Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático

Circulations and genesis in the mathematical work space

Elizabeth Montoya-Delgadillo, Arturo Mena-Lorca,
Jaime Mena-Lorca

RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio de casos, como parte de un seguimiento de las prácticas de aula de profesores debutantes realizado por los autores. Entre otros aspectos, hemos observado que en tales prácticas el Álgebra interviene en los otros dominios a tal punto que esos profesores inducen a sus alumnos en un Espacio de Trabajo Matemático en el cual, si bien se producen circulaciones entre los componentes de los planos cognitivo y epistemológico que involucran las génesis instrumental y semiótica, la génesis discursiva está casi ausente. Para estudiar la situación obtenemos información adicional a modo de entender el rol que juega el Álgebra en el desarrollo de otros dominios de la matemática. Luego presentamos un ejemplo de cómo un profesor debutante con esas características puede influir en el Espacio de Trabajo Matemático personal de sus alumnos.

PALABRAS CLAVE:

- *Espacio de Trabajo Matemático*
- *Génesis*
- *Estudio de casos*

ABSTRACT

In this paper we present a case study, as part of a monitoring of beginning teachers' classroom practices. Among other aspects, we have observed that, in such practices, Algebra intervenes in the other fields, to an extent that they induce in their students a Mathematical Working Space in which, although circulations occur between the components of the cognitive and epistemological planes involved in the instrumental and semiotic geneses, the discursive genesis is almost absent. In order to study the situation, we obtain additional information in such a way to understand the role played by algebra in the development of other fields of mathematics. We then present an example of how a beginning teacher with those characteristics can influence the personal Mathematical Working Space of his/her students.

KEY WORDS:

- *Mathematical Working Space*
- *Geneses*
- *Case study*

Relime (2014) 17 (4-I): 181-197. Recepción: Enero 20, 2013 / Aceptación: Diciembre 19, 2013.
DOI: 10.12802/relime.13.1749

RESUMO

Neste trabalho, apresenta-se um estudo de casos, como parte de um seguimento das práticas de aula de professores debutantes realizado pelos autores. Entre outros aspectos, observamos que em tais práticas a Álgebra intervém nos outros domínios, a tal ponto de que esses professores induzem seus alunos a um Espaço de Trabalho Matemático no qual, embora sejam produzidas circulações entre os componentes dos planos cognitivo e epistemológico que envolvem as gêneses instrumental e semiótica, a gênese discursiva está quase ausente. Para estudar a situação, obtivemos informação adicional para poder entender o papel que a Álgebra desempenha no desenvolvimento de outros domínios da matemática. A seguir, apresentamos um exemplo de como um professor debutante com essas características pode influenciar o Espaço de Trabalho Matemático pessoal de seus alunos.

PALAVRAS CHAVE:

- *Espaço de Trabalho Matemático*
- *Gênese*
- *Estudo de casos*

RÉSUMÉ

Dans cet article, on présente une étude de cas, dans le cadre d'un suivi des pratiques de classe des enseignants débutants effectué par les auteurs. Nous avons pu observer, entre autres aspects, qu'en Algèbre d'autres domaines mathématiques sont utilisés à tel point que les enseignants poussent leurs élèves vers un Espace de Travail Mathématique dans lequel la genèse discursive est presque absente. Pour étudier la situation nous utilisons des données supplémentaires pour comprendre le rôle qui joue l'Algèbre dans le développement d'autres domaines des mathématiques. Nous présentons un exemple de l'influence d'un professeur débutant ayant ces caractéristiques sur l'Espace de Travail Mathématique personnel de ses élèves.

MOTS CLÉS:

- *Espace de Travail Mathématique*
- *Genèses*
- *Étude de cas*

1 Introducción

Nos propusimos hacer un seguimiento por tres años a profesores debutantes en aulas (en adelante, PD), esto es, a maestros con a lo sumo dos años de servicio, en su actividad de clases, como parte de un proyecto en el cual nos preguntamos por las concepciones geométricas y algebraicas desarrolladas en el aula.

Indagaciones previas señalan que, con frecuencia, los profesores privilegian la algoritmia y 'algebrizan' la Geometría y otros dominios matemáticos. En este trabajo, mostraremos evidencias sobre la tendencia que las clases han indicado: a estos profesores se les dificulta hacer la apropiada trasposición didáctica de los contenidos geométricos y algebraicos; de hecho, parecen divididos entre las exigencias de su institución formadora y aquellas que deben poner en juego en su enseñanza o, simplemente, muestran desconocimiento acerca de cómo transponer algunos saberes.

Estudiamos la complejidad de esta cuestión con profesores debutantes en el sistema educativo chileno, principalmente en dos ejes de nuestro interés: Álgebra y Geometría. Nuestras primeras observaciones dan cuenta de que el profesor trabaja una geometría 'algebrizada', esto es, que cuando él propone un problema en Geometría, recurrentemente cambia a un dominio algebraico para resolverlo y se limita, por ejemplo, a resolver un sistema de ecuaciones, corriendo el riesgo de obstaculizar la construcción del objeto matemático en cuestión en el dominio geométrico.

