontrables en GII, sont utilisés comme des outils techniques évitant la mesure ou facilitant le calcul » (Kuzniak, 2010, p. 80), ou dans une géométrie GII morcelée (GII/GI) où « le modèle de référence est la géométrie d'Euclide [...] (mais) les propriétés s'appuient pour leur genèse sur l'intuition de l'espace » (Kuzniak, 2010, p. 80)? Aucune indication n'est donnée sur les activités à mener pour atteindre ces objectifs. On peut imaginer que, selon la tâche, l'élève sera amené à travailler en GI ou en GII et que le rôle de la mesure sera déterminant mais nous n'avons pas d'indication sur les ETG dans lesquels les élèves doivent travailler. On peut aussi remarquer que les constructions à l'aide

¹ Voir Annexe 1 pour la correspondance entre les systèmes scolaires français et québécois.

des instruments ne sont pas mentionnées dans le programme. Elles sont évoquées une seule fois, dans les attendus de la compétence 2 en fin de 1^{er} cycle : « [L'élève] construit des figures planes [...] ». On peut donc s'interroger sur la place réservée aux constructions dans les enseignements et donc sur le rôle qui leur est attribué dans les apprentissages des élèves, en termes de paradigmes : GI ou GII? Ces remarques montrent que le programme de l'école primaire au Québec n'est pas explicite sur les objectifs à atteindre et les moyens pour les atteindre. L'ETG de référence au sens de Kuzniak, visé par l'institution, est donc très lacunaire. On peut raisonnablement penser qu'en fin de primaire il relève d'une géométrie GII morcelée (GII/GI) dans la mesure où des considérations que l'on peut qualifier de proto-axiomatiques sont à enseigner (attributs des figures) alors que les supports sur lesquels les élèves travaillent sont des dessins auxquels on attribue le statut de figures et que toutes les validations sont visuelles ou instrumentées : la mesure jouant un rôle déterminant dans le passage de GI à GII en lui accordant moins de précision dans la validation.

Que proposent les manuels? Dans le chapitre sur les quadrilatères de *Clicmath 4e année primaire* (Guay, S. et al., 2002) (voir figures 1 et 2), on trouve sur la même page deux activités où l'élève peut travailler dans GI ou en GI assumée (GI/gII). Les constructions demandées dans l'exercice 3 (figure 1) doivent être réalisées à la règle sur du papier quadrillé. Pour la construction du losange, l'élève peut mettre en œuvre des propriétés de symétrie, d'égalités de longueur ou de parallélisme. Il peut aussi la terminer « à l'œil » en reproduisant globalement la figure prototypique qu'il connaît. Selon les procédures que l'élève mettra en œuvre, une telle activité pourra relever d'une GI assumée (l'élève applique des théorèmes comme des outils techniques) ou de GI (perception globale de la figure). La construction du parallélogramme peut se faire selon des procédures diverses qui relèvent des mêmes paradigmes (GI ou GI assumée) : translation du segment MN (glissement du côté qui « penche pareil ») ou tracé de deux segments de même longueur qui suivent le quadrillage. La construction du trapèze peut se faire dans GI; l'élève traçant deux segments de longueurs différentes en suivant le quadrillage.

Reproduis 3 fois le segment de droite ci-contre sur la feuille qu'on te remettra. Utilise une règle. Chaque segment sera l'un des côtés d'un quadrilatère.

- A** À partir du premier segment, trace un losange.
- B** À partir du deuxième segment, trace un parallélogramme.
- C** À partir du troisième segment, trace un trapèze.

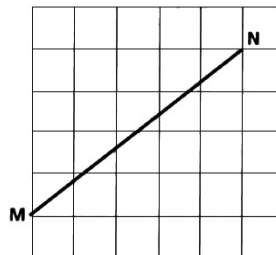


Figure 1. Guay, S. et al. (2002, p. 65)

Repère 3 quadrilatères différents dans l'illustration ci-dessous.
Identifie chacun de ces quadrilatères à l'aide des lettres qui sont près des sommets.
Indique les différences entre ces quadrilatères.

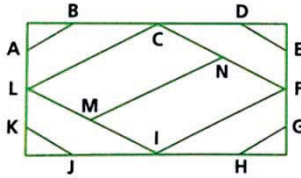


Figure 2. Guay, S. et al. (2002, p. 65)

L'exercice 4 est un exercice d'observation qui demande à l'élève de repérer des figures et des sous-figures; il peut répondre de manière perceptive (apparence globale de la figure) mais aussi valider ses réponses en mesurant à la règle ou en vérifiant avec son équerre. Dans tous les cas, il travaille en GI.

Dans le même manuel, une année plus tard, on trouve dans le chapitre sur le cercle (figure 3), le problème suivant :

2. Figure imposée

Dans la figure ci-contre, le point **A** et le point **C** sont les centres de deux cercles de même rayon.

Selon toi, le quadrilatère **ABCD** est-il un losange ?

Trouve de bons arguments pour convaincre un ou une camarade que tu as raison.

