

UNA APROXIMACIÓN A LOS CAMBIOS EN EL DISCURSO MATEMÁTICO GENERADOS EN EL PROCESO DE DEFINIR

AN APPROACH TO CHANGES IN THE MATHEMATICAL DISCOURSE
GENERATED IN THE PROCESS OF DEFINING

RESUMEN

En este trabajo nos situamos en una perspectiva sociocultural para abordar los cambios que se manifiestan en el discurso matemático de los estudiantes cuando tratan de definir un objeto matemático. En particular, nos planteamos si es posible caracterizar el procedimiento de cambio apoyándonos en herramientas provenientes de dicha perspectiva. Los participantes fueron 51 estudiantes de edades comprendidas entre 16 y 21 años. El análisis realizado nos permitió identificar diferentes cambios en el discurso matemático de los estudiantes, a partir de la caracterización de las relaciones identificadas entre *narrativas asumidas y rutinas* que se han puesto de manifiesto en el discurso. Estos cambios nos han permitido aproximarnos al proceso de aprendizaje de los estudiantes.

ABSTRACT

On this work, we focus on a sociocultural perspective in order to set forth the changes that are manifested in the students' mathematical discourse when they try to define a mathematical object. We mainly establish whether it is possible to characterize the process of changing by using the tools as a result of the perspective described above. There were fifty-one participants, students between the ages of 16 and 21. This analysis allowed us to identify different changes on the students' mathematical discourse by the characterization of the identified relationships between their narrative and their routines manifested in the discourse. These changes have allowed us to get an approximate of the students' learning process.

PALABRAS CLAVE:

- *Definir*
- *Definición matemática*
- *Perspectiva sociocultural*
- *Discurso matemático*
- *Estudiantes de bachillerato y primeros cursos universitarios*

KEY WORDS:

- *To define*
- *Mathematical definition*
- *Sociocultural perspective*
- *Mathematical discourse*
- *High school students and first year of college*



RESUMO

Neste trabalho, nos situamos em uma perspectiva sociocultural para abordar as mudanças que se manifestam no discurso matemático dos estudantes que tentam definir um objeto matemático. Em particular, questionamos se é possível caracterizar o procedimento de mudança apoiando-nos em ferramentas provenientes de tal perspectiva. Os participantes foram 51 estudantes, de idades compreendidas entre 16 e 21 anos. A análise realizada nos permitiu identificar diferentes mudanças no discurso matemático dos estudantes, a partir da caracterização das relações identificadas entre *narrativas assumidas* e *rotinas* que puseram de manifesto no discurso. Essas mudanças, permitiram nos aproximar do processo de aprendizagem dos estudantes.

PALAVRAS CHAVE:

- *Definir*
- *Definição matemática*
- *Perspectiva sociocultural*
- *Discurso matemático*
- *Estudantes de ensino médio e primeiros cursos universitários*

RÉSUMÉ

Dans cet article nous avons choisi la perspective socioculturelle pour traiter les changements manifestés dans le discours mathématique des étudiants qui essayent de définir un objet mathématique. En particulier on cherche à savoir s'il est possible de caractériser le processus de changement ayant comme appui les outils issus de cette perspective. Dans cette étude ont participé 51 étudiants âgés entre 16 et 21 ans. Grâce à cette analyse, on a pu identifier différents types de changements dans le discours mathématique chez les étudiants d'après la caractérisation des relations identifiées entre *narratives assumées* et *routines* qui apparaissent dans le discours. Ces changements nous ont permis de mieux connaître le processus d'apprentissage des étudiants.

MOTS CLÉS:

- *Définir*
- *Définition mathématique*
- *Perspective socioculturelle*
- *Étudiants au lycée et dans les premiers cours universitaires*

1. INTRODUCCIÓN: EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En los últimos años han ido surgiendo diversas teorías socioculturales con una genealogía extensa y diferencias significativas dentro de las distintas tendencias. No obstante, todas ellas comparten la misma visión sobre la construcción social del conocimiento y sostienen que las acciones del individuo no pueden comprenderse a menos que se vean como parte y parcela del hacer colectivo (Wenger, 1998; Lave & Wenger, 1991; Wells, 1999). La forma de entender el aprendizaje desde

estas perspectivas es como una transición gradual de lo que el individuo es capaz de hacer o conocer participando en el colectivo a ser capaz de hacerlo o conocerlo por sí mismo. En esta transición tiene un papel preponderante el discurso, que tiene que ver con compartir significados y modos de interpretar la forma de actuar en ciertos contextos. En el ámbito de investigación en Educación Matemática, Sfard (2006, 2007, 2008) considera que las matemáticas son un tipo especial de discurso y aprender matemáticas significa cambiar el discurso matemático.

En este trabajo nos vamos a situar en una perspectiva sociocultural y, en particular, seguimos la propuesta de Sfard (2006, 2007, 2008) para abordar los *cambios* que se manifiestan en el discurso matemático cuando se está tratando de definir un concepto. En un sentido amplio, algunos investigadores entienden el término discurso como cualquier acto específico de comunicación, sea verbal o no, con otros o con uno mismo, sea sincrónico o asincrónico (Wenger, 1998; Ben-Yehuda Lavy, Linchevski & Sfard, 2005). En particular, para Sfard (2007) el discurso matemático es aquel que incluye palabras relacionadas con cantidades y figuras o símbolos creados especialmente para facilitar esta forma particular de comunicación. Además, este discurso se caracteriza porque las relaciones entre narrativas son puramente deductivas y porque en los diferentes aspectos de los discursos matemáticos se observan patrones repetitivos, que son cruciales para que los interlocutores tengan la capacidad de aplicar dicho discurso de forma apropiada.

El papel importante que tiene la definición matemática ha sido destacado por numerosos investigadores en las últimas décadas (Vinner & HersHKowitz, 1980; Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1991; HersHKowitz, 1990). Mammona-Downs y Downs (2002) en una revisión sobre pensamiento matemático avanzado abordan la reflexión sobre la estructura matemática en el proceso de crear definiciones y en la comprensión de definiciones dadas, con especial referencia a los factores relacionados con la forma en que los profesionales de matemáticas (tanto aprendices como expertos) interaccionan mentalmente con la estructura matemática (lo que los autores denominan “reflexión sobre estructura matemática”). Rasmussen, Zandieh, King y Teppo (2005) señalan que crear y usar definiciones matemáticas es una actividad esencial y generalmente difícil para los estudiantes. Por su parte, Zazkis y Leikin (2008) han considerado que las definiciones de conceptos matemáticos, las estructuras subyacentes de las definiciones y el proceso de definir deben ser componentes fundamentales del conocimiento de la materia de los profesores de matemáticas.

En lo que sigue, describiremos el marco teórico utilizado en nuestro estudio, el diseño metodológico adoptado, los resultados obtenidos y las conclusiones que se derivan de nuestro estudio.

