

SANDRA EVELY PARADA, FRANCOIS PLUVINAGE

REFLEXIONES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS SOBRE ASPECTOS RELACIONADOS CON SU PENSAMIENTO DIDÁCTICO

CONSIDERATIONS ON DIDACTIC THINKING
BY TEACHERS OF MATHEMATICS

RESUMEN

En este artículo se dan a conocer resultados de una investigación que tuvo como objetivo ayudar a profesores de educación básica a reflexionar sobre la actividad matemática que promueven en sus estudiantes durante la clase. Para ello se propuso un modelo de reflexión que les ayudaría a analizar aspectos concretos de su práctica docente. En este documento, se describen los elementos que componen dicho modelo y se reportan algunos resultados del proceso reflexivo de dos profesores (uno de preescolar y otro de secundaria). Las reflexiones de los profesores les permitieron centrar su atención sobre la actividad matemática de sus estudiantes, prever sus posibles respuestas y tomar consciencia de las dificultades de aprendizaje. Con respecto a la planeación realizada antes de la aplicación del modelo, se valoró el diseño de actividades con un propósito claro de aprendizaje matemático.

ABSTRACT

This article shows the results from a research, whose main objective was to help basic education teachers to think about the mathematical activity they promote in their students during class. Consequently, we suggest a model of reflection that could help the teachers to analyze specific aspects in their teaching practice. This document describes the elements in which this model was made, and it also shows some of the results from the reflective process of two teachers (one from pre-school and the other from junior high school). Their considerations

PALABRAS CLAVE:

- *Modelo de reflexión*
- *Desarrollo profesional*
- *Pensamiento didáctico*
- *Actividad matemática*

KEY WORDS:

- *Model of reflection*
- *Professional development*
- *Didactic thinking*
- *Mathematical activity*



on the subject allowed them to focus their attention on their students' mathematical activity, to anticipate the probable answers, and to be aware of the learning disabilities. In regard to the planning before carrying out the model, we evaluated the design of the activities with a clear mathematics learning purpose.

RESUMO

Neste artigo, são publicados os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo ajudar os professores de educação básica a refletir sobre a atividade matemática que promovem em seus estudantes durante a aula. Para isso, propôs-se um modelo de reflexão que os ajudaria a analisar aspectos concretos de sua prática docente. Neste documento, os elementos que compõem esse modelo são descritos, e foram reportados alguns resultados do processo reflexivo de dois professores (um de pré-escolar e outro de ensino fundamental). As reflexões dos professores permitiram centrar sua atenção sobre a atividade matemática de seus estudantes, prever suas possíveis respostas e tomar consciência das dificuldades de aprendizagem. Com respeito ao planejamento realizado antes da aplicação do modelo, foi valorada a criação de atividades com um propósito claro de aprendizagem matemática.

PALAVRAS CHAVE:

- *Modelo de reflexão*
- *Desenvolvimento profissional*
- *Pensamento didático*
- *Atividade matemática*

RÉSUMÉ

Dans cet article on présente les résultats d'une recherche dont l'objectif est d'aider les professeurs d'école primaire à réfléchir sur l'activité mathématique qu'ils encouragent chez leurs étudiants dans la salle de classe. Pour cela on a proposé un modèle de réflexion qui les aiderait à faire l'analyse des aspects concrets dans leur pratique de classe. Dans ce document, on décrit les éléments qui composent le modèle et on présente quelques résultats du processus réflexif chez deux professeurs (l'un d'école maternelle l'autre de collègue). Les réflexions des professeurs leur ont permis de centrer leur attention sur l'activité mathématique de leurs étudiants, prévoir leurs possibles réponses et avoir conscience de leurs difficultés d'apprentissage. Par rapport à l'organisation avant l'application du modèle, ils ont prévu la création d'activités avec un objectif d'apprentissage mathématique bien clair.

MOTS CLÉS:

- *Modèle de réflexion*
- *Développement professionnel*
- *Pensée didactique*
- *Activité mathématique*

1. INTRODUCCIÓN

La literatura revisada de investigaciones sobre formación de profesores de matemáticas muestra que varios de los estudios en esta área se enfocan en el análisis de sus conocimientos matemáticos, sus concepciones, actitudes y creencias. En estas investigaciones se analizan las relaciones entre cómo se comprende y se enseña la matemática, y su relación con el aprendizaje de los estudiantes. Tenemos por ejemplo que Thompson (1992) estudió las relaciones entre los conocimientos, concepciones y creencias de los profesores mientras que Fennema y Loef (1992), Grossman, Wilson y Shulman (2005) centraron su interés en conocer y comprender sus conocimientos matemáticos.

Otras investigaciones resaltan las experiencias de reflexión de los profesores y en el trabajo con ellos sobre su práctica docente. Podemos mencionar las de Flores (2007), Kwon y Orrill (2008) y Turner (2008) en las que se muestran evidencias de que la reflexión sobre la experiencia profesional contribuye al desarrollo de los conocimientos matemáticos y pedagógicos de los profesores en servicio. Así, con este trabajo, se quiso favorecer la reflexión de los profesores de matemáticas desde una perspectiva objetiva y crítica para atender las preocupaciones de sus rutinas diarias y aportar herramientas que les permitiera verse como protagonistas y gestores de la actividad matemática que se desarrolla en el aula.

2. ASPECTOS TEÓRICOS Y CONCEPTUALES

Para alcanzar el objetivo de la investigación, se diseñó un modelo metodológico para coadyuvar a los profesores en sus procesos de reflexión. Con la palabra “modelo” no pretendemos mostrar un prototipo ideal para el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas pues, como dice Dewey (1989), el camino de la reflexión no es único ni cerrado, y su éxito depende de la prudencia de los sujetos para despejar sus dudas.

Además, la reflexión no implica tan sólo un conjunto de ideas sino una ordenación secuencial de éstas, en la que cada una determina la siguiente como su resultado mientras que cada resultado, a su vez, apunta y remite a las que le precedió (Dewey, 1989). La reflexión es un proceso de resolución de conflictos y de dudas a la vez que provee una oportunidad para revisar su actuación.

Dewey (1989) menciona que los profesores experimentan inseguridades que los llevan a analizar su experiencia durante la acción o después de ella. Asimismo, Freire (1997) señala que enseñar exige reflexión crítica sobre la práctica y que ésta encierra el movimiento dialéctico entre hacer y pensar sobre lo que se hace. Freire resalta que, en la formación permanente de los profesores, es fundamental trabajar sobre la reflexión crítica y sobre la práctica. Por su lado, Shulman (1986, pp. 11-12) enfatiza el uso de estudios de casos para la enseñanza de varias disciplinas y recomienda este recurso en la formación docente.

Consecuentemente, en esta investigación coincidimos con las ideas de los autores mencionados y, por ende, propiciamos experiencias y herramientas para que los profesores reflexionaran sobre su práctica docente. Para este fin, el modelo diseñado en esta investigación (ver Figura 1) se construyó alrededor del significado de la actividad matemática que surge del triángulo pedagógico tomado de Saint-Onge (1997) en el que identifica la relación profesor - conocimiento como relación didáctica, la relación profesor - alumno como mediación y la relación alumno - conocimiento como estudio.

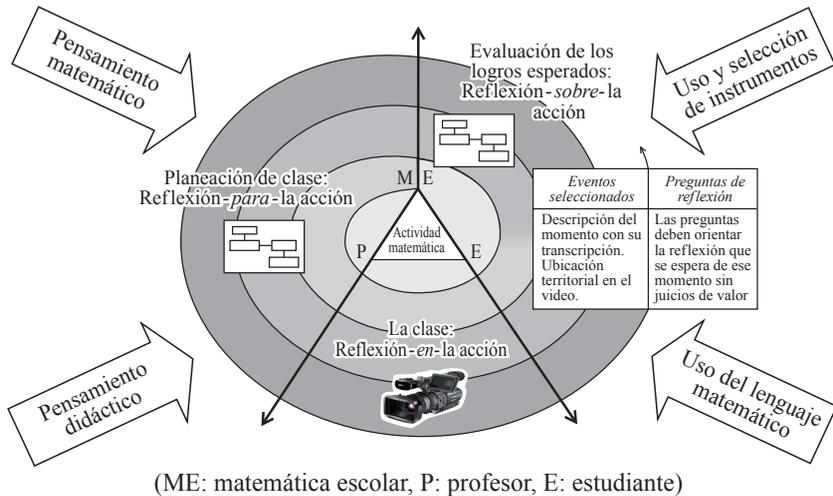


Figura 1. Bosquejo del modelo de reflexión

El modelo le sugiere al profesor considerar procesos y aspectos para la reflexión que le permitan atender elementos puntuales de su práctica docente. Éste consta de tres etapas: primera experiencia de reflexión, *reflexión-sobre-la acción* mediada por herramientas de análisis y nueva experiencia de reflexión. Los componentes del modelo se describen como sigue.

