Astrid Morales Soto, Francisco Cordero Osorio

LA GRAFICACIÓN - MODELACIÓN Y LA SERIE DE TAYLOR. UNA SOCIOEPISTEMOLOGÍA DEL CÁLCULO

The modelling - use of graphs, and the Taylor Series. A socioepistemology of Calculus

RESUMEN

En este artículo presentamos los resultados de una investigación acerca de la resignificación de la Serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento (SM-M). De acuerdo con la perspectiva epistemológica, el discurso matemático escolar habitual no toma en cuenta el aspecto funcional de la Serie de Taylor. A la luz de los trabajos de Newton, esta perspectiva destaca el papel de la predicción como práctica que va conformando la Serie de Taylor. Los ejes principales de la situación son la predicción y el binomio graficación-modelación, en cuanto prácticas sociales. Estos articulados generan conocimiento y resignifican la Serie de Taylor.

PALABRAS CLAVE:

- *Resignificación*
- *Serie de Taylor*
- *Modelación*
- *Graficación*
- *Predicción*

ABSTRACT

This article shows the research results on the Taylor series' resignification of the movement modeling situation (M-MS). From an epistemological perspective, the usual mathematical discourse does not take into consideration the functional aspect of the Taylor Series. In the wake of Newton's work, this perspective points out how prediction forms the Taylor series. The main axes are prediction and binomial modelling-use of graphs when it comes to a social practice environment. These are the ones that build knowledge and resignificate the Taylor series.

KEY WORDS:

- *Resignification*
- *Taylor Series*
- *Modelling*
- *Use of graphs*
- *Prediction*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2014) *17* (3): 319-345.
Recepción: Diciembre 17, 2011 / Aceptación: Febrero 10, 2013. DOI: 10.12802/relime.13.1733

RESUMO

Neste artigo, apresentamos os resultados de uma pesquisa sobre a ressignificação da Série de Taylor em uma situação de modelação do movimento (SM-M). De acordo com a perspectiva epistemológica, o discurso matemático escolar habitual não leva em consideração o aspecto funcional da Série de Taylor. À luz dos trabalhos de Newton, esta perspectiva destaca o papel da predição como prática que vai formando a Série de Taylor. Os eixos principais da situação são a predição e o binômio graficação - modelação, no tocante a práticas sociais. Esses articulados geram conhecimento e ressignificam a Série de Taylor.

PALAVRAS CHAVE:

- *Ressignificação*
- *Série de Taylor*
- *Modelação*
- *Graficação*
- *Predição*

RÉSUMÉ

Dans cet article nous présentons les résultats d'une recherche sur la resignification de la Série de Taylor dans une situation de modélisation du mouvement (SM-M). D'après la perspective épistémologique, le discours mathématique scolaire traditionnel ne prend pas en compte l'aspect fonctionnel de la série de Taylor. Sur la base des travaux de Newton, cette perspective met en relief le rôle de la prédilection comme pratique sociale conformant la série de Taylor. Les lignes principales de la situation, comme pratiques sociales, sont la prédilection et le binôme «utilisation graphique - modélisation». Ces éléments articulés produisent des connaissances et resignifient la série de Taylor.

MOTS CLÉS:

- *Resignification*
- *Série de Taylor*
- *Modélisation*
- *Utilisation graphique*
- *Prédilection*

1. Introducción

La problemática fundamental que atiende la Matemática Educativa es la confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar. Para entender la naturaleza de esa confrontación, la aproximación socioepistemológica desarrolla estrategias de investigación orientadas a formular epistemologías que analicen las circunstancias que favorecen la construcción social del conocimiento matemático. Se fundamentan en prácticas sociales, en contraposición de metáforas del objeto matemático. Se busca que las prácticas sociales favorezcan el establecimiento de relaciones funcionales, alejadas del utilitarismo, entre los diversos tópicos del saber matemático (Cordero, 2006). Con esta visión, la socioepistemología ha ayudado a entender que la matemática escolar no tiene marcos de referencia para que la matemática se resignifique. Nuestra investigación consiste en resignificar la Serie de Taylor (ST) a través de una situación de modelación del movimiento (SM-M) con la teoría Socioespitemológica. Se formula una epistemología basada en la práctica social de la predicción, la cual tiene un rol de argumento rector en el diseño de situación que se confeccionó, de esta manera se pone en juego la graficación-modelación en la SM-M donde se resignifica la Serie de Taylor. La analiticidad de las funciones está expresada en la ST cuando se generan procedimientos para comparar dos estados de una cantidad que varía continuamente, según las experiencias institucionales de los participantes. La SM-M genera una categoría de 'uso de las gráficas' propio de la modelación escolar, la cual norma la resignificación de la ST. De esta manera, se provee un marco de referencia ausente en la matemática escolar. Esto significa, como lo explicaremos más adelante, que el uso de las gráficas, a través de su funcionamiento y forma, robustecen la problemática de enseñanza aprendizaje y da indicadores para el rediseño del discurso del Cálculo escolar.

La puesta en escena del diseño de situación se realizó utilizando aspectos metodológicos de la ingeniería didáctica y con estudiantes de matemáticas de nivel superior.

A continuación, describiremos el problema que esta investigación abordó como también la aproximación teórica que la cobija. Al final del escrito presentaremos ejemplos de algunas producciones de los participantes para precisar los resultados de la investigación.

2. Problema de investigación

2.1. *Antecedentes*

Existen muchas investigaciones que se inscriben en la dificultades de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular del Cálculo, por ejemplo, Artigue (1995) señala *"...estos estudios también muestran de manera clara que, frente a las dificultades encontradas, la enseñanza tradicional y en particular la enseñanza universitaria, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en esencia las competencias adquiridas de* *este dominio...”* (p.97). Por otro lado Dreyfus (1990) señala que los estudiantes aprenden los procedimientos del Cálculo (encontrar límites, diferenciación, etc.) en un nivel puramente algorítmico, construidos sobre imágenes conceptuales escasas. Las dificultades en la concepción de los procesos de diferenciación e integración pueden explicarse en términos de que los estudiantes carecen, necesariamente, de un nivel alto de abstracción, tanto del concepto de función (como un objeto), como de los procesos de aproximación.

Por otro lado, trasladando nuestra atención de la enseñanza del Cálculo en un ambiente de aula, podemos decir que nuestro sistema didáctico opera más o menos de la siguiente manera: la enseñanza tiene asignado un papel formativo puramente teórico, en el que los profesores tienen una “metodología” para ofrecer clases magistrales donde el alumno es considerado como sujeto pasivo que asimila ideas de forma natural mediante el estudio de apuntes de clases y textos escolares (Marcolini & Perales, 2005).

Estudios socioepistemológicos con relación al Cálculo han dado evidencia de que, por un lado, la enseñanza tradicional del Cálculo se basa en la transmisión de conocimientos, dando énfasis al desarrollo de habilidades algebraicas y algorítmicas y desatendiendo la comprensión de ideas, nociones y conceptos así como la articulación de estos (Alanis, 1996; Alanís, Salinas, Pulido, Santos, Escobedo & Garza, 2003). Por el otro, podemos observar que en los planes de estudio de las carreras universitarias, los programas curriculares de matemáticas tienen un carácter instrumental, en el sentido de que hacen que la matemática sea un medio para lograr los objetivos. Esto nos lleva a cuestionar cuál es el estatus real que tiene el Cálculo y cuál es su discurso escolar actual.