2. MARCO TEÓRICO

Siguiendo a Sfard (2006, 2007), para caracterizar el discurso matemático y su cambio, hemos considerado como herramientas teóricas las características discursivas que describimos a continuación y que ya hemos utilizado en otros trabajos (Sánchez & García, 2009, 2011):

Palabras matemáticas ('mathematical words' en el original): Aquellas utilizadas en el discurso matemático, incluyendo términos no propiamente matemáticos con significado matemático y utilidad matemática. Sfard (2007) señala que "Expresiones como negativo 2 (o menos 2) o la mitad negativo (o menos la mitad) son buenos ejemplos de este último tipo de innovación léxica. Aunque las palabras relacionadas con las formas y los números pueden aparecer en un discurso coloquial no especializado, el discurso matemático practicado en la escuela dicta su propio uso más disciplinado de estas palabras". Un ejemplo de ello en contexto geométrico puede ser utilizar la frase "... tiene la misma forma que...".

Mediadores visuales ('visual mediators' en el original): Entendidos como los medios con los que los participantes del discurso identifican los objetos de los que están hablando y coordinan su comunicación. En los discursos matemáticos, entre los mediadores visuales se incluyen los artefactos simbólicos, gráficos...

Narrativas asumidas ('endorsed narratives' en el original): Entendidas como cualquier texto hablado o escrito que da una descripción de los objetos, de relaciones entre objetos, o de actividades con los objetos y que está sujeta a la aceptación o rechazo. Se utiliza el término narrativas asumidas/aceptadas para referirse a las que se etiquetan como verdaderas por una comunidad dada en un momento determinado. Por ejemplo, Sfard (2007, p.572) señala como ejemplo de narrativas las siguientes: "La suma de los ángulos de un triángulo es 180° " y " $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ".

Rutinas ('routines' en el original): Son patrones repetitivos bien definidos en las acciones de los interlocutores, característicos de un discurso dado. Las regularidades específicamente matemáticas pueden ser identificadas si uno ve el uso de las palabras matemáticas y mediadores matemáticos o sigue el proceso de crear y fundamentar narrativas asumidas o rechazar otras asumidas previamente. Las rutinas pueden ser de naturaleza algorítmica. Ejemplos de rutinas en cálculos numéricos son "las que se basan en las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de adición y multiplicación" (Sfard, 2007, p. 572).

Por otro lado, en relación con la definición, la revisión previa de algunos trabajos sobre el tema (Borasi, 1992; Vinner, 1991; Pimm, 1993; Mamona-Dows & M. Dows, 2002; Shir & Zaslavsky, 2002; Van Dormolen & Zaslavsky 2003; Zaslavsky & Shir, 2005) nos permitieron identificar "definir" como el 'proceso

para llegar a establecer una definición', considerando que esta última prescribe el significado de una palabra o frase de forma muy específica en términos de una lista de características que tienen que ser todas verdaderas. Dichos estudios se han ocupado de los roles y de los atributos que debe cumplir una definición matemática y de la naturaleza de dichas definiciones. Con respecto a los atributos que debe cumplir una definición matemática, las investigaciones en Educación Matemática incluyen un rango bastante amplio y variado. En la siguiente tabla recogemos los atributos que debe cumplir una definición, identificados en distintas investigaciones que han abordado la problemática definir/definición.

TABLA I
Atributos de la definición matemática

AUTORES	Borasi (1992)	Mamona-Dows & Dows (2002)	Van Dormolen & Zaslavsky (2003)	Zaslavsky & Shir (2005)	
A T R I B U T O S	Precisión en la terminología		Jerarquía	Jerarquía	
	Unicidad del concepto			No ambigua	
	No contradictoria	Estructuralmente inequívoca		No contradictoria	
				Invariante bajo cambio de representación	
				Existencia	
				Equivalencia	Equivalencia (Shir & Zaslavsky, 2002)
				Axiomatización	
	Esencialidad		Minimalidad	Minimalidad	
				Elegancia	
				Degeneración	
	No circularidad		No circularidad		
			Dirigirse al propósito para el que ha sido inventada		
			Formulada de manera que pueda ser utilizada en términos prácticos		

De manera breve, vamos a explicar el significado de los atributos sobre los que hay un mayor consenso en las diferentes investigaciones:

Jerarquía (o *Precisión en la terminología*) significa que los términos empleados en la definición deben ser básicos o estar previamente definidos. Vinculado a este atributo aparece el de *No circularidad*, entendido como que no se puede hacer referencia en la definición del concepto al propio concepto (Borasi, 1992; Van Dormolen & Zaslavsky, 2003; Zaslavsky & Shir, 2005).

El atributo de ser *No ambigua* (o *Unicidad del concepto*) se entiende como la caracterización de manera unívoca de una clase de objetos. Este atributo permite que un objeto concreto dado sea posible incluirlo en una clase de objetos o no sin ambigüedad (Borasi, 1992; Zaslavsky & Shir, 2005).

Una definición es *No contradictoria* (o *Estructuralmente inequívoca*) cuando las características recogidas en la definición son consistentes, es decir, no pueden estar presentes simultáneamente una característica y su contraria (Borasi, 1992; Mamona-Dows & Dows, 2002; Zaslavsky & Shir, 2005).

El atributo de ser *Invariante bajo el cambio de representación* se interpreta como que un objeto pertenece a una clase de objetos (concepto) independientemente del modo en que viene representado. Es decir, según este atributo las características de los objetos no se alteran al cambiar el registro o forma de representación (Zaslavsky & Shir, 2005).

La *equivalencia* significa que se puede dar más de una formulación de un mismo concepto. En la práctica, esto significa que hay que elegir una de las formulaciones como la definición y considerar las otras formulaciones como teoremas que se deben probar (Van Dormolen & Zaslavsky, 2003; Shir & Zaslavsky, 2002). Este atributo permite que un individuo pueda elegir entre varias definiciones equivalentes aquella que le resulte más *elegante* porque necesita menos palabras, menos símbolos o porque usa conceptos generales más básicos (atributo de *Elegancia*) (Van Dormolen & Zaslavsky, 2003).

El atributo de *Minimalidad* (o *Esencialidad*) hace referencia a la *no redundancia* de características en la definición (ninguna característica se puede deducir de las restantes) (Borasi, 1992; Van Dormolen & Zaslavsky, 2003; Zaslavsky & Shir, 2005). El atributo de *Degeneración* hace referencia a que en determinadas definiciones aparecen ejemplos del concepto que no se ajustan a la idea intuitiva del concepto (Van Dormolen & Zaslavsky, 2003).

Estos trabajos, que precisan los atributos de la definición, nos sirven de referentes a la hora de identificar las herramientas teóricas anteriormente

mencionadas utilizadas en nuestro estudio, en el que trataremos de caracterizar el procedimiento a través del cual se produce el cambio en el discurso mantenido por grupos de estudiantes a los que se les ha proporcionado una tarea matemática. En particular, aquí nos centraremos en las narrativas asumidas (en un momento dado) y en el uso que se hace de las rutinas para que dichas narrativas asumidas sean aceptadas o abandonadas, y en los cambios que conlleva en los usos de las palabras matemáticas y en los mediadores visuales.