2.1. *Actividad matemática*

La actividad matemática aquí es entendida en términos de Chevallard, Bosch y Gascón (1997) quienes explican que hacer matemática es un trabajo del pensamiento que construye conceptos para resolver problemas, que plantea nuevos problemas a partir de los conceptos así contruidos, que rectifica los conceptos para resolver esos nuevos problemas, que generaliza y unifica poco a poco esos conceptos en universos matemáticos que se articulan entre ellos, se estructuran, se desestructuran y se reestructuran. Al lado de la resolución de problemas meramente matemáticos, la matemática como actividad introduce en muchos casos una componente fundamental: *la matematización*. “Matematizar”, según Treffers (1987), es organizar y estructurar la información que aparece en un problema, identificar los aspectos matemáticos relevantes, descubrir regularidades, relaciones y estructuras.

2.2. *Procesos de reflexión*

Dentro de este modelo, recuperamos algunas ideas de Dewey (1989) y de Schön (1992) para caracterizar los procesos de reflexión *antes*, *durante* y *después* de la actividad matemática que se desarrolla en la clase:

- i. La *reflexión-para-la acción* surge en la interacción de la matemática escolar y el profesor, cuando el profesor analiza la actividad que se va a llevar a cabo en el aula, es decir, la forma como el maestro planea la clase, comprende la temática de estudio, diseña y selecciona los recursos que implementará en el aula.
- ii. La *reflexión-en-la acción* está presente en la interacción del profesor y el estudiante cuando el profesor establece esa relación mediática entre el conocimiento y el estudiante; también está presente en la forma como conduce el aprendizaje esperado por parte de los estudiantes y en la capacidad de responder a las situaciones inesperadas de la clase.
- iii. La *reflexión-sobre-la acción* cumple una función crítica de lo ocurrido en el aula; la forma como el profesor evalúa la interacción entre el conocimiento matemático escolar y el estudiante, desde la perspectiva de la consecución de los objetivos de aprendizaje esperados.

2.3. *Aspectos para la reflexión*

El modelo propone que los profesores centren sus reflexiones en los siguientes aspectos:

2.3.1. *Pensamiento matemático*

El pensamiento, según Vega (1984), es una actividad global del sistema cognitivo que ocurre cuando nos enfrentamos a una tarea o problema, con un objetivo y con incertidumbre sobre la forma de realizarla. Acentuamos entonces que el pensamiento matemático del profesor resulta cuando éste necesita hacer usar sus conocimientos sobre el contenido matemático escolar para desarrollar la práctica profesional (proponer tareas, seleccionar, usar y diseñar recursos, comunicarse en el aula, hacer adaptaciones curriculares, evaluar y profesionalizarse).

De este modo, es conveniente que el profesor domine de los contenidos matemáticos que enseña y además conozca los objetivos de aprendizaje correspondiente al grado en que labora para que pueda utilizarlos como guía para la enseñanza.

2.3.2. *Pensamiento didáctico*

En nuestro modelo hacemos explícitas las diferencias entre lo pedagógico y lo didáctico. Altet (1997) distingue en la enseñanza dos campos de práctica: uno didáctico, de estructuración y gestión de contenidos y otro pedagógico, de gestión y de control interactivo de los hechos de la clase.

Así, en *la pedagogía* se consideran aspectos educativos generales (factores psicosociales, socioculturales y humanos) que estructuran los procesos de enseñanza - aprendizaje intervinientes en cada contexto educativo. *La didáctica* estudia los procesos de enseñanza - aprendizaje de una materia, en nuestro caso de las matemáticas.

Por lo tanto, cuando el profesor domina los contenidos pedagógicos y didácticos de la materia puede, concordando con Shulman (1987), encontrar formas más útiles de representar los contenidos mediante analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones, y demostraciones que permitan hacerla más comprensible a los estudiantes por lo cual el profesor necesita tener claridad en su pensamiento matemático escolar con el objeto de guiar a sus estudiantes hacia la actividad matemática esperada.

En el modelo, este pensamiento, reiteramos, ocurre en las prácticas profesionales del profesor de matemáticas y durante los tres procesos de reflexión: i) *para-la-acción* al realizar adaptaciones curriculares en la planeación de la clase; ii) *en-la-acción* (en la clase) durante la conducción de la actividad matemática prevista; y iii) *sobre-la-acción* al evaluar los aprendizajes de los estudiantes y hacer, nuevamente, adaptaciones curriculares para lo que sigue.

2.3.3. *Uso y selección de instrumentos*

Consideramos *instrumentos* a todos los materiales y recursos didácticos que el profesor emplea para promover la actividad matemática en el aula, entre ellos: los problemas, las preguntas, la hojas de trabajo, los materiales didácticos (manipulables y observables) y las tecnologías digitales.

2.3.4. *Uso del lenguaje matemático*

La matemática tiene, según Chevallard (1991), un lenguaje propio que da claridad a los objetos matemáticos para comunicarlos de manera precisa. Los símbolos y términos matemáticos son determinantes para favorecer la comprensión. Empero, en las matemáticas no se trata siempre de la misma lengua verbal ni, mucho menos, escrita; pues es por ejemplo el álgebra introduce reglas de cálculo que distinguen su lengua de la lengua que corresponde al cálculo numérico (Fillooy, 1999).

2.4. *Herramientas para la reflexión*

En nuestro modelo consideramos que para que el profesor reflexione crítica y objetivamente, sobre los aspectos mencionados anteriormente, requiere de herramientas que lo ayuden a analizar sus prácticas profesionales. Ellas son:

2.4.1. *Las rutas cognitivas*

Las caracterizamos aquí retomando algunas ideas de trabajos de Robert y Rogalski, (2005):

- Se basan en la actividad matemática que el profesor propone a los estudiantes.
- Son un instrumento para esbozar la estructura de los contenidos matemáticos que se proponen estudiar.
- Consideran los procesos matemáticos que podrían realizar los estudiantes para responder a la actividad matemática que propone el profesor y que dan paso a una nueva actividad para tratar los objetos matemáticos propuestos para la clase (ver Figura 2).

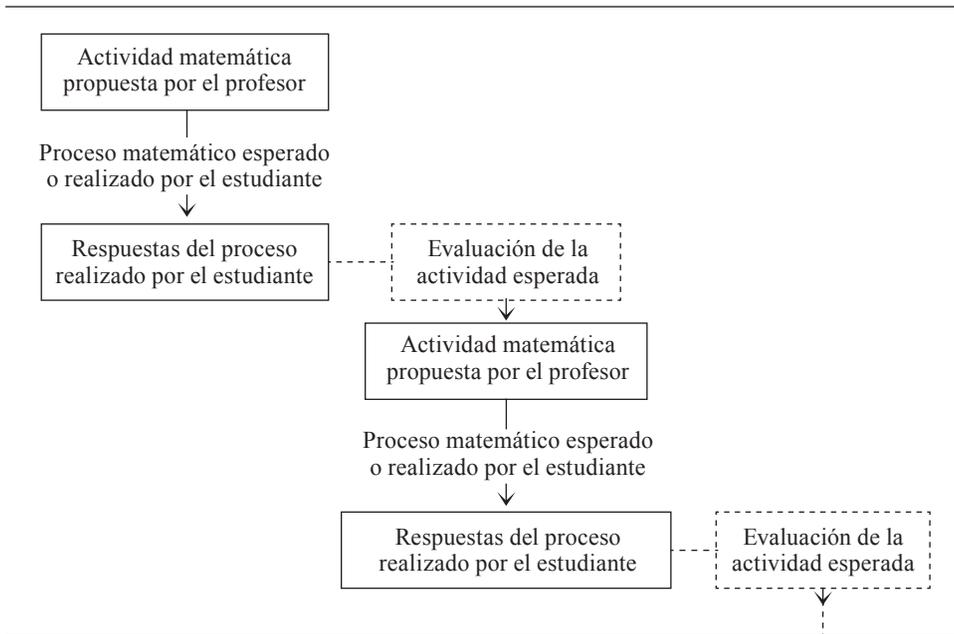


Figura 2. Esquema de ruta cognitiva

Las rutas cognitivas en el estudio se usan como herramienta de análisis para el investigador y de reflexión para el profesor, ya que permiten organizar los objetivos de la clase con respecto a los procesos matemáticos esperados.