2.2. *Problemática*

El discurso matemático escolar[1] (dME) maneja los contenidos de manera separada y carentes de interacción, lo que provoca que el proceso de adquisición del conocimiento se logre de manera particionada (Morales, 2009); es por esto que para lograr nuestro propósito se deberán buscar mecanismos que vinculen los contenidos, los cuales serán elementos de los marcos de referencia para resignificar el conocimiento en una situación específica, en nuestro caso la Serie de Taylor. La fuente de esos elementos son las prácticas sociales generadoras del conocimiento matemático, cuya finalidad es la de rediseñar el discurso matemático escolar (Cordero, 2008). Este rediseño expresará la funcionalidad del conocimiento matemático.

1 El discurso matemático escolar es la manifestación del conocimiento matemático normado por creencias de los actores del sistema didáctico sobre qué es la enseñanza y la matemática.

En este sentido, la problemática trata la resignificación de la Serie de Taylor (ST) en una situación de modelación del movimiento (SM-M), donde la resignificación es la construcción del conocimiento mismo en la organización normado por lo institucional; es decir, es el uso del conocimiento en una situación específica donde se debate entre su funcionamiento y forma acorde con lo que organizan los participantes. La resignificación está articulada con los aspectos funcionales y del uso del conocimiento en cuestión. En consecuencia, se debe elaborar una epistemología que analice las circunstancias que favorecen la construcción social del conocimiento matemático. En este caso, los elementos que entran en juego en la epistemología son la predicción, la graficación-modelación y el movimiento; todos estos deben estar articulados. Una de las formas en que podemos apreciar su articulación es en la SM-M, ahí se someten los participantes a ciertas actividades donde se utiliza tecnología para identificar las gráficas como movimientos.

La SM-M es un escenario de variación, en donde se rescata el aspecto funcional de la ST y en donde el argumento de predicción se manifiesta en la graficación-modelación (G-M)[2]. La ST es en sí el modelo de predicción. En otras palabras, la resignificación consiste en que la ST precisa la simultaneidad de las derivadas, cuya función es la predicción.

La formulación de la SM-M conllevó la categoría de "uso de las gráficas", un constructo teórico de la socioepistemología que se ha venido fortaleciendo con las investigaciones (Cordero & Flores, 2007; Cordero, Cen & Suárez, 2010). Más adelante ahondamos al respecto.

2.3. *Una mirada a la enseñanza del Cálculo desde la Socioepistemología y el estatus de la Serie de Taylor en el discurso matemático escolar*

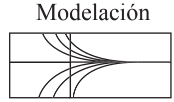
Haciendo referencia a la visión socioepistemológica, un aspecto de la investigación se ha enfocado en precisar que la manera como se han tratado las materias del Cálculo no permite dar cuenta que la analiticidad de las funciones es el objeto principal del Cálculo debido a que el discurso matemático escolar está basado en la idea de aproximación. Cantoral (2001) abre una ruta al respecto, formula una epistemología a la luz de los trabajos de Newton, la cual destaca una evolución de la predicción como una práctica que va conformando la ST. Cordero (2001; 2008) recapitula los trabajos socioepistemológicos en esa dirección y plantea la necesidad de hacer una síntesis para configurar un programa (en el sentido de

[2] El trabajo de Suárez, L. (2008) muestra que el binomio graficación-modelación (G-M) tiene el estatus de categoría en la Socioepistemología. Entendemos como categoría aquella articulación entre el uso del conocimiento matemático, su funcionalidad y resignificación.

Lakatos) que dé cuenta de diversas formas de construir el Cálculo, que se llamó "socioepistemología del Cálculo y Análisis". Para lograr un mejor entendimiento al respecto, reinterpretamos la síntesis en una tabla (ver Tabla I) como un marco de referencia visual (Morales, 2009) ver Tabla I. Se exhiben tres situaciones llamadas variación, transformación y aproximación, con cuatro elementos de construcción que componen la estructura de las situaciones: significados, procedimientos, proceso-objeto y argumentación. Cada una de éstas formula una epistemología del Cálculo, y a su vez, también en conjunto.

Es de nuestro interés señalar que la tercera situación (cuarta columna) alude a una de las maneras ordinarias de tratar los temas del cálculo, donde se le concibe como una situación de aproximación: es allí donde se expresa el discurso del cálculo escolar habitual. Varias investigaciones, en el seno de la socioepistemología, sostienen que esta manera de tratar los temas de cálculo no están generando conocimiento y más aún, no se concibe a la Serie de Taylor como un tema relevante, es decir, a pesar de enfatizar cada uno de los conceptos matemáticos en cuestión no se llega a formular la analiticidad (Cantoral, 2001; Cordero, 2001, 2008; Alanís, 1996).

TABLA I
Socioepistemología del Cálculo

CONSTRUCCIONES EN LAS PRACTICAS	SITUACIÓN DE VARIACIÓN	SITUACIÓN DE TRANSFORMACIÓN	SITUACIÓN DE APROXIMACIÓN
Significados	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos Comportamiento tendencial de la función	Límite Derivación Integración Convergencia
Procedimientos	Comparación de dos estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha=f'(x)$	Variación de parámetros $y=Af(Bx+C)+D$	Límite de un cociente $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$
Proceso-Objeto	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Función
Argumentación	Predicción $E_0+\text{var}\textit{iación}=E_f$	Graficación – Modelación 	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{f''(x)h^2}{2!}+\ldots$

Cordero (2008) plantea que el estatus del cálculo escolar predominantemente es concebido como la rama de la matemática que trata con la diferenciación y la integración, es por eso que los programas de las materias tienen una estructura relacionada con los conceptos de función, límite, derivada, integral y convergencia, donde además predominan las operaciones con relación a la definición de la derivada como el límite de un “cociente” y a la definición de la integral como el límite de una ‘”suma”. Con esta mirada el concepto de función es el núcleo del Cálculo.

Todo esto genera un discurso del cálculo escolar que no ayuda a apreciar la epistemología de la analiticidad de las funciones, inclusive pudiera ser ignorada en los cursos de cálculo. El efecto que provoca ese discurso es la centración en el concepto de función, el cual privilegia ciertos procedimientos e ignora otros. Por ejemplo, hallar la recta tangente que pasa por un punto de una curva, cuyo procedimiento requiere de calcular el límite de cierto cociente a través de argumentaciones de aproximación. Explícitamente, lo que se requiere para esta situación es una función f dada, un punto específico $(x_0, f(x_0))$ para calcular la derivada o encontrar la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto dado. Con estas herramientas se trabaja y se elaboran estrategias de preguntas para el alumno. Pero, no obstante, con esa manera de proceder lo que se pierde es la comparación de dos estados de una cantidad de variación continua, de la forma $f(x+h)-f(x)$ con argumentación de predicción expresadas por la analiticidad. $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)h^2}{2!}+\ldots$ Para poder trabajar de esa manera se requiere de significados para predecir la posición de un móvil cuando se conoce su posición inicial y su variación en ese instante. En esta situación la función f no se conoce pero lo que sí se conoce son los estados de la cantidad $f(x)$ y $f(x+h)$ y las variaciones $f'(x), f''(x), \ldots$

El hecho anterior cuestiona el estatus de la Serie de Taylor (ST) en la matemática escolar. Es un concepto menos conocido del resto de otros conceptos que usualmente aparecen en los textos del Cálculo. Es posible tratar la derivada y sus n-ésimas derivadas y no necesariamente hablar de la ST. En todo caso, la ST es destacada para atender aspectos propios de convergencia, es por ello que las materias tratadas en la enseñanza actual y que anteceden a la ST son los teoremas de continuidad, teoremas de los valores medios y los criterios de convergencia de series numéricas. Tal estatus sugiere que la Serie de Taylor no es elemental, que pertenece a cierta matemática avanzada que tiene como objetivo profundizar en los procesos de convergencia de las series infinitas, acompañado de sus métodos algebraicos. Hay investigaciones que han dado evidencias al respecto, ver por ejemplo, Cantoral (1995), Cordero (2008), Hernández (2006), Alanís (1996).