Las preguntas de investigación de este estudio son:

- ¿Es posible caracterizar el procedimiento de cambio en el discurso matemático sobre el proceso de definir y su producto la definición a través de las herramientas seleccionadas?
- ¿Es posible inferir distintos procedimientos de cambios en el discurso matemático?

3. METODOLOGÍA

3.1. *Participantes y contexto*

Los participantes fueron trece estudiantes de segundo curso de Bachillerato (edad entre 16 y 18 años) y treinta y ocho estudiantes para profesor de primaria (edad entre 18 y 21 años). Sin embargo, en el trabajo aquí presentado no se consideró como variable de análisis el nivel educativo de los participantes. Todos ellos habían cursado las etapas de enseñanza obligatoria (primaria y secundaria) del sistema educativo español. Estos estudiantes participaron en el estudio de forma voluntaria y se organizaron en grupos de tres o cuatro según su criterio (los grupos los hemos denominado con la letra G, del número 1 al 15 consecutivamente; los grupos G13, G14 y G15 corresponden a estudiantes de Bachillerato). De esta manera, vamos a considerar como sujetos de análisis a los grupos de estudiantes resolviendo tareas.

En los distintos documentos curriculares de nuestro país, no suele mencionarse de forma explícita el proceso de definir y lo que se entiende por definición, por lo que los estudiantes se aproximan a la definición / definir de una forma indirecta a través de distintos tópicos matemáticos.

3.2. Fuentes de datos

Teniendo en cuenta que en el marco adoptado, la unidad de análisis es el discurso matemático, los datos de nuestro estudio se obtuvieron fundamentalmente a partir de las grabaciones en audio (y algunas en video) de los grupos de estudiantes, de sus diálogos mantenidos durante la sesión de trabajo resolviendo una tarea y de los documentos escritos facilitados por ellos. Las grabaciones fueron posteriormente transcritas.

La tarea se planteó por escrito al grupo de estudiantes durante una sesión de clase de dos horas de duración. El tema matemático elegido fue la definición en un contexto geométrico, en particular, la clasificación de paralelogramos, con el objetivo de que fuera un contenido con el que los estudiantes estuvieran familiarizados y no un elemento distractor del objetivo de la investigación. Este contexto se ha identificado como un campo relevante y fructífero para las investigaciones sobre definiciones y clasificaciones (De Villiers, 1998; Matos, 1984; Huerta, 1999).

Teniendo en cuenta lo anteriormente indicado, se utilizó una tarea que presentaba las figuras de tres cuadriláteros (cuadrado, rectángulo y rombo) y una serie de preguntas con las que se trataba de ir identificando elementos (lados, ángulos interiores y exteriores entre lados, diagonales y ángulos entre diagonales...) y características o propiedades que lleven a definir los conceptos de cuadrado, rombo y rectángulo. Ejemplos de estas preguntas fueron las siguientes: ¿qué propiedades o características observas en cada una de estas figuras?, ¿hay características o propiedades comunes a las tres?, ¿puedes definir cada una de las figuras?, ¿puedes dar otra definición de cada una de las figuras? Finalmente, les pedimos que nos dieran algunos comentarios o sugerencias.

A cada uno de los grupos se les proporcionó un cuadernillo que incluía en la primera página la información general de nuestra investigación y la importancia de su participación en ella, en las páginas siguientes se planteaba la tarea. Las únicas instrucciones que se les dieron fueron que debían verbalizar sus ideas cuando estaban contestando a las preguntas planteadas y escribir sus respuestas en las hojas del cuadernillo que se les había entregado.

3.3. Análisis

En nuestro procedimiento de análisis se diferenciaron dos niveles: i) nivel 1: identificación de herramientas teóricas (palabras matemáticas, mediadores visuales, narrativas asumidas y rutinas) y ii) nivel 2: identificación de relaciones entre las

herramientas teóricas identificadas en el nivel 1, centrándonos en las relaciones entre las narrativas asumidas y rutinas, que pasamos a describir a continuación.

3.3.1. Nivel 1º: Identificación de las herramientas teóricas

En este nivel procedimos a la identificación de las herramientas teóricas a partir de los datos (transcripciones y aportaciones escritas de los grupos a la tarea planteada), que desarrollamos en las tres fases siguientes:

Fase 1: Identificación de las palabras matemáticas y los mediadores visuales.

Fase 2: Identificación de narrativas asumidas.

Fase 3: Identificación de rutinas.

A continuación vamos a explicar cada una de estas fases.

Fase 1ª: Identificación de las palabras matemáticas y los mediadores visuales.

En primer lugar, procedimos a identificar las palabras matemáticas presentes en los datos de cada uno de los grupos (discurso desarrollado por el grupo de estudiantes) vinculadas a la dualidad definir/definición (nombrar, características,...) y las propias del contexto matemático específico de la tarea (lados, ángulos,...). Como ejemplo, mostramos en los protocolos 1 y 2 y en el anexo, las palabras matemáticas identificadas, resaltadas en negritas.

En relación con los mediadores visuales, en general, los mediadores que han utilizado los grupos de estudiantes son las figuras proporcionadas en el enunciado de la tarea, como se puede apreciar en el protocolo 1 (617-622), donde los estudiantes nombran las figuras fijándose en los dibujos presentados (mediadores visuales).

Protocolo 1 (Grupo 4):

[613] A2: O los *rombos* tienen que tener

[614] A3: Son *romboideas*

[615] A1: No, *romboideas* son los *lados distintos*

[616] A2: No, *rombos* son iguales. *Rombos* son tal cual

[617] A1: ¿Esto?

[618] A2: No, esto también puede ser un *rombo*. La cosa es que esto es un *rombo*. No, esto es

[619] un *cuadrado*.

[620] A4: Esto es un *rectángulo*

[621] A1: Es que *romboide* son *lados iguales dos a dos*.

[622] A2: Pero no los *paralelos*

En algunos casos, los estudiantes, además, realizan dibujos para apoyar su discurso, como se puede observar en el protocolo 2 (líneas 660-662) y en la figura 1.

Protocolo 2 (Grupo 4):

- [660] A3: *Iguales dos a dos*, yo no te dibujaría un *cuadrado*
 [661] A2: Tú no me lo dibujarías pero ¿podrías dibujármelo?
 [662] A3: no. Yo no te lo dibujaría
 [663] A1: pero sí podría ser
 [664] A2: Pero podría
 [665] A1: Sí, está dentro de la *definición*

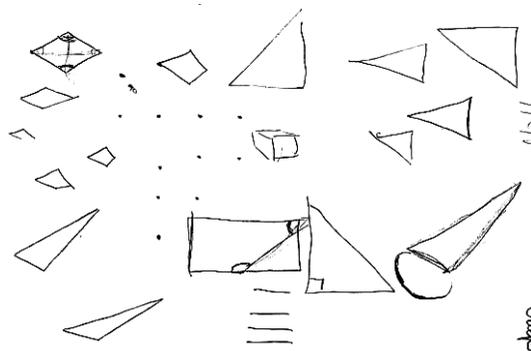


Figura 1. Ejemplo de mediadores visuales (dibujos) usado por el grupo

Fase 2ª: Identificación de narrativas asumidas

Una vez identificadas las palabras matemáticas y los mediadores visuales, en esta fase de análisis procedimos a identificar las narrativas asumidas presentes en los datos de cada uno de los grupos. Las narrativas asumidas las inferimos a partir del discurso de los estudiantes, pudiendo en algunos casos, ser expresadas explícitamente en el grupo en las respuestas transcritas del discurso y escritas en la resolución de la tarea.