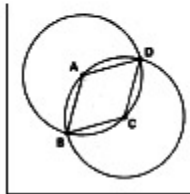


Figure 3. Guay, S. et al. (2003, p. 53)

Pour répondre à cette question, l'élève peut tout d'abord dire : « c'est un losange parce que ça se voit » auquel cas il ne respecte pas le contrat. Il peut aussi mesurer les longueurs des côtés du quadrilatère (propriété connue) et se convaincre que celui-ci est un losange. Dans les deux cas l'élève travaille dans GI. Mais la consigne précise : « Trouve de bons arguments... ». Ainsi, par contrat, l'élève comprend qu'il ne peut se limiter à des réponses aussi laconiques. On peut alors imaginer qu'il va énumérer toutes les propriétés du losange et du cercle qu'il connaît (ou qu'il constate), espérant ainsi emporter la conviction de ses camarades. Il est peu vraisemblable que ces propriétés soient organisées selon un raisonnement hypothético-déductif (démonstration formelle). L'élève fonctionne dans une géométrie GI assumée (GI/gII). Concrètement, on peut

penser que l'enseignant aura un rôle à jouer pour guider l'élève dans l'élaboration d'une « réponse convaincante ». D'ailleurs, dans le guide de l'enseignant, la réponse proposée est la démonstration qui se situe clairement dans GII (voir annexe 2). Nous avons ici un exemple où l'ETG de l'élève (ETG personnel) et l'ETG attendu par les auteurs du manuels (ETG idoine) ne sont pas les mêmes; le dessin n'a pas le même rôle, les validations sont le fruit de raisonnements distincts. Avec l'aide de l'enseignant, les élèves ont une opportunité d'approcher une nouvelle géométrie : GII morcelée où sont développés « des îlots hypothético-déductifs autour des propriétés de quelques figures de base » (Kuzniak, 2010, p. 80-81).

En résumé, nous pouvons dire que du point de vue des paradigmes géométriques, au primaire, les élèves travaillent spontanément en GI. Les propriétés des figures (triangles et quadrilatères) qu'ils connaissent sont établies à partir de généralisations. Elles tendent par habitude et usage répété à avoir un caractère théorique, faisant alors glisser l'élève de GI vers une GII morcelée (GII/GI). Mais ce glissement n'est pas assuré dans la mesure où, notre connaissance des pratiques enseignantes en témoigne, les élèves n'ont pas réellement l'occasion de faire la distinction entre les dessins qu'ils observent ou qu'ils produisent et les objets théoriques représentés et dont il est question lorsqu'on aborde le classement des figures par inclusion, par exemple. Ceci témoigne de la difficulté à gérer le passage de GI à GII (Braconne-Michoux, 2008). On pourrait dire que les différents ETG rencontrés à l'école primaire sont : un ETG visé par l'institution qui semble reposer sur une géométrie GII morcelée, un ETG apparaissant dans les manuels qui vise à rencontrer le précédent, en prenant en compte que les élèves commencent à travailler dans GI et un ETG personnel qui se situe clairement dans GI. Mais le passage entre GI et GII n'est jamais explicité et le dessin peut avoir le statut de figure, à l'insu de l'élève (voir figure 3).

3 Espace de travail géométrique au secondaire

Les programmes du secondaire s'inscrivent dans la suite de celui du primaire et du point de vue du raisonnement et de la géométrie, on avance dans l'abstraction comme en témoignent ces extraits du *Programme de 1er cycle du secondaire* (Gouvernement du Québec, 2003) :

En géométrie, [l'élève] passe de l'observation au raisonnement. Il énonce et mobilise des propriétés, des définitions et des relations pour analyser et résoudre une situation-problème. Il construit des figures au besoin, à l'aide d'instruments ou de logiciels de géométrie dynamique. (p. 241)

Il se familiarise avec les définitions et les propriétés des figures qu'il utilise pour résoudre des problèmes à l'aide de déductions simples. (p. 243)

Dans ce même programme, dans une note de bas de page à propos des contenus de formation, on peut lire : « Dans un espace géométrique dont la dimension est donnée (0, 1, 2 ou 3), une figure géométrique est un ensemble de points servant à représenter un objet géométrique tel qu'un point, une droite, une courbe, un polygone, un polyèdre. » (Gouvernement du Québec, 2003, p. 58)

Les termes du premier paragraphe semblent indiquer que l'ETG visé par l'institution s'approche d'une géométrie GII assumée (GII/gl) au sens de Kuzniak (2010). Dans le *Programme du second cycle*, il semble que l'ETG que l'élève devrait maîtriser s'approche d'une géométrie GII morcelée (GII/GI). En effet, on peut lire :

Au cours de sa formation, l'élève passe d'une géométrie intuitive, basée sur l'observation, à une géométrie déductive. C'est par les constructions et leur explicitation qu'il découvre les propriétés des figures. Petit à petit, il se dégage de la prise de mesures comme base de ses raisonnements pour recourir plutôt à la déduction. En s'appuyant sur des données, des hypothèses de départ ou des propriétés admises, il démontre des conjectures non évidentes qui servent, à leur tour, à en prouver de nouvelles. (Gouvernement du Québec, 2013, p. 53)

