Adriana Assis, Juan D. Godino, Cristina Frade

AS DIMENSÕES NORMATIVA E METANORMATIVA EM UM CONTEXTO DE AULAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS

The normative and meta-normative dimensions in a context of exploratory-investigative classes

RESUMEN

En este trabajo exploramos las dimensiones normativa y metanormativa que regulan las interacciones en la clase de matemáticas y dan forma a la participación de profesoras y alumnos, en un contexto de una tarea exploratorio-investigativa sobre patrones, implementada en una clase de 7º año de la Enseñanza Básica (alumnos de aproximadamente 12 años). Identificamos las normas y metanormas utilizando como herramientas teóricas dos modelos de análisis diseñados para describir e interpretar los procesos interactivos en el aula. Como consideraciones finales, destacamos la importancia de que el profesor tome consciencia de la trama compleja de normas y metanormas involucradas en las prácticas matemáticas y didácticas, así como la necesidad de que las gestione (negociando o cambiando), en cada momento de la actividad, para garantizar la optimización del aprendizaje de los estudiantes.

PALABRAS CLAVE:

- *Clase investigativa*
- *Enfoque ontosemiótico*
- *Normas*
- *Metanormas*
- *Patrones*

ABSTRACT

This paper explores the normative and meta-normative dimensions that regulate the interactions in mathematics classroom and shape the participation of teachers and students in a context of an exploratory-investigative task about patterns. This task was implemented in a 7th grade of a basic public school (approximately 12-years-old pupils). Norms and meta-norms were identified using as theoretical tools two models of analysis designed to describe and to interpret the processes of interaction in the classroom. We conclude by highlighting the importance of the teacher becomes aware of the complex network of norms and meta-norms involved in mathematical and didactic practices, as an important resource for managing (negotiating or changing) them, at each moment of the activity, to ensure optimization of student learning.

KEY WORDS:

- *Investigative class*
- *Onto-semiotic aproach*
- *Norms*
- *Meta-norms*
- *Patterns*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2012) *15* (2): 171–198.
Recepción: Julio 1, 2011 / Aceptación: Mayo 24, 2012.

RESUMO

Neste trabalho exploramos as dimensões normativa e metanormativa, que regulam as interações na aula de Matemática e dão formato à participação de professoras e alunos, em um contexto de uma tarefa exploratório-investigativa sobre padrões, implementada em uma classe de 7º ano do Ensino Fundamental (alunos de aproximadamente 12 anos). Identificamos normas e metanormas utilizando como ferramentas teóricas dois modelos de análise concebidos para descrever e interpretar os processos interativos em sala de aula. Como considerações finais, ressaltamos a importância de o professor ter consciência da trama complexa de normas e metanormas envolvidas nas práticas matemáticas e didáticas, assim como da necessidade de que as gerencie (negociando ou alterando), em cada momento da atividade, para garantir a otimização da aprendizagem dos alunos.

PALAVRAS CHAVE:
- *Aula Investigativa*
- *Enfoque ontossemiótico*
- *Normas*
- *Metanormas*
- *Padrões*

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous explorons les dimensions normatives et méta-normatives, qui réglementent les interactions dans la classe de mathématiques et donnent forme à la participation des professeurs et des étudiants dans un contexte d'une tâche d'exploration-investigation sur des normes qui sont implémentées dans une classe de 7ème de cours élémentaire (étudiants âgés de 12 ans à peu près). Normes et méta-normes sont identifiées utilisent comme outils théoriques deux modèles d'analyse destinée à décrire et interpréter les processus d'interaction dans la classe. Comme considérations finales, nous soulignons l'importance du professeur prend conscience de la trame complexe de normes et méta-normes impliqués dans les pratiques mathématiques et didactiques, comme la nécessité pour les gérer (négociation ou changement), chaque moment de l'activité, afin de assurer l'optimisation de l'apprentissage des étudiants.