Como ejemplo, mostramos (subrayado en el anexo), dos narrativas asumidas identificadas. Una de ellas, que podemos considerar como “definir es etiquetar, poner un nombre a una clase, más o menos amplia, de objetos” (en lo que sigue, vamos a denominar narrativa *Etiquetar*), se identifica ya que el grupo comienza considerando que es suficiente con poner un nombre para definir un concepto (ver protocolo 3 líneas 530-534).

Protocolo 3 (Grupo 4):

- [530] A1: Es decir, un cuadrado
 [531] A2: Pero exactamente
 [532] A4: cuadrado, rectángulo
 [533] (Risas)
 [534] A2: Es que yo creo que aquí lo que pide es el nombre y ya está

Otra narrativa asumida considera que “definir es dar una lista de características de los objetos que se pretenden definir” (en adelante, vamos a denominar narrativa *Listado de características*). Los estudiantes en este momento definen el cuadrado como ‘polígono regular de cuatro lados iguales’ (ver protocolo 4, línea 580-582 (incluido en el anexo)).

Protocolo 4 (Grupo 4):

- [580] A1. Es que si son cuatro lados iguales ya...
 [581] A2: Es que ya estamos hablando de características
 [582] A3: Polígono regular de cuatro lados iguales

Fase 3ª: Identificación de Rutinas

En relación con las rutinas se identifican a partir de las secuencias de acciones repetidas en el discurso del grupo de estudiantes cuando están tratando de resolver la tarea planteada y elaborar una definición.

A modo de ejemplo, en el anexo, señalada en cursiva, se muestra una secuencia de acciones, que se observa cuando los estudiantes están dando las características del cuadrado, por ejemplo “lados iguales, ángulos de 90 grados, ...” (ver protocolo 5, líneas 549 y 555, incluido en el anexo).

Protocolo 5 (Grupo 4):

- [549] A1. *Y aquí ponemos polígono regular de cuatro lados*
 [550] A2: Voy a preguntar si se refiere al cuadrado. A ver si vamos a estar aquí quebrándonos
 [551] la cabeza inútilmente
 [552] A1: ¡Vale!
 [553] Profesora: De distintas maneras...
 [554] A1: ¡Vale! Polígono regular de cuatro lados iguales. O sea que definas el cuadrado.
 [555] *Polígono regular de cuatro lados iguales y eso hace ya que se formen los ángulos de 90*

Esta secuencia de acciones, que vamos a denominar rutina “Identificar características de los objetos”, se aprecia en el discurso del grupo varias veces, como puede observarse en los protocolos 6 y 7, que tienen lugar cuando los estudiantes están identificando los elementos básicos de cada una de las figuras que aparecen en la tarea.

Protocolo 6 (Grupo 4):

- [8] A1: *¿El número de lados?*
 [9] A3: *El número de diagonales ¿no?*
 [10] A2: *¿Cuáles son los elementos básicos de cada una de estas figuras?*
 [11] A3: *¿El ángulo?*
 [12] A2: *El ángulo que forman*
 [13] A1: *Voy a apuntarlo ¿vale?*
 [14] A2: *El número de lados, el ángulo que forman*

Protocolo 7 (Grupo 4):

- [90] A2: *Ahora es cuando hay que decir que en la a*
 [91] A1: *Los lados iguales y por lo tanto*
 [92] A2: *Lados iguales y ángulos iguales. Lados iguales y paralelos dos a dos*
 [93] A1: *Sí*
 [94] A2: *Y ángulos rectos también. Aquí, lados iguales y paralelos, ...*

Este carácter repetitivo confiere a este conjunto de acciones la denominación de rutina. Así, este grupo de estudiantes considera como elementos relevantes lados y ángulos, adquiriendo la rutina la estructura siguiente:

- miran la figura,
- identifican número de lados y ángulos entre lados,
- propiedades de lados y ángulos (lados iguales, paralelos dos a dos, ... , ángulos rectos, ...).

De forma esquemática, teniendo en cuenta que los elementos relevantes elegidos por los distintos grupos no son siempre los mismos, esta rutina consta de las siguientes acciones: miran la figura, eligen los elementos relevantes de la misma (lados, ángulos, etc.) e identifican propiedades. En adelante, esta rutina la denominaremos rutina *Identificar características*.

3.3.2. Nivel 2º: Identificación de relaciones

Una vez identificadas en el nivel anterior de análisis, las distintas herramientas teóricas, en este nivel nos centramos en estudiar las posibles relaciones entre

narrativas asumidas y rutinas. La identificación de relaciones nos permitió reconocer/caracterizar diferentes cambios en el discurso matemático en el contexto de definir.

Para la identificación de relaciones, observamos:

- las distintas narrativas asumidas identificadas y
- cómo se produce el cambio en el discurso del grupo de una narrativa asumida a otra distinta, a través del uso de unas determinadas rutinas.

A continuación, vamos a mostrar un ejemplo de este nivel de análisis a través del protocolo 8 en el que se muestra la relación entre la narrativa asumida *Etiquetar* y la narrativa asumida *Listado de características* mediante la rutina *Identificar características*.

Protocolo 8 (Grupo 5):

- [525] A1: Venga, definir cada una de las figuras
 [526] A3: La figura uno es un cuadrado
 [527] A1: Es un cuadrado...
 [528] A2: Cuadrado, rectángulo y rombo
 [529] A1: Bueno, pero habrá que definir algo más, ¿no?
 [530] A2: No, ¿no?
 [531] A3: Vamos a ver, es un cuadrado, ¿tú que le vas a decir a
 [532] un niño chico?
 .../...
 [549] A2: Ea, eso, figura tres es un rombo
 [550] A1: Yo lo describiría algo más, la verdad
 [551] A2: Otra definición
 [552] A3: Ea, ahora damos ahí la otra definición. Es un cuadrado que
 [553] tiene cuatro lados iguales.
 [554] A2: Podríamos, no, mira, no podríamos
 [555] A1: ¿Qué?
 [556] A2: No podríamos
 [557] A1: Sí, el otro para acabar antes todavía, no podríamos, esto es
 [558] ya, vamos
 [559] A3: Ponlo, es un cuadrado que tiene cuatro lados iguales que
 [560] A2: Claro
 [561] A1: Es una figura compuesta por cuatro lados iguales, paralelos
 [562] dos a dos, ¿no?
 [563] A3: Venga, venga, venga escribe, escríbela tú, que te lo sabes de
 [564] memoria
 [565] A1: S
 [566] A2: Figura con cuatro lados iguales paralelos con ángulos rectos

Este grupo de estudiantes (Grupo 5) comienza considerando que es suficiente con poner un nombre para definir un concepto, como puede observarse en el protocolo 8 (líneas 525-528), lo que desde nuestro punto de vista significa asumir la narrativa *Etiquetar*. Posteriormente, se pone de manifiesto que se asume la nueva narrativa *Listado de características* (ver línea 566 del protocolo 8).