La ST en el discurso matemático escolar restringe otras epistemologías; si bien es cierto que tratarla como un polinomio infinito que se aproxima a una curva en la vecindad de un punto potencializa a la serie misma, esto obscurece la situación de variación que subyace a la ST.

En los textos de Cálculo ordinarios de acuerdo con Morales (2009), en el tema de la ST, los ejercicios y el discurso en general tienen un tratamiento *algorítmico* debido a que siempre la función y un punto son dados; entonces se pide calcular el polinomio y la serie de Taylor. Muchos son los ejercicios con esta dinámica, pero no se aborda con claridad la densidad de las funciones polinomiales en un dominio específico con relación a los espacios de funciones continuas, infinitamente diferenciable o analíticas en el mismo dominio (ver por ejemplo Granville 1980). Un tratamiento utilitario de la ST se observa en el caso de las ecuaciones diferenciales, ya que se parte del hecho de que la función es analítica y se ocupa a la ST como herramienta (encuentran los a_n). Nuevamente, queda en el aire lo del dominio y no se atiende la densidad. Estos aspectos no son tratados sino hasta el ámbito de las series: se trabaja dominio, convergencia, radio de convergencia, acercamiento y densidad. Pero el modo en que se abordan estos aspectos en las series está desconectado de la esencia de la ST, la analiticidad.

Ahora bien, la socioepistemología descentraliza al objeto matemático en cuestión y enfoca la atención en aquello que norma su construcción. Es el caso de la práctica de predecir lo que conlleva preguntarse acerca de la funcionalidad de la ST.

2.4. *La funcionalidad de la Serie de Taylor*

Con la epistemología que conlleva la SM-M se destacaron dos caminos: el primero, orientado a rehabilitar la Serie de Taylor en una concepción funcional donde el objeto de estudio es el movimiento (en ese sentido se abandona la centración de la Serie de Taylor como objeto matemático); el segundo, orientado a plantear una situación no común en el discurso matemático escolar, lo que propicia la funcionalidad del conocimiento matemático y se reconoce como un marco de referencia para resignificar la Serie de Taylor, generando contextos argumentativos.

Para tal fin, se diseñó una situación que formula una epistemología que relaciona tres argumentaciones: la predicción, la graficación y la analiticidad (Cordero, 2001, 2006). Ésta consiste en que se pueden deducir comportamientos de la función no conocida a pesar de que no se conoce la función pero sí los datos iniciales $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$. Así la graficación-modelación toma importancia real debido a que se puede apreciar la simultaneidad de las derivadas a través de una gráfica. La idea fundamental de la situación es romper con la visión ordinaria de las n-esimas derivadas, la cual es tratada como una iteración de derivadas. Es así que los elementos que se ponen en juego en cada uno de los tres momentos del diseño de situación que resignifican a la ST son la simultaneidad de las derivadas, la modelación-graficación y el modelo de predicción (ver figura 2).

3. Aspectos teóricos y metodológicos

3.1. *Aproximación Teórica*

La Socioepistemología tiene una mirada crítica al discurso matemático escolar, ya que éste tiene una centración en los objetos matemáticos y no en las prácticas sociales. Uno de sus planteamientos consiste en hacer que la matemática escolar sea funcional y deje de ser utilitaria, entendiendo la matemática funcional como un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad, todo ello en oposición al conocimiento utilitario. Es por esto que la situación que se elabora es una resignificación de cierto conocimiento matemático, donde la práctica social identificada pasa a ser el argumento de dicha situación (Cordero, 2008).

A través de la resignificación se ha permitido establecer diferentes categorías de conocimiento matemático que permiten establecer relaciones funcionales entre los diferentes tópicos que integran el saber matemático, una de esas categorías es el binomio graficación - modelación.

Para lograr dicho planteamiento las prácticas sociales son un referente de la construcción del conocimiento matemático. En Cordero (2006) se reporta que cualquier análisis del problema didáctico de las matemáticas en cuestión, dependerá de la concepción del conocimiento que subyace con el planteamiento teórico. La concepción misma enfoca la atención en aspectos del contenido matemático, como por ejemplo los procesos cognitivos que el alumno debe realizar ante algún problema matemático y el papel que juegan las interrelaciones en escenarios socioculturales. Para nosotros este aspecto es importante ya que da luz a nuestra problemática.

El “uso de las gráficas” es un constructo que es determinado por sus componentes llamadas funcionamiento y la forma de la gráfica según la clase de tareas (Cordero & Flores, 2007). Cordero (2008) llama la atención sobre la conveniencia de entender el uso de las gráficas en las prácticas institucionales y para eso se está investigando cuál ha sido y es su “uso” en la obra matemática y en el discurso matemático escolar. El aporte que han hecho estas investigaciones es dar indicadores de dos aspectos básicamente: el primero, para poder desarrollar situaciones didácticas donde la graficación es el argumento y el segundo, para formular epistemologías donde la graficación-modelación es una categoría que genera conocimiento del cálculo. Cordero ofrece evidencias cuya finalidad es ver el funcionamiento y la forma de las gráficas cuando los participantes las usan en una situación específica. Todo esto contribuye a conformar marcos de referencia para resignificar el conocimiento matemático.

Cordero y Flores (2007) realizan un estudio del uso de las gráficas en el discurso matemático escolar (dME), el cual consiste en comprender la graficación en su proceso institucional y no como una representación del concepto de función. En los libros de texto del nivel básico, tanto de primaria como de secundaria, se encontraron varios momentos de uso, los cuales fueron clasificados en comportamientos: de lo numérico, de lo geométrico y de lo variacional. En consecuencia Cordero, Cen y Suárez (2010) formulan un marco de referencia de los usos de las gráficas que generan las prácticas institucionales en el bachillerato. Sus investigaciones muestran que los funcionamientos y formas de las gráficas mantienen una relación dialéctica y se van resignificando para dar lugar a otros funcionamientos y formas gráficas, lo cual expresa el desarrollo del uso de la gráfica en tres aspectos: los métodos de uso de la graficación, las comprensiones de las gráficas y su funcionalidad. Por otro lado, Suarez y Cordero (2010) establecen el concepto de *uso de las gráficas en la modelación,* lo que conllevó plantear una epistemología para la modelación escolar. El sustento se valió de analizar el *Tractatus de Oresme* sobre la *Figuración de las Cualidades*: explica la transformación de uso de las matemáticas de la época para abordar la problemática de las situaciones de cambio y variación, donde lo figural es lo fundamental y no así el concepto de función. Con base a esto, se formula la categoría graficación-modelación compuesta por dos aspectos: los elementos propios de la modelación-graficación (realizaciones múltiples, identificación de parámetros, realización de ajustes, desarrollo del razonamiento) y las argumentaciones conformadas por significados, procedimientos y procesos.

En síntesis, el estatus epistemológico del uso de gráficas puede ser trazada en tres momentos: la gráfica antecede a la función, la gráfica es argumentativa y el uso de las gráficas tiene un desarrollo.

3.2. *Diseño de la Situación. La Modelación del Movimiento*

El diseño de situación tiene como objetivo resignificar la ST, nos ofrece rasgos de su carácter funcional, justo donde la Serie de Taylor deja de ser el objeto de la situación para darle ese lugar al movimiento. El objetivo consistió en formular un marco de referencia intencional para resignificar la ST. El marco pondrá en juego elementos tales como las prácticas y las herramientas, los cuales están insertos en el sistema didáctico y afloran en contextos argumentativos. En particular, el diseño es una situación de variación en la cual se relacionan movimientos específicos con sus gráficas y con aspectos de cinemática, la búsqueda de patrones de comportamientos y las prácticas de predecir y de modelar-graficar.