Si on se réfère aux contenus de formation c'est-à-dire aux propriétés géométriques que l'élève doit connaître à la fin de chaque cycle du secondaire², on s'aperçoit que celles-ci sont présentées sous le titre « Énoncés de géométrie euclidienne » et sont rédigées sous la forme de faits géométriques tels que : « *Toutes les médiatrices des cordes d'un cercle se rencontrent au centre de ce cercle* » (Gouvernement du Québec, 2003, p. 261) ou « *Le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équidistant des trois sommets* » (Gouvernement du Québec, 2013, p. 131). Le programme ne donne pas d'exemple d'utilisation de ces propriétés au sein d'une démonstration ou d'un raisonnement hypothético-déductif. Le nombre de propriétés (les « attributs » de l'école primaire) à connaître est plus grand mais leur utilisation reste mal définie. On peut donc se poser la question du changement de paradigme géométrique dans le passage de l'école primaire au secondaire. L'ETG visé par l'institution est-il un ETG s'appuyant sur une géométrie GII morcelée (GII/GI) de façon à amener l'élève dans un nouvel espace de travail? L'étude des manuels pourrait nous apporter des éléments de réponses.

² Il est sans doute important de noter que l'étude des propriétés des figures géométriques s'arrête en secondaire 3. En secondaire 4 le programme de géométrie se réduit à la trigonométrie dans le triangle rectangle et en secondaire 5, ne sont abordées que les figures équivalentes (en aire ou en volume) et les transformations géométriques dans le plan cartésien. Les autres propriétés géométriques sont à lire dans le paragraphe « Recherche de mesures manquantes mettant à profit des propriétés de figures et des relations ».

Pour cela, on reprendra en exemple le chapitre sur les quadrilatères, tel que proposé par le manuel *Perspective Secondaire 1* (Guay, S. et al., 2005a), rédigé par la même équipe qui a produit Clicmath et que nous avons étudié au paragraphe précédent. On peut constater que la trace écrite de la leçon (figure 4) se limite aux définitions des quadrilatères et qu'elles sont toutes proposées à partir des côtés et des angles droits (donc reprises du primaire); les propriétés des diagonales sont évoquées en bas de paragraphe.



Mes outils

Les quadrilatères

La définition

En géométrie, une définition est un ensemble d'attributs qui permet de distinguer un type de figures parmi d'autres.

Exemple : Voici la définition conventionnelle de quelques quadrilatères.

| TYPES DE QUADRILATÈRES | DÉFINITIONS | |
|------------------------|--|--|
| | — QUADRILATÈRE CONVIDE AVANT — | |
| Trapèze | au moins deux côtés parallèles. | |
| Parallélogramme | deux paires de côtés parallèles. | |
| Cerf-volant | deux paires de côtés adjacents isométriques. | |
| Rectangle | quatre angles droits. | |
| Losange | quatre côtés isométriques. | |
| Carré | quatre côtés isométriques et quatre angles droits. | |

Les propriétés

Lorsqu'on associe un attribut à un type de figure, on obtient une propriété.

Exemple : Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires.

Selon sa définition et ses propriétés, une figure géométrique peut porter différents noms. *Exemple :* Un carré est une sorte de losange, de rectangle, de cerf-volant, de parallélogramme et de trapèze.

Figure 4. Guay, S. et al. (2005a, p. 88)

Le manuel de l'enseignant est néanmoins très précis sur les distinctions à faire entre définition (nombre minimal d'« attributs ») et propriété d'un quadrilatère ainsi que sur la classification inclusive des quadrilatères (voir Annexe 3). De ce point de vue, les auteurs du manuel prennent en charge, pour le professeur, le passage de GI à GII, prenant pour acquis que la géométrie de l'école primaire relève exclusivement de GI et celle du secondaire de GII.

Les activités proposées ensuite aux élèves vont montrer que le passage GI-GII est difficile à enseigner.

Ainsi, dans l'activité n°1 (figure 5), on peut s'interroger sur le fait que l'on ne demande pas de nommer les quadrilatères particuliers qui viennent d'être construits.

Situations d'application

- À l'aide de tes instruments de géométrie, trace :
- un parallélogramme ayant un côté de 5 cm ;
 - un losange comprenant un angle intérieur de 70° ;
 - un trapèze n'ayant que deux côtés isométriques ;
 - un parallélogramme ayant des diagonales perpendiculaires ;
 - un losange ayant des diagonales isométriques ;
 - un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires.


