Lluís Albarracín, Núria Gorgorió

PROBLEMAS DE ESTIMACIÓN DE GRANDES CANTIDADES: MODELIZACIÓN E INFLUENCIA DEL CONTEXTO

Problematizing the estimation of large numbers: Modeling and the influence of context

RESUMEN

En este artículo introducimos los problemas de estimación de grandes cantidades. Nos proponemos estudiar la presencia de procesos de modelización matemática y la influencia del contexto de estos problemas en las propuestas de resolución de alumnos de Educación Secundaria. A partir de un análisis cualitativo de diferentes dimensiones de las propuestas recogidas (respuesta orientada a la pregunta, estrategias, éxito en la resolución), estudiamos la existencia de relaciones entre las estrategias propuestas por los alumnos y los contextos planteados en las situaciones de los enunciados de los problemas, y la modelización de las situaciones planteadas. De los datos recogidos en nuestro estudio se deduce que el contexto puede influir en las propuestas de resolución que hacen los alumnos. Concluimos que este tipo de problemas pueden ser utilizados para introducir la modelización en las aulas.

PALABRAS CLAVE:

- *Resolución de problemas*
- *Estimación*
- *Contexto*
- *Modelización*

ABSTRACT

This article introduces the problematization of estimating large numbers. We study the presence of mathematic modeling processes and the influence of context in problem solving that secondary education students propose. As a result of a qualitative analysis, we divided it into three categories: solution-focused question, strategies and a successful problem solving. This analysis allows us to study the relationships that exist between the strategies proposed by students and the context given when solving a mathematical sentence. We also study the modeling of those situations. From the data collection in this study, we implied that the context may influence the answers students propose for problem solving.

KEY WORDS:

- *Problem solving*
- *Estimation*
- *Context*
- *Modeling*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2013) *16* (3): 289-315.
Recepción: Mayo 16, 2012 / Aceptación: Julio 9, 2013. DOI: 10.12802/relime.13.1631

We conclude that these kinds of problems may be used as a tool for introducing mathematical modeling in the classroom.

RESUMO

Neste artigo, introduzimos os problemas de estimativa de grandes quantidades. Nos propomos estudar a presença de processos de modelização matemática e a influência do contexto desses problemas nas propostas de resolução de alunos da Educação Secundária. A partir de uma análise qualitativa, obtivemos tres categorias de análise: resposta orientada à pergunta, estratégias e êxito na resolução. Por meio desta análise, estudamos a existência de relações entre as estratégias propostas pelos alunos e os contextos sugeridos nas situações dos enunciados dos problemas, assim como a modelização das situações dadas. Dos dados recolhidos no nosso estudo, se deduz que eo contexto pode influir nas propostas de resolução que os alunos fazem. Concluímos que este tipo de problemas pode ser utilizado para introduzir a modelização nas aulas.

PALAVRAS CHAVE:

- *Resolução de problemas*
- *Estimativa*
- *Contexto*
- *Modelização*

RÉSUMÉ

Dans cet article on introduit les problèmes d'estimation de grands nombres. On s'est proposé d'étudier les processus de modélisation mathématique et l'influence du contexte de ces problèmes dans les résolutions des élèves de collège en Espagne. Grâce à une analyse qualitative, on est arrivé à trois catégories pour analyser les résultats: les réponses orientées à la question, les stratégies et le succès dans la résolution. On a analysé aussi les relations entre les stratégies proposées par les élèves et les contextes des situations dans les énoncés des problèmes, ainsi que la modélisation des situations à résoudre. D'après les données recueillies par notre étude, on déduit que le contexte peut influencer les propositions de résolution des élèves. On conclut que ce type de problèmes peuvent être utilisés pour introduire la modélisation dans la salle de classe.

MOTS CLÉS:

- *Résolution des problèmes*
- *Estimation*
- *Contexte*
- *Modélisation*

1. Introducción

En este artículo presentamos un estudio con problemas de estimación de grandes cantidades como una oportunidad de introducir la modelización en las aulas de matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria (ESO, 12-16 años) en España.

Este tipo de problemas se centran en plantear a los alumnos tareas en las que deben estimar el valor de una cantidad real que sea considerablemente grande, fuera del alcance de su conocimiento cotidiano. Estos problemas pueden ser resueltos de formas diversas, pero la resolución, a partir de la creación de un modelo matemático que permita a los alumnos explicar la realidad estudiada y distinguir los elementos esenciales de aquellos que son superfluos para su resolución, puede permitir conseguir mejores estimaciones.

Los problemas utilizados se presentan a los alumnos con enunciados que los sitúa en un determinado contexto cotidiano, por lo que distinguir los elementos relevantes que intervienen en la resolución de aquellos elementos que lo son menos, es una tarea difícil para los alumnos dada la complejidad de la realidad representada en las situaciones planteadas. Las mayores dificultades con las que se encuentran los alumnos al trabajar con estos problemas son las siguientes: los procesos de estimación, que no se trabajan de forma directa en las aulas (Segovia & Castro, 2009); los procesos de modelización, que pretendemos introducir; y el nivel de autenticidad de los enunciados planteados.

En este artículo presentamos un estudio sobre las propuestas de resolución de problemas de estimación de grandes cantidades por parte de alumnos de ESO. Nuestro estudio se fundamenta en el análisis cualitativo de los datos recogidos y se basa en la elaboración de unas categorías de análisis que pretenden explicar los datos para obtener resultados que nos permitan identificar los procesos de modelización. También discutimos las posibilidades de utilizarlos como herramienta para introducir la modelización. Al mismo tiempo, los resultados de nuestro estudio nos permiten observar de qué forma la concreción del contexto planteada en el enunciado de los problemas influencia las propuestas de resolución que hacen los alumnos.

2. Marco conceptual

2.1. *Resolución de problemas*

La resolución de problemas es un campo que ha generado un gran número de investigaciones en el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas. En Lester (1994) se puede encontrar una visión del estado del campo en el periodo 1970-1994 y se plantean las áreas dentro de la resolución de problemas en las que hubo un mayor progreso, desde los motivos que hacen que un problema sea difícil para los estudiantes hasta los procesos heurísticos y de metacognición. Posteriormente, Schoenfeld (2007) realizó una recopilación sobre el estado de la investigación sobre resolución de problemas en Estados Unidos y su influencia en el sistema educativo, argumentando que los libros de texto han cambiado poco en las últimas décadas y no se han incorporado los nuevos conocimientos obtenidos. Por su parte, Puig (2008) ofrece una perspectiva del estado de la resolución de problemas en España en la que destaca la distancia entre la investigación y las aportaciones de ésta al desarrollo curricular en las últimas décadas.

En uno de los primeros trabajos del área, Pólya (1945) establece un modelo dividido en cuatro fases para la resolución de un problema: a) comprensión del problema, b) elaboración de un plan, c) ejecución del plan y d) mirada retrospectiva. A partir de la introspección, Pólya examina el comportamiento de un resolutor que podríamos llamar ideal, que es capaz de autogestionar su labor resolutoria y que recorre linealmente las cuatro fases anteriores, pasando a la siguiente sólo cuando la anterior ha sido finalizada.