La epistemología en sí es un modelo de predicción (Cantoral, 2001), es decir, que dado el estado inicial $f(x)$ y la variación entre éste y el estado final $f(x+h)$ se puede determinar este último (ver figura 1).

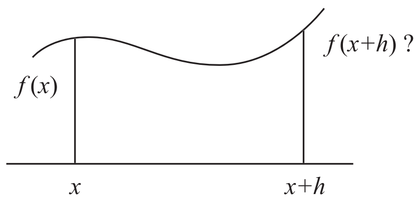


Figura 1. Modelo de predicción

3.3. *Estructura del diseño de situación*

Haremos referencia, a manera general, de lo que trata cada momento y sus actividades en términos de resignificación de la ST, de esta forma contextualizamos los ejemplos que se darán en la siguiente sección.

El diseño consta de tres momentos, en cada uno de ellos está presente el aspecto de variación y descritos en términos de aquellos elementos que resignifican la ST, los cuales se explicaron en la sección 2.

Momento 1

En este momento se examina la *simultaneidad de las derivadas*, destacando la importancia de que éstas aparezcan en la gráfica y no como una iteración de derivadas. Es por ello que las actividades realizadas aquí tienen relación con gráficas y con movimiento. Las tres actividades que se formularon al respecto representan distintos tipos de movimiento a través de gráficas, para este efecto se usaron sensores y calculadoras gráficas.

En la actividad 1 se entregaron tres gráficas que representan el movimiento constante, el uniforme y el uniformemente acelerado; después se pidió que realizaran físicamente los movimientos necesarios para que el sensor dibuje las gráficas entregadas, para lograr de esta manera la relación entre movimiento y gráfica. En la actividad 2 se presentan los mismos tipos de movimientos que en la actividad anterior, pero en cada uno de ellos deberán identificar la curva de entre un conjunto que se propuso y argumentar por qué son de esta manera; así se logró reconocimiento de patrones de movimientos y, a partir de ello, argumentos acerca de qué tipo de curvas van apareciendo al ir variando esos patrones. Para este propósito se dieron ciertas gráficas que representan variaciones. En la actividad 3, dado un enunciado, se pidió analizarlo y luego entregar la representación gráfica que le corresponde, de esta manera se logra la conexión con las dos actividades anteriores y explicaciones del tipo de movimiento que se está reflejando en el enunciado entregado (ver Anexo).

Momento 2

En este momento se examina la *graficación - modelación* a través de tres actividades. El objetivo es resignificar las expresiones analíticas de las ecuaciones de primer y de segundo grado. Para ello, se deberán utilizar diferencias entre 'punto inicial' y 'punto final', la cual da sentido a la función como a sus derivadas primera y segunda con argumentos de variación. Las secuencias se realizan en un ambiente de cinemática.

Las tres actividades fueron las siguientes: en la actividad 1 entregamos un problema de cinemática en que la velocidad es constante y se pidió predecir la posición de un móvil en un tiempo determinado, logrando en esta actividad resignificar la ecuación de la recta, en el sentido de que se pueda interpretar a la pendiente como la velocidad constante y a la intersección con el eje Y como el punto inicial del movimiento.

En la actividad 2 entregamos otro problema de cinemática en que se refleja el movimiento acelerado y se pidió predecir la posición de una partícula en un tiempo determinado, logrando en esta actividad resignificar la ecuación de segundo grado, en el sentido de que la aceleración juega un rol en dicha ecuación, tanto como la velocidad constante y el punto inicial.

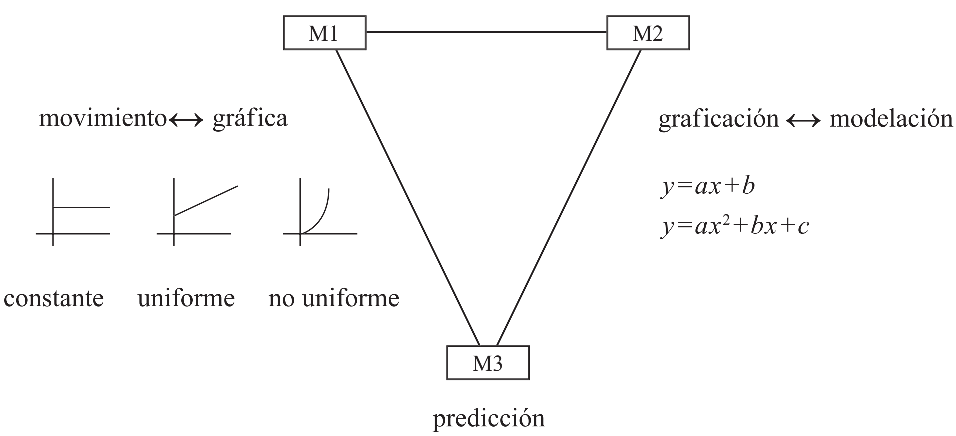
En la actividad 3 se da una función que representa el movimiento de un móvil, se pidió predecir su posición, si acaso se acerca o aleja del observador, su velocidad, su aceleración en un tiempo determinado, etc. y luego comparar estos datos con los de otra función de movimiento. Esta actividad pone en evidencia lo realizado en las actividades anteriores que conforman este momento (ver Anexo).

Momento 3

En este momento se examina el *modelo de predicción*, para ello se elaboró una actividad para integrar los elementos obtenidos en las actividades anteriores en una expresión que representa los primeros términos de una Serie de Taylor. La pregunta de predicción trata de lo siguiente: dados A y la variación de A de acuerdo al movimiento, se pregunta por B (ver Anexo).

3.4. *Aspectos generales del diseño*

En términos generales la estructura del diseño rescata el aspecto funcional de la Serie de Taylor y destaca la importancia de conocer y analizar el uso de las gráficas en la situación que esta investigación aborda. Todas las actividades planteadas en los momentos están interrelacionadas, es a partir de la actividad 1, momento 1, que comienza la ilación con el resto de lo planteado en el diseño. Por otro lado, la estructura del diseño logra que existan dos componentes esenciales, a saber, la predicción y la modelación, que se ven reflejados en los tres momentos del diseño. A continuación, en la figura 2, presentamos lo que queremos lograr en los tres momentos, en términos de resignificación y cómo están articulados entre sí: en el momento 1, se relacionan tipos de movimiento y patrones gráficos; en el momento 2, se establecen comportamientos gráficos, según la variación de parámetros de las funciones lineales y cuadráticas; por último en el momento 3, se modela la predicción según las variaciones simultáneas. La resignificación de la ST, sucede cuando en las gráficas que expresan el movimiento se reconoce el estado inicial y final así como sus variaciones del mismo.



$$f(x+h) \approx f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)h^2}{2!}$$

Figura 2. Resignificación de la Serie de Taylor en su aspecto funcional

3.5. *Aspectos Metodológicos*

Con el propósito de generar una matemática funcional y trabajar con epistemologías de prácticas se debe identificar al grupo humano y cómo ellos se organizan para poder observar cuál es la práctica que emerge. Una vez identificada esa práctica social y el querer insertar dicha práctica y desarrollarla con intencionalidad en el sistema didáctico, debe ser reinterpretada; es por eso que se forma una categoría de la práctica social (C(PS)), ausente en el currículo, donde en una situación específica, dicha práctica pasa a ser el argumento que sostiene la situación (figura 3).