Figure 5. Guay, S. et al. (2005a, p. 89)

Dans le *Manuel de l'enseignant* (Guay, S. et al., 2005b), en commentaire à cette activité, on peut lire :

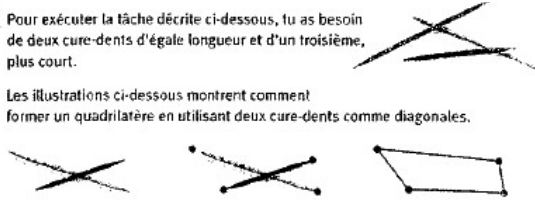
En traçant les figures demandées, les élèves auront une autre occasion de manipuler leurs instruments de géométrie et d'améliorer leur habileté à construire des figures avec précision. Vérifier particulièrement leur habileté à tracer des lignes parallèles ou des lignes perpendiculaires. (p. 89)


Le corrigé (Annexe 4) se limite à donner les noms des quadrilatères particuliers. Il n'est donc plus question de travailler le passage de GI à GII. On peut alors espérer que l'enseignant aura l'initiative d'interroger les élèves sur les situations particulières associées aux trois dernières questions.

Dans l'activité 4 (figure 6), l'élève manipule des cure-dents pour ensuite tracer des figures. Sa validation est donc avant tout perceptive.

 Pour exécuter la tâche décrite ci-dessous, tu as besoin de deux cure-dents d'égale longueur et d'un troisième, plus court.

Les illustrations ci-dessous montrent comment former un quadrilatère en utilisant deux cure-dents comme diagonales.



 En procédant de la même manière et en suivant les consignes ci-dessous, trace le quadrilatère formé dans chaque cas. Nomme ce quadrilatère, en justifiant ta réponse.

- Place deux cure-dents de longueurs différentes de manière qu'ils se croisent en leur milieu.
- Place deux cure-dents identiques de manière qu'ils se croisent en leur milieu.
- Place deux cure-dents de longueurs différentes de manière qu'ils se croisent perpendiculairement et que l'un passe par le milieu de l'autre.
- Place deux cure-dents identiques de manière qu'ils se croisent perpendiculairement et que l'un passe par le milieu de l'autre.
- Place deux cure-dents de longueurs différentes de manière qu'ils se croisent perpendiculairement en leur milieu.
- Place deux cure-dents identiques de manière qu'ils se croisent perpendiculairement en leur milieu.






Figure 6. Guay, S. et al. (2005a, p. 90)


Comme il lui est demandé de justifier sa réponse, il est invité à citer les propriétés des diagonales des quadrilatères, propriétés qu'il a découvertes dans l'activité d'introduction. Ici on peut considérer que l'élève travaille dans G1 avec des outils de G11, donc dans un ETG s'appuyant sur une géométrie G1 assumée (G1/g11).

L'exercice 9 (Guay, S. et al., 2005a, p. 92) (figure 7) est un exemple de la difficulté à gérer le passage de G1 à G11.



Je crois qu'il s'agit d'un autre parallélogramme.

 Chaque quadrilatère cache un autre quadrilatère...

 C'est ce que croit Dorothée après avoir relié les points milieux de chacun des côtés successifs d'un parallélogramme.

À la manière de Dorothée, poursuit cette expérience en répondant à chacune des questions ci-dessous. Dans chaque cas, justifie ta réponse à l'aide de propriétés géométriques.


Quel quadrilatère obtient-on en reliant les points milieux :


- d'un carré ?
- d'un rectangle ?
- d'un losange ?

Figure 7. (Guay, S. et al., 2005a, A1-9, p. 92)

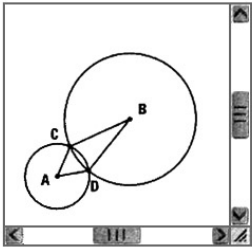
En effet, la tradition québécoise veut qu'en géométrie, la figure soit faite en vraie grandeur, à partir de mesures données et à l'aide des instruments; le soin dans le tracé est déterminant. L'élève a toujours la possibilité de prendre des mesures pour établir une conjecture, sa conviction, voire sa validation. Mais dans cet exercice aucune mesure n'est donnée, le soin et la précision ne seront que des aides pour conjecturer. Les élèves ne connaissent pas le « théorème des milieux » dans le triangle et sont donc dans l'impossibilité de donner une justification qui relève de GII. La « meilleure » réponse qu'ils puissent donner est le constat de la position des diagonales du nouveau quadrilatère et la nature du quadrilatère qui y est associée. C'est d'ailleurs ce qui est proposé en corrigé dans le manuel de l'enseignant où les positions des diagonales sont décrites comme étant « verticales » et « horizontales » (voir Annexe 4). Cet exercice pourrait relever d'une activité en GII mais les élèves n'ont pas les moyens de l'aborder comme tel et ils restent dans une, validation instrumentée donc en GI. On peut aussi considérer que cette situation est révélatrice de la difficulté à gérer le passage GI-GII.

Enfin il nous paraît intéressant de signaler que, comme en primaire, dans le chapitre sur le cercle on propose aux élèves d'étudier le quadrilatère formé par les rayons de deux cercles qui se coupent (voir figure 8).

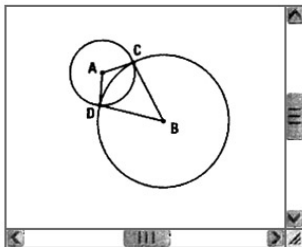
 À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a tracé deux cercles, l'un de centre **A**, l'autre de centre **B**. Les deux cercles se croisent aux points **C** et **D**.

 a) Détermine de quel type de quadrilatère est le polygone **ADBC**. Justifie ta réponse.