El modelo presentado por Pólya va acompañado de una serie de preguntas que el resolutor puede plantearse para avanzar en su labor. La gran mayoría de éstas son variaciones de la pregunta *¿conoces un problema relacionado?*, con lo que éste parece ser el motor de la resolución de problemas para Pólya. Varios autores han matizado el modelo de resolución de problemas propuesto por Pólya, aunque mantienen la esencia de esta estructuración en cuatro fases.

La primera fase consiste en la identificación, definición y comprensión del problema. En esta etapa se reconoce la existencia de un problema por parte del resolutor y la necesidad de resolverlo. La segunda fase de la resolución se centra en la planificación de la resolución. Se trata de diseñar el esquema de actuación a seguir e identificar los objetivos a cumplir después de examinar las posibles estrategias generales que se pueden aplicar. La tercera etapa consiste en la ejecución del plan que se ha diseñado previamente y la cuarta fase consiste en una verificación de la tarea y de las decisiones tomadas, así como la validación de la solución y los resultados obtenidos a partir del plan inicial.

2.2. *Estimación*

Decimos que realizamos una estimación cuando pretendemos responder a preguntas como: ¿cuánto tiempo tardaré en llegar a la parada del bus?, ¿cuántos botes de pintura de 5 kg necesito para pintar el comedor entero? o ¿cuántas cucharadas soperas de aceite son las necesarias para cubrir los 30 gramos que pone en la receta? La estimación se define como "el juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de las circunstancias individuales de quien lo emite (p. 18)" (Segovia, Castro, Castro & Rico, 1989). Existe una gran cantidad de tareas incluidas bajo la denominación de estimación, aunque no compartan los conceptos y procedimientos matemáticos que permiten describirlas (Booth & Siegler, 2006; Hogan & Brezinski, 2003). Se recogen tres tipos de estimación: la numerosidad, la estimación computacional y la estimación de medidas.

Los trabajos relativos a la numerosidad se centran en el estudio de la capacidad de estimar visualmente el número de objetos presentes en una distribución. En este ámbito cabe destacar los estudios hechos desde la psicología (e.g. Barth, Kanwisher & Spelke, 2003) y trabajos como los de Segovia, Rico y Castro (1996) centrados en las estrategias matemáticas presentes en este tipo de estimaciones.

Las investigaciones relativas a estimación computacional se centran en el estudio de los procesos a través de los cuales se aproximan los valores de un cálculo. Reys, Rybolt, Bestgen y Wyatt (1982) identifican los procesos utilizados en este tipo de estimaciones y Segovia, Castro, Castro y Rico (1989) presentan una clasificación de estrategias que permite un análisis de las tareas de estimación computacional.

Los trabajos relativos a la estimación de medidas se centran en la habilidad perceptiva de estimar longitudes, superficies, tiempos, pesos u otras medidas de magnitudes continuas. En el caso de la estimación de magnitudes, podemos destacar estudios sobre magnitudes continuas como los de Hildreth (1983), Taylor, Jones y Broadwell (2009), y el de Jones, Gardner, Taylor, Forrester y Andre (2012) en los que se estudian las estrategias y procesos que utilizan los estimadores frente a diferentes situaciones (como la iteración de un referente o la comparación con una unidad base), que ponen de manifiesto que la estimación de magnitudes es un tipo de conocimiento situado en el sentido descrito por Greeno (1991).

2.3. *Contexto de un problema y modelización*

Para nuestro estudio, tomamos como definición de problema la aparecida en Puig (1996):

> Un problema escolar de matemáticas es una tarea de contenido matemático, cuyo enunciado es significativo para el alumno al que se ha planteado, que este desea abordar, y para la cual no ha producido sentido (pág. 31).

En los problemas planteados a partir de un enunciado literal, se hace referencia a un conjunto de conocimientos relacionados con un contexto determinado.

Este contexto puede ser puramente matemático, como en el problema clásico de sumar los cien primeros números naturales; puede ser un contexto real, en el sentido de que esté directamente relacionado con una situación concreta en el mundo real o puede ser un contexto imaginario.

Siguiendo a Van Den Heuvel-Panhuizen (2005), introducir un contexto real en un problema puede aumentar su accesibilidad y puede sugerir diversas estrategias a los alumnos. Se han realizados múltiples trabajos sobre resolución de problemas con contextos no matemáticos. Algunos de estos trabajos se centran en entender la forma en que las personas resuelven problemas en su entorno laboral, con el foco de atención en las diferencias en el uso de las matemáticas en el aula y el trabajo (Jurdak & Shahin, 1999; 2001). También podemos encontrar trabajos que relacionan el uso de las matemáticas en entornos cotidianos con su uso en las aulas (Nunes, Schliemann & Carraher, 1993; Jurdak, 2006). Estas investigaciones muestran que existe una distancia importante entre las matemáticas que se enseñan en la escuela y las que se utilizan en la vida cotidiana.

En las aulas, los problemas relacionados con aspectos de la vida cotidiana, permiten trabajar los diferentes conceptos matemáticos pasando de lo concreto a lo abstracto y, por lo tanto, permiten aprender matemáticas en la línea de pensamiento defendida por Freudenthal (1983), en la que se establece que presentar la matemáticas desde la generalización es un error. Freudenthal afirma que la discusión en las aulas de problemas con contextos reales puede ser muy enriquecedora para los alumnos. Sin embargo, Chapman (2006) observa que buena parte de los profesores los presentan de forma cerrada y no permiten un análisis narrativo de las situaciones propuestas. Doerr (2006a; 2006b) explica este hecho afirmando que la formación del profesorado condiciona esta postura y que sería necesario que tuvieran un esquema bien desarrollado de los diferentes tipos de respuesta que pueden dar los alumnos. Desde esta perspectiva, esperamos que nuestro trabajo pueda ser ilustrativo.

En Codes, González, Monterrubio y Delgado (2011) se presenta un estudio sobre el análisis de las actividades contextualizadas presentes en los libros de texto de matemáticas en España. Dichos autores encontraron actividades basadas en aspectos como la relación con el mundo laboral, la vida cotidiana y otras ciencias. En referencia al nivel de complejidad de las actividades estudiadas, afirman que son escasas aquellas que exigen un nivel de conexión o reflexión, presentando enunciados demasiado artificiales para permitir conseguir los objetivos deseados.

Aún así, siguen existiendo motivos para introducir problemas y actividades contextualizadas en las aulas de matemáticas. Según De Lange (1996), existen cuatro motivos para incluirlas en los currículos educativos:

- Facilitan el aprendizaje de las matemáticas
- Ayudan a desarrollar competencias de los alumnos como ciudadanos
- Ayudan a desarrollar competencias y actitudes de los alumnos relacionadas con la resolución de problemas
- Permiten observar a los estudiantes la utilidad de las matemáticas para resolver situaciones problemáticas en otras áreas de conocimiento y de la vida cotidiana

Por su parte, Verschaffel (2002) afirma que el objetivo de introducir los problemas con enunciados literales y contexto real es acercar la realidad a las aulas de matemáticas y crear oportunidades para practicar diferentes aspectos de la resolución de problemas sin los inconvenientes del contacto directo con la situación del mundo real.

No acaban aquí los motivos descritos en la literatura sobre la necesidad de introducir problemas contextualizados. Según Arcavi (2002), el contexto cotidiano en los problemas puede sugerir enfoques diferentes para su resolución, así como destacar aspectos del problema que podrían pasar inadvertidos en un enunciado descontextualizado.