2.4.2. Estudios comparativos

Se obtiene de la comparación entre las rutas cognitivas de la clase planeada y la clase realizada. Con este comparativo se pretende promover la reflexión en los profesores sobre los objetivos de aprendizaje que se proponen y los que finalmente logran.

2.4.3. Eventos de la clase

Los vídeos se constituyen en este modelo en un material fundamental para el análisis de las actividades de planeación, la clase y la reflexión colectiva, ya que la constante observación de ellos permite identificar eventos que podrían servir para que el profesor reflexione (sobre situaciones que cambian el curso de la actividad, el cambio de objetivos o el desarrollo de procesos matemáticos

no considerados antes). Así, el estudio comparativo se complementa con la presentación de eventos clave de la clase, en los que se evidencian situaciones de conflicto del profesor, sus reacciones y respuestas ante las preguntas y dificultades de los estudiantes.

Al respecto, Dewey (1989) menciona que cuando se empieza a reflexionar, necesariamente se inicia la observación para tomar nota de las condiciones, observaciones que pueden realizarse mediante el uso directo de los sentidos, otras a través del recuerdo de observaciones previas, propias o ajenas.

2.4.4. *Guía de observación de los eventos de la clase*

De los eventos identificados se genera otra herramienta (ver Figura 3) para orientar la reflexión de los profesores por medio de preguntas que provoquen introspección sobre *¿cómo gestioné mi clase hoy?, ¿qué oportunidades di para promover actividad matemática?, ¿qué oportunidades de aprendizaje dejé pasar?*

| <i>Evento seleccionado</i> | <i>Pregunta de reflexión</i> | <i>Aspecto de reflexión</i> |
|--|---|--|
| Descripción del momento, con su respectiva transcripción. Ubicación temporal en video con el fin de ubicarlo en el mismo, con minutos y segundos. (Para el desarrollo de la actividad se sugiere hacer un videoclip del momento seleccionado) | La pregunta debe orientar la reflexión que se espera de ese momento, evitando emitir juicios de valor, pues lo que se espera es que el maestro se exprese sobre lo que observa de su propio desempeño en el aula. | Identificación del tema sobre el cual se pretende promover la reflexión del maestro. |

Figura 3. Guía de observación de los eventos seleccionados

Los eventos seleccionados, usados como herramienta de reflexión se sustentan en ideas de Schön (1992, p.110) quien habla de la escalera de reflexión, “cuando decir / escuchar y demostrar / imitar se combinan, como generalmente sucede, ofrece una gran variedad de modos y objetos de reflexión posibles que pueden coordinarse para llenar el vacío inherente a cada subproceso: preguntar, contestar, aconsejar, escuchar, demostrar, observar, imitar, criticar...”. Con los eventos se pretende favorecer un diálogo con el profesor a través de preguntas.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

En la investigación de Parada (2009), con la cual se relaciona este artículo, se pretendió promover la reflexión profesional de los profesores de matemáticas desde una perspectiva objetiva y crítica mediada por algunas herramientas que les permitieran verse como protagonistas en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Al respecto, Ponte y Santos (1998) mencionan que no basta con que en los programas de formación de profesores se discuta sobre la matemática y el currículo; es importante, además, que el profesor tenga mente abierta para corregir y mejorar de acuerdo a su experiencia. Concordando con los autores, además de la actitud de cambio del profesor también hace falta orientarlo para que pueda enfocarse en aspectos puntuales de la actividad matemática que promueve en sus aulas; es por ello que proponemos un modelo que guíe esta reflexión. Las preguntas de investigación que guiaron el estudio en mención fueron: ¿Cuál puede ser la influencia, sobre la gestión de la clase, de la reflexión guiada por el modelo? En particular, ¿qué cambios se observan en la función del profesor como mediador entre los estudiantes y los contenidos curriculares? Para dar algunas respuestas a estas preguntas, *es preciso realizar una observación de las prácticas de los profesores antes, durante y después de sus acciones en el aula.*

3.1. Fases de la investigación

La investigación que aquí se reporta es de tipo cualitativo y los investigadores fueron quienes construyeron las herramientas para posteriormente guiar la reflexión de los profesores (véase el § 2.4). La exploración se desarrolla a través de las tres fases descritas a continuación.

3.1.1. Fase inicial: primera experiencia de reflexión

Esta fase tenía como objetivo indagar sobre los aspectos que los maestros consideraban a la hora de planear sus clases y las maneras como reflexionaban sobre los alcances de la clase en relación con el propósito de aprendizaje trazado. Ésta se dividió en tres partes: a) planeación colectiva de una clase, b) puesta en escena de la clase planeada (por un profesor del grupo) y c) reflexión colectiva de lo planeado con relación a lo alcanzado sin intervención de los investigadores. Para la actividad de reflexión colectiva se presentó al grupo de profesores el video de la clase y se empleó una guía de observación de los eventos seleccionados

para provocar introspección sobre *¿cómo di mi clase hoy?, ¿qué oportunidades para promover actividad matemática dejé pasar?*

3.1.2. *Análisis de la fase inicial: construcción de herramientas para favorecer la reflexión*

Además de los documentos (planeaciones y hojas de trabajo diseñadas para los estudiantes) entregados por los profesores, el análisis se apoyó sobre las grabaciones en video de la sesión de planeación, de la clase y de la sesión de reflexión posterior. Este análisis fue realizado por los investigadores con el fin de construir algunas herramientas (las mencionadas en el § 2.4) que ayudaran al profesor a centrar la atención en sus dificultades y fortalezas en relación con los aspectos descritos en § 2.4.

3.1.3. *Proceso de reflexión con los profesores mediado por las herramientas de análisis*

El objetivo de esta etapa fue presentar las herramientas de reflexión construidas en la etapa anterior y con ellas hacer un ejercicio de reflexión con los maestros. Para Dewey (1989) la reflexión de las personas sobre diferentes aspectos de su vida surge del pensamiento individual y social. De ahí que este modelo propone procesos de reflexión individuales y colectivos, a saber:

- a. *Reflexión - sobre - la acción individualizada y mediada por las herramientas de análisis.* Esta sesión se realiza entre los investigadores y cada profesor, aquí se muestra el estudio comparativo apoyado de episodios seleccionados de la clase.
- b. *Reflexión-sobre-la acción colectiva.* En esta sesión el profesor, con quien se reflexiona previamente, hace una exposición a su grupo de trabajo para enriquecer y clarificar sus ideas, para motivar a los compañeros a reflexionar sobre la actividad matemática que promueven en el aula y, también, para que pares se discutan circunstancias y alternativas de apoyo.

3.1.4. *Nueva experiencia de reflexión*

Finalmente, a los profesores (caso de nuestro estudio) se les propuso planear individualmente una nueva clase acorde al calendario escolar, poner en escena esa clase y reflexionar individualmente sobre la actividad matemática planeada y

lograda en esta oportunidad. Aquí se toman como datos la planeación escrita del profesor (entregada con una semana de anterioridad con sus respectivas hojas de trabajo), el vídeo de la clase (el cual es tomado por el investigador, entregando una copia al profesor para su reflexión) y la reflexión escrita entregada por el profesor. En esta experiencia esperábamos observar cómo los profesores hacían uso de las reflexiones y herramientas de análisis diseñadas y trabajadas en las experiencias de reflexión previas.

Consecuentemente, de las etapas anteriores que constituyen el proceso metodológico de la investigación, se estructuran las tres etapas de desarrollo del modelo teórico que aquí presentamos y de las cuales presentamos algunos resultados de dos casos de estudio.

3.2. *Contexto de la investigación y casos de estudio*

La investigación se aplicó dentro del contexto del programa de Maestría en Educación Especialidad Matemática (MEEM) bajo la dirección y coordinación del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, que está dirigida a profesores de educación básica¹ del Estado de México. Dicho programa se desarrolló durante tres años, donde los alumnos en formación cursaron nueve seminarios y a la vez trabajaron un proyecto de desarrollo (como tesis de grado). Para el proceso de la investigación se seleccionaron tres casos de estudio², bajo los siguientes criterios:

- Ser uno de los profesores que dictó la clase planeada de forma colectiva (ver § 3.1.1).
- Laborar en un nivel de enseñanza diferente: uno de preescolar, otro de primaria y otro de secundaria.
- Haber trabajado un contenido matemático diferente de acuerdo con el nivel de enseñanza en el cual labora.