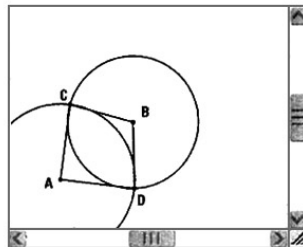
Le logiciel permet de faire subir les modifications suivantes à cette figure.



1) On peut modifier la position d'un cercle sans changer son rayon.



2) On peut modifier le rayon d'un cercle sans changer la position de son centre.



b) Comment pourrais-tu modifier la figure originale pour que le quadrilatère **ADBC** devienne un losange? Explique ta réponse.

Figure 8. (Guay, S. et al., 2005a, p. 96)

Cette activité, présentée dans un contexte d'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique, se termine par la question posée en b) qui est proche de celle qui a été posée dans le manuel de 5e année primaire. La différence est que, ici, le losange n'est pas dessiné mais des images illustrant les variations des rayons et des centres sont autant de guides pour l'élève. On peut penser que l'élève donne la même réponse qu'en 5e année primaire, et continue de travailler dans le même paradigme. Le guide de l'enseignant donne une réponse plus laconique que dans le manuel de primaire comme si une telle réponse allait de soi pour les élèves (voir Annexe 5).

Cette brève étude montre que, dans certains manuels du secondaire³, les tâches proposées sont des constructions en vraie grandeur (aux instruments) et les remarques (ou conjectures) attendues sont fortement liées à la qualité du dessin ou au thème étudié. La validation de la réponse est perceptive ou instrumentée. L'élève peut continuer de travailler en GI voire GI assumée (GI/GII), comme il le faisait à l'école primaire. Il arrive cependant qu'on lui demande des justifications et ce serait là l'occasion de l'amener à changer de paradigme. Les justifications ou démonstrations demandées ne nécessitent qu'une seule propriété et l'élève confond la citation de cette propriété avec l'évidence du dessin qu'il a sous les yeux en se limitant à faire une phrase liant les informations qui sont dans l'énoncé et la conjecture qu'il vient d'émettre. (On pourra, à ce sujet, se reporter à l'analyse approfondie des problèmes de ce type faite par Tanguay, 2002, 2010). Dans l'ETG personnel, le dessin a un statut de figure mais l'élève n'est pas en mesure de distinguer les données du problème des conclusions qu'il peut en tirer à l'aide d'un raisonnement hypothético-déductif. On peut imaginer que les dessins à main levée apporteraient un grand changement dans l'activité des élèves en termes de raisonnement hypothético-déductif. On peut conclure que l'ETG proposé dans les manuels repose sur une géométrie GII assumée voire morcelée alors que les élèves peuvent continuer de fonctionner dans un ETG personnel s'appuyant sur GI.

④ Espace de travail géométrique des étudiants en formation des maîtres

Les programmes actuels de primaire et de secondaire ont été implantés respectivement en 2001 et en 2005. Ainsi bon nombre d'étudiants d'aujourd'hui ont suivi l'enseignement que nous avons décrit dans les paragraphes précédents. La plupart des étudiants au Baccalauréat en enseignement primaire ont arrêté l'apprentissage de la géométrie en secondaire 3 soit, pour ce qui concerne l'Université de Montréal, 7 années avant d'aborder le cours de didactique de la

³ D'autres manuels font des choix didactiques différents, en particulier à propos de l'institutionnalisation des propriétés des diagonales des quadrilatères.

géométrie. On peut donc facilement imaginer que leurs ETG personnels s'appuient sur une géométrie GI assumée, peut-être au mieux sur une géométrie GII morcelée, mais rares sont ceux qui fonctionnent dans un ETG personnel reposant sur une géométrie GII assumée. Autrement dit bon nombre d'étudiants ont un ETG personnel qui n'est sans doute pas très différent de celui d'un élève de primaire (Boublil-Ekimova, 2010). C'est là tout le défi de la formation initiale des enseignants en géométrie au primaire.

Afin d'illustrer notre propos, nous rapportons ici deux expériences de classe.

Nous avons demandé aux étudiants de faire l'activité proposée en introduction à l'identification des quadrilatères dans le manuel *Presto 5e année* (Lacasse, 2003) (figure 9) :

Minh s'amuse à former des polygones à l'aide de cure-dents.
Comment doit-il disposer 4 cure-dents pour former un quadrilatère qui n'est pas un carré ?

Figure 9. Presto 5^e année (activité d'introduction) (Lacasse, 2003)

Plusieurs étudiants ont d'abord été déstabilisés par le fait de ne pas avoir de véritables cure-dents à leur disposition; leur remplacement par des stylos a été finalement accepté et certains d'entre eux n'ont produit que des carrés. Ils ne pouvaient former que la figure la plus particulière qui soit : un carré en position prototypique sur la table. Ces mêmes étudiants pouvaient reconnaître un losange parmi des quadrilatères, savaient en dessiner un en position prototypique. Ceux qui ont été en difficulté sur cette question étaient les mêmes qui avaient eu des difficultés à accepter les classifications inclusives des quadrilatères et des triangles. Pour eux les figures se distinguent les unes des autres de manière exclusive. Ces étudiants fonctionnant en GI ont alors des connaissances inadaptées à l'enseignement au primaire (Burton, Detheux-Jehin & Fagnant, 1997).