Para Winter (1994), la resolución de problemas con contexto real incluye la matematización de una situación no matemática, que implica la construcción de un modelo matemático que respete la situación real y que incluya el cálculo de la solución y la transferencia del resultado obtenido a partir del modelo a la situación real. La producción de modelos para resolver problemas no es exclusiva de los niveles científicos más altos, si no que se ha documentado su presencia en algunos estudios sobre la producción matemática de los estudiantes en diferentes niveles educativos (Lesh & Harel, 2003; English, 2006; Esteley, Villareal & Alagia, 2010). El paso más difícil de este proceso es determinar un modelo apropiado para la situación real planteada, ya que se requiere un conocimiento adecuado de ésta y de los conceptos matemáticos implicados junto con un alto nivel de creatividad. Lesh y Harel (2003) afirman que las producciones que elaboran los resolutores de problemas implican mucho más que dar respuestas simples a preguntas bien formuladas. Dichos autores (Lesh & Harel, 2003) definen el concepto de modelo matemático como sigue:

> Models are conceptual systems that generally tend to be expressed using a variety of interacting representational media, which may involve written symbols, spoken language, computer-based graphics, paper-based diagrams or graphs, or experience-based metaphors. Their purposes are to construct, describe or explain other system(s).

> Models include both: (a) a conceptual system for describing or explaining the relevant mathematical objects, relations, actions, patterns, and regularities that are attributed to the problem-solving situation; and (b) accompanying procedures for generating useful constructions, manipulations, or predictions for achieving clearly recognized goals. (pág. 159)

De esta forma, entendemos que la elaboración de un modelo matemático que describa una determinada realidad es un proceso complejo en el que tienen cabida diferentes elementos que forman el modelo, como pueden ser conceptos matemáticos, representaciones simbólicas de la realidad o esquemas, así como los procedimientos asociados a su uso.

Según la literatura, existen dos diferencias principales entre los problemas tradicionales con enunciado literal y las actividades de modelización. En primer lugar, en los procesos de modelización es necesario relacionar los conceptos matemáticos y las operaciones con la realidad, los estudiantes deben producir significado para lo que estudian y describir simbólicamente una situación (Lesh & Zawojewski, 2007). La segunda diferencia se centra en la naturaleza de la propia modelización, ya que los estudiantes deben generar modelos que sean realmente aplicables a una realidad dada y que las soluciones que se deriven se puedan generalizar e interpretar (English, 2006; Doerr & English, 2003).

2.4. *Problemas reales y autenticidad*

En buena parte de la literatura sobre resolución de problemas, no se diferencia el tipo de contexto de un problema y se tiende a utilizar la nomenclatura genérica de *problemas reales.* Si nos centramos en los diferentes tipos de problemas en función de su nivel de contextualización, podemos distinguir entre problemas completamente descontextualizados, problemas escolares contextualizados y problemas reales. Martínez (2008) distingue los siguientes tipos de contexto para un problema:

- Contexto real: se refiere a la práctica real de las matemáticas y al entorno en el que se da esta práctica.
- Contexto simulado: tiene su origen en un contexto real, pero es una representación de que reproduce parte de sus características.
- Contexto evocado: se refiere a situaciones propuestas por el profesor en el aula y que permiten imaginar la situación en la que se dan los hechos representados.

De esta forma, debemos entender que los que llamamos problemas reales son problemas con enunciado literal y contexto evocado. Aún así, estos problemas pueden representar situaciones que, fuera de las aulas, sean completamente reales y representativas para los alumnos. Según Sriraman, Knott y Adrian (2009) la palabra *real* asociada a los problemas no se refiere únicamente a la conexión con el mundo real, sino que también se refiere a problemas que son reales en la mente de los alumnos.

Una característica relevante a considerar en los problemas basados en la realidad es su nivel de autenticidad. Palm (2008) describe la autenticidad de una tarea escolar como el grado en que se puede transportar esa tarea a una situación real, con la condición de que los aspectos más importantes de la situación deben ser simulados con alto nivel de realismo. En el mismo artículo, Palm presenta un estudio realizado con el objetivo de determinar la influencia de la autenticidad del enunciado de los problemas propuestos sobre las respuestas dadas por los alumnos. En su estudio, Palm muestra que los alumnos que responden a cuestiones con un mayor nivel de autenticidad utilizan conocimientos reales presentes en su día a día y obtienen respuestas más exactas y consistentes con la realidad que los que alumnos que trabajan con problemas con un nivel de autenticidad menor.

El mismo autor, en un artículo anterior (Palm, 2006), hace una propuesta de los aspectos de la vida real que son relevantes para los problemas reales. Centra su atención en el tipo de acontecimientos en los que se enmarca el problema, en la pregunta, los datos que contiene, el tipo de enunciado, las estrategias de resolución, las circunstancias y condicionantes en el aula, los requisitos que debe cumplir la solución y el propósito del problema. Stocker (2006) añade la necesidad de centrar la atención en la relevancia de los problemas para los alumnos y en la capacidad transformadora del problema con el propósito de mejorar nuestro entorno.

3. Metodología

3.1. *Los problemas utilizados*

El propósito principal de nuestro estudio es estudiar las posibilidades de los problemas de estimación de grandes cantidades como vía para introducir la modelización en la etapa de secundaria. Para ello, consideramos que serían útiles un tipo de problemas en los que se propusieran situaciones no estudiadas anteriormente en las aulas, pero que fueran conocidas por los alumnos. Para potenciar la necesidad del uso de modelos matemáticos, proponemos problemas centrados en estimar grandes cantidades, ambientados en contextos conocidos por los alumnos. De esta forma se fuerza la necesidad de utilizar un tipo de simplificación de la realidad para matematizarla, ya que los recuentos directos no son eficientes para resolver problemas con grandes cantidades.

En nuestra vida cotidiana, son muchas las preguntas que nos podemos plantear para las que una estimación numérica puede representar una respuesta válida. La cantidad de pintura necesaria para pintar el comedor o el tiempo necesario para llegar al trabajo son cantidades difíciles de determinar con precisión. En estos casos resulta más eficiente encontrar una solución aproximada que pretender determinar la solución exacta. En esta situación debemos tener en cuenta que no siempre dispondremos de todos los datos, ni del tiempo o conocimientos necesarios para elaborar una respuesta. De hecho, algunas de estas preguntas no aceptan lo que entendemos por *una solución* en el sentido más estricto de la expresión, dado que diferentes condicionantes pueden influir en el valor final de ésta en función de cómo se concreta la situación, la forma en que está planteado el problema y el camino que seguimos cuando lo abordamos.

En nuestro estudio nos hemos centrado en cantidades discretas, pero en el proceso de resolución pueden aparecer procesos de estimación de magnitudes continuas. Dado que los problemas planteados pueden descomponerse en problemas más sencillos que pueden ser resueltos por separado, se trata de problemas de Fermi orientados a la estimación de grandes cantidades. La definición de problema de Fermi que ofrece Ärlebäck (2009) es la siguiente:

> Open, non-standard problems requiring the students to make assumptions about the problem situation and estimate relevant quantities before engaging in, often, simple calculations (pág. 331).