El cambio de narrativa se produce porque los estudiantes hacen uso de la secuencia de acciones que hemos denominado rutina *Identificar características* (líneas 552 - 566 del protocolo 8), mencionada en el apartado anterior, la hemos considerado rutina en este grupo de estudiantes ya que aparece en distintos momentos a lo largo del discurso de dicho grupo (ver protocolo 9, líneas 217-226). Se puede decir que la rutina *Identificar características* juega un papel relevante para que se produzca este cambio entre las narrativas asumidas *Etiquetar* y *Listado de características*, lo que caracteriza el cambio en el discurso matemático de este grupo de estudiantes.

Protocolo 9 (Grupo 5):

- [217] A1: Cuatro lados iguales, ¿no?
 [218] A3: Cuatro lados iguales
 [219] A2: Dos ángulos graves y dos agudos, así era, ¿no?
 [220] A3: ¿Así?
 [221] A1: ¿Graves y agudos? Es obtuso ¿no?
 [222] A2: Graves y “abtusó”
 [223] A3: Grave es la voz que tiene Elena
 [224] A2: ¿Obtuso es el nombre de los águ los?
 [225] A1: Obtuso es así, los que son mayores de noventa grados
 [226] A2: Y agudo

En este cambio de narrativas asumidas, se observa, además, que se amplía el significado de algunas palabras matemáticas. Por ejemplo, en un primer momento, la palabra “cuadrado” se utiliza para etiquetar una determinada forma geométrica en el sentido de “la figura es un cuadrado” (ver línea 526 del protocolo 8); sin embargo, cuando asumen la narrativa *Listado de características*, el término “cuadrado” es una palabra que se utiliza para designar a una figura geométrica que cumple unas determinadas características (línea 566 del protocolo 8). En la figura 2 mostramos el esquema del procedimiento de cambio.

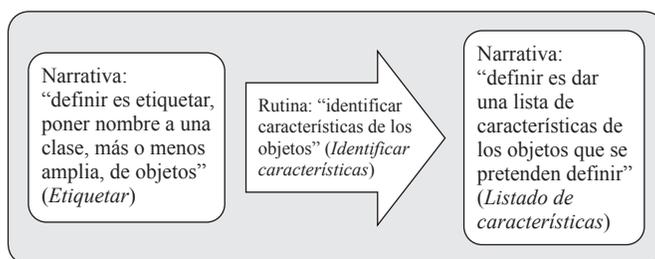


Figura 2. Esquema de procedimiento de cambio

A continuación, pasamos a mostrar los resultados obtenidos en nuestro estudio.

4. RESULTADOS

El análisis de los datos provenientes de los quince grupos analizados nos ha permitido identificar diferentes procedimientos de cambio en el discurso matemático, que pasamos a describir a continuación.

4.1. Cambios o invariencias en el discurso matemático

Pasamos a caracterizar en primer lugar los cambios en el discurso de los grupos a través de las relaciones identificadas entre narrativas asumidas y rutinas, que se han recogido en forma sintética en la tabla 2, para finalizar con las invariencias encontradas.

4.1.1. Cambios de una etapa

4.1.1.1. Cambio en el discurso: "De nombrar a listar"

Este cambio en el discurso (ver figura 3) se caracteriza a través del paso de la narrativa asumida "definir es etiquetar, poner un nombre a una clase, más o menos amplia, de objetos" (narrativa *Etiquetar*, N1) a la narrativa asumida "definir es dar una lista de características de los objetos que se pretenden definir" (narrativa *Listado de características*, N2), mediante el uso de la rutina "identificar características de los objetos" (rutina *Identificar características*, R1). La estructura de esta rutina, como secuencia de acciones que se repite la hemos caracterizado de la siguiente manera (ver fase 3 del primer nivel de análisis):

- Miran la figura
- Identifican elementos de las figuras
- Enuncian propiedades o características de las figuras

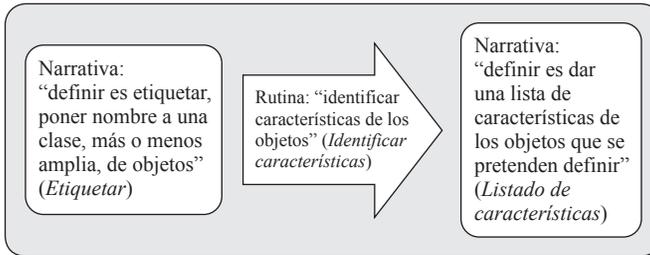


Figura 3. Esquema de procedimiento de cambio “De nombrar a listar”

Este cambio se ha identificado en los grupos G5, G7, G8, G9, G10, G11, G13 y G14.

4.1.1.2. Cambio en el discurso: “De listado de características a listado mínimo de características”

Se caracteriza por el paso de la narrativa asumida “definir es dar una lista de características de los objetos que se pretenden definir” (narrativa *Listado de características*, N2),” a una nueva narrativa asumida “definir es dar una lista mínima de características de los objetos que se están definiendo” (narrativa *Lista mínima*, N3) a través del uso de la rutina “Identificar relaciones (implicativas) entre características de los objetos” (rutina *Identificar relaciones implicativas*, R2a) (ver figura 4).

Asumir la narrativa *Lista mínima* (N3) supone que en la definición no tienen por qué aparecer una lista exhaustiva de propiedades, es decir, lo que se observa es una tendencia a dar una definición con el atributo de la *minimalidad*. Respecto de la rutina que hemos denominado *Identificar relaciones implicativas* (R2a) es una de las formas adoptadas por la rutina “Identificar relaciones entre características de los objetos”, que denominamos *Identificar relaciones* (R2) y cuya estructura como secuencia de acciones que se repite es la siguiente:

- Miran la figura
- Identifican propiedades de los elementos relevantes de la figura
- Identifican relaciones entre las propiedades de distintos elementos

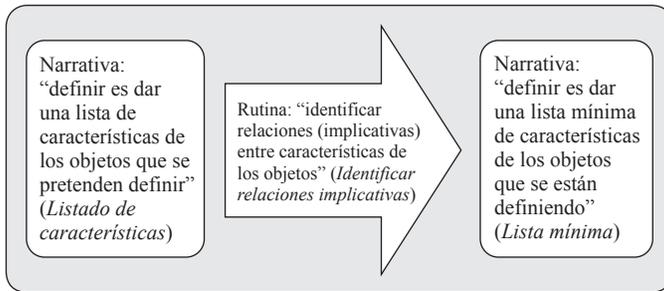


Figura 4. Esquema de procedimiento de cambio
“De listado de características a listado mínimo de características”

Dicho cambio en el discurso se ha identificado en el grupo G1

4.1.2. Cambios de dos etapas

4.1.2.1. Cambio en el discurso: “De nombrar a listado mínimo de características”

Este cambio de discurso se produce en dos etapas (ver figura 5). En primer lugar, el cambio se caracteriza por el paso de la narrativa asumida “definir es etiquetar, poner un nombre a una clase, más o menos amplia, de objetos” (narrativa *Etiquetar*, N1) a la narrativa asumida “definir es dar una lista de características de los objetos que se pretenden definir” (narrativa *Listado de características*, N2), mediante el uso de la rutina “Identificar características de los objetos” (rutina *Identificar características*, R1).