Nous avons aussi choisi de proposer aux étudiants l'activité reproduite ci-dessous (figure 10), extraite de *Repères IREM* (1993) et qui, a priori, demande un travail en GII morcelée à tout le moins.

Problème :

OLM est un triangle. Le point N appartient au segment OM. De plus $\angle ONL = 50^\circ$; $\angle OLM = 100^\circ$; $\angle OML = 30^\circ$ et $LM = 15$ cm.

La figure ci-contre est mal construite ; elle ne correspond pas aux données.

Construire une figure en vraie grandeur.

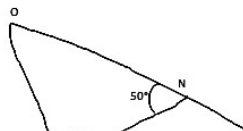


Figure 10. construction de triangles

Pour un grand nombre d'entre eux, la démarche a consisté à construire soigneusement, à l'aide des instruments, le triangle OLM en respectant les mesures indiquées. La position du point N sur le segment [OL] a été établie à l'aide du rapporteur qu'ils ont fait glisser sur le segment [OM] pour que le côté de l'angle passe par L, au besoin en utilisant une règle par-dessus le rapporteur pour garantir la « précision » de la construction. Alors que tous les étudiants connaissaient la propriété de la somme des angles d'un triangle, nombre d'entre eux ne l'ont pas utilisée pour organiser leur construction (utilisation de GII pour construction dans GI). Les validations spontanées ont consisté à vérifier que les mesures d'angle étaient exactes, en particulier que l'angle $\angle LNO$ mesurait bien 50° . Rares ont été les étudiants à repérer que le triangle OLN est isocèle en L. La correction en classe a été l'occasion de valoriser leurs connaissances théoriques et leur mise en œuvre dans une construction. Cette activité a été une occasion unique de passage vers un nouvel ETG plus théorique.

En résumé, on peut dire que les étudiants au Baccalauréat en enseignement primaire - comme leurs futurs élèves - ont une perception de la géométrie comme un art de faire des constructions soignées à l'aide d'instruments (règle, équerre, rapporteur), avec soin et précision (fonctionnement relevant de GI). Même s'ils connaissent les propriétés théoriques (relevant de GII), les occasions de les utiliser dans des raisonnements hypothético-déductifs sont rares ; les propriétés se lisent et se déduisent avant tout sur le dessin. Les futurs enseignants et leurs élèves ont donc des ETG personnels très proches. Il est évident que ces étudiants ne sont pas responsables de cette situation. La formation de ces enseignants à propos de la géométrie représente donc un très grand défi. Les programmes du secondaire en géométrie se distinguant peu du programme de primaire - les changements de paradigmes ne sont pas clairement établis -, ne donnent pas la possibilité aux futurs maîtres du primaire de fonctionner dans un autre ETG que celui qu'ils ont utilisé eux-mêmes à l'école primaire et qu'ils auront à enseigner.

Conclusion

En conclusion, on peut voir que la tradition de l'enseignement de la géométrie au Québec du primaire jusqu'à la 3^e année du secondaire, s'inscrit en GI puis, peut-être sur une géométrie GII morcelée (GII/GI). Mais nous avons vu que le passage GI - GII pouvait être difficile à gérer pour les auteurs de manuels. Le défi sur lequel repose la formation des maîtres du primaire en didactique de la géométrie est donc le suivant : amener les étudiants qui ne fonctionnent qu'en GI parce que les programmes le permettent jusqu'en Secondaire 3, à

fonctionner dans une géométrie plus théorique (GII) pour que leurs connaissances personnelles se distinguent de celles de leurs futurs élèves. Nous avons vu que les contenus des manuels ne sont pas toujours un soutien pertinent et le temps de formation est très court pour permettre aux étudiants une telle adaptation. Aussi, en amont de ce défi, on peut aussi penser que c'est sur les enseignants actuels du secondaire que repose la charge, la responsabilité de faire passer les élèves de GI à GII (et de préférence une GII « pas trop morcelée ») alors que le programme n'est pas précis sur ce point. Autrement dit le défi de la formation initiale des maîtres du primaire deviendrait-il le défi de la formation des maîtres au secondaire?