Un argumento para el uso de problemas de Fermi en las aulas es la posibilidad de utilizarlos como puente entre las matemáticas y otras materias escolares, acercando a los estudiantes a diferentes tareas interdisciplinarias, tal y como argumentan Sriraman y Lesh (2006). De hecho, Peter-Koop (2004) expone que los problemas de Fermi son mejores y más útiles si no se tratan como ejercicios puramente intelectuales y se centran en situaciones del mundo real y en contextos de nuestro entorno habitual.

Algunos de los problemas que encajan en nuestro esquema podrían parecer anecdóticos, como preguntar el tiempo necesario para ir en bicicleta de París a Pekín. Sin embargo, otros tienen un importante contenido en relación a la comprensión del entorno y una gran relevancia social. Serían ejemplos de estos últimos la estimación del número de personas que hay en una manifestación, el consumo total de agua o la basura generada por una población. La discusión en el aula de los elementos de orden social que aparecen en estos problemas puede ayudar al conocimiento del entorno por parte del estudiante, así como representar un contexto cercano y conocido sobre el cual plantear un problema que pertenezca a su propia realidad y que sirva para desarrollar el pensamiento crítico.

3.2. *Nuestro estudio*

En el trabajo que hemos realizado, se han utilizado problemas de estimación de grandes cantidades como herramienta para introducir la modelización en las aulas de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Entre otros objetivos, nos planteamos:

- Estudiar la presencia de elementos de modelización en las estrategias de resolución propuestas por los alumnos.
- Analizar la influencia del contexto planteado en el enunciado de los problemas y el tipo de respuestas obtenidas, fijando la atención en la influencia sobre las estrategias de resolución propuestas.

Se utilizaron seis problemas con la intención de recoger las propuestas de resolución que plantean los alumnos. Los problemas utilizados surgen de una lista inicial de 36 problemas, que tienen enunciados como estimar el número de lápices para pintar una línea a lo largo de todo el Ecuador terrestre o el número de coches que pasan en un día por un punto concreto de una autopista. Esta lista inicial de problemas contiene algunos realizados por los autores y otros extraídos de las siguientes fuentes:

- *A Collection of Estimation Problems* en el *Fermi Problems Site* de la University of Maryland. En http://www.physics.umd.edu/perg/fermi/fermi.htm, última visita el 18-03-2013.
- *Classic Fermi Questions with annotated solutions* en la web del *Collin County Community College District.* En http://iws.ccccd.edu/mbrooks/demos/fermi_questions.htm, última visita el 16-07-2009.
- *Fermi Questions - General Collection* en el espacio de Sheila Talamo en el *Math Forum*. En http://mathforum.org/workshops/sum96/interdisc/fermicollect.html, última visita el 18-03-2013.

De estos problemas se escogieron dieciséis que ofrecían la posibilidad de enfocarse en contextos relevantes y que podían ser resueltos de diferentes formas. Se hizo una prueba piloto con alumnos de bachillerato (16-17 años) en la que un número reducido de alumnos intentaron resolver los problemas y se eligieron finalmente los seis que ofrecían una mayor riqueza en los datos, en los que se podían observar diferentes estrategias de resolución. Los problemas definitivos para nuestro estudio son los siguientes:

- PROBLEMA A (PA): ¿Cuántas entradas podríamos vender si llenáramos el patio del instituto para hacer un concierto?
- PROBLEMA B (PB): ¿Cuánta gente hay en una manifestación?
- PROBLEMA C (PC): ¿Cuántos mensajes SMS se envían en un día en Cataluña?
- PROBLEMA D (PD): ¿Cuántas gotas de agua se necesitan para llenar un cubo?
- PROBLEMA E (PE): ¿Cuántos vasos de agua son necesarios para llenar una piscina?
- PROBLEMA F (PF): ¿Cuántas monedas de euro caben en una caja fuerte cúbica de un metro cúbico?

En el instrumento de recogida de datos, para cada problema, se incorporó un enunciado que contextualizaba la situación en la que se produce el problema. Por ejemplo, para el problema A se utilizó el contexto de un festival de final de curso y la necesidad de hacer una previsión del número de entradas que se podrían vender. En el problema D se indicó que una gotera afectaba los ordenadores de la sala de profesores y se pensaba poner un cubo para solucionar la situación. Una muestra del tipo de enunciados presentados a los alumnos es el enunciado del problema C:

> Los teléfonos móviles sirven para una barbaridad de cosas (ver fotos o vídeos, escuchar música, jugar…) pero la gente todavía los utiliza para comunicarse, chatear, llamar y enviar mensajes. Nosotros no pensamos mucho en ello, pero es necesaria una gran red de telecomunicaciones para permitir estos servicios.
>
> En esta situación, una buena pregunta es: *¿cuántos mensajes SMS enviamos en un día entre todos los catalanes?*
>
> Describe *los pasos que seguirías* para calcular de forma aproximada esta cantidad con *tus propios recursos*. No es necesario que des un resultado, únicamente que expliques cómo lo harías.

Los enunciados se refinaron en una prueba piloto realizada con un pequeño grupo de alumnos de bachillerato para comprobar si los alumnos podrían entender de qué tipo de tarea se trataba. Así, por ejemplo, durante la prueba piloto se observó que si se pedía a los alumnos que redactaran una propuesta de resolución y que hicieran los cálculos que consideraran oportunos, los alumnos se centraban en la elaboración de una respuesta y descuidaban la redacción de la propuesta. Por este motivo, se decidió que el enunciado de cada problema incluyera una frase que indicara que pretendíamos únicamente recoger sus propuestas de resolución y que éstas no debían incluir ningún posible valor como resultado. De esta forma, nos restringimos a estudiar las aportaciones de los alumnos en las dos primeras fases que Pólya (1945) establece en el proceso de resolución de un problema y nuestros datos son los planes de acción que elaboraron los alumnos. Una vez se cambiaron los enunciados de los problemas para que no presentaran ambigüedades y que se incluyó la advertencia de que sólo nos interesaba la propuesta de resolución, se procedió a la recogida de datos.

Se creó un instrumento que presenta en hojas separadas los enunciados de los distintos problemas. Los problemas se pasaron a los alumnos en sesiones de una hora de clase. Cada alumno recibió inicialmente una hoja con el enunciado de un problema y se les pidió que describiera, de la forma más detallada posible, cuáles serían los pasos que realizarían para resolverlo. Dado que se les pidió explícitamente que no efectuaran ningún tipo de cálculo y que se limitaran a describir el procedimiento que consideraban adecuado para resolver el problema, el requerimiento de la tarea fue únicamente elaborar una propuesta de resolución.

Los alumnos emplearon entre 15 y 30 minutos para contestar lo que se les pedía en cada una de las hojas del instrumento. La recogida de datos se llevó a cabo en dos centros de secundaria de la misma población, una ciudad de tamaño medio en el área metropolitana de Barcelona. Uno de los centros es público y el otro un centro privado concertado. La recogida de datos se realizó en clases de una hora, en las que los alumnos podían hacer propuestas a más de un problema. En el caso de que un alumno finalizara su propuesta para resolver el problema presentado en el cuestionario, la persona encargada de recoger los datos le ofrecía otro. De esta forma tenemos 538 propuestas de resolución de los 216 alumnos participantes en el estudio. En ningún caso, los alumnos recibieron una formación específica sobre estimación o modelización previa a este estudio. La tabla I muestra el número de cuestionarios recogidos por cada curso y cada problema en nuestro estudio.