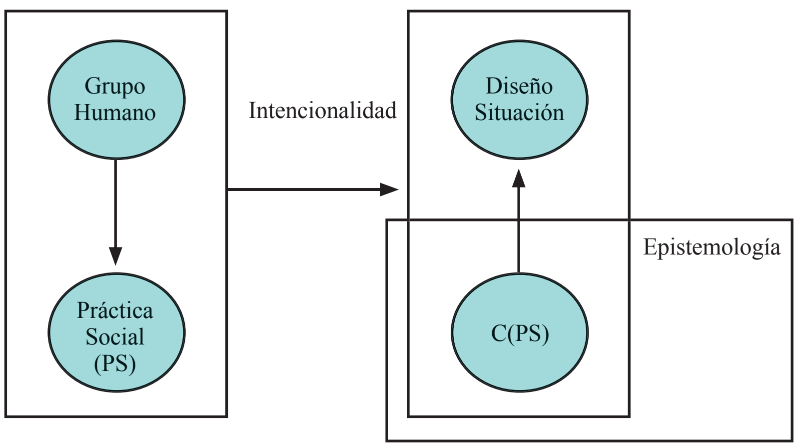


Figura 3. Práctica social y categoría situacional

En nuestro caso trabajamos con las prácticas de predicción y graficación-modelación, ambas con su categoría: para la primera "la comparación de dos estados" y para la segunda "el comportamiento con tendencia".

Ahora bien, el aspecto metodológico que guía la recolección de datos ocupa elementos de la Ingeniería Didáctica (Farfán, 1997), los cuales tiene que ver con un análisis a priori de una epistemología hipotética (resignificación de la ST), una puesta en escena (situación de modelación de movimiento) y un análisis a posteriori (lo que realmente hicieron los estudiantes). La confrontación entre ambos análisis generará una epistemología revisada, la cual será la conclusión del análisis (Buendía, 2004).

El diseño ha sido aplicado a tres grupos de estudiantes de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV). El primer grupo (G1) estuvo conformado por dos estudiantes, quienes se encontraban en el sexto semestre de la carrera de Pedagogía en Matemáticas y cursaban la asignatura Análisis Real 2.

El segundo grupo (G2) estuvo formado por tres estudiantes, que se encontraban en el primer semestre de la carrera, por lo que estaban cursando la asignatura de Cálculo 1. El tercer y último grupo (G3) lo constituyeron tres estudiantes, alumnos de primer año de Bachillerato en Ciencias, quienes ya tenían aprobado las asignaturas de Matemáticas 1 y Matemáticas 2 (que incluían las materias de Cálculo 1).

Trabajar con ocho alumnos de diferentes niveles en matemáticas, particularmente en Cálculo, nos permitió tener más variedad de argumentos para analizar y de esta manera brindar alguna respuesta al problema planteado. Es importante señalar que los estudiantes que participaron en el desarrollo del diseño accedieron de forma voluntaria y estuvieron de acuerdo con que las sesiones fueran grabadas.

Cada uno de los grupos atendió la SM-M en un tiempo aproximado de dos horas en que interactuaron entre pares y, cuando surgió alguna duda, podían solicitar al profesor (en este caso, la autora) que les respondiera o aclarara alguna inquietud –siempre con un espíritu de guía y no con la intención de proporcionar una respuesta explícita–.

Cabe mencionar que los participantes utilizaron tecnología, específicamente la calculadora TI 84 y el sensor de movimiento CBR2.

4. Resignificación de la serie de taylor

En esta sección presentamos algunas de las producciones realizadas por los estudiantes que dan cuenta de nuestro objetivo en esta investigación. Se muestran tres ejemplos, uno de cada momento del diseño, enfocados en tres elementos importantes que dan cuenta de la resignificación de la Serie de Taylor. El primer ejemplo evidencia la *simultaneidad de las derivadas*, el segundo la *relación graficación-modelación* y el tercero da evidencia de una *construcción del modelo de predicción*.

Estos ejemplos identifican los elementos importantes que dan cuenta del objetivo trazado. Para esto el centro de atención fue el movimiento: se parte del hecho de obtener una relación movimiento-gráfica para incentivar construir un modelo de predicción. Todo esto conlleva la resignificación de la Serie de Taylor en una situación específica (SM-M), donde la categoría de predicción puesta en juego logra plasmar un debate frente al conocimiento que emerge.

Las evidencias que se muestran son algunos extractos de las producciones de los grupos, con la nomenclatura E1G1, E2G1, E1G2, E2G2, E3G2, E1G3, E2G3, E3G3. Por ejemplo, E1G1 se refiere al estudiante 1 del grupos 1.

4.1. *Simultaneidad de las derivadas*

En este momento se dará evidencia de la *simultaneidad de las derivadas*, es por esto que nuestro objetivo central es el identificar la relación movimiento-gráfica. En las producciones de los estudiantes podemos dar cuenta que logran la relación movimiento-gráfica y, más aún, identifican qué clase de movimiento es el que se está representando. Se exhiben, además, conexiones con su conocimiento matemático previo al que recurren de manera natural, por ejemplo, conectan con sus nociones de cinemática (velocidad constante y aceleración) y con aspectos observados en la gráfica tales como que es creciente o decreciente o "se parece a" una curva conocida, entre otros. También logran reconocer patrones de comportamientos mencionando explícitamente qué es lo que varía para explicar las distintas curvas presentadas. Se identificaron expresiones tales como: varía, velocidad constante, a una misma velocidad, distintos puntos de partida, velocidad mayor, velocidad creciente, se alejan, etc.

De acuerdo con lo planteado, dentro de las funciones que dan como respuesta, identifican cuál sería la variable "que cambia" (la variable independiente), identifican las curvas con cuerpos u objetos que están o no en movimiento. Cabe mencionar que la tecnología en esta actividad juega un rol especial: no se le pide al estudiante que grafique, más bien, que dada la gráfica (obtenida por la calculadora) y el contexto de la actividad, el estudiante pueda generar una argumentación gráfica.

A continuación presentamos un ejemplo que da cuenta de lo mencionado anteriormente, con la finalidad de apreciar cómo es que los estudiantes responden con elementos como el de reconocer qué tipo de movimiento está representado en las gráficas (figura 4), así como el declarar qué expresión analítica representa la gráfica (figura 5). Además, hemos agregado parte de un diálogo con la intención de reflejar la conversación dentro del grupo y cómo es que ellos argumentan para validar su respuesta, abordando aspectos como el rol que juega la gráfica, el tipo de movimiento y las conexiones que hacen; es así que se visualizan dos aspectos claros: el de identificar qué tipo de curva es lo que representa la gráfica, parábola, exponencial u otra (figura 4) y cómo tratan de identificar en función de la gráfica qué expresión analítica sería. Es justamente en este ejercicio que se declara que tienen identificado el tipo de movimiento (figura 5).

TABLA II

Identificación del movimiento

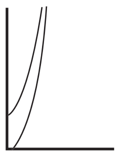
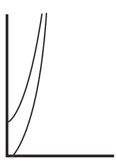
c) distancia  tiempo i) Son acelerados, se debe partir desde el sensor, o una distancia mayor, alejandose pero cada vez más rápido. *Figura 4*. El movimiento representado en la gráfica	*E3G3* – es una curva sí, pero… *E1G3* – es una linda parábola que sería como… *E3G3* – una parábola… ¿una cuadrática, una cosa así? *E2G3* – yo creo que sería una exponencial *E2G3* – la otra sería como una exponencial pero con el dominio restringido *E1G3* – también podría ser pero… *E1G3* – una ax^2+bx+c, una ecuación de la recta ¿no podría ser? *E2G3* – eh… una *x*2, un puro *x* positivo, pero depende si te coloca menos tanto más tanto *E1G3* – podría ser una cuadrática *E2G3* – es que sería como media parábola *E3G3* – sí, como lo mismo, imagínate *E1G3* – pero podría ser en una de esas una cuadrática ¿o no?