References

- Boublil-Ekimova, H. (2010). Lacunes géométriques des futurs enseignants. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 15, 97-118
- Braconne-Michoux, A. (2008). *Évolution des conceptions et de l'argumentation en géométrie chez les élèves : paradigmes et niveaux de van Hiele à l'articulation CM2-6e*. Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot-Paris 7, France.
- Burton, J., Dethoux-Jehin, M. & Fagnant, A. (1997). *Comment les enseignants évaluent-ils la géométrie au premier degré secondaire ?* Liège : Service de Pédagogie expérimentale de l'Université.
- Frelet, C. (1993). Une preuve pour construire en cinquième, *Repères IREM*, 12, 33-48.
- Gouvernement du Québec. Ministère de l'Éducation. (2003). Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie. *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Bibliothèque du Québec. Repéré à : http://www.cspo.qc.ca/References_encadrement_local/prfmsec1ercyclenb.pdf
- Gouvernement du Québec. Ministère de l'Éducation. (2006). Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie. *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire. Enseignement primaire*. Bibliothèque du Québec. Repéré à : <http://www1.mels.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/pdf/prform2001.pdf>
- Gouvernement du Québec. Ministère de l'Éducation. (2013). Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie. *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, deuxième cycle*. Bibliothèque du Québec. Repéré à : http://www1.mels.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/secondaire2/medias/PFEQ_Mathematique.pdf
- Guay, S. et al. (2002). *Clicmaths 2e cycle Primaire, manuel de l'élève B*. Laval, Québec : Grand Duc – HRW.
- Guay, S. et al. (2003). *Clicmaths 3e cycle Primaire, manuel de l'élève A*. Laval, Québec : Grand Duc – HRW.
- Guay, S. et al. (2005a). *Perspective Secondaire 1 vol. A1, manuel de l'élève*. Laval, Québec : Grand Duc – HRW.

● ● ● Quel espace de travail géométrique pour les élèves au Québec et pour les futurs enseignants ?

- Guay, S. et al. (2005b). *Perspective Secondaire 1 vol. A1, guide de l'enseignant*. Laval, Québec : Grand Duc – HRW.
- Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.
- Kuzniak, A. (2010). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de scolarité obligatoire en France. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 15, 73- 93.
- Laborde, C. & Capponi, B. (1994). Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1.2), 165-210.
- Lacasse, C. (2003). *Presto 5e année manuel A vol. 1*. Collection Concerto. Anjou, Québec : Éditions CEC.
- Tanguay, D. (2002). Analyse des problèmes de géométrie et apprentissage de la preuve au secondaire. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(3), 371-396.
- Tanguay, D. (2010). *La géométrie : au carrefour du sensible et de l'intelligible*. Montréal : Bande Didactique.

Autora

Annette Braconne-Michoux
Université de Montréal, Canada.

ETM – MONTREAL – octobre 2012

Annexe : *Quel espace de travail géométrique pour les élèves au Québec ?
Pour les futurs enseignants ?*

Annexe 1

Correspondance entre les parcours scolaires québécois et français (enseignement général)

| <i>Québec</i> | | | <i>France</i> | | | <i>Âge d'entrée</i> |
|---------------|-----------------------|------------------------|---------------|----------------|------------------|---------------------|
| Préscolaire | | Maternelle | Maternelle | Cycle 1 | PS, MS et GS | |
| Primaire | 1 ^{er} cycle | 1 ^{ère} année | Primaire | Cycle 2 | CP | 6ans |
| | | 2 ^e année | | | CE1 | 7 ans |
| | 2 ^e cycle | 3 ^e année | | Cycle 3 | CE2 | 8 ans |
| | | 4 ^e année | | | CM1 | 9 ans |
| | 3 ^e cycle | 5 ^e année | | | CM2 | 10 ans |
| | 6 ^e année | Secondaire | Collège | 6 ^e | 11 ans | |
| Secondaire | 1 ^{er} cycle | Secondaire 1 | | | 5 ^e | 12 ans |
| | | Secondaire 2 | | | 4 ^e | 13 ans |
| | 2 ^e cycle | Secondaire 3 | | | 3 ^e | 14 ans |
| | | Secondaire 4 | | Lycée | 2 ^{nde} | 15 ans |
| | | Secondaire 5 | | | 1 ^{ère} | 16 ans |
| | CEGEP | 1 ^{ère} année | | | Terminale | 17 ans |
| | | 2 ^e année | | | | 18 ans |

Dans les deux pays, la scolarité est obligatoire pour un enfant entre 6 et 16 ans.

Annexe 2

Clicmath 5^e année (Guay, S. et al., 2003)

- Le nouveau quadrilatère $ABCD$ est un losange.
L'argumentation devrait contenir les éléments suivants.
 - Les segments AB et AD sont des rayons du cercle de centre A .
 - Les segments CB et CD sont des rayons du cercle de centre C .
 - Dans un cercle, tous les rayons sont isométriques (donc les segments AB et AD sont isométriques et les segments CB et CD sont isométriques).
 - Les deux cercles ayant le même rayon, tous les rayons des deux cercles sont isométriques (donc les quatre segments AB , AD , CB et CD sont isométriques).
 - Un quadrilatère ayant quatre côtés isométriques est un losange.

Annexe 3

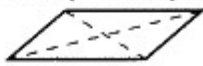
Guay, S. et al. (2005b). *Perspective Secondaire 1 vol. A-1, guide de l'enseignant*. Laval, Québec : Grand Duc – HRW, p. 83C.