TABLA I
Número de cuestionarios recogidos

Curso	PA	PB	PC	PD	PE	PF	Total
1º ESO	18	18	20	19	18	18	111
2º ESO	22	21	22	20	21	21	127
3º ESO	25	22	20	24	22	20	133
4º ESO	31	31	28	25	25	27	167
Total	96	92	90	88	86	86	538

4. Análisis de datos

Una vez concluida la recogida de datos, se transcribieron para poder ser analizados utilizando el programa de análisis cualitativo de datos NVivo 8. Este programa permite organizar los datos recogidos y codificarlos a partir de un conjunto de categorías de análisis establecidas por el investigador. Tal y como afirma Gibbs (2007), esta forma de codificación de los datos, en nuestro caso las propuestas de los alumnos, nos permite establecer un marco de referencia para interpretar los datos recogidos. Al mismo tiempo, este tipo de software permite una fácil gestión de los datos y cruzar los resultados en diferentes tipos de consultas.

De nuestro análisis se han obtenido categorías para las siguientes tres dimensiones de análisis:

- Respuesta a la pregunta: Hemos detectado que no todos los alumnos hacen una propuesta orientada a resolver la pregunta planteada. Algunos presentan propuestas ininteligibles y consideramos directamente que no responden a ninguna pregunta y otros alumnos responden a otras preguntas relacionadas con la situación planteada.
- Éxito en la resolución: En nuestro estudio no hemos pedido a los alumnos que resuelvan los problemas planteados, nos hemos limitado a pedirles un plan de acción para poder centrarnos en las estrategias propuestas. Por ello si una propuesta de un alumno contiene todos los elementos necesarios para que lo que consideramos sería un resolutor entrenado (que los siguiera y obtuviera un resultado adecuado para la pregunta), concluimos que la propuesta resolvería con éxito el problema. Nos

hemos encontrado con propuestas que no contienen errores conceptuales pero debido a que en los problemas intervienen grandes cantidades, no sería factible llevar a cabo la resolución en un tiempo limitado debido a la falta de recursos. Estas propuestas son las que consideramos que resuelven el problema sobre el papel, pero no en la práctica. Finalmente, algunas de las propuestas estudiadas no permitirían de ninguna manera obtener una solución válida.

- Estrategia propuesta: Al analizar las propuestas de los alumnos, hemos detectado cuestionarios en los que no es posible encontrar una estrategia de resolución bien definida. Otros presentan propuestas en las que no se detectan procesos de abstracción de la situación, por lo que la modelización no se encuentra presente, como los casos en los que se proponen recuentos exhaustivos. Por último, se han detectado propuestas de resolución que modelizan la situación planteada para obtener una estimación de la cantidad a estudiar.

Para ejemplificar los aspectos destacados en nuestro proceso de análisis, presentaremos algunas de las propuestas de los alumnos y la forma en que las caracterizamos. El siguiente párrafo, que denotamos PA4, corresponde a la propuesta de resolución al problema A (PA) de un alumno de 4º de ESO (4). El problema requería estimar la cantidad de personas que caben en el patio del instituto para organizar un concierto:

PA4 – Concierto
Primero calcularía cuántos metros cuadrados tiene el patio del instituto. Cuando tuviera este valor restaría el espacio que ocupará el escenario y los objetos que van en el patio como las porterías. Al mismo tiempo, intentaría probar cuantas personas caben en un metro cuadrado y a partir de esto, calcular el valor de esta medida por el del número de metros cuadrados que se disponen en el patio.

En este párrafo podemos observar que el alumno propone utilizar el concepto de densidad de población como elemento clave de su plan de acción para resolver el problema. Dado que la densidad de población no aparece en el enunciado del problema ni en el planteamiento de la situación, consideramos que el alumno está introduciendo un sistema conceptual para representar la situación, con lo que está modelizando el problema. En este caso, si se siguieran los pasos descritos en la propuesta, se podría obtener una estimación adecuada de la cantidad de personas que caben en el patio. Por lo tanto, en nuestro proceso de análisis de datos, incluimos a este alumno en el grupo de los que intentan responder a la pregunta planteada, cuya propuesta resolvería la situación con éxito.

A continuación, presentamos una propuesta de un alumno de 4º de ESO al problema B, en el que se debe estimar la cantidad de personas que participan en una manifestación cualquiera.

PB4 - Manifestación

Los iría marcando de uno en uno y poniendo una pulsera o una marca de tinta que fuera visible y después anotando en algún sitio a todos los que estuvieran marcados. Debería ser de forma organizada, que se pusieran en una fila o que hasta que no los marcara no pudieran volver a la manifestación.

En este caso, el alumno pretende realizar un recuento exhaustivo del número de personas presentes en la manifestación, y para ello introduce elementos que alterarían su propio desarrollo. Los recuentos totales no son efectivos en el caso de la estimación de grandes cantidades, por lo que no pueden proporcionar resultados. Por lo tanto, incluimos la propuesta de este alumno entre las que no resuelven el problema planteado, a pesar de que de ser efectiva lo resolvería.

La tercera propuesta que presentamos es una aportación de un alumno de 2º de ESO al problema D, en el que se debe estimar el número de gotas que llenan un cubo de agua. En este caso, la situación planteada gira alrededor de una gotera que aparece en la sala de profesores y para la que se plantea poner un cubo para recoger temporalmente el agua.

PD2 – Cubo

Primero calcularía cuantos litros caben en el cubo. Después lo que haría sería dejar el cubo una hora, a ver cuánta agua ha caído y después calcular cuánta agua caería desde que la última persona se va hasta que viene la primera y así veríamos si antes de irnos debemos cambiar el cubo. Y así los ordenadores no se mojarían y los profesores podrían poner más exámenes.

Como se puede observar, este alumno propone utilizar como referencia el agua acumulada en una hora, para después calcular el número de horas que pasarán antes de que el cubo se llene, aunque no especifique el tipo de cálculo que efectuaría para conseguir un resultado. Observamos que el alumno no pretende estimar el número de gotas que llenan el cubo, si no que plantea una resolución que le llevaría a estimar el tiempo necesario para llenar el cubo. Por lo tanto, incluimos la propuesta de este alumno en la categoría responde a otra cosa, entre las que sugieren que existe una pregunta mucho más adecuada en el contexto de la situación que se le plantea.

A continuación mostramos la propuesta de resolución de un alumno de 2º de ESO al problema E. En este problema se pide a los alumnos que realicen una estimación del número de vasos de agua necesarios para llenar una piscina.

PE2 – Piscina
No se puede hacer porque no tenemos los datos. Si los tuviéramos, podríamos dividir la capacidad que tiene una piscina entre la capacidad de un vaso y nos daría el número de vasos.

En este caso, el alumno explicita que no tiene los datos necesarios para resolver el problema y que, por lo tanto, no lo puede resolver. El alumno hace una propuesta de los cálculos que realizaría si tuviera los datos que considera necesarios pero no especifica ningún procedimiento para conseguir dichos datos por su propia cuenta. Por lo tanto, incluimos la propuesta de este alumno en la categoría de las propuestas sin estrategia, entre las que sugieren que la falta de concreción en la situación planteada es un impedimento para la resolución.