MOTS CLÉS:
- *Cours de recherche*
- *Approche ontosémiotique*
- *Normes*
- *Méta-normes*
- *Modèles*

1. INTRODUÇÃO

Apesar de se considerar que "a realização de trabalho de cunho investigativo constitui uma experiência tão fundamental para a aprendizagem matemática do aluno como para o desenvolvimento profissional do professor" (Ponte, Fonseca & Brunheira, 1999, p.101), essa prática é pouco implementada em sala de aula, devido, em parte, à estruturação da escola na qual permanece a “cultura de aquisição”[1], em detrimento das possibilidades de interação com os alunos, buscando a produção e a crítica de novos conhecimentos. Sendo assim, torna-se necessário e urgente ampliar os estudos de alternativas para o trabalho em sala de aula, analisar a dinâmica dos processos de construção de conhecimentos estabelecida, bem como identificar as normas e metanormas que regulam essas práticas (Font, Planas & Godino, 2010) e suas implicações para o ensino e a aprendizagem.

Dentre essas alternativas, optamos pelas atividades exploratório-investigativas. Essa opção fundamenta-se na crença de que ambientes dessa natureza podem, de fato, oferecer um contexto rico e profícuo para o *partilhamento* e *negociação de significados* (Bruner, 2002) entre os próprios alunos e entre os alunos e o professor.Como Greeno (1997), entendemos que os estudantes podem aprender com problemas bem definidos (cujo enunciado contenha todos os dados necessários) e prática de exercícios. No entanto, “disposições alternativas para aprendizagem podem também prover oportunidades para os estudantes participarem mais ativamente na formulação e avaliação de problemas, questões, conjecturas, conclusões, argumentos e exemplos” (Greeno, 1997, p.10, tradução nossa).

Partindo do pressuposto de que a produção de significados ocorre em contextos sociais de natureza coletiva (Martin, Towers & Pirie, 2006), e considerando que este trabalho, primeiramente, trata-se de um estudo empírico sobre aprendizagem escolar, não poderíamos ter outro foco senão as interações semióticas (e normas e metanormas que as regulam) estabelecidas por professores e estudantes no referido contexto, no caso, as atividades exploratório-investigativas.

Considerando que uma prática particular em sala de aula determina as oportunidades que são oferecidas aos estudantes para se engajarem na construção de significados matemáticos (Franke, Kasemi & Battey, 2007), temos como objetivo, neste trabalho, identificar as normas e metanormas que regulam as interações e dão formato à participação de professores e alunos em práticas de atividades exploratório-investigativas, buscando delinear sua natureza. Para tal, analisamos uma tarefa sobre padrões, implementada em uma classe de 7º ano do Ensino Fundamental (alunos de aproximadamente 12 anos), em uma escola pública brasileira (Belo Horizonte/MG).

[1] Na “cultura de aquisição” atribui-se ao aluno um papel irrelevante na produção do conhecimento.

Na primeira parte do artigo (seções 2 e 3), explicitamos os constructos adotados e descrevemos os modelos teórico - metodológicos de análises utilizados. Em seguida (seção 4), aplicamos o 4º nível de análise, proposto pelo Enfoque Ontossemiótico (Font, Planas & Godino, 2010), e o modelo de análise para interpretar os processos de interação em sala de aula, proposto por Planas e Iranzo (2009), a um episódio de sala de aula. Na seção 5, buscamos identificar as normas e metanormas, suscitadas durante a atividade. Na última seção, apresentamos considerações sobre a importância de o professor ter consciência da trama complexa de normas e metanormas envolvidas nas práticas matemáticas e didáticas, assim como da necessidade de que as gerencie (negociando ou alterando), em cada momento da atividade, para garantir a otimização da aprendizagem dos alunos.

2. Marco teórico

A seguir, apresentamos os constructos de referência utilizados nesta investigação.

2.1. *Atividades exploratório-investigativas*

A aprendizagem baseada na investigação (inquiry learning) é uma abordagem originada de práticas de investigação científica e enfatiza o processo de propor questões ou problemas relevantes, recolher e analisar dados e construir argumentos baseados em evidências (Hmelo-Silver, Duncan & Chinn, 2007).