Entre nous

Au primaire, la plupart des élèves ont exploré la notion de figures géométriques comme un ensemble de représentations plus ou moins structuré, où les concepts sont plus liés à des images qu'à des mots. En effet, le nom de chaque figure était déterminé par son apparence et non pas à partir d'une définition précise. Selon cette conception, un carré ne peut pas être un rectangle, car un rectangle est plus long que large. En raison de l'image que les élèves ont à l'esprit, il n'est pas surprenant qu'ils et elles reconnaissent un losange que s'il est « bien » orienté.

Tout en apprenant à identifier de cette façon les figures de base (triangle, quadrilatère, cercle), les élèves, au primaire, ont cherché à déterminer les attributs de ces figures. Encore une fois, cette recherche était visuelle, et les élèves se servaient, au besoin, d'instruments de mesure. Ils et elles pouvaient constater, par exemple, qu'un rectangle a deux paires de côtés isométriques et parallèles simplement par l'observation. Les parallélogrammes ont ces mêmes attributs. Il faut comprendre que les attributs ne sont pas propres à une figure en particulier. Ce sont en quelque sorte des qualités indépendantes que les figures ont ou n'ont pas. C'est avec ce bagage de connaissances que les élèves commencent leurs études secondaires. Ce serait une erreur de faire table rase de tout ce qu'ils et elles ont appris, car cette façon de procéder pourrait prêter à confusion. Il vaut mieux bâtir sur ce qu'ils et elles savent déjà.

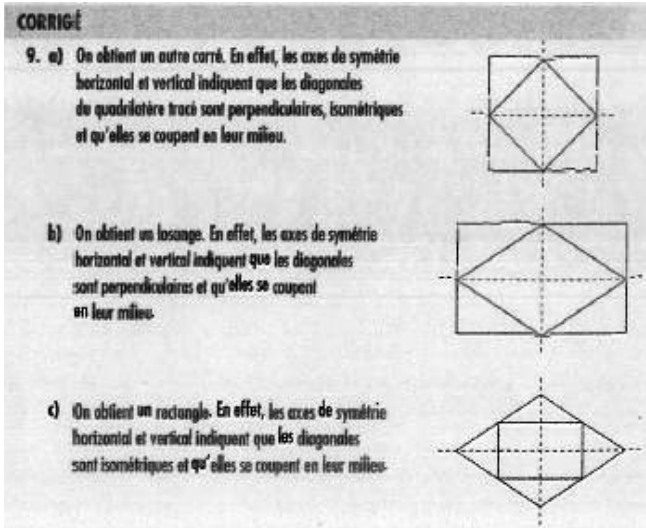
Voici de quelle façon pourrait se faire le passage du primaire au secondaire. La première étape consiste à dissocier l'identification des figures géométriques de leur apparence, c'est-à-dire à les définir tout simplement à l'aide de mots plutôt que d'images. Dans tous les cas, une définition à les caractéristiques présentées dans le tableau ci-dessous.

| CARACTÉRISTIQUES | EXEMPLES |
|---|--|
| Une définition fait référence à un certain nombre d'attributs que possède la figure définie. Dans l'exemple ci-contre, il y a trois attributs. | Un rectangle est un quadrilatère ayant des diagonales isométriques qui se croisent en leur milieu. |
| Ce nombre d'attributs est minimal, c'est-à-dire qu'une figure qui ne possède pas tous ces attributs ne peut pas porter le nom de la figure définie. | Un quadrilatère ayant des diagonales qui se coupent en leur milieu, mais qui ne sont pas isométriques.  Cette figure n'est donc pas un rectangle. |
| Toutes les figures qui possèdent les attributs qui font partie de la définition peuvent porter le nom de la figure définie. | Puisqu'un carré possède tous les attributs qui font partie de la définition du rectangle, on peut affirmer qu'un carré est une sorte de rectangle. |

Annexe 4

Guay, S. et al. (2005b). *Perspective Secondaire 1 vol. A-1, guide de l'enseignant*.
Laval, Québec : Grand Duc – HRW, p. 92.

Corrigé de l'exercice 9 p. 92 (figure 7)



Commentaire des auteurs

- Au numéro 9, demander aux élèves de nommer les quadrilatères formés en reliant les points milieux d'un parallélogramme, d'un cerf-volant et d'un trapèze isocèle. La justification à l'aide de propriétés sera un grand défi pour les élèves.

Annexe 5

Guay, S. et al. (2005b). *Perspective Secondaire 1 vol. A-1, guide de l'enseignant*.
Laval, Québec : Grand Duc – HRW, p. 93.

3. a) Il s'agit d'un cerf-volant, car il a deux paires de côtés adjacents isométriques. Les côtés AC et AD sont isométriques, car ils correspondent à des rayons du cercle de centre A . Les côtés BC et BD sont isométriques, car ils correspondent à des rayons du cercle de centre B .
- b) Il faut modifier le rayon d'un cercle afin que les deux cercles aient un rayon isométrique. Chacun des cercles doit passer par le centre de l'autre cercle. Si les deux cercles (cercle de centre A et cercle de centre B) ont des rayons isométriques, les côtés du quadrilatère seront isométriques et le quadrilatère sera un losange.