¹ La educación básica en México está compuesta por los niveles de preescolar, primaria (6 grados) y secundaria (3 grados).

² Bogdan y Biklen (1991), explican que un caso de estudio analizado desde el enfoque cualitativo comienza por la recolección de los datos que luego son revisados y explorados con el fin de tomar decisiones acerca de los objetivos del trabajo. Los anteriores aspectos se organizan y distribuyen en un tiempo, se seleccionan las personas que se irán a entrevistar y los aspectos en que se va a profundizar.

Aquí se reportan las reflexiones de dos de ellos como casos de estudio:

- José, profesor de matemáticas con varios años de experiencia, enseña en una escuela de secundaria en la Ciudad de México. Licenciado en educación media, especialidad matemática. La tesis de maestría de José está relacionada con la adquisición del lenguaje algebraico y el uso de la calculadora graficadora Voyage 200 en su práctica docente.
- Lucas, psicólogo educativo que enseña en el tercer grado de preescolar en un jardín del sector rural del Estado de México. En esta institución ha desarrollado sus seis años de labor docente. Él realiza su proyecto de desarrollo sobre el pensamiento numérico en preescolar, específicamente sobre cardinalidad y ordinalidad de los números naturales y las relaciones de orden entre ellos.

Un tercer caso se observó pero no se reporta en este escrito pues tiene ciertas particularidades que nos ha permitido abordarlo desde otras perspectivas y sobre otros de los aspectos para la reflexión que proponemos en nuestro modelo. Dichos estudios aparecen en otras publicaciones como Parada y Sacristán (2010) y en Parada, Figueras y Pluvinage (2011). En dicho caso se puede observar cómo la selección de recursos por parte del maestro lo conduce a un error de carácter conceptual, cuando aborda el tema de equidescomposición de figuras planas.

4. CASOS DE ESTUDIO: REFLEXIONES DE LOS PROFESORES

En investigaciones previas sobre este tema se han buscado, por un lado, precisiones sobre lo que es el conocimiento necesario para enseñar y, por otro lado, caracterizaciones de las formas cómo los profesores se desempeñan en sus clases. Entre ellas rescatamos los aportes de Shulman (1986) quien propone, además de la distinción clásica entre categorías de conocimiento (del contenido, pedagógico y curricular), la consideración de tres formas de conocimiento del profesor: “*propositional knowledge, case knowledge y strategic knowledge*” (p. 10). Shulman (1987) también enfatiza que el profesor transforma su comprensión, sus habilidades y actitudes, en representaciones y acciones pedagógicas.

En nuestro estudio no tendrían relevancia preguntas sobre el conocimiento de los contenidos matemáticos por los profesores (refiriéndonos a § 2.3.1). Reconstruimos a partir de ideas de Shulman (1987) lo que aquí entendemos como

pensamiento didáctico: el conocimiento de la matemática con el propósito de enseñarla y éste como la mezcla entre el desarrollo meramente matemático y la aplicación de la didáctica. El profesor llega a esta mezcla gracias a una comprensión de cómo determinados temas y situaciones problemas se organizan, se representan y se adaptan curricularmente. En los siguientes apartados presentamos algunas de las reflexiones que los dos casos de estudio expresaron sobre este aspecto.

4.1. *Reflexiones emergentes en el caso de José*

Nos interesamos en la reflexión de José y su grupo (seis profesores de educación secundaria) sobre el propósito curricular: *Resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma: $ax + b = cx + d$. Se trata de diseñar una hoja de trabajo para los estudiantes que tenían a su disposición la calculadora Voyage 200.*

4.1.1. *Primera experiencia de reflexión*

En esta etapa no se hizo intervención en los procesos de reflexión de los profesores pues, como se mencionó, se quería observar cómo ellos analizaban sus propias prácticas. No obstante, en esta experiencia, los investigadores fueron acompañando los procesos de reflexión *para, en y sobre-la-acción*.

En la planeación colectiva, José enfatizó en los conocimientos y habilidades previas que deben tener los estudiantes: “saber representar con literales los valores desconocidos de un problema y usarlas para plantear y resolver una ecuación con coeficientes enteros”. El profesor comentó que él ya había trabajado con sus estudiantes el “algoritmo” y el uso de la calculadora, enfatizando en que el propósito de aprendizaje era: “identificar la ecuación del problema, resolverla con lápiz y papel, luego con la calculadora y, al finalizar, exponer los resultados”. Para ello, propuso que los estudiantes resolvieran la hoja de trabajo mostrada en la Figura 4.

José fue cuestionado por sus colegas sobre dos aspectos de su propuesta de planeación:

- i) Trabajar “sólo” un problema en 50 minutos, lo que José resolvió seleccionando otro problema similar. No obstante, si el tiempo de la clase no alcanzaba éste quedaría de tarea.

- ii) Faltaba un momento de la clase para la formalización del contenido de estudio, Al respecto, él respondió que ese era el objetivo de las últimas preguntas de la hoja de trabajo.

| | |
|--|-----------------------------|
| Problema 1 <i>Hallar dos números enteros consecutivos cuya suma sea 143</i> | |
| a) Encuentra la ecuación y escríbela. _____ | |
| b) ¿Qué dificultades encuentran para definir la ecuación? _____ _____ | |
| c) Resuelve en equipo, conforme la tabla con lápiz y papel y con la calculadora voyage 200 el problema; usa los comandos solve, approx y propFrac, si te es necesario. | |
| SOLUCIÓN CON LÁPIZ Y PAPEL | SOLUCIÓN CON LA CALCULADORA |
| | COMPROBACIÓN: |
| SOLUCIÓN: | SOLUCIÓN: |
| d) ¿Cuál de las dos formas te fue más fácil resolver _____ y ¿Por qué? _____ | |
| e) ¿Qué estrategias tomaron para resolver el problema presentado con lápiz y papel y cuales con la calculadora? _____ | |
| f) ¿Qué comandos utilizaste para resolver el problema? _____ | |

Figura 4. Hoja de trabajo de la clase de José

José y su grupo no se percataron de que el problema que proponían se podía resolver usando sólo aritmética, pues al pedir hallar dos números naturales consecutivos, esto indica aproximarse de la mitad de 143, al hacer esto los resultados 71 y 72 surgen fácilmente. Los profesores no previeron que la mayoría de los estudiantes buscaría los resultados con lápiz y papel o con una calculadora tradicional. Es más, si algún estudiante “deseara” hacer la traducción del enunciado verbal para resolver el problema obtendría una ecuación de la forma $x + (x+1) = 143$, misma que se diferencia del tipo de ecuación que se pretendía estudiar, que era de la forma $ax + b = cx + d$.

4.1.1.1. *Reflexiones-para-la acción*

Para José es importante que los estudiantes centren su análisis en la formulación de una ecuación, poniendo énfasis en que su papel en la clase será de mediador y apoyo para que ellos la encuentren usando lenguaje algebraico.

En este aspecto, José nos deja ver uno de sus esquemas de enseñanza: (1) proponer la representación del problema verbal por medio de una ecuación, y (2) hacer uso de la calculadora para comprobar resultados. También se evidencian esquemas en su forma de evaluar y en el diseño de sus hojas de trabajo, que mantiene con el mismo estilo, variando únicamente los “problemas”. Estas afirmaciones las hacemos con base en todas las experiencias de reflexión que tuvieron lugar a lo largo de la investigación.

Desde nuestra mirada, podemos ver en esta primera parte que José manifiesta deseos de superación y mejoramiento de su práctica docente, pero le cuesta trabajo reflexionar sobre las sugerencias que le hacen sus compañeros, y es un aspecto en el que esperábamos que el modelo propuesta incidiera en él, pues consideramos que los procesos de reflexión individuales pueden ser enriquecidos cuando se discuten o se comparten colectivamente.

4.1.1.2. *Reflexiones-en-la acción*

Las acciones y reacciones de José con su grupo de estudiantes en clase nos dejan apreciar su esquema de trabajo: (1) indicaciones generales, (2) lectura de la hoja de trabajo, (3) desarrollo de la hoja de trabajo por parte de los estudiantes y (4) proceso de comunicación de resultados.