Nuestro marco es la teoría del Espacio de Trabajo Matemático, ETM (Kuzniak, 2011). Ello nos ha permitido situar el problema en términos teóricos precisos y, en particular, analizar con detención el rol que cumplen los distintos *componentes* de los planos epistemológico y cognitivo del Espacio de Trabajo Matemático Geométrico (ETM_G) en la cuestión, y cómo estos se adaptan en un dominio algebraico, configurando un Espacio de Trabajo Matemático Algebraico (ETM_A).

2 Antecedentes Teóricos

Houdement y Kuzniak (1996, 2006) y Kuzniak (2004) identifican tres tipos de Geometría (GI, GII, GIII) que coexisten en la enseñanza y cuya función es favorecer que el alumno construya su propio Espacio de Trabajo Geométrico, ETG, guiado por el docente. En este espacio, los problemas geométricos toman distinta interpretación y validez dependiendo del paradigma presente y de la institución elegida.

Actualmente, la teoría considera un espacio de trabajo matemático global, ETM, el cual depende del dominio matemático –así, el ETG es ahora ETM_G, y además se tiene ETM_A para el Álgebra, etc.– (Kuzniak, 2011), de este modo, en el ETM se concibe la reflexión como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas matemáticos (geométricos, algebraicos, etc.), en un *ambiente* organizado por y para el matemático (geómetra, algebrista, etc.) mediante la articulación de dos planos, uno epistemológico y otro cognitivo (Kuzniak, 2011). (Ver Figura 1 de Kuzniak y Richard, 2014, en este *Número Especial*).

Es también de esa manera que un individuo configura un constructo teórico acerca de un objeto y/o contenido. Ahora bien, una tarea determinada propuesta por el profesor activa una o varias génesis en el alumno, lo que se puede evidenciar en cierta medida en la *circulación* que se realiza en la clase entre los componentes de los planos. Nuestra hipótesis es que la activación de todas las génesis (que se puede detectar en una circulación apropiada) permite que el estudiante haga una construcción suficientemente completa del objeto matemático bajo estudio. Una tarea que se limite a la génesis semiótica, por ejemplo, puede obstruir los aspectos operativos que ofrece y/o requiere el contenido[1] en cuestión, o la validación de tal objeto. De esta forma, una circulación que activa solamente las génesis semiótica e instrumental se sitúa únicamente en el plano vertical "proceso de descubrimiento", señalado en la Figura 4 de Kuzniak y Richard (2014) en este *Número Especial*.

3 Pregunta de investigación y forma de abordar el estudio

Como se dijo al inicio, se hace necesario estudiar la aparente algebrización de la matemática en las aulas y el paradigma que esta tiende a inducir en el estudiante. Se hace necesario caracterizarla y ver los elementos que la constituyen. Para ello, en términos teóricos se requiere clarificar el rol que cumple un *representamen* propiamente algebraico en los dominios geométricos u otros, distinguiendo bien cuándo se está en un dominio algebraico propiamente tal (ETM_A). Esto último requirió por su parte ahondar en la teoría las ideas de artefacto simbólico y de génesis instrumental. A su vez, lo anterior llevó a preguntarse acerca del efecto de la algebrización del ETM-idóneo de un profesor en el ETM-personal de los alumnos, para lo cual se estudió la génesis discursiva en un trabajo geométrico habitual en alumnos.

En esta investigación nos preguntamos en términos generales por el proceso de transposición (Chevallard, 1985) desplegado en aula por un profesor debutante, e indagamos cómo son llevados al aula sus propios conocimientos matemáticos en un proceso de enseñanza en Geometría y Álgebra. Nos interesa averiguar qué privilegia o qué deja de hacer cuando se inserta en una institución escolar que le demanda nuevas responsabilidades, respecto de las cuales ha recibido, en forma más bien teórica, elementos en su institución formadora. Más precisamente, nos preguntamos cuáles son las concepciones geométricas y algebraicas desarrolladas en clase por un profesor debutante.

Una hipótesis, ya sugerida, es que el recurso habitual a la *algebrización* de los problemas geométricos por los profesores podría impedir que los alumnos instrumentalicen recursos propiamente geométricos y con ello obstruir la génesis discursiva. Otra hipótesis es que el recurso a la geometría ante una situación algebraica corra por su parte el riesgo de reducirse a una visualización icónica; en tal caso, puede que la situación algebraica no se enlace con la herramienta (Douady, 1986) geométrica, lo que obstaculizaría también la formación de un ETM apropiado en los alumnos, o que la pregnancia del ícono obstaculice una génesis discursiva correcta.

1 Que eventualmente involucra varios objetos.

Por otra parte, con las tareas que propone y con el discurso que realiza, el profesor (o el conjunto de profesores de una institución, o los textos escolares) va constituyendo paulatinamente un paradigma en su curso (institución, etc.) de cómo se representa, cómo se opera y cómo se valida el trabajo con ese objeto.

Si acaso su enseñanza se limita a alguna(s) de las génesis, estaría instituyendo un paradigma en que los objetos matemáticos están en alguna medida distorsionados.