Los ejemplos mostrados dan una idea del tipo de datos obtenido en nuestro estudio y del análisis realizado. En el proceso de análisis de los datos recogidos se crearon diversas categorías que describen los datos desde diferentes perspectivas.

5. Resultados

En nuestro estudio nos hemos restringido a recoger datos referentes a la elaboración de un plan de resolución para los problemas planteados. Este hecho nos permite establecer resultados relativos a la comprensión de la situación descrita. A partir de los datos obtenidos, podemos afirmar que los alumnos elaboran propuestas que muestran un nivel adecuado de comprensión de la situación. Este hecho se refleja en los datos de la tabla II que muestra la caracterización de las propuestas en relación al tipo de respuesta a la pregunta formulada en cada problema, así como el número de propuestas clasificadas para cada categoría y el porcentaje que representan por problema.

TABLA II
Tipo de respuesta a la pregunta

	PA	PB	PC	PD	PE	PF
Respuesta adecuada	53 (55.2%)	62 (67.4%)	59 (65.6%)	22 (25.0%)	48 (55.8%)	29 (33.7%)
No responde	31 (32.3%)	22 (23.9%)	23 (25.6%)	31 (35.2%)	22 (25.6%)	27 (31.4%)
Responde a otra cosa	12 (12.5%)	8 (8.7%)	8 (8.9%)	35 (39.8%)	16 (18.6%)	30 (34.9%)
Total	96	92	90	88	86	86

De la observación de la tabla II se desprende que la mayoría de alumnos hacen propuestas que van en la dirección de resolver la pregunta planteada, aunque no sean propuestas que permitan resolver el problema con éxito. Por lo tanto, podemos afirmar que los alumnos muestran un nivel de comprensión elemental de las situaciones descritas.

Sin embargo, en dos de los problemas propuestos, PF y PD, encontramos una proporción significativamente superior de propuestas en las que el alumno no resolvería la pregunta planteada en el enunciado del problema, si no que responderían a otra pregunta.

En el caso del problema F (sobre el números de monedas que caben en una caja fuerte), nos encontramos con un gran número de propuestas que contienen errores conceptuales en la relación área/volumen y que llevarían a los alumnos a realizar cálculos incorrectos, con lo que su propuesta de resolución no va enfocada a responder la pregunta planteada aunque la intención del alumno fuera esa. Este hecho se debe a las dificultades que comporta para los alumnos trabajar con volúmenes.

Es particularmente interesante el caso del problema D. En él se plantea una situación en la que una gotera afecta a los ordenadores de la sala de profesores del centro y se propone utilizar un cubo para recoger el agua que cae durante la noche. La pregunta asociada al problema pide a los alumnos que expliquen cómo estimar el número de gotas necesarias para llenar el cubo de agua. En las propuestas de resolución recogida observamos que una cantidad considerable de alumnos, el 39.8%, responde a una pregunta diferente a la planteada, porque no la consideran adecuada desde el punto de vista del sentido común cotidiano. Los alumnos que no intentan responder a esta pregunta, hacen propuestas dirigidas a resolver preguntas que consideran más oportunas en esta situación: ¿en cuánto tiempo se llenará el cubo colocado bajo la gotera?, ¿se llenará el cubo antes de que pase toda la noche? o ¿cuál debe ser el tamaño del cubo para que no se llene en el tiempo que debemos estar fuera? Estos alumnos muestran un conocimiento del contexto planteado en el enunciado que les permite orientar su propuesta a un objetivo distinto al planteado. Debemos destacar que el conjunto de alumnos que cambian la pregunta inicial en el problema D presenta un mayor número de propuestas que resolverían su problema que el resto de los alumnos desde la interpretación del contexto del enunciado desde el sentido común cotidiano. Por todo ello, vemos que en el caso del problema D los alumnos muestran un nivel de comprensión del contexto suficiente para plantearse una propuesta de resolución, incluso llegando a mostrar una necesidad de coherencia en las preguntas de los enunciados.

En cuanto a la relación entre la concreción del contexto y las estrategias propuestas por los alumnos para su interpretación, debemos tener en cuenta que las situaciones planteadas a los alumnos en los enunciados de los problemas presentan diferentes niveles de concreción. Algunos enunciados son más precisos que otros en relación a la información que se da a los alumnos. Por ejemplo, el problema B trata sobre la estimación del número de personas que asisten a una manifestación sin especificar el lugar ni sus características. En cambio, el problema A presenta una situación similar, la de contar el número de personas que caben en el patio; pero este dato representa un tipo de información bien conocida por el alumno.

La tabla III contiene las categorías elaboradas en el análisis de datos para la caracterización de las preguntas en función del éxito en la resolución y el número de propuestas detectadas para cada problema, junto con el porcentaje que representan para cada problema. Hemos categorizado como *Resuelve* las propuestas de los alumnos que llevarían a una solución adecuada al problema si un resolutor competente las llevara a cabo. En la categoría de *Resuelve sobre el papel* se encuentran las propuestas que requieren procesos o recursos que no están disponibles para los alumnos, como los recuentos exhaustivos que en el caso de estimar grandes cantidades pueden ser inviables o necesitar tiempos excesivos. En la categoría *No resuelve* se hayan las propuestas que no permiten conseguir respuestas adecuadas a la pregunta del problema, ya sea por inconsistencias, errores conceptuales o porque presentan un plan de acción inacabado.

TABLA III
Tipo de respuesta a la pregunta

	PA	PB	PC	PD	PE	PF
Resuelve	23 (24.0%)	14 (15.1%)	20 (22.2%)	20 (22.7%)	32 (37.2%)	14 (16.3%)
Resuelve sobre el papel	29 (30.2%)	44 (47.3%)	38 (42.2%)	10 (11.4%)	17 (19.8%)	18 (20.9%)
No resuelve	44 (45.8%)	34 (37.6%)	32 (35.6%)	58 (65.9%)	37 (43.0%)	54 (67.8%)
Total	96	92	90	88	86	86

Observando la tabla anterior podemos ver que el porcentaje de alumnos que hacen propuestas que llevarían a resolver con éxito para el problema A es de un 24.0% y para el problema B de un 15.1%.

A este hecho hay que añadir que el tipo de estrategias presentadas por los alumnos para estos dos problemas son diferentes. Encontramos que 23 de los 96 alumnos a los que se les pasó el problema A pretenden utilizar como dato la superficie del patio para dividirla entre la superficie que ocupa una persona. En cambio, sólo 14 de los 92 alumnos a los que se les pasó el problema B utilizan la propuesta equivalente, es decir sugieren dividir la superficie ocupada por los manifestantes entre la superficie ocupada por una persona.

En nuestro estudio también hemos podido observar que para un pequeño número de alumnos, la falta de datos concretos sobre la situación en la que se plantea el problema representa un impedimento para su resolución. Sobre este hecho, algunos alumnos llegan a afirmar que si el enunciado no contiene datos ni información numérica, no se trata de un problema de matemáticas. Estos alumnos representan un 6.5% del total.