Cuando José lee los incisos de la hoja de trabajo y llega al inciso c (ver Figura 4), propone la actividad así:

“Hay que resolver a lápiz y papel y luego se van con la calculadora. Si alguien dice: No puedo. Quiero hacerlo con calculadora primero, hay la libertad”.

A partir de esta explicación, la actividad matemática tomó otro rumbo: más de la mitad del grupo usó la calculadora para buscar por “ensayo y error” los valores de la incógnita de la ecuación, sólo algunos estudiantes plantearon la ecuación dejando de lado los procesos a lápiz y papel. En la clase se observaron estudiantes con dificultades para introducir la ecuación en la calculadora y, aunque identificaron las respuestas “71 y 72”, no usaron su sintaxis.

Para finalizar, José solicitó a los estudiantes que pasaran al frente a socializar sus respuestas usando el *view screen*. Un grupo encontró la ecuación como lo esperaba José, haciendo uso de la sintaxis de la calculadora, los demás grupos encontraron las respuestas esperadas por ensayo y error (usando la calculadora Voyage 200, la calculadora tradicional, así como lápiz y papel). José aceptó las respuestas de los estudiantes, sin pedirles justificaciones o argumentaciones sobre las operaciones, propiedades, reglas usadas para encontrar las respuestas al problema. El profesor tampoco realizó justificaciones matemáticas para explicar o hacer correcciones a quienes socializaron sus respuestas.

De este modo, se observó que José seguía esquemas didácticos que pueden depender de la forma como él concebía las matemáticas a partir de su experiencia docente, lo que evidenciamos en sus expresiones:

“... en la hoja de trabajo planteo el inciso b: *¿qué dificultades encontraste para definir la ecuación?* Porque por la experiencia he encontrado que los equipos no hallan cómo encontrar [la ecuación] del problema”.

Las reacciones de José en clase lo alejaron del propósito planeado, pues él desarrolló su discurso alrededor de las respuestas del problema, más que en los procesos, mismos que le permitirían reforzar la traducción del problema verbal en la ecuación.

El profesor buscó incentivar y motivar constantemente a los estudiantes, tal vez por eso evitó hacer correcciones y profundizar en las dificultades que se presentaron particularmente. Sin embargo, no fue claro por qué deseaba comparar los procesos realizados con lápiz y papel con los de la calculadora, y tampoco por qué los puso en términos de *¿cuál fue más fácil?* (ver de la Figura 2, inciso d). Al parecer José creía que se hacen los mismos procesos y que sólo se cambia de espacio de trabajo.

4.1.1.3. *Reflexiones-sobre-la acción*

José consideró, en esa primera reflexión de la fase inicial (ver inciso 3.2), que la clase que él gestionó generó en los estudiantes la actividad matemática prevista y que además se alcanzaron los objetivos propuestos, él lo expresó así:

“...lograron plantear la ecuación, que es uno de los problemas más fuertes... ya encontrada la ecuación a lápiz y papel, todavía hay problemas con ellos, se les dificulta el uso del algoritmo. Es más fácil con la calculadora”.

José pensó en ese momento que las actividades planteadas favorecieron a la mayoría de los estudiantes porque llevaban más de un año trabajando estos conceptos con la calculadora y que la mayoría de los alumnos aprendió el contenido de la clase. No obstante, su reflexión es:

“De acuerdo a lo vivido, para mí los conocimientos matemáticos más importantes fueron: el planteamiento de la ecuación... el conocimiento de un número consecutivo se trae desde el primer año, aun así cuesta muchísimo. Hay que rescatar el que los niños empiecen a trabajar con el concepto de incógnita”.

En esta primera oportunidad que José tuvo para reflexionar de manera guiada sobre su práctica docente, se propició que él pensará en algunos elementos que no había tenido en cuenta antes, entre ellos: entender el significado de la actividad matemática, identificar los objetivos de aprendizaje planeados y, sobre todo, confrontarlos con lo logrado por el estudiante en la clase.

4.1.2. *Reflexiones-sobre-la acción* mediadas por las herramientas de análisis

Del análisis de la etapa inicial de José surge el comparativo de rutas cognitivas (ver Figuras 5 y 6) y la selección de eventos en los que José actuó o reaccionó frente a las inquietudes de los estudiantes, reacciones que desencadenaron o no la actividad matemática esperada.

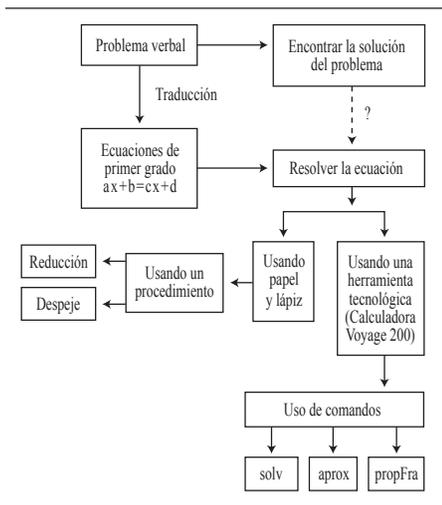


Figura 5. Ruta cognitiva de clase planeada

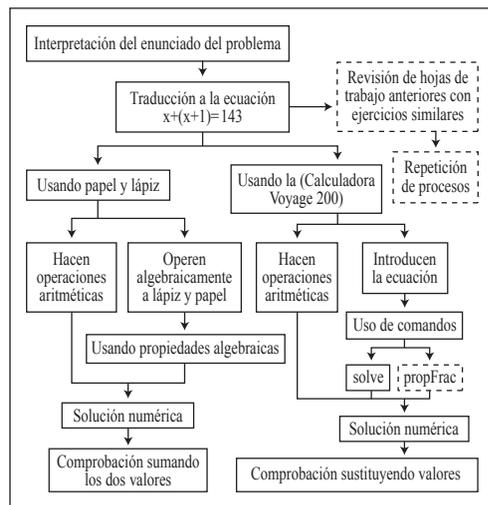


Figura 6. Ruta cognitiva de los procesos realizados por los estudiantes durante la clase

En el apartado siguiente se exhiben las reflexiones expresadas por José, las cuales fueron inducidas por las herramientas de análisis antes expuestas.

4.1.2.1. *Reflexiones individualizadas*

En la reflexión individualizada, los investigadores presentaron evidencias de aspectos relacionados con su pensamiento pedagógico y didáctico; sus primeras reacciones fueron justificaciones enfatizando en las dificultades de los estudiantes. Posteriormente, se mostró al profesor un episodio en el que los estudiantes sacaron una hoja de trabajo desarrollada en una clase anterior donde aparece el problema: “Hallar dos números pares consecutivos cuya suma sea 462” evidenciando que el formato era exacto al que presentó en la clase pasada. Luego, se le mostró otro evento (del final de la clase, donde entrega otra hoja de trabajo) con el problema: “Hallar dos número enteros IMPARES consecutivos, cuya suma sea 644”. Al respecto le preguntamos al profesor: *¿por qué además de conservar el diseño de las hojas también propone el mismo tipo de problema?* Y el profesor respondió que los estudiantes tienen dificultad para comprender la expresión “números consecutivos”, por eso necesita reiterar ejercicios del mismo tipo.

De lo anterior, se observa en el esquema de enseñanza de José un fuerte énfasis en que los estudiantes lleguen a la respuesta esperada de un problema, lo que es explícito cuando dice: “En matemáticas, el alumno puede resolver un problema de la forma que quiera, pero siempre y cuando llegue al resultado correcto”.

Ante las evidencias presentadas a José sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico, unas de sus primeras reflexiones fueron: “...a lo mejor no darles directamente la calculadora, ‘que no’ tengan la hoja y tengan a la vez la calculadora... Porque a lo mejor ‘el uso’ de la herramienta ya se vició. Entonces lo que hay que hacer es darle otro sentido, otra forma”, “... se van a replantear las actividades, pues en el mismo video se está observando que no es la forma adecuada...”.

También se invitó a José para que reflexionara sobre la forma como se socializaron las respuestas y el porqué estuvieron ausentes sus correcciones a los procedimientos realizados por los estudiantes: “Bueno, primero la intención ahí no era encauzarlo así directamente y decirle <<bueno, es que lo hiciste mal>>, sino ver a los otros equipos cómo lo resolvieron para darse cuenta de los errores que tenían”.