En adición a lo anterior, es posible que el profesor no pueda activar la génesis discursiva. Por ejemplo podría entender que el proceso de prueba corresponde exclusivamente al mundo matemático (Montoya-Delgadillo, 2010) y por tanto es innecesario para los alumnos con quienes trabaja, o, por el contrario, intentar que sus alumnos remeden en lo que puedan (como una transposición compleja de realizar) los usos de los matemáticos al respecto. En esto influye además la escasa presencia de procesos de prueba en las mediciones internacionales, que tendería también a disminuir ante el profesor (y en el paradigma) la relevancia de la génesis discursiva.

Hemos seguido durante 10 sesiones de 1,5 horas a 6 profesores debutantes en aula. En la tabla 1 se muestran algunos de los temas tratados por los profesores, que nos llevaron a caracterizar mejor los paradigmas dominantes en cada caso y nos permitieron, paralelamente, establecer o precisar aspectos teóricos del ETM que explicitaremos más abajo. De los videos analizados, seleccionamos dos, en los cuales aspectos relevantes del ETM-idóneo, si bien coincidentes con los de los otros profesores, se evidencian con mayor claridad.

Tabla I
Profesores Debutantes

Profesor	*Género*	*Nº de clases observadas*	*Nivel*	*Temas tratados*	*ETM desarrollado*
PD1	F	10	2º Medio	Semejanza, Teorema de Tales, productos notables, fracciones algebraicas.	Clases observadas con un fuerte predominio en contenidos algebraicos y tratamiento algebraico.
PD2	F	11	1º y 2º Medio	Función lineal – Función afín – Función valor absoluto. Resolución de Ecuaciones, Sistemas de Ecuaciones, Repaso.	Clases observadas solo en contenidos algebraicos. Fuerte predominio de un tratamiento algebraico.

Mostraremos extractos de las grabaciones y la pauta usada para examinar las circulaciones que se realizan en el ETM. Esta pauta procura identificar cómo se van activando las génesis por la o las tareas que el profesor propone en su clase. Con el objeto de describir la circulación, hemos rotulado cada componente de los planos como sigue: 1, *representamen*; 2, artefactos; 3 referencial; A, visualización; B, construcción; C, prueba.

4 Cuestionamientos teóricos

4.1. *Articulación y circulación entre componentes: génesis instrumental*

En la Figura 1 de la introducción se muestra el ETM con sus planos, sus componentes y sus génesis, las cuales articulan y hacen evolucionar los planos epistemológico y cognitivo (Kuzniak, 2011). Pensando en el ETM-idóneo, una propuesta de enseñanza puede activar y controlar estas génesis, es decir, desarrollar una circulación específica. También se puede analizar la circulación en el ETM personal como en el referencial y en el idóneo.

La génesis instrumental da cuenta de cómo un *artefacto* se convierte en un *instrumento* y de esta forma se integra al humano para construir conocimiento matemático (Artigue, 2002): el *artefacto* (Rabardel, 1995) es un objeto material o abstracto destinado a dar sustento a la actividad del hombre en la ejecución de un cierto tipo de tarea; el *instrumento* es lo que un sujeto construye a partir del artefacto. La *génesis instrumental* es el proceso de transformación de un artefacto en instrumento.

El proceso de *instrumentalización* se apoya en un reconocimiento de las funciones del artefacto y lo convierte en una herramienta matemática funcional al estudiante; correspondientemente, el de *instrumentación* de las acciones matemáticas por el uso de la herramienta involucra la construcción de esquemas mentales personales y la apropiación de otros preexistentes para desarrollar y entender (de manera eventualmente distinta) la actividad matemática (Trouche, 2002). La instrumentalización puede conducir al enriquecimiento del artefacto por un mejor aprovechamiento del mismo, pero también a su subutilización (Artigue, 2002). De allí la importancia de la pregunta de cómo potenciar el artefacto para que se instrumentalice en los paradigmas y así las génesis hagan evolucionar el ETM.

4.2. *El artefacto como instrumento teórico*

Los artefactos pertenecen al plano epistemológico (Houdement & Kuzniak, 1996, 2006; Kuzniak, 2011) y corresponden a todo lo que le permite al usuario manipular los objetos matemáticos, o, mejor dicho, su representación, con la finalidad de abordar la tarea en concordancia con la génesis discursiva.

Ahora bien, en el enfoque de Rabardel (1995), los artefactos están relacionados con sus usos y no deben ser considerados como entes transparentes. En este sentido, los instrumentos son entidades mixtas formadas por el objeto técnico (artefacto) –material o simbólico– y componentes cognitivas al momento de manipular al *representamen* (Peirce, 1978, Kuzniak 2011), relacionados con sus usos (esquemas de uso) –la génesis semiótica–.

Más aún, según hemos podido comprobar a partir de los casos analizados en el estudio, un *representamen* que un estudiante identifica como del dominio algebraico activa la génesis instrumental, iniciándose un proceso de instrumentalización para dar cuenta de una tarea geométrica, y los casos que hemos analizado dan cuenta de ello. Por ejemplo, ocurre con frecuencia en problemas de carácter geométrico que, si a un trazo desconocido se le asigna la variable "x", ello induzca a trabajar el problema geométrico en el dominio algebraico; esto parecería una manera de obrar no solo habitual sino apropiada, sin embargo, se corre el riesgo de que el profesor debutante obstaculice el desarrollo geométrico.