Essa abordagem enfatiza a importância de os aprendizes se engajarem na produção do próprio conhecimento de maneira independente. Não se pode esperar, no entanto, que os alunos da Educação Básica sejam capazes de, desde o princípio, projetar e realizar as próprias investigações. Na verdade, "a maioria dos estudantes, independentemente da idade, precisam de ampla prática para desenvolver as suas capacidades de investigação e compreensão, a ponto de poderem conduzir sua própria investigação do início ao fim" (Banchi & Bell, 2008, p. 26, tradução nossa).

A aprendizagem baseada na investigação, segundo Hmelo-Silver, Duncan e Chinn (2007), pressupõe engajamento colaborativo dos estudantes em investigações e um significativo papel do professor, já que a ele cabe fornecer "andaimes"[2] (scaffoldings) de maneira a tornar as tarefas acessíveis e manejáveis,

[2] Hmelo-Silver, Duncan e Chinn (2007) consideram como "andaimes" tanto a intervenção do professor (ou dos próprios alunos) quanto o uso de ferramentas tecnológicas como, por exemplo, calculadoras, software educacional ou programas que permitem fazer simulações.

visando à emergência de possíveis zonas de desenvolvimento proximais (Frade e Meira, no prelo).

Este suporte é justificado pelo fato de que, quando os estudantes se esforçam, dentro de limites razoáveis, eles trabalham mais ativamente e se dedicam mais, buscando dar sentido à situação, que, por sua vez, leva-os a construir interpretações mais ligadas ao que eles já conhecem e/ou reexaminar e reestruturar o que já sabem. Esse tipo de engajamento gera aprendizagem de conteúdos e habilidades com mais profundidade (Hiebert & Grouws, 2007).

Banchi e Bell (2008) defendem a ideia de que a aprendizagem baseada na investigação (inquiry learning) pode ser desenvolvida em 4 níveis (Quadro 1):

Níveis de investigação	*Questão*	*Procedimento*	*Solução*
1 - *Investigação de confirmação* Os alunos confirmam uma proposição, através de uma atividade, quando os resultados são conhecidos antecipadamente.	✓	✓	✓
2 - *Investigação estruturada* Os estudantes investigam uma pergunta apresentada pelo professor, através de procedimentos prescritos.	✓	✓	
3 - *Investigação guiada* Os estudantes investigam uma pergunta apresentada pelo professor, usando procedimentos desenhados/selecionados pelos estudantes.	✓		
4 - *Investigação aberta* Os estudantes investigam questões que são formuladas por eles próprios, a partir de procedimentos desenhados/selecionados por eles.			

Quadro 1: Os quatro níveis de investigação e a informação dada ao aluno em cada um (Banchi & Bell, 2008, p.27).

Apesar de haver uma vasta literatura sobre resolução de problemas, procurando definir sem ambiguidade o que se entende por problema[3], não é clara em muitos textos qual é a relação entre o processo de resolução de problemas e o processo investigativo.

Ponte, Fonseca e Brunheira (1999, p.94-95), utilizando o termo investigações matemáticas, para denominar um processo/abordagem investigativa que se insere no que Ernest (1996) denomina pedagogia orientada para investigação (inquiry-oriented pedagogy)[4], as diferenciam de resolução de problemas:

> na resolução de problemas, tal como é entendida inicialmente, o objetivo é encontrar o caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível. É um processo convergente. Numa investigação matemática, o objetivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes, a partir de dada situação. É um processo divergente. Sabe-se qual é o ponto de partida, mas não se sabe qual será o ponto de chegada.

As investigações matemáticas também se diferenciam das explorações. As investigações matemáticas são situações-problema desafiadoras e abertas, que permitem aos alunos várias alternativas de exploração e investigação. Já as explorações tendem a ser mais livres e menos sistemáticas, sendo frequentemente utilizadas para introduzir um novo tema de estudo ou para problematizar e produzir significados a um conceito matemático (Ponte, 2003).