Algunas reflexiones por parte del profesor, luego de enfrentarse con las evidencias de su forma de enseñar los contenidos matemáticos, fueron: *“Hay que retomar la hoja otra vez, los momentos de trabajo, que los alumnos lleguen primero a buscar su ecuación y, ya que tengan su ecuación, a resolverlo con lápiz y papel y el tercer momento podría ser darles la calculadora. Compruébalo con la calculadora pero siguiendo la sintaxis que es lo que se necesita”*. Uno de los alcances del proceso de reflexión con José es que pudo comprender que los procesos realizados a lápiz y papel son diferentes que los que se realizan con la calculadora.

4.1.2.2. *Reflexiones expuestas por José a sus colegas*

Al parecer, cuando José llegó a esta sesión, tuvo la oportunidad de analizar la forma en como se reflexionó sobre la primera etapa del proceso y quiso compartirlo con sus compañeros, algunas de sus expresiones fueron:

“Después de veinte años de trabajo, nunca nos habían filmado y nunca nos habíamos analizado así. El análisis lo hacemos siempre, revisamos una clase, cómo nos salió, si nos gustó o no. Como maestros nos damos cuenta del trabajo que hacen los alumnos y el trabajo que nosotros no hacemos...”

“Para encontrar la solución de la ecuación, les dimos dos caminos al alumno: a un lado con lápiz y papel, y al otro con calculadora. Yo les di la facilidad de que lo resolvieran como pudieran. Para mí, eso fue un error, porque a lo mejor la hoja no estaba bien estructurada, por eso los alumnos se fueron por cuatro caminos ‘para llegar’ al resultado. Pero lo importante no era que llegaran así, porque con este problema sencillo pueden hacerlo, pero con problemas mucho más difíciles a lo mejor no va a ser apropiado el método que usan. Y sería mejor que hicieran álgebra”.

La reflexión guiada por las herramientas favoreció, en José y su grupo, el análisis de episodios y situaciones que no habían percibido como oportunidades para su desarrollo profesional.

4.1.3. *Nueva experiencia de reflexión*

En la nueva experiencia José planeó una clase sobre sistemas algebraicos y presentó una hoja de trabajo en la que priorizó los procesos a lápiz y papel. En la clase se observó en él una actitud más reflexiva en las interacciones con los estudiantes, lo cual constituyó un avance en el pensamiento didáctico de José.

Es importante reconocer que en la nueva experiencia de reflexión, José quiso implementar las reflexiones realizadas en este aspecto en la primera experiencia de reflexión, especialmente presentó modificaciones en el diseño de sus hojas de trabajo. El profesor expresó que en esta oportunidad enfatizaría más en la traducción a la ecuación (aspecto relacionado con el lenguaje que constituye el § 2.3.4) y que cuando ya hayan terminado los procesos usando lápiz y papel, les entregará las calculadoras para que, posteriormente, realicen los procesos que se piden con el apoyo de ellas.

José recalcó que para él el trabajo en equipos es de gran importancia, pero también, que éste necesita la intervención del profesor cuando emergen dificultades. Aquí se observó mayor comprensión por parte del profesor sobre lo que significa ser mediador entre el contenido matemático escolar y el estudiante.

4.2. *Reflexiones emergentes en el caso de Lucas*

El grupo de Lucas estuvo compuesto por seis profesores de preescolar, en el cual Lucas es el único hombre. La sesión de planeación colectiva de este grupo, Lucas la inició con una breve descripción de los niños que conformaban el grado de tercero de preescolar con quienes él trabajaba (grupo conformado por 26 alumnos, 15 de ellos estuvieron con él el año anterior y lograron buen conteo oral hasta treinta. Los demás niños se iniciaban en el conteo y reconocimiento de los números hasta el diez) El profesor comentó que estaba enfrentando dificultades debido a las diferencia socio-cognitivas de los niños, por ello tuvo que dividir el grupo en 5 equipos, cada uno con un monitor, siendo éste el de mayor habilidades matemáticas.

Posteriormente, los profesores se remitieron al programa de preescolar para seleccionar el tema de acuerdo con campo formativo³ de pensamiento matemático. El grupo optó por trabajar el aspecto numérico y la competencia: *utilizar los números en situaciones variadas que implican poner en juego los principios del conteo*. Los profesores eligieron este propósito por la necesidad de ser tratado

³ El programa de preescolar está estructurado en seis campos formativos y competencias: desarrollo personal y social, lenguaje y comunicación, pensamiento matemático, exploración y conocimiento del mundo, expresión y apreciación artística y desarrollo físico y salud. El campo de pensamiento matemático se organiza en dos aspectos relacionados con la construcción de nociones matemáticas básicas: Número, y Forma, espacio y medida (SEP, 2004).

por la mayoría del grupo en clases ulteriores a su plan de trabajo. Para el trabajo de la competencia antes mencionada, los profesores seleccionaron una actividad que se llamaba las “caritas”, la cual fue expuesta por Lucas así:

“...las ‘caritas’, me parece una actividad buena porque ellos tienen que ver la estrategia a utilizar para repartir... una vez ya en la actividad con los dados ellos tienen que contar o sobre contar... Finalmente les puedo decir que me pongan en un papel la cantidad que cada quien ganó... Ahí ya estamos viendo el número como su representación...”.

4.2.1. *Primera experiencia de reflexión*

Luego de seleccionar la actividad expuesta anteriormente por Lucas, el grupo de profesores comenzó a diseñar el plan de la clase de acuerdo con los parámetros que en preescolar se usan: *tiempo, procesos esperados, manifestación, contenido, objetivo del niño y materiales*. Finalmente, y después de una discusión, organizaron las actividades de la clase así: 1) organizar el grupo en cinco equipos, 2) dar las instrucciones o reglas del juego, 3) repartir las fichas, 4) dar paso al desarrollo de la actividad y, 5) plantear preguntas para establecer relaciones de orden a través de la comparación de cantidades.

4.2.1.1. *Reflexiones-para-la acción*

Para Lucas y su grupo de trabajo, fue de gran importancia conocer las características del grupo, entre ellas los pre-saberes de los niños, porque fueron la base para planear las actividades de la clase. Esta aseveración coincide con lo que expone Ponte (2001), él menciona que las decisiones pedagógicas del profesor dependen de la existencia de un conocimiento sobre el contenido que se enseña y acerca de lo que conocen los estudiantes. Una de las reflexiones de Lucas al respecto fue: “*La dificultad para mí es con los que acaban de ingresar, porque en ellos he notado que para realizar sus actividades observan a los demás, yo sé que están aprendiendo con sus compañeros*”.

Por último, Lucas, al identificar las características individuales y grupales de sus estudiantes, pudo prever posibles dificultades didácticas que podría enfrentar en la clase y también el tiempo para el desarrollo de las actividades.

4.2.1.2. Reflexiones -en-la acción

Lucas inició la clase pidiéndoles a los niños que repartieran equitativamente un número de fichas. Se observó que los niños realizaron la repartición con tres estrategias diferentes: 1) arbitrariamente y balanceando cantidades, 2) repartiendo la misma cantidad a cada niño y verificando cuántas sobran para hacer un nuevo reparto, y 3) repartiendo de uno en uno hasta que se acababan con el total de fichas. Después de que Lucas verificó que, efectivamente, cada grupo tenía bien repartidas las fichas, dio paso al siguiente episodio.

En un segundo momento, se siguió trabajando la cardinalidad de los números naturales con operaciones implícitas en cada una de las consignas del juego. El juego consistía en que se daban una serie de tarjetas (las cuales guiaban el juego) y un recipiente con fichas. La primera consigna⁴ dada era decidir quién iba a empezar el juego y quién lo seguía. Las tarjetas tenían una imagen y cada una tenía una indicación, de esta manera: “carita feliz” (se jugaba el dado y se tomaban las fichas del recipiente que los puntos del dado indicaba), “carita triste” (se debían devolver al recipiente las fichas que indicaban los dados), flecha (indicaba que se devolvía el juego) y tarjeta en blanco (indicaba que se concedía el turno). Durante el desarrollo del juego se presentaron algunas dificultades debido a la insuficiente explicación de lo que indicaba cada tarjeta y en otros casos a las interpretaciones de los niños.

La instrucción de la flecha fue imprecisa para los niños pues ellos no entendieron cómo se devolvían. La mayoría de los niños interpretó la flecha según la dirección que observaban en ella de acuerdo a la forma como la estaban viendo, como se puede leer en el siguiente fragmento.