5 El caso de los profesores debutantes

A continuación presentamos evidencia en aula de dos profesoras debutantes, PD1 y PD2, cada una titulada en una universidad chilena (distinta) con tradición en formación de profesores, ambas con contrato regular en sus respectivos liceos. Las grabaciones se realizaron durante los años 2011 y 2012. Las clases que analizamos aquí corresponden a una de PD1 en Geometría (teorema de Tales) y otra de PD2 en Álgebra (sistema de ecuaciones lineales), realizadas ambas para alumnos de 15-16 años (2° año de liceo). Estos dos casos resultan ser distintivos en los respectivos dominios de interés en esta investigación y muestran cómo un profesor debutante instrumentaliza una tarea con sus alumnos.

En las grabaciones se identificaron episodios y tareas que entregaron los PD. Con posterioridad a ello, se identificaron génesis y circulaciones en el ETM para su respectivo análisis.

5.1. *Teorema de Tales*

PD1 trató el teorema de Tales en su clase, e introdujo el tema mediante el problema de buscar una altura (medida inaccesible) de una pirámide sirviéndose del largo de un bastón. Este episodio es el que se muestra transcrito (ver tabla II). Posteriormente hubo un segundo episodio, que ejemplifica la situación con trazos desconocidos, y un tercero en que se muestra el teorema (general), y en el cual la tarea es determinar el trazo desconocido.

La práctica de aula de PD1 muestra que privilegia la figura en que se presenta el teorema en los textos escolares habituales en Chile. El centro de la tarea que propuso fue determinar el valor de una incógnita y resolver bien una ecuación, mostrando "pasos" para aplicar en forma correcta la algoritmia asociada; con esto, cambia el problema desde el dominio geométrico al algebraico. PD1 utiliza la componente visualización para transitar al referencial, sin activar la génesis discursiva en GI o GII.

En la Tabla II mostramos la presentación de la tarea asociadas al desarrollo de la clase de PD1.

TABLA II

Presentación del Teorema de Tales y la circulación en el ETM

Tarea	*Circulación*	*Descripción y caracterización del ETG del Profesor*	*Intervenciones de estudiantes*
Tarea de clase: *Determinar la altura de una pirámide mediante semejanza de triángulos.*	3 1	Relaciona la *semejanza con la proporcionalidad*, estudiada la clase anterior según PD1. Los objetos que menciona son *la pirámide y su altura*, para determinar la altura de un bastón.	I1: Un estudiante (pregunta por la sombra que se determinará, pues la configuración 3D/2D dibujada no se relaciona directamente con los objetos reales. I2: Un estudiante pregunta si esto permite determinar medidas de otros objetos.
Tarea genérica: *Determinar la medida de un cateto mediante la proporcionalidad de triángulos.*	A	En la pizarra se *representa la pirámide* (3D/2D)[2] mediante el dibujo de un triángulo rectángulo a mano alzada; no usa artefactos de manipulación, muestra dos triángulos rectángulos (sin indicar que lo son) donde los catetos corresponden a la sombra (ver I1, columna siguiente) y altura de una pirámide y un bastón, respectivamente. Obs. 1: PD1 no justifica la pirámide y tampoco hace relación con la semejanza, estudiada anteriormente. Obs. 2: ante intervención I2 responde que sí, y que a partir de esta idea nace el teorema.	

En la tabla solo hemos puesto la tarea como la presenta la profesora PD1, sin continuar con el desarrollo y la descripción de la circulación, la cual se encuentra codificada en la segunda columna, según lo señalado en 3.4[3]. En la transcripción que sigue, podemos constatar que PD1 cambia del marco geométrico al algebraico, no haciendo la génesis apropiada para mantener al alumno en el ETM_G. Ante la primera pregunta del estudiante, que evoca una ecuación, ella promueve el uso del Álgebra con el objeto de plantear una ecuación cada vez que tiene un segmento desconocido. Esto evidencia el cambio en el *espacio de trabajo* y así la tarea geométrica es una excusa para pasar a las ecuaciones, como si fuese una "geometría aritmetizada" perdiendo el horizonte la tarea geométrica en sí. A continuación mostramos cuándo PD1 cambia el problema de proporcionalidad a uno de solución de una ecuación (de ETM_G a ETM_A).

[PD1]: "*Claro, sí, porque a lo mejor no solo lo podemos hacer para el caso de la pirámide, o sea, de ahí nació el teorema. Pero, por ejemplo, yo podría saber cuánto mide un edificio y quiero saber cuánto mide la sombra que proyecta ese edificio, o la sombra que proyecta un árbol, entonces vamos a ver más ejercicios de aplicación, porque además no solo se aplica el teorema de Tales para el triángulo. Lo vamos a ver también para cuando las rectas son paralelas, cuando hay dos rectas secantes. Pero la idea es que entiendan que el teorema de Tales tiene que ver con lados proporcionales, entonces eso es lo que nosotros vamos a ir buscando, cuáles son los lados proporcionales".*

[A2]: (A PD1). *"Con el uno supongo que se verifica; con el 3, ¿qué se hace?".*

[PD1]: "*En el caso, por ejemplo, de que fuera un 3, me diera 3x, estaría multiplicando, ¿cómo pasaría para despejar la ecuación?*".