En segundo lugar, se pasa de la narrativa asumida “definir es dar una lista de características de los objetos que se pretenden definir” (narrativa *Listado de características*, N2),” a la narrativa asumida “definir es dar una lista mínima de características de los objetos que se están definiendo” (narrativa *Lista mínima*, N3) a través del uso de dos rutinas. Estas rutinas son: “Identificar relaciones (implicativas) entre características de los objetos” (rutina *Identificar relaciones implicativas*, R2a) y la rutina “Poner ejemplos y contraejemplos” (rutina *Poner ejemplos*, R3). La estructura de la rutina R2a está descrita en el cambio anterior y la estructura de la rutina *Poner ejemplos* (R3), como secuencia de acciones que se repiten es la siguiente:

- Seleccionan un grupo de características que debe tener una figura
- Ponen ejemplos de figuras con esas características
- Verifican que cada ejemplo cumple las características consideradas, para lo que, en algunos casos, se apoyan en poner contraejemplos

En esta última rutina juegan un papel relevante los mediadores visuales (dibujos realizados por los grupos de estudiantes durante el proceso de resolución de la tarea) incorporados en el discurso matemático.

El uso conjunto de estas dos rutinas facilita el cambio en el discurso, ya que les permite a los estudiantes eliminar características de las figuras que se deducen de otras y comprobar el “alcance” de esa eliminación, tendiendo así a la *minimalidad* en la definición elaborada.

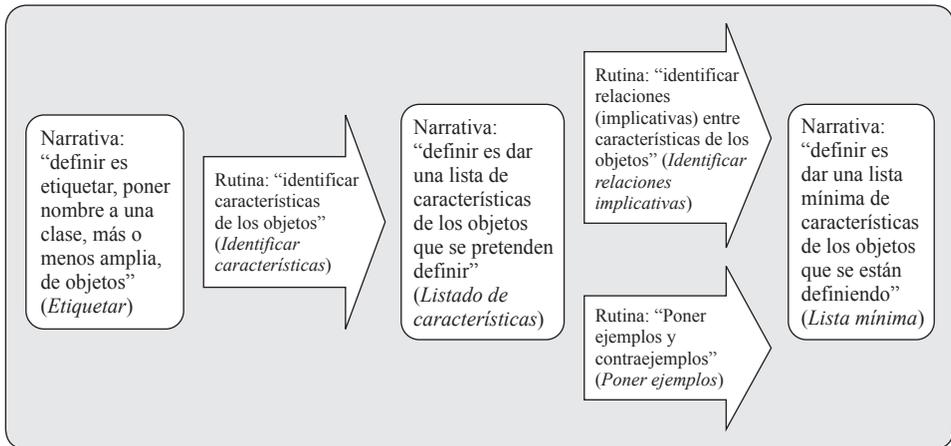


Figura 5. Esquema de procedimiento de cambio “De nombrar a listado mínimo de características”

Este cambio se ha identificado en el grupo de estudiantes G4.

4.4.4.2. Cambio en el discurso: “De listado de características a definición equivalente”

Este cambio de discurso se produce también en dos etapas (ver figura 6). En primer lugar, el cambio se caracteriza por el paso de la narrativa asumida “definir es dar una lista de características de los objetos que se pretenden definir” (narrativa *Listado de características*, N2), a la narrativa asumida “definir es dar una lista mínima de características de los objetos que se están definiendo” (narrativa *Lista mínima*, N3) a través del uso de dos rutinas. Estas rutinas son: “Identificar relaciones (implicativas) entre características de los objetos” (rutina *Identificar relaciones implicativas*, R2a) y la rutina “Poner ejemplos y contraejemplos” (rutina *Poner ejemplos*, R3). El uso conjunto de estas dos rutinas facilita el cambio en el discurso, ya que les permite eliminar características de las figuras que se deducen de otras y comprobar el “alcance” de esa eliminación, tendiendo así a elaborar una definición con el atributo de la *minimalidad*.

La segunda etapa se caracteriza por el paso de la narrativa asumida “definir es dar una lista mínima de características de los objetos que se están definiendo” (narrativa *Lista mínima*, N3),” a una nueva narrativa asumida “un objeto puede tener definiciones equivalentes” (narrativa *Definiciones equivalentes*, N4) a través del uso de la rutina “Identificar relaciones (equivalentes) entre características de los objetos” (rutina *Identificar relaciones equivalentes*, R2b), que es otra de las formas adoptadas por la rutina *Identificar relaciones* (R2) descrita anteriormente en uno de los cambios de una etapa (apartado 4.1.1.2). El ser consciente de que para dar la definición de un objeto es suficiente con una lista mínima de características del mismo y el uso de la equivalencia entre características hace posible el cambio en el discurso del grupo, pudiendo dar definiciones equivalentes en las que se sustituyen unas características por otras equivalentes.

Respecto a la narrativa *Definiciones equivalentes* (N4) se presenta cuando los estudiantes asumen que no es necesario dar como definición un listado exhaustivo de características o propiedades y elaboran definiciones equivalentes de un mismo objeto haciendo uso de distintas propiedades o características del mismo.

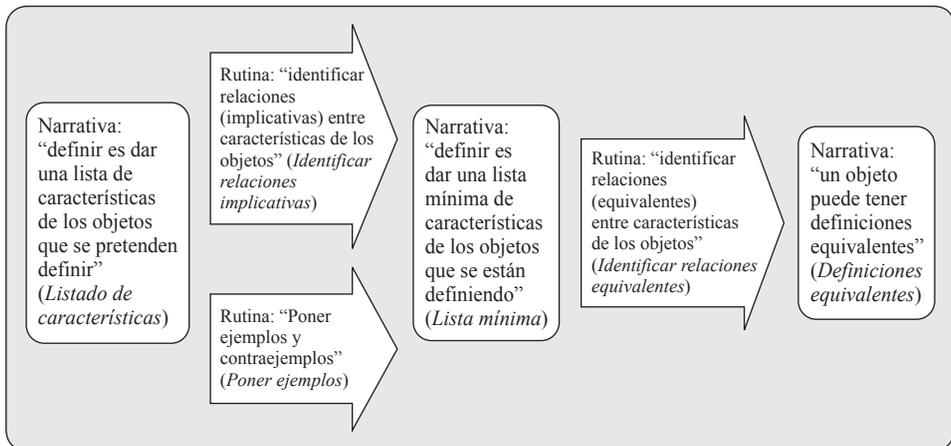


Figura 6. Esquema de procedimiento de cambio
“De listado de características a definición equivalente”

Este cambio se ha identificado en el grupo de estudiantes G3.