Alumno: ¿Qué hacemos con esta?

Lucas: Se regresa al juego.

Alumno: ¿Hacia dónde? ¿Hacia allá? [Indica con la dirección de la flecha de la tarjeta] ¿o hacia allá? [Voltea la tarjeta hacia la otra dirección]...

No obstante, el significado que algunos niños le dieron al manejo de la ficha en blanco resultó interesante, pues en cuanto la tomaban le asignaron la etiqueta de

⁴ “Un apoyo importante de la intervención educativa para que los niños fortalezcan su capacidad de observación es el uso de preguntas o consignas que no sólo promuevan la identificación de detalles, sino la descripción de lo que se observa y la comparación entre elementos, que pueden dar lugar a la elaboración de explicaciones a partir de lo observado” SEP (2004, p.83).

“cero”, cuyo significado y representación eran desconocidos hasta entonces. Sin embargo, como a las demás tarjetas le asignaban un valor numérico, para ellos fue natural decirle *cero*.

Alumno: Profesor, si cae cero ¿qué vamos a hacer?

Lucas: Ah, si sale cero no hacen nada. ¿A quién le tocó?

Alumno: A ella.

Lucas: Entonces a ella no le toca nada, porque esa dice *nada*.

Lucas no da explicaciones a la interpretación del niño, pero le explica que *no hace nada*, como cuando se le suma cero a una cantidad y queda igual, pues en las otras tarjetas sumaban y restaban sin darse cuenta. Durante la actividad el profesor fue atendiendo las particularidades de sus estudiantes, lo que llevó a que se extendiera el tiempo. Cuando el profesor dio por terminado el juego, les pidió que cada uno contara las fichas que tenían y les planteó la instrucción así:

“Ahora necesitamos saber quién tiene más fichas. En cada mesa les voy a colocar unos papelitos y cada quién tiene que anotar en ese papel la cantidad que haya ganado”.

Después de verificar que los estudiantes habían contado correctamente sus fichas, Lucas da paso al trabajo de la representación numérica de cantidades. Para ello se usó una tira numérica que estaba dispuesta en la parte superior del pizarrón. Los niños después de contar las fichas que tenían, tomaron una vara de madera, se acercaron a la tira numérica, contaron hasta el número que correspondía a la cantidad de sus fichas, lo observaron y lo copiaron (Figura 7).



Figura 7. Representación de la cantidad apoyándose en la tira numérica

La actividad favoreció a la mayoría de los niños en el desarrollo de sus estrategias cognitivas porque luego de que copiaban el número de la tira se devolvían a compararlo y rectificarlo, pero hubo niños que al contar mal escribían

el número al que llegaban sin ser el correspondiente a la cantidad que tenían. Finalmente, Lucas recogió la hoja donde cada niño representó la cantidad que tenían, verificando si el número había quedado bien escrito para pasar a la actividad de cierre.

Lucas trabajó las relaciones de orden mayor, menor o igual a través de preguntas como: ¿Quién tiene más fichas?, ¿quién tiene menos fichas? Estas preguntas las resolvieron observando en la tira numérica, es decir, quién estaba más lejos a la derecha o la izquierda. Finalmente, el profesor hizo preguntas como *¿quién fue el primero, el segundo, el tercero?* Aquí Lucas fue mencionando el lugar que le correspondía a cada niño según la posición que ocupaba en la tira numérica.

4.2.1.3. *Reflexiones-sobre-la acción*

En la sesión de reflexión colectiva Lucas mencionó que la actividad ayudó a nivelar a los estudiantes que tenían dificultades para construir sus nociones de conteo. Pero aludió que había realizado, en una clase posterior, actividades de refuerzo personalizado con los niños que tuvieron dificultades al resolver las tareas propuestas. No obstante, el profesor manifestó frustración porque no todos los niños desarrollaron la actividad matemática que él esperaba.

Para Lucas la planeación fue importante pues la estructura y orden de las consignas le permitieron prever las posibles respuestas y dificultades de los niños. Empero, tuvo claro que debía llevar la actividad según el ritmo de los estudiantes y por ello debía realizarle algunas adaptaciones.

Para sus compañeras, según lo que manifestaron en esta sesión de reflexión colectiva, Lucas se desvió de los objetivos propuestos y no se enfocó en lo que se había acordado con relación a la cardinalidad. Sin embargo, después de observar el video de la clase concluyeron que la gestión de la clase por parte de Lucas había favorecido las habilidades comunicativas de los estudiantes, la ampliación del rango de conteo oral y la evocación de conocimientos previos que les facilitó la justificación de sus respuestas.

Para Lucas es importante dar las mismas oportunidades a los niños en clase para así lograr que los niños avanzados ayuden a los que apenas comienzan con la construcción de la serie oral. Finalmente, en esta reflexión, se mencionó que Lucas amplió las preguntas de acuerdo con las inquietudes de los niños y que por medio de ellas fue conduciendo a los niños para lograr los objetivos formulados para la clase.

4.2.2. *Reflexiones-sobre-la acción mediadas por las herramientas de análisis*

Del proceso descrito, seleccionamos una serie de episodios de la clase en los que consideramos valía la pena ayudar a reflexionar a Lucas, especialmente para que revisara las maneras específicas de la enseñanza de las matemáticas en este nivel. Esto porque él ha desarrollado aprendizajes didácticos desde la experiencia docente, dado que su formación profesional es en psicología.

4.2.2.1. *Reflexiones individualizadas*

Con relación a aspectos relacionados con su pensamiento didáctico se le mostró a Lucas un episodio en el cual una niña va contando con un dedo cada punto del dado y con la otra mano va agarrando la ficha. Con esto se quería saber si Lucas había previsto las posibles estrategias de los niños para resolver la situación y si las actividades planeadas tenían un propósito.

Lucas constantemente expresó autocríticas y cuestionamientos de sus propias acciones, además dijo que retomaría esta experiencia como aprendizaje. En este caso, aunque el profesor era reflexivo y consciente de su labor, este ejercicio de análisis con el apoyo de las herramientas resultó provechoso, dado que los profesores no alcanzaban a ver todas las situaciones que se presentaban durante la clase. Otro aspecto relevante del pensamiento didáctico de Lucas fue el uso de la tira numérica, se le indagó de dónde surgió la idea y cómo había sorteado las dificultades que podrían surgir con su uso.

Posteriormente, se le presentó y explicó a Lucas el estudio comparativo de la clase planeada y la lograda (ver Figuras 8 y 9); esto para guiar los procesos de reflexión de Lucas sobre la actividad matemática que posibilitó para sus estudiantes. En este caso, no se realizó sólo una ruta cognitiva de la clase realizada, sino una de cada una de las partes en que ésta terminó desarrollándose, esto por su extensión y complejidad.

Lucas, al analizar dicho comparativo, pudo identificar aspectos en los que él considera debe seguir trabajando *“Ahora vuelvo a ver esto, me queda claro que cuando planeo una actividad, necesito ver en qué momento tengo que hacer una evaluación; necesito, como docente, reflexionar de lo que hago y digo”*.

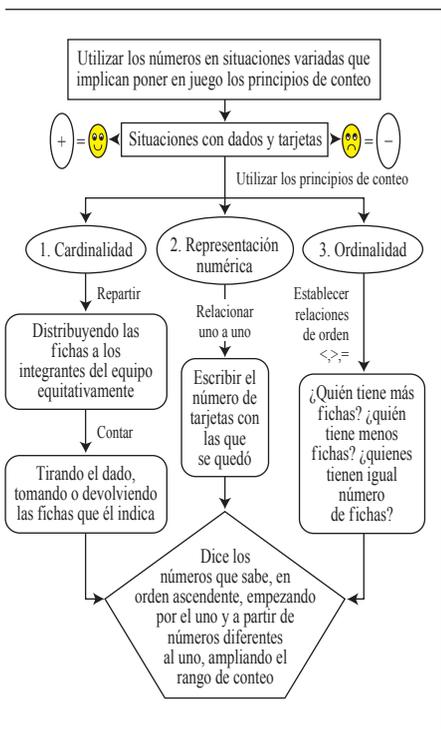


Figura 8. Ruta cognitiva de la clase planeada por Lucas y su equipo de trabajo

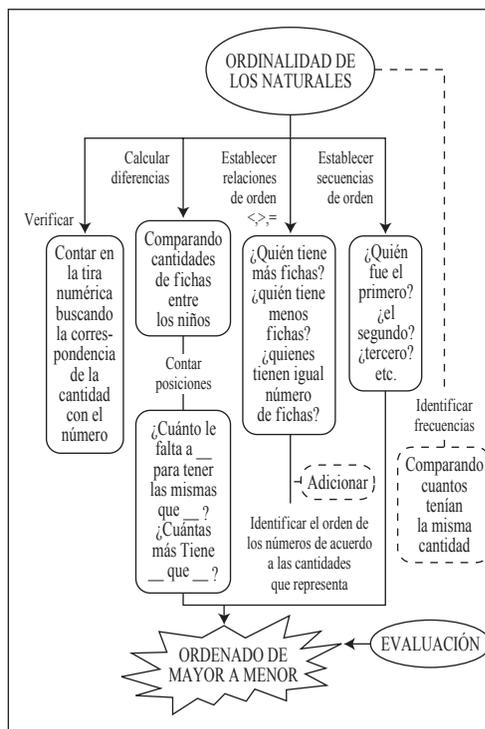


Figura 9. Ruta cognitiva del episodio final de la clase puesta en escena por Lucas