[A2]: "*Dividiendo, pero profe, quedaría x, el x siempre tiene que quedar solo…*"

[PD1]: "*Claro, porque lo que queremos saber es la incógnita".*

Se observa que PD1 tiene un discurso frente al teorema de Tales que no activa. Más precisamente, PD1 no activa la génesis discursiva, y la hipótesis del teorema queda relegada al dibujo (a lo icónico): habla de lados proporcionales pero se centra en plantear la ecuación y despejar la "x", sobre todo en ejemplos en los cuales bastaba usar la proporcionalidad para determinar el trazo desconocido y la ecuación no era necesaria. PD1 activa la génesis instrumental, sin embargo postulamos que, a pesar de que la ecuación sea un artefacto simbólico en el dominio de la Geometría, al no ser aquella instrumentalizada geométricamente,

2 Una figura de tres dimensiones es trabajada en dos dimensiones (Duval, 2005).

3 Es decir: 1, representamen; 2, artefactos; 3 referencial; A, visualización; B, construcción; C, prueba.

ocurre que la tarea inicial cambia de dominio y de ese modo no se desarrolla ni se explota el ETM apropiado.

En términos globales, en la clase de PD1 se observa una circulación (A-1-2-B) en el ETM activada por las génesis instrumental y semiótica, pero no obtiene un desarrollo del dominio de la Geometría dado que su centro de interés es resolver ecuaciones.

5.2. *Figuras geométricas prototípicas y la algebrización de la Geometría*

En los textos escolares chilenos, en las clases y en las evaluaciones de medición a la calidad de la educación (nacional) se usan figuras prototípicas asociadas a teoremas clásicos. Por ejemplo, la que aparece en la Figura 1 (que aparece más abajo) es una de ellas.

Es interesante notar que tanto la expresión "teorema de Tales" como la figura prototípica de este y la ecuación correspondiente funcionan como *representámenes* del teorema, y se requiere de una articulación de las tres génesis para su comprensión correcta en el ETM_G. A partir de los trabajos de Duval, es natural pensar que la figura prototípica funciona como ícono, más aun si la tarea se algebriza y la génesis discursiva es bloqueada por esto último.

Con el objeto de entender mejor lo que venían sugiriendo los videos de aulas, se realizó un estudio adicional con la ayuda de un tesista (Merino, 2012). Este estudio da cuenta de un aspecto del ETM personal de veinte estudiantes entre 16 y 18 años que han sido sometidos a un proceso de enseñanza como el que evidenciaban los PD.

Se presentó el dibujo de un triángulo isósceles *ABC*, de base *AB*. El triángulo incluye un segmento *DE*, donde *D* está sobre *AC* y *E* sobre *BC*, el cual es visual y claramente no paralelo a la base. Se dan las medidas de *AD*, *DC* y *AB*, y se pregunta si es posible determinar la longitud del trazo *EH*, donde *H* es el punto de intersección de *DE* con la altura del triángulo (trazada desde *C*).

Ante el problema, el 60% de los estudiantes procedió a calcular los valores de los segmentos con los valores asignados a los trazos en el dibujo, utilizando el teorema de Tales. Los restantes señalan que falta tener información adicional; de estos, sólo el 30% afirma que lo que falta es una condición: el paralelismo. La tarea fue planificada de tal forma que no siendo una actividad típica evidenciara lo que estábamos suponiendo que ocurriría, esto es, que los estudiantes visualizarían la figura prototípica y las correspondientes propiedades como un todo, sin verificar sus diferentes aspectos –como en el caso antes descrito, en el cual la hipótesis de paralelismo del teorema no está presente para un gran porcentaje de los estudiantes–.

5.3. *Sistema de ecuaciones*

PD2 aborda el problema de resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. El caso es aparentemente inverso al anterior, ya que, a pesar de que la institución sugiere resolver estos sistemas en forma geométrica, cambia de dominio. PD2 resuelve el sistema en la forma en que estos sistemas son tratados en textos escolares oficiales, pero no advierte que realiza una generalización inapropiada, que veremos a continuación.

El espacio de trabajo de PD2 tiene una fuerte vinculación entre las componentes visualización y artefacto. La clase se inicia (primer episodio) explicando qué es la solución de un sistema de ecuaciones lineales escritas en lenguaje simbólico vía sustitución de las ecuaciones y verificación de la igualdad numérica. Pero el centro de la clase consiste en determinar dicha solución, mediante el "método gráfico", i. e., solucionar el sistema con un tratamiento netamente geométrico: dibujar las gráficas de las ecuaciones involucradas, analizar si existen o no soluciones, dependiendo de la intersección eventual de las gráficas (Figura 1).