Neste estudo, não estabelecemos uma distinção clara entre as duas formas de tarefas acima descritas. Por isso, para fazer referência a ambas, utilizamos a expressão atividades "exploratório - investigativas" para sinalizar o tipo de tarefa em que os alunos se dedicam tanto à exploração quanto à investigação matemática.

Uma *aula investigativa* é aquela que supõe o envolvimento dos alunos em tarefas investigativas e, portanto, "ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína" (Ponte, Brocado & Oliveira, 2006, p. 23).

---

3 Entendemos, como Guzmán (1992), que estamos diante de um problema "quando me encontro em uma situação a partir da qual quero chegar a outra, umas vezes bem conhecida, outras um tanto confusamente perfilada, e não conheço o caminho que pode me levar de uma a outra" (p.18, tradução nossa). Denominamos as ações que levam de uma situação a outra na resolução de problemas.

4 Descoberta guiada (o professor é um facilitador que leva os alunos a resolverem os problemas por si mesmos), a resolução de problemas e abordagem investigativa são métodos que se fundamentam na investigação para o ensino de Matemática, constituindo o que Ernest (1996) denomina uma pedagogia orientada para investigação.

Ponte, Fonseca e Brunheira, (1999) descrevem as fases de uma aula de investigação: introdução da tarefa, desenvolvimento do trabalho e discussão final/reflexão.

Na primeira fase, explica-se a tarefa e o tipo de trabalho que se quer desenvolver com as investigações. Pode-se optar pela distribuição do enunciado escrito, acompanhado de uma pequena apresentação oral, pode-se apresentar a tarefa apenas oralmente, podendo o professor, eventualmente, ir registrando no quadro algumas informações essenciais e, finalmente, a tarefa pode surgir espontaneamente, a partir da atividade dos alunos.

Na fase do desenvolvimento do trabalho, pretende-se que os alunos adquiram uma atitude investigativa, devendo, para isso, haver a preocupação em centrar a aula em sua atividade, em suas ideias e em sua pesquisa. Ao longo dessa fase, o professor deve ter uma atitude questionadora perante as solicitações de que certamente será alvo. Poderá, por exemplo, propor questões relativas ao que fizeram, pedir que analisem um conjunto de dados obtidos, sugerir que organizem esses mesmos dados de outra maneira, etc.

A discussão final sobre a atividade é também uma boa ocasião para promover a reflexão sobre o trabalho, o que permite aos alunos valorizar os processos de resolução em relação aos produtos, mesmo que não conduzam a uma resposta final correta, criando uma visão mais verdadeira da Matemática.

2.2. *Padrões e Álgebra*

A importância dos padrões na Matemática tem sido salientada por vários autores. Por exemplo, Zazkis e Liljedahl (2002) afirmam que "os padrões são o coração e a alma da Matemática" (p. 379, tradução nossa). Também os *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) afirmam que os padrões constituem a base do pensamento algébrico e que a sua exploração envolve os alunos na identificação de relações e no estabelecimento de generalizações, propondo o conhecimento de padrões, funções e relações como objetivo para todos os níveis de ensino.

Vários autores (Ponte, 2005; Zazkis & Liljedahl, 2002; Souza & Diniz, 1996) defendem uma abordagem de padrões para a introdução do conceito de variável, argumentando que, tradicionalmente, as variáveis são introduzidas como incógnitas em equações, onde elas não possuem uma natureza variável. Afirmam, ainda, que essa abordagem proporciona aos alunos a oportunidade de observar e verbalizar suas generalizações e registrá-las simbolicamente.

No entanto, a “passagem” da utilização estrita de números para a utilização de símbolos não é uma ocorrência automática e, não por acaso, constitui um dos grandes entraves ao entendimento da Álgebra. Isso porque é preciso que seja construído o “sentido de símbolo” (Arcavi, 2007), ou seja, a capacidade de interpretar e de usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na descrição de situações e na resolução de problemas (Ponte, 2006).