En relación con la modelización de las situaciones planteadas, la tabla IV muestra el número de cuestionarios codificados según su nivel de modelización para cada problema junto con el porcentaje que representan. Las propuestas que no contienen un plan de acción definido para encontrar una solución del problema, han sido categorizadas como “sin estrategia”. Aquellas propuestas que contienen una estrategia en la que no hay presencia de conceptos matemáticos o se hace un uso muy pobre de ellos, se han categorizado como “no modeliza”. Finalmente, se encuentran propuestas en las que hemos detectado el uso de conceptos matemáticos que forman parte de un sistema conceptual diseñado para describir la situación planteada, como puede ser el concepto de densidad de población o el uso de la regla del producto para contar elementos dispuestos en forma de matriz, así como los procedimientos necesarios para utilizarlos. Este tipo de respuestas son las que hemos incluido en la categoría “modeliza”. Dado que la recogida de datos se basa en la elaboración de propuestas de resolución (planes de acción), entendemos que no podemos afirmar que los alumnos modelizan realmente la situación estudiada, pero podemos observar si estas propuestas contienen algunos de los elementos (uso de conceptos, relaciones o procedimientos) presentes en los procesos de modelización.

TABLA IV
Distribución de las propuestas por nivel de modelización y problema

	PA	PB	PC	PD	PE	PF	Total
Sin estrategia	37 (38.5%)	28 (30.4%)	22 (24.4%)	25 (28.4%)	17 (19.8%)	32 (37.2%)	161 (29.9%)
No modeliza	19 (19.8%)	39 (42.4%)	17 (18.9%)	9 (10.2%)	12 (14.0%)	19 (22.1%)	115 (21.4%)
Modeliza	40 (41.7%)	25 (27.2%)	51 (56.7%)	54 (61.4%)	57 (66.3%)	35 (40.7%)	262 (48.7%)
Total	96	92	90	88	86	86	538

En esta tabla podemos observar que el 48.7% de los alumnos encuestados incluyen conceptos matemáticos en su propuesta de resolución que forman parte de un proceso de modelización. Estos alumnos incorporan en sus propuestas elementos matemáticos que no se encuentran directamente en la situación planteada y que representan un avance en la dirección de crear una representación abstracta de la realidad.

Los modelos detectados son los siguientes: el uso de la *regla del producto* para determinar poblaciones dispuestas en una superficie a partir de un modelo de distribución rectangular, el uso de un *punto de referencia* como dato base para estimar el número de unidades de un conjunto dividiendo la medida total entre la medida del punto de referencia (volumen de una gota o la superficie que ocupa una persona en una manifestación), el uso de *medidas de concentración* (densidad de población y la *estratificación de la población)*, en la que se separa una población en diferentes estratos y se trabaja con ellos por separado.

Aún así, hemos detectado un gran número de propuestas que no presentan una estrategia clara de resolución o que pretenden realizar recuentos exhaustivos, que, en el caso de la estimación de grandes cantidades, supone una estrategia pobre y que no puede reportar resultados útiles. En concreto, el 51.3% restante de los alumnos no muestra en sus propuestas de resolución un nivel de comprensión suficiente para resolver estos problemas.

La tabla V muestra los modelos concretos que hemos detectado para cada problema. Podemos observar que el modelo de estratificación de la población sólo se detecta en el problema PC, que trata un aspecto estadístico (número de SMS enviados por persona) que, según el parecer de los alumnos, depende de la edad de cada persona. Por otra parte, la regla del producto sólo aparece en aquellos problemas en los que el objeto a contar puede ser claramente separado del total (personas o monedas), en cambio, no se detecta en los problemas PC y PD, en los que las gotas de agua y los vasos no se encuentran separados del total estudiado. Podemos observar que las medidas de concentración se han detectado en todos los problemas y el punto de referencia en todos, excepto en el problema PC, con lo que parece que son una opción interesante para trabajar, dado que los alumnos pueden asociarlos a diversas situaciones.

TABLA V
Modelo propuesto por problema

	PA	PB	PC	PD	PE	PF	Total
Regla del producto	2	5	0	0	0	8	15
Punto de referencia	23	4	0	24	52	25	128
Medida concentración	15	16	45	30	5	2	113
Estratificación	0	0	6	0	0	0	6
Total	40	25	51	54	57	35	262

6. Conclusiones y discusión

En nuestro estudio hemos utilizado los problemas de estimación de grandes cantidades como una herramienta para introducir la modelización en las aulas de Educación Secundaria. Estos problemas se centran en la estimación de cantidades que pueden aparecer en situaciones reales y contextos diversos. Siguiendo a Arcavi (2002), el contexto en el que se enmarcan los problemas influye en las estrategias que sugieren los alumnos. Considerando que los problemas PA y PB son equivalentes desde el punto de vista matemático (contar gente en una superficie) observamos que el ambiente donde están planteados y la información inicial que conoce el alumno sobre la situación influyen en el tipo de estrategias propuestas. Estaríamos de acuerdo, tal como afirma Van Den Heuvel-Panhuizen (2005), en que los problemas con contexto real pueden permitir que los alumnos utilicen métodos o estrategias que utilizan en su vida cotidiana. Sin embargo, si la situación descrita tiene un alto nivel de complejidad o no se aporta suficiente información, hemos podido comprobar que los alumnos pueden mostrar dificultades para elaborar propuestas de resolución.

A diferencia de lo que afirma Palm (2006) sobre los problemas con contexto real, cuando los alumnos se enfrentan a la resolución de los problemas utilizados en nuestro estudio, no siempre utilizan conocimientos adquiridos en su vida cotidiana en sus propuestas de resolución. En nuestro estudio hemos podido comprobar que un gran número de los alumnos participantes tienen problemas para interpretar con detalle las situaciones planteadas y distinguir en ellas los elementos básicos que permiten establecer un modelo adecuado para la resolución del problema, por lo que no consiguen propuestas que lleven al éxito en la resolución.

Al mismo tiempo, la adecuación de la autenticidad en los enunciados de los problemas propuestos, puede llevar a los alumnos a cambiar la pregunta planteada por otra que consideren más adecuada a la situación. Hemos podido comprobar que algunos alumnos participantes en nuestro estudio intentaron dar respuesta a preguntas que consideraban más coherentes a su visión de la situación descrita que las planteadas en los enunciados. Por otra parte, Codes, González, Monterrubio y Delgado (2011) afirman que muchos de los enunciados de problemas con contexto que se encuentran en los libros de texto tienden a ser artificiales. Estos hechos combinados nos hacen pensar que el uso de problemas con enunciados no auténticos y alejados de la realidad cotidiana de los alumnos puede llevar a un distanciamiento entre la realidad y el trabajo en las aulas. Desde esta perspectiva, consideramos que los problemas de estimación de grandes cantidades presentan una oportunidad para presentar problemas con contextos reales coherentes para los alumnos, ya que en nuestro estudio hemos detectado problemas de coherencia con la vida cotidiana en el enunciado de un único problema.