Por último, fue interesante observar que, aunque Lucas tenía grandes fortalezas en su práctica, había aspectos que se escapan a luz de sus ojos en medio de la actividad de clase, por eso se rescata la relevancia de la reflexión sobre la acción con el apoyo de las herramientas de análisis pues se pueden evidenciar aspectos de la clase que merecen atención.

4.2.2.2. Reflexiones expuestas por Lucas a sus colegas

Lucas exhibió a sus compañeras las rutas cognitivas elaboradas de la actividad planeada y la desarrollada por los niños. Frente a las evidencias mostradas y los comentarios que acompañaron los episodios presentados anteriormente por Lucas, sus colegas manifestaron un cambio de pensamiento en relación con la primera reflexión y le resaltaron al profesor el haber aprovechado al máximo las situaciones que se dieron en la clase a favor del aprendizaje de los niños.

4.2.3. Nueva experiencia de reflexión

La nueva experiencia realizada por Lucas se desarrolló tres semanas después del proceso de reflexión inicial. El profesor planeó otra actividad sobre el mismo tema, pues para él se requería reforzar el conteo con algunos niños del grupo. En la nueva actividad, los estudiantes tenían que usar vasos y cucharas para trabajar sobre cantidades de agua.

Lucas en su nueva experiencia comentó que encontró dificultades en el desarrollo de la clase. En el primer evento seleccionado mostró que tuvo que buscar alternativas porque los niños manifestaron cansancio. Para contrarrestar dicho cansancio el profesor tuvo que proponer una actividad *en-la acción* (usando monedas) para captar la atención de los niños y para que ellos comprendieran el valor posicional de las cifras. En esto se manifiesta un avance de Lucas en el uso y la selección de instrumentos (véase el § 2.3.3). En la reflexión-sobre-la acción de Lucas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico, evidenció que pudo identificar que le faltó un registro de los errores de cada equipo para comentarlos y aprovecharlos y con ello dar más explicaciones.

Finalmente, Lucas manifestó que todo el proceso de reflexión le dejó ver que cada clase trae sus propios retos, que aunque sean previstos requieren de la reflexión-en-la acción del docente y de sus habilidades pedagógicas y didácticas que permitan conseguir la actividad matemática esperada por parte de los estudiantes.

5. CONCLUSIONES

El proceso de reflexión les permitió a los dos profesores valorar la planeación a través de una organización de contenidos que los condujera gradualmente a la consecución de los objetivos de aprendizaje por parte de sus estudiantes. El estudio comparativo, como herramienta para reflexionar, permitió valorar el nivel de matematización logrado por los estudiantes en la clase, comparado con la actividad matemática planeada.

De los elementos observados relacionados con las preguntas de investigación (§ 3) destacamos los siguientes: Las reflexiones que se realizaron durante la aplicación del modelo posibilitaron que los docentes casos de estudio se concientizaran sobre la necesidad de pensar en las posibles respuestas de los estudiantes a las tareas y a las dificultades que habían enfrentado en la fase inicial del experimento:

- José no había percibido que los estudiantes no tradujeron el problema verbal a una ecuación por el tipo de problema que propuso y por el uso de la calculadora.
- Lucas se había propuesto actividades cuya demanda cognitiva va más allá de lo que los niños podían comprender a esa edad.

Tanto en José como Lucas observamos un interés por captar la atención de los estudiantes mediante la realización de actividades variadas y motivantes. Las herramientas de análisis ayudaron a los profesores a valorar que las actividades requieren tener un propósito de aprendizaje específico y, además, que es conveniente prever alternativas para las posibles dificultades que enfrentan los estudiantes para realizarlas.

Este estudio mostró la importancia de confrontar a los docentes con sus maneras de enseñar. En los profesores casos de estudio se pudo observar el impacto que las reflexiones realizadas tuvieron en sus esquemas de enseñanza, ellos reconocieron que las actividades planeadas pueden transformarse por las interacciones que se dan en la clase y que sus esquemas pueden flexibilizarse para atender de la mejor manera las situaciones de aprendizaje. En el sentido de Shulman (1986), podemos acertar que el experimento tuvo efectos de adquisición y enriquecimiento del conocimiento profesional de los docentes. Es así como esta investigación nos abre una ruta de investigación que permite aportar herramientas de desarrollo profesional docente basadas en procesos reflexivos individuales y colectivos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Altet, M. (1997). *Les pédagogies de l'apprentissage*. Paris, France: PUF.
- Bogdan, R. & Biklen, S. (1991). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto, Portugal: Porto Editora.
- Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et d'Informatique de Grenoble*. Grenoble, France: LSD2, IMAG-Université Joseph Fourier.
- Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona, España: ICE/Horsori.
- Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. Barcelona, España: Paidós.
- Fennema, E., & Loef, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 147-164). New York, USA: Macmillan Publishing Company.

- Filloy, E. (1999). Aspectos teóricos del álgebra educativa. D.F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Flores, P. (2007). Profesores de Matemáticas Reflexivos: Formación y Cuestiones de Investigación. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 1(4), 139-159.
- Freire (1997). *Pedagogía de la Autonomía*. D.F., México: Siglo XXI.
- Grossman, P., Wilson, S., & Shulman, L. (2005). Profesores de sustancia: El conocimiento de la materia para la enseñanza. Profesorado. *Revista de Currículo y Formación de Profesorado*, 9(2), 1-25.
- Kwon, N. Y. & Orrill, Ch. H. (2008). A comparison study of a teacher's reflection. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 352). Morelia, México: PME.
- Parada, S. (2009). *Reflexión sobre la práctica profesional: actividad matemática promovida por el profesor en su salón de clases* (Tesis de maestría inédita). Centro de investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.
- Parada, S. E. & Sacristán, A. I. (2010). Teachers' Reflections On The Use Of Instruments In Their Mathematics Lessons: A Case-Study. In M. Pinto & T. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4. pp. 25-32). Belo Horizonte, Brazil: PME.
- Parada, S., Figueras, O. & Pluvinae, F. (2011). Un modelo para ayudar a los profesores a reflexionar sobre la actividad matemática que promueven en sus clases. *Revista de educación y pedagogía*, 59, 85-102.
- Ponte, J. P. (2001). A investigação sobre o professor de Matemática: Problemas e perspectivas. *Educação Matemática em Revista*, 11, 10-13.
- Ponte, J. P. & Santos, L. (1998). Prácticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante*, 7(1), 3-33.
- Robert, A. & Rogalski, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational Studies in Mathematics*, 59(3), 269-298.
- Saint-Onge, M. (1997). *Yo explico pero... ¿ellos aprenden?* Bilbao, España: Ediciones mensajero.
- Schön, D. (1992). *La formación de profesionales reflexivos*. Madrid, España: Paidós/MEC.
- Secretaría de Educación Pública (2004). *Plan y programas de educación preescolar*. D.F., México: SEP.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In D. A. Grows (Ed.), *International Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 127-146). New York, USA: Macmillan.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas project*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- Turner, F. (2008). Growth in teacher knowledge: Individual reflection and community participation. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 353-360). Morelia, México: PME.
- Vega, M. de (1984). *Introducción a la psicología cognitiva*. Madrid, España: Alianza.

Autores

Sandra Evely Parada. Universidad Industrial de Santander, Colombia. saevpa@gmail.com

Francois Pluinage. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.
francois.pluinage@math.unistra.fr