TABLA III

Expresión analítica en relación con el movimiento

c) distancia  tiempo (i) Una funcion cuadrática. $y=c+bx+\frac{ax^2}{2}$ siendo c el valor que varia para la distancia con la que se parte desd el sensor. *Figura 5*. La fórmula representada en la gráfica	*E3G3* – sí, porque acá no se le sumas *b* o algo así y ahí la parábola queda así, pero tienes que sacarle el resto. *E1G3* – pero esa fórmula podría ser porque, ¿te acuerdas del lanzamiento de proyectil? Lo que daba la… lo que daba una fórmula, pongamos… partimos… Tú tomas tiempo positivo y tiempo negativo, ¿te acuerdas? A ti te pueden salir dos tiempos, nos habían explicado que el tiempo positivo ya es cuando supongamos tú dejas caer un objeto y La, la, la, la, la y cae y el tiempo negativo sería como… porque la fórmula no te margina si, si lo estás lanzando desde abajo no te margina, no te hace parar la curva. no te da la curva desde acá hasta acá, no te da en la fórmula, así te va a dar entero, por eso el tiempo negativo, el tiempo negativo sería como que parte desde acá…. *E3G3* – ¿por qué así? *E2G3* – porque esa es la fórmula de distancia del movimiento acelerado, uniformemente acelerado *E3G3* – ¿sí? *E1G3* – podría ser *E3G3* – pero espérate ¿qué es c acá? *E2G3* – *c* seria el intercepto de donde parte, ya *x* ya *x*2 una cuadrática *E1G3* – distancia tiempo, claro *E2G3* – que en pocas palabras es velocidad por tiempo y eso es un medio de la aceleración por el tiempo al cuadrado *E1G3* – pero ¿ese sería semejante a ese de la posición final y todo eso? *E2G3* – sí, si distancia es eso *E1G3* – posición inicial menos posición final…

4.2. *Modelación-Graficación*

Daremos evidencia de la relación *graficación–modelación* puesto que se puede visualizar en las producciones de los estudiantes que hacen realizaciones múltiples, identificación de parámetros y realización de ajustes.

El plantear un problema de cinemática, en que se otorga cierta información a los estudiantes, permite percibir que ellos pueden identificar el movimiento descrito y recurren a una representación gráfica, relacionan las variables que entran en juego como son el tiempo y la distancia y pueden interpretar de buena manera la función implicada en las actividades planteadas con los datos entregados; es por esto que pueden predecir la posición del móvil en el tiempo pedido.

Presentamos dos producciones de grupos de estudiantes, el primero muestra cómo relacionan el problema con la primera y la segunda derivada (figura 6) y el segundo muestra cómo recurren a una representación gráfica (figura 7) para explicar cómo es el movimiento y de qué manera llegan al resultado; con estos ejemplos podemos visualizar que con una representación gráfica (segundo ejemplo) se amplía la mirada a la resolución del problema en cuestión, ya que recurren a la gráfica para poder potenciar su pensamiento y a través de ella argumentar. Cabe mencionar que la representación gráfica que le correspondía al ejercicio estaba a un nivel funcional, en el sentido de que no recurrían a razonamientos lógicos. Una vez realizada la conexión con el movimiento y su expresión analítica, respondían a la pregunta de predecir.

TABLA IV
Conexión con las derivadas

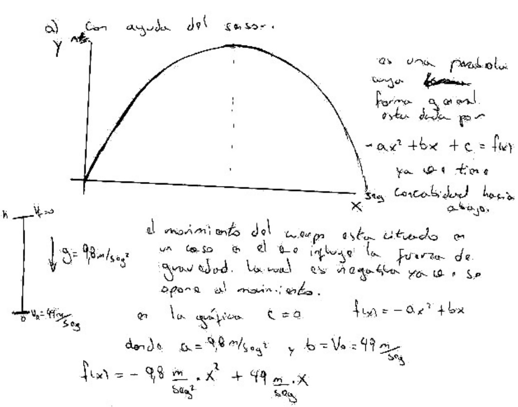


Figura 6. El movimiento y las derivadas

E1G1 –	pero, a ver ¿qué pasaría?... v_0, v en el tiempo cero… este movimiento que hace, recorre una cierta altura ¿cierto?, parte con v_0. Cierto, ¿verdad? Es igual a 49 y el v final es cero
E2G1 –	te acuerdas de las ecuaciones diferenciales, ¿qué representaba la velocidad?, ¿cuál derivada?...
E1G1 –	la primera
E2G1 –	y después venía la…
E1G1 –	la aceleración… entonces aquí hay algo que se está oponiendo ¿verdad?, esto que sería la fuerza de gravedad g, es igual a menos 10, menos 9,8 metros partido por segundos al cuadrado, esta es aceleración

TABLA V
La gráfica como argumento

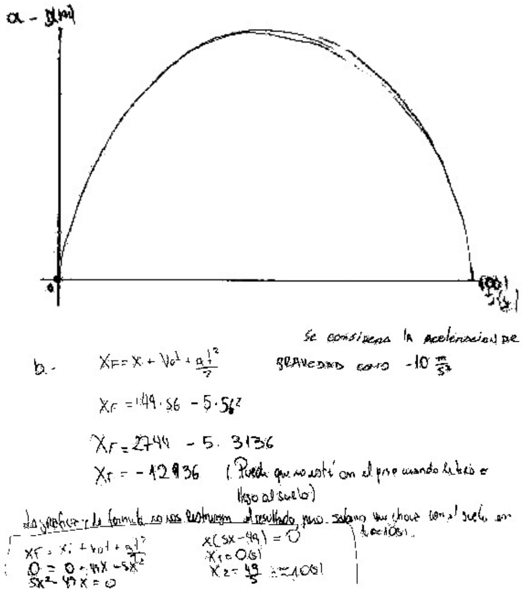


Figura 7. Potencialidad de la gráfica

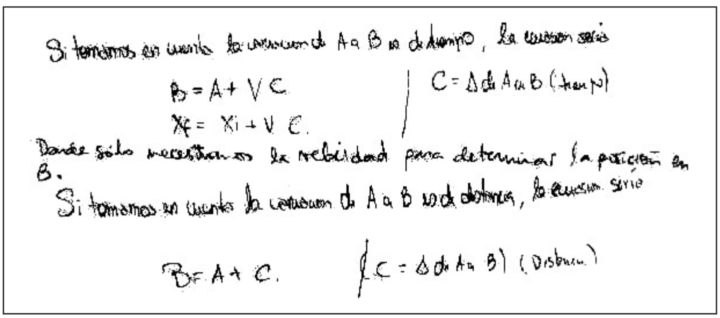
E3G3 –	se lanza un objeto desde el suelo hacia arriba con una velocidad inicial de 42 metros por segundo. ¿Cómo…?
E1G3 –	que hay que ver lo que hace el objeto, el objeto sube y baja, es decir se aleja del observador y vuelve, es decir es como la distancia…
E2G3 –	pero no son rectas, porque es acelerado
E1G3 –	¡Ah! Claro, porque cada vez cuando, porque sale con una velocidad, sale con una velocidad que es rápida, que la tira así con fuerza y tiende, y en el punto máximo queda con velocidad cero y después comienza con la misma velocidad con que subió comienza a bajar, o sea, tomando en cuenta que es un sistema aislado y no hay viento ni cosas malas que lo afecten, ¿cuál sería la gráfica del observado en la a?; ya, ¿quién sería?
E2G3 –	parte desde el origen
E1G3 –	¿parte desde el origen? ¿y te vas como así?
E2G3 –	es como una parábola dada vuelta, a ver…

4.3. *Construcción de un modelo de predicción*

Daremos evidencia de la construcción de un *modelo de predicción*. En la producción de un grupo de estudiantes se puede apreciar cómo es que elaboran argumentos para dar respuesta al enunciado. Es así que este grupo cuestiona si lo que varía es la velocidad o el movimiento y luego enfrenta el problema poniéndose en ambos casos. También trabajan en busca de una ecuación y la relacionan con los datos entregados, se expresan con x_f y x_i en relación con la ecuación encontrada, afirman que sólo se necesita la velocidad para determinar la posición del móvil (figura 8).