As abordagens chamadas pré-álgebra têm como objetivo facilitar a abrupta transição da Aritmética para a Álgebra. Essas abordagens transacionais indicaram uma mudança nas pesquisas ao longo do tempo, afastando-se da resolução de equações como principal atividade de instrução em Álgebra para atividades de transição como generalização, padrões numéricos, variáveis e funções (Carraher & Schliemann, 2007).

Sendo assim, entendemos, como Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), que é fundamental proporcionar aos alunos um grande número de experiências algébricas informais que envolvam a análise de padrões e relações numéricas e a sua representação e generalização por meio de diferentes processos.

3. Descrição dos modelos teórico-metodológicos de análise

O Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento Matemático (EOS) propõe cinco níveis ou tipos de análise didática: 1) Identificação de práticas matemáticas; 2) Elaboração das configurações de objetos e processos matemáticos; 3) Análise das trajetórias e interações didáticas; 4) Identificação do sistema de normas e metanormas; 5) Valoração da idoneidade didática do processo de ensino e aprendizagem (Font, Planas & Godino, 2010).

Apesar de considerarmos que uma análise didática precisa descrever e explicar a aprendizagem, bem como a forma como se dá sua produção, como nos permite os diversos níveis de análise do referido modelo, neste artigo utilizamos apenas o nível 4, que detalhamos a seguir.

3.1. *A dimensão normativa e metanormativa*

Dentro do contexto que implica a sala de aula, a noção de normas refere-se às obrigações que regem as interações entre professor e alunos e, em geral, às convenções estabelecidas de maneira histórica sobre como se comunicar e como reagir ante as intervenções dos outros (Planas & Iranzo, 2009).

No caso das aulas de Matemática, há normas vinculadas à atividade matemática que são próprias daquelas colocadas em prática quando lidamos com objetos e processos matemáticos, chamadas normas *sociomatemáticas* (Voigt, 1995; Yackel & Cobb, 1996).

Voigt (1995) identifica também como normas *sociomatemáticas* as normas de sala de aula que implicam a valoração de uma solução de um problema como inteligente ou inventiva e explicações e argumentações consideradas como matematicamente corretas.

As normas *sociomatemáticas* são, na perspectiva social, o correlato das *crenças* e *valores* identificados na perspectiva psicológica, ao tentar perceber como os estudantes chegam a ser intelectualmente autônomos em Matemática (Godino, Font, Wilhelmi & Castro, 2009).

Nesse sentido, segundo Yackel e Cobb (1996), o que se torna matematicamente normativo numa sala de aula é determinado pelos objetivos, crenças, suposições e pressupostos presentemente assumidos pelos participantes da aula. Ao mesmo tempo, esses objetivos e compreensões, em grande parte implícitas, são influenciados pelo que é legitimado como atividade matemática aceitável.

Essas regras podem ser também entendidas como *cláusulas do contrato didático* (Brousseau, 1988)*,* visto que as obrigações recíprocas que o professor e os alunos têm a responsabilidade de administrar, sobretudo implicitamente, são parecidas a um contrato.

Em Godino, Font, Wilhelm e Castro (2009), é introduzida *a dimensão normativa dos processos de estudo*, para denominar o sistema de regras, hábitos, normas que restringem e suportam as práticas didáticas, com o intuito de integrar e ampliar as noções de "contrato didático" e "normas sociais e sociomatemáticas".

A dimensão normativa abarca as facetas dos processos de ensino e aprendizagem de Matemática (epistêmica, cognitiva, afetiva, interacional, mediacional e ecológica), suas respectivas normas (*epistêmicas*, *cognitivas, afetivas*, *mediacionais*, *interacionais* e *ecológicas)*, além de considerar o momento, origem, tipo e grau de coerção (Figura 1).