En este estudio, hemos podido observar que los problemas de estimación de grandes cantidades pueden ser una herramienta útil para introducir la modelización matemática en las aulas de ESO. Nos basamos en el hecho de que una parte de los alumnos participantes elaboraron propuestas de resolución para estos problemas que contienen elementos de modelización diversos. Estos alumnos lo hicieron de forma espontánea y sin ningún tipo de instrucción previa, por lo que consideramos que el trabajo con este tipo de problemas en las aulas podría llevar a un mayor número de alumnos a generar modelos y estrategias que permitan su resolución. Además, consideramos que el trabajo en grupo y por proyectos, puede paliar las dificultades para generar propuestas de resolución válidas que hemos detectado, ya que los alumnos pueden complementar su conocimiento y obtener resultados exitosos. Dada la propia naturaleza de los problemas planteados, que se pueden ubicar en diferentes contextos, hemos observado que los alumnos proponen diferentes modelos para acercarse a la situación real que se plantea en el enunciado de los problemas. De esta forma, los problemas de estimación de grandes cantidades se muestran como una opción que ofrece una gran riqueza para plantear situaciones de aula en las que se trabaje la modelización, debido a la gran cantidad de situaciones y contextos en los que se pueden plantear.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2002). The Everyday and the Academic in Mathematics. En M. Brenner & J. Moschkovich (Eds.), *Everyday and Academic Mathematics in the Classroom* (pp. 12–29). Reston (VA), USA: NCTM

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(3), 331–364. DOI: 10.1007/978-1-4419-0561-1_52

Barth, H., Kanwisher, N. & Spelke, E. (2003). The construction of large number representations in adults. *Cognition*, 86, 201–221. DOI: 10.1016/s0010-0277(02)00178-6

Booth J.L. & Siegler, R.S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, 41(6), 189–201. DOI: 10.1037/0012-1649.41.6.189

Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 211–230. DOI: 10.1007/s10649-006-7834-1

Codes, M., González, M. T., Monterrubio, M. C. & Delgado, M. L. (2011). El análisis matemático a través de las situaciones reales presentes en los libros de texto de educación secundaria. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM. XIV Simposio de la SEIEM* (pp. 173–186). Lleida, España: SEIEM.

Doerr, H. & English, L. D. (2003). A modelling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2), 110–136.

Doerr, H. M. (2006a). Examining the tasks of teaching when using students' mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 3–24. DOI: 10.1007/s10649-006-4437-9

Doerr, H. M. (2006b). Teachers' ways of listening and responding to students' emerging mathematical models. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 255–268. DOI: 10.1007/BF02652809

English. L. D. (2006). Mathematical modeling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 303–323. DOI: 10.1007/s10649-005-9013-1

Esteley, C. B., Villarreal, M. E. & Alagia, H. R. (2010). The overgeneralization of linear models among university students' mathematical productions: A long-term study. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(1), 86–108. DOI:10.1080/10986060903465988

Freudenthal. H. (1983). *Didactical Phenomenology Of Mathematical Structures*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers Group.

Gibbs, G. (2007). *Analizing qualitative data*. London, United Kingdom: SAGE Publications.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(13), 170-218. DOI: 10.2307/749074

Hildreth, D. J. (1983). The use of strategies in estimating measurements. *Arithmetic Teacher*, 30(5), 50–54.

Hogan, T. P. & Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, 5(4), 259–280. DOI: 10.1207/S15327833MTL0504_02

Jones, M. G., Gardner, G. E., Taylor, A. R., Forrester, J. H. & Andre, T. (2012). Students' accuracy of measurement estimation: Context, units, and logical thinking. *School Science and Mathematics*, 112(3), 171–178. DOI: 10.1111/j.1949-8594.2011.00130.x

Jurdak, M. & Shahin, I. (1999). An ethnographic study of the computational strategies of a group of young street vendors in Beirut. *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), 155–172. DOI: 10.1023/A:1003894908704

Jurdak, M. & Shahin, I. (2001). Problem solving activity in the workplace and the school: the case of constructing solids. *Educational Studies in Mathematics*, 47(3), 297–315. DOI: 10.1023/A:1015106804646

Jurdak, M. (2006). Contrasting perspectives and performance of high school students on problem solving in real world situated, and school contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 283–301. DOI:10.1007/s10649-005-9008-y

De Lange, J. (1996). Using and applying mathematics in education. In A. J. Bishop (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 49–97). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers Group.

Lesh, R. & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2), 157–189. DOI: 10.1080/10986065.2003.9679998

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester (Ed.), *The second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). Charlotte (NC), USA: Information Age Publishing.

Lester, F.K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 660–675. DOI: 10.2307/749578

Martínez, M. (2008). Contextualización y enseñanza de las matemáticas en la educación primaria. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama, & A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Un reporte iberoamericano* (pp. 613-641). México (DF), México: CLAME.

Nunes, T., Schliemann, A. D. & Carraher D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.

Palm, T. (2006). Word problems as simulations of real-world situations: A proposed framework. *For the Learning of Mathematics*, 26(1), 42–47.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 37–58. DOI: 10.1007/s10649-007-9083-3

Peter-Koop, A. (2004). Fermi problems in primary mathematics classrooms: Pupils' interactive modelling processes. En S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010* (pp. 454-461) Sydney, Australia: MERGA.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton (NJ), USA: Princeton University Press.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada, España: Ed. Comares.

Puig, L. (2008). Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación y el currículo. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho & L. J. Blanco (Eds.), *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Badajoz, España: SEIEM.

Reys, R. E., Rybolt, J. F., Bestgen, B. J. & Wyatt, J. W. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, 183-201.

Segovia, I. & Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el departamento de didáctica de la matemática de la universidad de granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 499-536.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. & Rico, L. (1989). *Estimación en Cálculo y Medida*. Madrid, España: Síntesis.

Segovia, I., Rico, L. & Castro, E. (1996). *Estrategias de estimación de cantidades discretas: estudio exploratorio de competencias*. Granada, España: Universidad de Granada. Recuperado el 21 de octubre de 2013 de http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/SegoviaI96-149.PDF

Schoenfeld, A. H. (2007). Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39(5-6), 537–551. DOI: 10.1007/s11858-007-0038-z

Sriraman, B., Knott, L. & Adrian, H. (2009). The mathematics of estimation: Possibilities for interdisciplinary pedagogy and social consciousness. *INTERCHANGE: A Quarterly Review of Education*, 40(2), 205–223. DOI: 10.1007/s10780-009-9090-7

Sriraman, B. & Lesh, R. (2006). Modeling conceptions revisited. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 247–254. DOI: 10.1007/BF02652808

Stocker, D. (2006). Re-thinking real-world mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 26(2), 29–29.

Taylor, A. R., Jones, M. G. & Broadwell, B. (2009). Estimating linear size and scale: Body rulers. *International Journal of Science Education*, 31(11), 1495–1509. DOI:10.1080/09500690802101976

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25(2), 2–10.

Verschaffel, L. (2002). Taking the modeling perspective seriously at the elementary level: Promises and pitfalls. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference* (Vol. 1, pp. 64–80). Norwich. United Kingdom: PME

Winter, H. (1994). Modelle als konstrukte zwischen lebensweltlichen situationen und arithmetischen begriffen. *Grundschule*, 26(3), 10–13.

Autores

Lluís Albarracín. Universitat Autònoma de Barcelona, España. lluis.albarracin@uab.cat

Núria Gorgorió. Universitat Autònoma de Barcelona, España. nuria.gorgorio@uab.cat