4.1.3. Invariancia en el discurso

Por último, en los grupos G2, G6, G12 y G15 no tenemos evidencia empírica de que se produzcan cambios en el discurso, ya que sólo se pone de manifiesto

el uso de una única narrativa asumida y una única rutina. En estos casos la narrativa asumida identificada es “definir es dar una lista de características de los objetos que se están definiendo” (narrativa *Listado de característica*, N2) y la rutina utilizada es “identificar características de los objetos” (rutina *Identificar características*, R1).

Para finalizar y a modo de resumen, la siguiente tabla recoge globalmente los cambios en el discurso anteriormente descritos y los grupos en los que se han puesto de manifiesto en nuestro estudio.

TABLA II
Cambios en el discurso de los grupos

<i>CAMBIOS EN EL DISCURSO</i>	<i>GRUPOS</i>	<i>TOTALES</i>
De nombrar a listar: N1 → N2 (R1)	G5, G7, G8, G9, G10, G11, G13, G14	8
De listado de características a listado mínimo de características: N2 → N3 (R2a)	G1	1
De nombrar a listado mínimo de características: N1 → N2 (R1) → N3 (R2a y R3)	G4	1
De listado de características a definición equivalente: N2 → N3 (R2a y R3) → N4 (R2b)	G3	1
Invariancia en el discurso	G2, G6, G12, G15	4

Como puede observarse en el cuadro, se han identificado cambios en el discurso en una etapa y en dos etapas. Los cambios de dos etapas muestran más riqueza en el uso de las rutinas que en los cambios de una etapa.

En relación con las definiciones elaboradas en el discurso de los grupos donde se producen cambios, queremos señalar que, en general, son coherentes desde el punto de vista matemático, en el sentido de que cumplen los atributos matemáticos de las definiciones. Por ejemplo, el paso entre las narrativas asumidas segunda (*Listado de características*) y tercera (*Listado mínimo de características*) (N2 → N3) está vinculado al atributo de la *minimalidad* y el paso entre las narrativas asumidas tercera y cuarta (*Definiciones equivalentes*) está vinculado al atributo de la equivalencia. En los grupos donde el discurso es invariante, las definiciones proporcionadas consisten en listados “exhaustivos” de características de las figuras, que da lugar a que dichas definiciones sean redundantes y exclusivas o excluyentes.

5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO

En este trabajo, a través de las herramientas teóricas adoptadas, hemos podido identificar cambios en el discurso matemático de los estudiantes. Dichos cambios se han podido caracterizar a través de las relaciones identificadas entre narrativas asumidas y rutinas que se han puesto de manifiesto en el discurso de los grupos de estudiantes participantes en el estudio. En concreto, mediante la cadena sucesiva de narrativas asumidas, que si bien son aceptadas en un momento dado, posteriormente son abandonadas y sustituidas por otras, a través del uso de determinadas rutinas.

En nuestro caso, estos cambios han sido tanto de una etapa (relaciones entre dos narrativas asumidas y una o varias rutinas) como de dos etapas (relaciones entre tres narrativas asumidas y varias rutinas). Estos resultados no descartan que puedan producirse cambios en el discurso de más etapas, implicando que puedan establecerse relaciones entre más de tres narrativas asumidas y rutinas.

Atendiendo a que en el ámbito de investigación en Educación Matemática, Sfard (2006, 2007) considera que las matemáticas son un tipo especial de discurso y aprender matemáticas significa cambiar el discurso matemático, la identificación de cambios en el discurso nos ha permitido aproximarnos al aprendizaje de los estudiantes. De esta manera, hemos identificado en nuestro estudio cuatro manifestaciones de cambios en el discurso matemático, que son indicios de que se ha producido aprendizaje:

- En el cambio en el discurso “De nombrar a listar” se pone de manifiesto que los estudiantes cambian la forma de entender lo que es una definición matemática, ya que en un principio consideraban que con nombrar (o etiquetar) la figura la estaban definiendo, mientras que al final del proceso discursivo ven necesario que la definición matemática incluya una lista de características del objeto definido.
- En el cambio “De listado de características a listado mínimo de características”, los estudiantes, estableciendo relaciones entre algunas de las características del objeto que están definiendo, varían su forma de considerar la definición, en el sentido de que ya no ven necesario dar una lista exhaustiva de características para definir el objeto mostrando así una tendencia a la definición como un listado mínimo de características.
- En el cambio discursivo “De nombrar a listado mínimo de características”, los estudiantes que en un principio consideraban que con nombrar la figura la estaban definiendo, al final del proceso discursivo consideran

que para definir la figura debe darse un listado mínimo de características. Para llegar a esta forma de considerar la definición, previamente se había producido un cambio en el discurso al considerar que para definir no bastaba con nombrar, sino que era necesario dar un listado de características. El establecer relaciones entre algunas de estas características es lo que les llevó, en una última etapa del proceso discursivo, a considerar que en la definición no es necesario un listado exhaustivo (tendencia a la *minimalidad*).

- En el cambio “De listado de características a definición equivalente”, los estudiantes que consideraban en un principio que para definir debía darse un listado exhaustivo de características del objeto definido, mediante el establecimiento de relaciones entre características, llegan a considerar que se puede reducir dicho listado y, además, que algunas de las características pueden ser sustituidas por otras, llegando así a dar diferentes definiciones de un mismo objeto (definiciones equivalentes).

Consideramos que estos cambios en los procesos discursivos son manifestaciones del aprendizaje que se está produciendo en los grupos de estudiantes. Por último, hay grupos en los que no se ha puesto de manifiesto el aprendizaje, ya que no tenemos evidencias empíricas de cambios en el discurso matemático de dichos grupos.

Como hemos señalado en la sección de resultados, aunque no ha sido objetivo de este trabajo, en algunos grupos de estudiantes, donde se han producido cambios en el discurso matemático, se han puesto de manifiesto cambios en el uso de las palabras matemáticas y la incorporación de algunos mediadores visuales propios. Esto nos lleva a pensar que futuros trabajos deben profundizar en el papel que juegan estas herramientas teóricas en el cambio en el discurso.