Considerando que as normas são negociadas dentro da sala de aula, e, portanto, são objeto de interpretação, valoração e reflexão pelos agentes envolvidos, devemos considerar que professor e alunos mobilizam conhecimentos que dizem respeito a conteúdos *de* Matemática, mas também conhecimentos *sobre* Matemática, *sobre* sua utilização, *sobre* ensino e aprendizagem (particularmente de Matemática) e, dentre outros, *sobre* a consciência que tem o sujeito do próprio conhecimento.

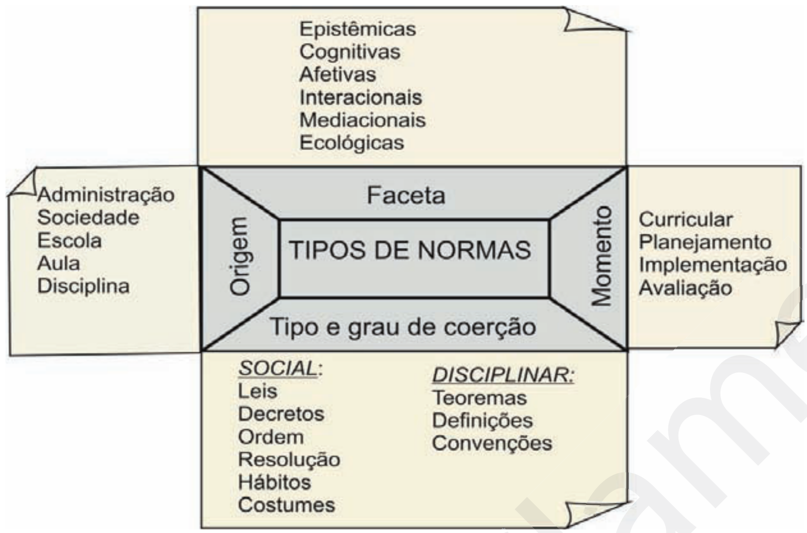


Figura 1. Dimensão normativa. Tipos de normas

Esse conhecimento, de segunda ordem, expresso em comportamentos e discursos pelos agentes envolvidos, denomina-se *metaconhecimento* e tem uma natureza similar às normas *sociomatemáticas* mencionadas anteriormente.

Para considerar os metaconhecimentos, é incorporado ao EOS a noção de *dimensão metanormativa dos processos de estudo* (D'amore, Font & Godino, 2007), composta pelas configurações "meta": *metaepistêmica*, *metainstrucional* e *metacognitiva* (Figura 2).

Cada prática didática associa-se a normas distintas. A aplicação do 4º nível de análise, proposto pelo EOS, consiste em identificar/reconhecer as normas que regulam determinada prática matemática com o objetivo de delinear a natureza normativa dessa prática.

3.2. *Práticas, normas e conflitos entre significados*

Segundo Planas e Iranzo (2009), as disparidades de significados atribuídos pelos distintos participantes em um momento da tarefa matemática podem indicar discrepâncias entre *práticas matemáticas*[5] e o uso das normas postas em jogo. Isso porque os *conflitos semióticos*[6] podem ter sua origem na diversidade de normas suscitadas.