A continuación, el extracto de cuando PD2 busca la solución con el método geométrico:

[PD2]: (A los estudiantes). "*¿Cuál es el procedimiento? Lo primero que debemos hacer para encontrar las soluciones es graficar las ecuaciones. Paso número uno, entonces, graficar. Lo que vamos a trabajar ahora son solamente con rectas. Eso es lo que hemos visto hasta el momento, así que vamos a graficar solamente rectas. Después, con el paso del tiempo, vamos a ir avanzando en otras funciones. Paso número uno entonces, graficar cada recta en el plano cartesiano".*

[PD2]: "*Y una vez que ya tenemos graficadas las rectas hallamos el punto donde se intersectan las rectas. Hallamos el punto de intersección de las rectas".*

[A4]: (A PD2). *"¿Viene otro paso?*"

[PD2]: "*Es que no hay más pasos*"

[A3]: "*¿Eso era todo?"*

[PD2]: "*Sí, eso es todo. Recuerden que gráficamente era encontrar el punto de intersección y será la solución a ambas ecuaciones".*

Con esta tarea y su proceder, PD2 articula los componentes visualización y artefacto para llegar al referencial del ETM_G. Cabe destacar, a nivel de artefacto, que para esta actividad los estudiantes debían trabajar con una hoja de papel milimetrado, lo que sugiere precisión en la escala de los ejes, y por ende en la solución del sistema.

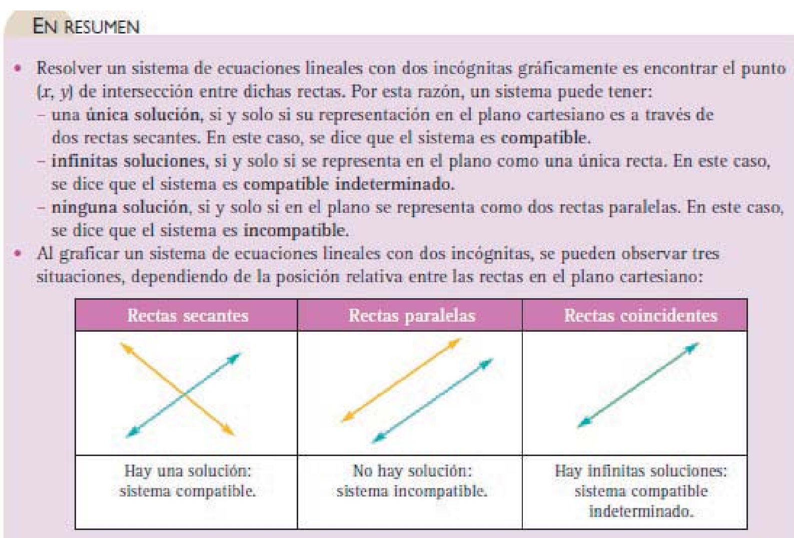
[PD2]: (A los alumnos). *"Aún no vamos a usar la hoja milimetrada, así que saquen cuadernos, lápices y presten atención".*

A continuación, la profesora muestra una presentación similar a la de la Figura 1 con la intención de explicar el método, y finaliza como sigue:

[PD2]: (A los alumnos). *"Atención, es importante. Este método no es siempre útil totalmente porque a veces nos vamos a encontrar que el punto de intersección va a ser súper difícil de determinar y no se va a ver claramente en algunos casos".*

[PD2]: *"Al graficar un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas se pueden observar tres casos. Lo importante es que sepan que, cuando graficamos rectas, ocurren tres casos. Puede ocurrir que las rectas sean secantes, o sea, se corten en un punto, sean paralelas o que coincidan las dos".*

Lo anterior es presentado en textos (Cf. Figura 1), en los cuales hay observaciones más explícitas del dominio o pertinencia del método geométrico aludido, es decir, se indica expresamente que es un método para algunos casos y que por ello se requiere de otros que posteriormente se desarrollan.



EN RESUMEN

- Resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas gráficamente es encontrar el punto (x, y) de intersección entre dichas rectas. Por esta razón, un sistema puede tener:
  - una **única solución**, si y solo si su representación en el plano cartesiano es a través de dos rectas secantes. En este caso, se dice que el sistema es **compatible**.
  - **infinitas soluciones**, si y solo si se representa en el plano como una única recta. En este caso, se dice que el sistema es **compatible indeterminado**.
  - **ninguna solución**, si y solo si en el plano se representa como dos rectas paralelas. En este caso, se dice que el sistema es **incompatible**.
- Al graficar un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, se pueden observar tres situaciones, dependiendo de la posición relativa entre las rectas en el plano cartesiano:

Rectas secantes	Rectas paralelas	Rectas coincidentes
Hay una solución: sistema compatible.	No hay solución: sistema incompatible.	Hay infinitas soluciones: sistema compatible indeterminado.