Respecto del proceso de definir y su producto la definición, algunas investigaciones señalan las dificultades que tienen los estudiantes con el significado y uso de las definiciones (Ouvrier- Buffet, 2004, 2011; Rasmussen, Zandieh, King & Teppo, 2005; Zazkis & Leikin, 2008). Nuestros resultados apuntan algunas causas sobre estas dificultades, ya que los grupos en los que el discurso es invariante, las definiciones que proporcionan son redundantes y de tipo exclusivo, mientras que en los grupos en los que se producen cambios, las definiciones dadas por estos grupos son coherentes con el proceso de definir, en cuanto a *minimalidad* y equivalencia. Por otro lado, Sfard (2008) señala que el modelo de van Hiele proporciona niveles de discurso inconmensurables, y que el análisis de dichos discursos a través de las herramientas teóricas por ella propuestas (palabras matemáticas, mediadores visuales, narrativas y

rutinas) permite el estudio del progreso entre los niveles. En nuestros resultados hemos obtenido evidencias empíricas que apoyan estas afirmaciones, ya que las relaciones entre rutinas y narrativas describen el progreso que tiene lugar en los grupos de estudiantes.

Por último, queremos señalar el importante papel que juegan algunos estudiantes en los grupos para que se produzcan cambios en el discurso, como se muestra en este trabajo. Esta idea abre nuevas vías de investigación que podrían ser objeto de estudios posteriores.

AGRADECIMIENTOS

Este estudio ha sido posible gracias al apoyo del Ministerio de Ciencia e Innovación de España a través del Proyecto de Investigación I+D+i, PSI2008-02289.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ben-Yehuda, M., Lavy, I., Linchevski, L., & Sfard, A. (2005). Doing Wrong UIT Words: What Bars Students' Access to Arithmetical Discourses. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(3), 176-247.
- Borasi, R. (1992). *Learning Mathematics Through Inquiry*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 248-255). Stellenbosch, South Africa: PME.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 70-95). Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press. doi.org/10.1017/CBO9781139013499.006
- Huerta, P. (1999). Los niveles de Van Hiele y la taxonomía SOLO: Un análisis comparado, una integración necesaria. *Enseñanza de las ciencias*, 17(2), 291-310.
- Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated Learning. Legitimate Peripheral Participation*. New York, NY: Cambridge University Press.
- Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2002). Advanced Mathematical Thinking With a Special Reference to Reflection on Mathematical Structure. In L.D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 165-195). Mahwah, NY: IRME.
- Matos, J. M. (1984). *Van Hiele levels of preservice primary teachers in Portugal* (Tese de Mestrado não publicada). Universidade de Boston, Lisboa, Portugal.

- Ouvrier-Bufferet, C. (2004). Construction of Mathematical Definitions: An epistemological and didactical study. In M. J. Hoines & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 473-480). Bergen, Norway: PME.
- Ouvrier-Bufferet, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: in-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics*, 76(2), 165-182. doi:10.1007/s10649-010-9272-3
- Pimm, D. (1993). Just a matter of definition. *Educational Studies in Mathematics*, 25(3), 261-277.
- Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing Mathematical Activity: A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical thinking and learning*, 7(1), 51-73. doi:10.1207/s15327833mtl0701_4
- Sánchez, V. & García, M. (2009). *Aproximaciones socioculturales al aprendizaje matemático: el caso de definir*. V Seminario sobre Entornos de Aprendizaje y Tutorización para la Formación del Profesorado de Matemáticas, 21-23 enero 2009. Barcelona, España: Universidad Autónoma de Barcelona.
- Sánchez, V. & García, M. (2011). Socio-Mathematical and Mathematical norms in pre-service primary teachers' discourse. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 105-112). Ankara, Turkey: PME.
- Sfard, A. (2006). Participationist discourse on mathematics learning. In J. Maasz & W. Schlöglmann (Eds.), *New Mathematics Education Research and Practice* (pp. 153-170). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.
- Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences*, 16(4), 565-613. doi:10.1080/10508400701525253
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourse, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Shir, K. & Zaslavsky, O. (2002). Students' conceptions of an acceptable geometric definition. In A.D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, 201-208.). Norwich, United Kingdom: PME.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
- Van Dormolen, J., & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 91-106. doi: 10.1016/S0732-3123(03)00006-3
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. *Advanced Mathematical Thinking*, 65, 65-81. doi: 10.1007/0-306-47203-1_5
- Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the 4th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177-184). Berkeley, CA: PME.
- Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Towards a socio-cultural practice and Theory of Education*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.
- Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.

- Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' Conceptions of a Mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 317-346.
- Zazkis, R. & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 131-148. doi: 10.1007/s10649-008-9131-7

Autores

Isabel María Escudero. Universidad de Sevilla, España. escudero@us.es

José María Gavilán. Universidad de Sevilla, España. gavilan@us.es

Gloria Sánchez-Matamoros. Universidad de Sevilla, España. gsanchezmatamoros@us.es

ANEXO

Protocolo 1 (Grupo 4):

(Se inicia dicho protocolo con la respuesta de los estudiantes a la pregunta de la tarea en la que se pide definir cada una de las figuras).

- [535] A1: Es decir, un *cuadrado*
 [536] A2: Pero exactamente
 [537] A4: *cuadrado, rectángulo*
 [538] (Risas)
 [539] A2: Es que yo creo que aquí lo que pide es el *nombre* y ya está
 [540] A1, A3, A4: No,
 [541] A2: Eso no sería *definir*
 [542] A4: No, sería *nombrar*.
 [543] A2: Pero es que aquí preparaos porque pregunta por otra *definición*
 [544] A3: Podría dar otra definición ¡ostras!
 [545] (RISAS)
 [546] A1: ¡Ah bueno! aquí lo ponemos superficial y ya está
 [547] A2: No, aquí ponemos *polígono regular, polígono regular, polígono regular*
 [548] (RISAS)
 [549] A1: Y aquí ponemos *polígono regular de cuatro lados*
 [550] A2: Voy a preguntar si se refiere al *cuadrado*. A ver si vamos a estar aquí quebrándonos la cabeza inútilmente
 [551] A1: ¡Vale!
 [552] Profesora: De distintas maneras...
 [553] A1: ¡Vale! *Polígono regular de cuatro lados iguales*. O sea que *definas* el *cuadrado*.
 [554] *Polígono regular de cuatro lados iguales* y eso hace ya que se formen los *ángulos de 90*
 [555] A3: Pero es que eso no es una *definición*
 [556] A1: Como que no, *polígono regular de cuatro lados iguales*
 [557] A3: pero lo de los *ángulos* ¿Y eso ya hace que...?
 [558] A1: No. No pero
 [559] A3: Espera a ver que dice José
 [560] A1: *Polígono regular de cuatro lados iguales*.
 .../...
 [578] A1: Pues nada, *polígonos regular de cuatro lados iguales*
 [579] A2: De *cuatro lados* que forman *ángulos de noventa grados*
 [580] A1. Es que si son *cuatro lados iguales* ya...
 [581] A2: Es que ya estamos hablando de *características*
 [582] A3: *Polígono regular de cuatro lados iguales*.
 [583] A1: Claro, eso ya te hace que se formen los *noventa*