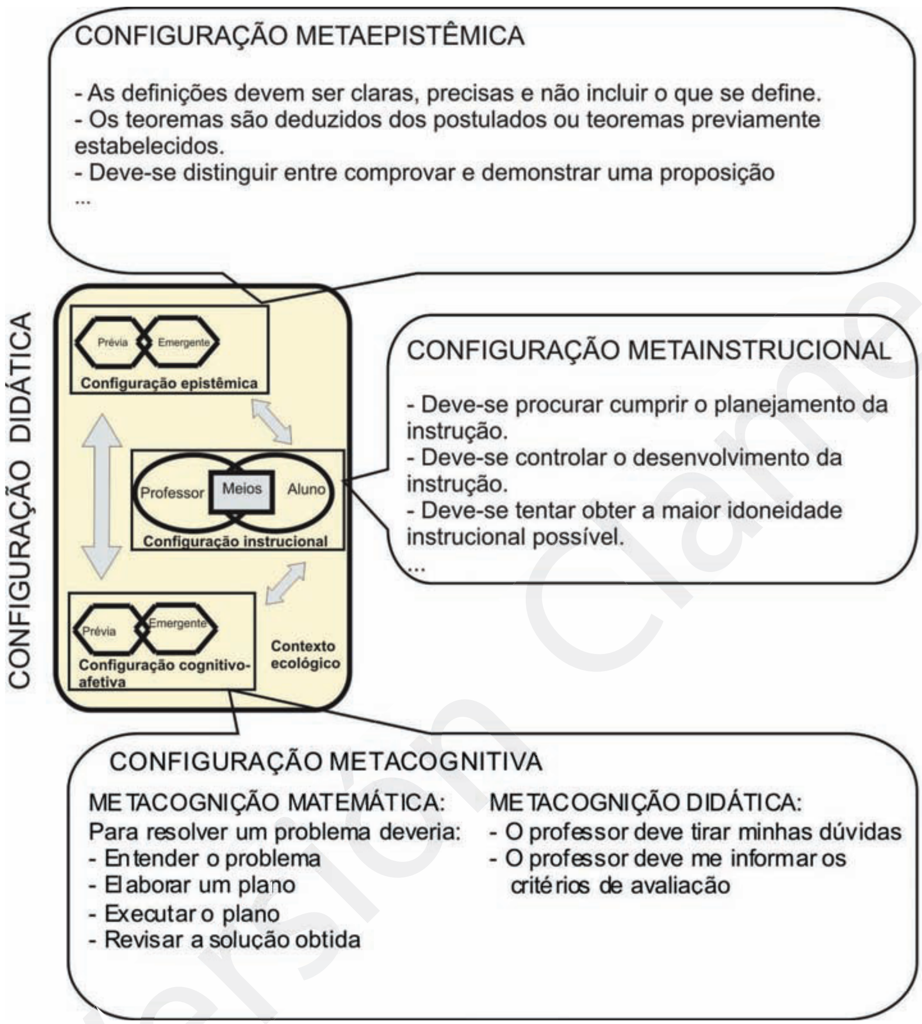


Figura 2. Componentes da dimensão metanormativa

[5] Considera-se prática matemática qualquer ação / performance ou manifestação - verbal, gráfica, gestual, etc. - levada a cabo na resolução de problemas matemáticos e na comunicação das soluções obtidas a outras pessoas, a fim de validá-las ou generalizá-las a outros contextos e problemas (Godino & Batanero, 1994).

[6] Define-se como conflito semiótico qualquer disparidade ou discordância entre os significados atribuídos a uma expressão por dois sujeitos - pessoas ou instituições (Godino, 2002).

Partindo desse pressuposto, Planas e Iranzo (2009) propõem um modelo com 4 níveis de análise para facilitar a identificação e descrição das normas: nível 1 - identificação de práticas matemáticas; nível 2 - identificação de normas sociomatemáticas; nível 3 - identificação de conflitos entre significados; nível 4 - exploração de relações entre práticas, normas e conflitos.

Optamos, neste trabalho, por utilizar o nível 4 do modelo proposto por Planas e Iranzo (2009) para interpretar os processos de interação em sala de aula. A aplicação desse nível requer que prestemos atenção à existência de mais de uma norma na interpretação de uma prática. Sendo assim, o trabalho neste nível supõe a existência de um conhecimento metamatemático suficiente para serem reconhecidas, por um lado, as condições exigidas para que uma prática seja considerada matemática; por outro, a variedade de expectativas dentro do discurso matemático em torno ao desenvolvimento e avaliação de tais práticas (Planas & Iranzo, 2009).

Assim como Planas e Iranzo (2009), concebemos o processo de inferência de normas de forma principalmente interpretativa. Isso porque partimos da transcrição dos textos ditos durante a aula e enunciamos outros textos que não são mencionados, mas podem ser observados com base no conhecimento da situação didática e da interação.