En otra sección de la actividad planteada se puede apreciar cómo se refieren a la variación de la variación (figura 9). Relacionan la ecuación con los datos entregados, es decir, mencionan la variación de tiempo y la velocidad de un punto a otro, indican que se puede predecir D si la variación de la variación es constante, también hacen referencia a cómo debe ser el tiempo, indican que se puede conocer la posición D.

Reconocen que para obtener lo pedido se debe encontrar las variables previas, es decir, para obtener C en el primer dibujo se debe obtener B primero. De igual manera proceden para el segundo dibujo pero mencionan que la velocidad es negativa entre B y C debido a que se está acercando al observador, esa expresión es un ejemplo de que conectan con las actividades desarrolladas anteriormente. Es interesante hacer notar que en esta parte de la actividad no se les entregó un dibujo o gráfica pero los estudiantes realizan uno y afirman que se puede predecir D, que es una de las preguntas realizadas, si la variación de la variación es constante y hacen alusión al rol que juega el tiempo.


Si tomamos en cuenta la variación de A a B es de tiempo, la ecuación sería

B = A + V C | C = Δ de A a B (tiempo)

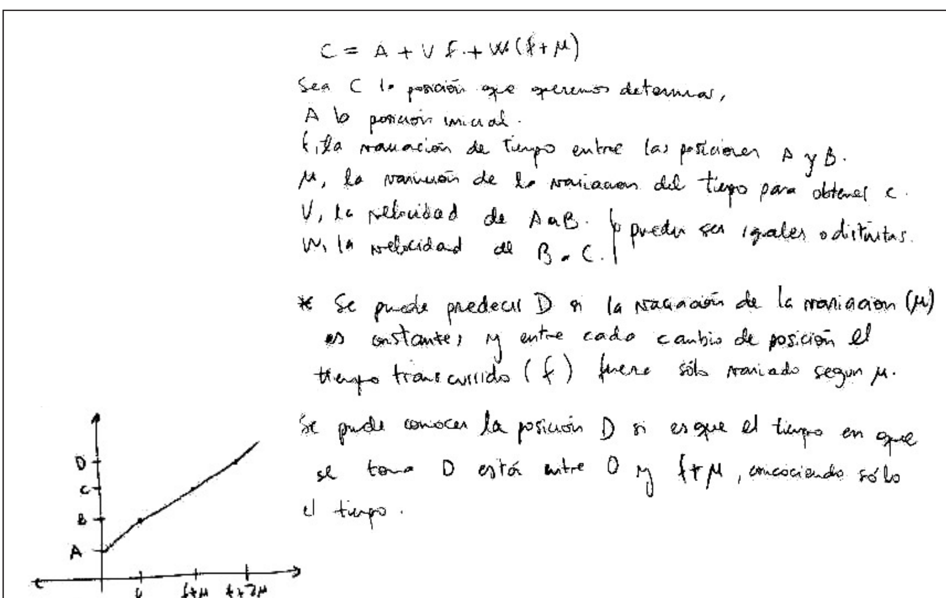
Xf = Xi + V C.

Donde sólo necesitamos la velocidad para determinar la posición en B.

Si tomamos en cuenta la variación de A a B es de distancia, la ecuación sería

B = A + C. | C = Δ de A a B) (Distancia)

Figura 8. Identificación de variables y de la fórmula



C = A + V f + W(f+μ)

Sea C la posición que queremos determinar,

A la posición inicial.

f, la variación de tiempo entre las posiciones A y B.

μ, la variación de la variación del tiempo para obtener C.

V, la velocidad de A a B. | pueden ser iguales o distintas.

W, la velocidad de B a C.

* Se puede predecir D si la variación de la variación (μ) es constante, y entre cada cambio de posición el tiempo transcurrido (f) fuera sólo variado según μ.

Se puede conocer la posición D si es que el tiempo en que se toma D está entre 0 y f+μ, conociendo sólo el tiempo.

Figura 9. Construcción de un modelo de predicción

5. Conclusiones

Se ha formulado y discutido una resignificación de la Serie de Taylor en una SM-M consecuente con el objetivo de la Socioepistemología el cual consiste en realizar un rediseño del discurso matemático escolar (RdME) para rehabilitar lo funcional de la matemática. Por ende, es importante resignificar los objetos matemáticos. El dME ordinario no es el adecuado, es por esto que problematizamos sobre el discurso del cálculo escolar y el rol de la analiticidad de las funciones expresado en la Serie de Taylor, brindando una mirada desde lo epistemológico: con la obra de Newton se da fuerza a la relación Serie de Taylor-predicción donde se aprecia su aspecto funcional.

El escenario ad hoc para poder cumplir con el diseño de acuerdo con la epistemología mencionada al principio fue la formulación de la Situación de Modelación del Movimiento en la que se reflejó la práctica de graficación-modelación enlazada con la práctica de predecir, con sus categorías correspondientes: comportamiento con tendencia y comparación de dos estados.

El diseño y la puesta en escena de la SM-M permitió ver de qué manera se relacionan temas, como por ejemplo, funciones, el describir función creciente, decreciente, los acercamientos a la definición de derivada y a las argumentaciones gráficas con relación a la cinemática, nociones como velocidad constante, aceleración, expresiones analíticas y cuál es la profundidad que se requiere para dar respuesta a una problemática educativa. Es por esto que podemos hacer referencia a cómo ocupan dichos contenidos, en otras palabras, la mirada en este caso no apunta a los conceptos (que se deberían aprender) sino más bien a cómo son usados, cómo se produce un quiebre cuando comienzan a cuestionar algunas cosas que creían saber y de esta manera comenzar a ubicar sus conocimientos, sus puntos de vista, sus interpretaciones, sus consensos, sus argumentos en ellos mismos y frente a sus compañeros. Es así como se pudo observar que el conocimiento que los estudiantes tratan en las materias de matemáticas ordinarias que tienen consigo al momento de trabajar la situación (SM-M) está en un cierto nivel que no es suficiente. Se requirió hacer conexiones tanto de gráficas como de funciones, imaginar cómo debería ser cierto comportamiento de movimiento, etc. Se pudo palpar cómo dichos conocimientos los ocuparon al momento de predecir, cómo es que una curva dibujada no es lo mismo que plantear un problema y deducir la curva, los movimientos con velocidad constante y con aceleración se pudieron ver representados en una gráfica y los estudiantes pudieron participar de dichos movimientos y ver reflejado aquello en una gráfica que una calculadora les mostraba. En resumen, el estudiante tuvo la necesidad de involucrarse de manera real y vivencial a lo propuesto, conectó temas, argumentó sus ideas, creó estrategias, recordó y relacionó materias que hoy en día se enseñan desconectadas y dejamos la tarea al estudiante para que las conecte.