Figura 1: Presentación habitual en un texto escolar Segundo Medio

Es claro que resolver el sistema es una tarea algebraica y que recurrir a la solución geométrica es un proceso de visualización de esta tarea. Así, la génesis semiótica corresponde a ETM_A y no a una génesis figural en ETM_G. Los puntos (íconos geométricos) no son solución del sistema sino que corresponden a una aproximación, y la existencia de las soluciones depende del sistema numérico en que están planteadas las ecuaciones. Como vemos, una vez finalizado el tratamiento gráfico y el proceso de visualización, el estudiante puede determinar la viabilidad de la solución. Es decir, se produce circulación (o *proceso*) en el ETM_A entre las génesis instrumental y semiótica, pero no la hay en la génesis discursiva, ni de las otras con esta última. Por lo tanto, el trabajo permanece en el plano vertical "proceso de descubrimiento" del ETM_A, pero no se activa el proceso de validación (ver Figura 4 de Kuzniak y Richard, 2014, en este *Número Especial*), tanto en el ETM_A como el ETM_G. (Para activar la génesis discursiva en el ETM_G, por ejemplo, habría sido conveniente incluir algún tipo de argumentación geométrica a partir de las situaciones representadas en la Figura 1).

En el primer párrafo de la transcripción, PD2 no realiza la génesis semiótica apropiada en Álgebra, ya que confunde el punto como ícono geométrico con el par ordenado que aproxima a la solución. Así, el método geométrico quedó a nivel de artefacto que no fue instrumentalizado.

6 Conclusiones

La teoría ETM ha mostrado ser una herramienta útil para analizar con categorías fecundas diversos procesos que subyacen a los aprendizajes y al proceso de transposición; en particular, es conveniente para poner atención en la articulación de los 'paradigmas' (*sensu lato*) sobre los cuales se basa la formación disciplinaria de un profesor y los que pone en juego en su enseñanza.

Respecto de la utilización del Álgebra en otros dominios, las evidencias mostradas (y otras) podrían tal vez ser consideradas como fundamento de la hipótesis de que aquello no debería ocurrir, y la de que habría que evitar la *algebrización*. Ahora bien, sabido es el rol importante rol que ha cumplido el Álgebra en el desarrollo de la Matemática, y ello no solo como herramienta de cálculo sino también como modelo a seguir (Mena-Lorca, Mena-Lorca, Morales & Montoya, 2012). Dado que ese rol no ha variado substantivamente, es importante incluir cuando corresponde el recurso al registro algebraico, etc. La cuestión al respecto, nos parece, es cómo hacer lo anterior de modo que no bloquee las génesis.

Además, hemos mostrado que sería deseable que los profesores articularan (intencionadamente) el plano epistemológico con el plano cognitivo, de manera de promover la construcción de un ETM adecuado en sus alumnos.

Los casos presentados aquí muestran claramente que ninguno de los procesos anteriores se lleva a cabo en los profesores debutantes estudiados. La formación inicial de los profesores debería poner atención explícita y especial a esta materia; nos parece, además, que el estudio aquí presentado entrega elementos adicionales para incorporar a esa formación.

Agregamos, a continuación, algunas conclusiones que pueden servir de guía para tener buen éxito en la construcción correspondiente.

Para ello, es necesario comprender los mecanismos y los procesos por los cuales son concebidos los artefactos, materiales o simbólicos, para proporcionar ayuda real al *geómetra* (o *algebrista*…). Además, se deben analizar y comprender los significados en sus dominios matemáticos. Así, el rol del profesor es fundamental para que potencie un trabajo geométrico del estudiante y no uno que se reduzca a "algebrización", y para explicitar el ETM que se desea desarrollar. (Evidencias con otro PD muestran que en la enseñanza de la Probabilidades ocurre un problema similar al que hemos comprobado en la Geometría, la diferencia es que la validación aparente va por un proceso de experimentación, pero realmente queda a nivel de "comprobación de fórmula" previamente presentada por el profesor debutante).

6.1. *Génesis instrumental: un cambio de espacio de trabajo*

En los casos de PD1 y PD2, las tareas por ellos propuestas fueron abordadas con un artefacto simbólico, el cual no tuvo la génesis apropiada para apoyar el espacio de trabajo matemático original, lo que redunda en ineficiencia en el uso de ese artefacto a pesar de su potencialidad; es decir, si las génesis del ETM no se articulan apropiadamente en el dominio asociado a la tarea, pueden generar que se cambie de dominio debido a que el artefacto no se ha instrumentalizado –y no se puede esperar que el estudiante enriquezca el instrumento vía la componente referencial–. En algunos casos, este cambio de dominio puede ser sin retorno; con esto, el espacio de trabajo personal no se desarrolla en toda su dimensión.

6.2. *Génesis semiótica: el representamen*

Análogamente a lo anterior, tenemos que el representamen depende del dominio que se desea desarrollar y de la apropiada génesis semiótica. En el caso de PD2, la visualización de un punto en un dominio algebraico o geométrico difiere de acuerdo a la génesis semiótica del espacio de trabajo. En Montoya (2010) ya se había evidenciado que la inapropiada génesis discursiva generaba dificultades en sus utilizadores.