Por otro lado, si analizamos una mirada desde el punto de vista pedagógico, no se trata de realizar una actividad para ver cómo se aprende un tema específico sino qué contenido matemático deberá ponerse en juego. Precisamente el diseño pone en evidencia el qué, trastoca la matemática brindando una situación específica ausente en el currículo y la manera en que afloran temas matemáticos y sus posibles conexiones. En otras palabras, las articulaciones que pueden surgir con la propuesta del diseño en cuestión.

Los resultados de esta investigación señalan una perspectiva que deberá ser atendida desde su aspecto teórico-metodológico: la resignificación matemática en otro dominio y en la alternancia de dominios de conocimiento. Aquí la aproximación fue incipiente, pero no por eso menos importante: el diseño de la situación con base en una epistemología precisó la resignificación de la ST en contextos argumentativos, su carácter funcional destacó la analiticidad de las funciones.

Referencias bibliográficas

Alanís, J. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del cálculo* (Tesis Doctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Alanís, J. A., Salinas, P., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C., y Garza J. L. (Eds.).(2003). *Elementos del Cálculo*. *Reconstrucción Conceptual para el aprendizaje y la enseñanza*. D.F., México: Trillas.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). D.F., México: Grupo Editorial Iberoamérica

Buendía, G. (2004) *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales. Un estudio socioepistemológico* (Tesis Doctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: El caso de la Serie de Taylor. *Mathesis, 11*(1), 55-101.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*. D.F., México: Grupo Iberoamericano.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(2) ,103-128.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matemática. *La Matemática e la sua Didattica*, *20*(1), 59-79.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: Una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(2), 187-214.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(1), 7-38.

Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking. In P. Nesher and J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113-134). Cambridge, USA: Cambridge University Press.

Farfán, R. M. (1997). *Ingeniería Didáctica: un estudio de la variación y el cambio*. D.F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Granville, W. (1980).*Calculo diferencial e Integral*. D.F, México: Limusa.

Hernández, H (2006). *Una visión socioepistemológica de la matematización del movimiento: del binomio de Newton a la Serie de Taylor* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad Autónoma de Chiapas, Chiapas, México.

Marcolini, J. y Perales, F. (2005). La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(1), 25-68.

Morales, A. (2009). *Resignificación de la Serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento: de la predicción del movimiento a la analiticidad de las funciones* (Tesis Doctoral no publicada). Centro de Investigación en Ciencias Aplicadas y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación, Una categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico* (Tesis Doctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Suárez, L., Cordero, F. (2010). Modelación – Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 319 – 334.

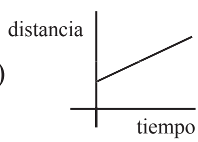
ANEXO

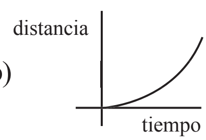
DISEÑO DE LA SITUACIÓN APLICADO

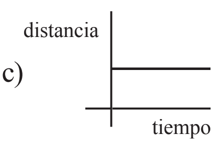
Momento 1

Actividad 1

Se muestran tres gráficas que representan distintos movimientos, ya sea de persona o de una pelota. Utilizando calculadora gráfica y sensores realice los movimientos necesarios para reproducir cada una de esas gráficas. (Indique la ubicación del sensor en cada gráfica)

a)


b)


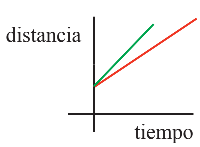
c)


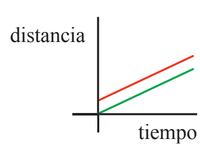
Actividad 2

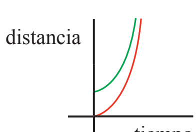
A continuación encontrará cuatro gráficas cartesianas, en cada una de las cuales se ha dibujado un grupo de curvas.

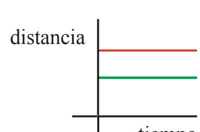
i) Para cada grupo, describa los patrones de movimientos necesarios para obtener las curvas dibujadas.

ii) ¿Qué tipo de funciones darían las mismas gráficas?

a)


b)


c)


d)


Actividad 3

Suponga que usted toma datos con un sensor de los movimientos indicados. Una persona que está a su lado comienza a moverse con velocidad constante hasta un poste situado a 50 metros de distancia y se detiene por cinco minutos, luego regresa al lugar de partida.

a) Construya una gráfica que describa el movimiento realizado por la persona, desde que parte hasta que regresa.
b) Suponga ahora que la persona parte desde el poste, se acerca a usted a una velocidad constante, se detiene cinco minutos y regresa al poste. ¿Cuál sería la gráfica del movimiento realizado?
c) Realice una comparación fundamentada de las gráficas obtenidas en los incisos a) y b).

Momento 2

Actividad 1

Un automóvil transita por una carretera recta. El automóvil viaja con una velocidad constante de 63 metros/segundo. Usted se encuentra al lado de la carretera y dispone de un sensor, suponga que en el momento que empieza a medir el tiempo, el automóvil se encuentra a 20 metros a la derecha y se aleja de usted.

a) ¿Cuál es la gráfica obtenida por el sensor para establecer la relación entre las variables t y d?
b) Prediga la posición del móvil en un tiempo $t = 17$ segundos

Actividad 2

Un observador lanza un objeto desde el suelo hacia arriba con una velocidad inicial $v_0 = 49\frac{m}{s}$.

a) ¿Cuál es la gráfica que el observador haría para establecer la relación entre las variables t y d?
b) Prediga la posición del objeto cuando han transcurrido segundos.

Actividad 3

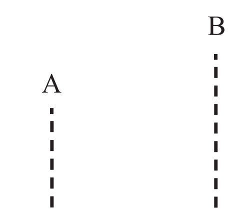
La función $f(t) = 49t + 4.9t^2$ representa el movimiento de un móvil respecto de un observador.

a) Indique si el móvil se acerca o se aleja del observador
b) Prediga cuál es la posición del móvil en el tiempo $t = 4$
c) Prediga la velocidad del móvil en el tiempo $t = 4$
d) Indique la aceleración del móvil en el tiempo $t = 4$ y en el tiempo $t = 8$
e) La función $f(t) = 25t + 8t^2$ representa el movimiento de otro móvil. ¿Qué puede decir de su velocidad y su aceleración en relación con las del primer móvil?

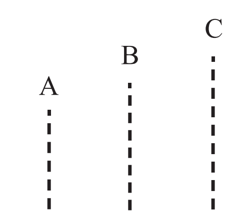
Momento 3

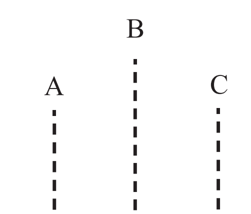
Actividad 1

a) En la siguiente figura, *A* y *B* representan la posición de un móvil en tiempos diferentes. Se supone que usted sólo conoce *A* y la variación de *A* a *B* (pero no *B*). Construya un modelo que le permita predecir *B* a partir de esos datos.



b) Suponiendo que se conoce *A*, la variación de *A* a *B* y la variación de *B* a *C* (pero no *B* ni *C*) construya un modelo que le permita predecir *B* y también *C* a partir de esos datos.





c) De acuerdo con la experiencia obtenida en los casos anteriores, construya un modelo predictivo de la posición futura del móvil si usted conoce:
   - Posición inicial del móvil *A*
   - Variación entre los puntos *A* y *B*
   - Variación de la variación, obtener el punto *C*

¿Puede con esto predecir *D*?

Autores

Astrid Morales Soto. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. ammorale@ucv.cl

Francisco Cordero Osorio. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México. fcordero@cinvestav.mx