Por otra parte, el profesor debutante potencia figuras prototípicas que confunden o al menos generan obstáculos didácticos; el problema se origina cuando las representaciones tratadas desde un punto de vista gráfico no intencionan la circulación por el referencial. Una apropiada circulación entre las génesis en sus dominios específicos y claridad respecto del paradigma que se está desarrollando potencian el ETM personal. Una forma de activar la génesis discursiva o de mantenerse en ámbito geométrico podría ser a través del manejo semántico de las expresiones en los teoremas clásicos; por ejemplo, respecto del teorema de Tales, leer las proporciones que se generan, y hacer lo mismo cuando se plantea la ecuación que es utilizada para determinar uno de ellos. No proponemos, por cierto, que no se utilicen las ecuaciones; la idea es no plantear la ecuación y luego simplemente reemplazar "los números" de los trazos conocidos y usar la incógnita x, sino que la ecuación arrastre los significados en el lenguaje y la notación, y así las fracciones sean un modelo de la proporción que arroja el teorema.

La evidencia de 5.3 muestra que los estudiantes visualizaron y usaron el mecanismo de iconicidad (del paralelismo, por ejemplo), y con base en ello realizaron sus producciones. En general, su *referencial* es débil, dado que no considera hipótesis requeridas para que se cumpla una determinada propiedad.

6.3. *La génesis discursiva*

El marco teórico ETM acoge las ideas semióticas de Duval (2005) y, en particular, el mecanismo de iconicidad, mediante la génesis semiótica, pero especifica además otras génesis: la instrumental y la discursiva. Nuestro estudio confirma la evidencia de que el proceso de visualización es fundamental en determinadas tareas matemáticas (Duval, 2005), pero muestra además que una determinada génesis puede estar complicando (u obstaculizando) la construcción del objeto matemático. Una génesis semiótica "defectuosa" redunda en que se utilicen argumentos incompletos por falta o bloqueo de la génesis discursiva, creándose así un paradigma en que la génesis discursiva no existe o se reduce a que el proceso algebraico fue bien hecho.

6.4. *La transposición y el currículo*

Como queda dicho, los planos cognitivo y epistemológico del ETM se pueden relacionar y articular apropiadamente para generar circulaciones en el ETM, de modo de activar las génesis y con ello desarrollar el dominio bajo estudio y generar un ETM personal apropiado en el alumno. Sería de esperar, por tanto, que la enseñanza organizara el conocimiento de modo que el proceso de transposición activara aquellas génesis. Al respecto, habría que tener especial cuidado en activar la génesis discursiva. Es inmediato entonces que, por tanto, la transposición de esta debe ser un tema en la formación inicial y continua.

Nuestro estudio de profesores debutantes muestra, sin embargo, evidencias en contrario. Por una parte, el recurso habitual a la *algebrización* de un problema geométrico puede impedir que los alumnos instrumentalicen recursos propiamente geométricos y con ello obstruir la génesis discursiva. La dirección contraria, esto es, el recurso a la geometría ante una situación algebraica, corre por su parte el riesgo de reducirse a una visualización icónica; en tal caso, puede que la situación algebraica no se enlace con la herramienta (Douady, 1986) geométrica, lo que obstaculiza la formación de un ETM apropiado en los alumnos, o que la pregnancia del ícono obstaculice una génesis discursiva correcta.

La consecuencia inmediata de lo anterior es que, en el caso de los profesores estudiados, el proceso de transposición aparta o incluso impide un funcionamiento apropiado del ETM y por tanto se obstaculiza la construcción del conocimiento matemático deseado.

De allí nuestro convencimiento de que las instituciones formadoras podrían beneficiarse grandemente de la inclusión de la teoría de Espacio de Trabajo Matemático en sus currículos.

Reconocimiento

Este trabajo ha sido financiado parcialmente a través del Proyecto de investigación del Fondo Nacional Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT) 1110988, Chile.

Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The Genesis of a Reflection about instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245-274.

Chevallard Y. (1985). *La transposition Didactique :* du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-31.

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de l'Apprentissage de la Géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5-53.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1996). Autours des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16*(3), 289-321.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 175-193.

Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Note pour l'habilitation à diriger des recherches. Paris, France: IREM de Paris.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. (Este *Número Especial*).

Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J., Morales, A. & Montoya-Delgadillo, E. (2012). Acerca de la noción de espacio de trabajo algebraico. Tercer Simposio Espacio de Trabajo Matemático, Universidad de Montreal, Canadá, 23 al 26 de noviembre.

Merino, R. (2012). *Estudio de la articulación entre visualización y razonamiento.* (Trabajo Final Magíster en Didáctica de la Matemática no publicado). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Montoya Delgadillo, E. (2010). *Étude de la transformation des connaissances géométriques dans la formation universitaire des professeurs de lycée de mathématiques au Chili*. (Tesis doctoral no publicada). Université Denis Diderot, París, Francia.

Peirce, C. (1978). *Ecrits sur le signe.* Paris, France: Seuil.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris, France: Armand Colin.

Trouche, L. (2002). Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique. En D. Guin et L. Trouche (Eds.). *Calculatrices Symboliques. Transformer un outil du travail informatique : un problème didactique* (pp.187-214). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Autores

Elizabeth Montoya-Delgadillo
IMA, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile (PUCV).
emontoya@ucv.cl

Arturo Mena-Lorca
CIAE-IMA, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile (PUCV).
arturo.mena@ucv.cl

Jaime Mena-Lorca
IMA, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile (PUCV).
jmena@ucv.cl