4. Aplicação dos modelos de análise

Para aplicar os modelos de análise, partimos da transcrição[7], gerada a partir de gravações realizadas em áudio (alguns trechos também em vídeo), de uma atividade exploratório-investigativa sobre padrões (Figura 4). Os participantes formavam uma turma de 15 alunos (de aproximadamente 12 anos) e pertenciam a uma escola pública de Belo Horizonte (MG). A atividade foi implementada em 2010, faltando três meses para o encerramento do ano letivo, por duas professoras (a 1ª autora e a professora da turma, denominadas neste artigo, respectivamente, *Prof 1* e *Prof 2*). Os alunos organizaram-se livremente em mesas hexagonais dispostas pela sala formando 3 grupos.

[7] As falas transcritas foram numeradas de 1 a 473. Quando nos referimos a esse extrato colocamos o número que indica o turno entre colchetes.

A tarefa aqui analisada (Figura 4) trata-se da sétima atividade implementada com esses alunos, de um total de nove atividades exploratório-investigativas, sobre diversos temas, ministradas no formato de oficinas. Nesse momento, os alunos ainda se encontravam em uma fase de transição entre a aula clássica a que estavam habituados e o trabalho de investigação. Apesar de já terem estudado o tema equações de 1º grau, não tinham trabalhado com sequências, padrões ou quaisquer atividades similares.

Para cada grupo, foram distribuídas uma folha com orientações para o desenvolvimento da tarefa (Figura 4), vários retângulos do mesmo tamanho, recortados em lona, e um saquinho contendo rolhas (Figura 3). Foi pedido aos alunos que, utilizando o material para simular mesas e cadeiras, desenvolvessem, em grupos, a investigação proposta.

Figura 3. Material concreto utilizado

Cada grupo recebeu uma folha de papel kraft e vários pincéis coloridos. Os grupos foram orientados a utilizar esse papel para fazer o registro coletivo da tarefa.

O tempo da aula dedicado a essa oficina foi de 1 hora e 10 minutos. É analisado, neste artigo, no entanto, apenas o trabalho realizado por um grupo de 4 meninos que denominamos Marcelo, Paulo, Vanderlei e Valter[8]. Este grupo, apesar de apresentar dificuldades em Matemática, mostrou-se bastante motivado e comprometido com a atividade, demonstrando persistência mesmo quando não conseguia progredir.

8 Nomes fictícios.

Tarefa Investigativa: Álgebra em festa de casamento?[9]

A Tarefa Proposta:

Em determinada festa de casamento, cada mesa comporta 6 pessoas. Esperando que houvesse uma aproximação e união dos convidados presentes para a confraternização, resolveram juntá-las na seguinte disposição:

Será que há álgebra numa festa de casamento? Vejamos... Seguem algumas questões para a nossa investigação: (*Lembre-se! Todas as respostas devem ser justificadas, com cálculos ou desenhos!*)

a) Construa uma tabela que relacione a *quantidade de mesas* e a *quantidade de cadeiras* utilizadas. Encontre o número de cadeiras utilizadas com, pelo menos, 6 mesas. Observe as possíveis relações entre *mesas* e *cadeiras.*

b) Usando 15 mesas, quantas cadeiras são necessárias? Justifique.

c) Se houver 42 cadeiras, quantas mesas serão necessárias? Justifique.

d) É possível constituir uma fileira de mesas que tenha 100 cadeiras? Se possível, quantas mesas seriam necessárias? Por quê?

e) Investigando a sequência, a partir do desenho e/ou da tabela construída no item a), explique como ela é constituída. Qual é o padrão existente?

f) Escreva uma *expressão matemática* que relacione o número de mesas e o número de cadeiras. *É importante o uso de uma linguagem mais elaborada, aproximando-se de uma fórmula.* Que letras poderiam ser usadas?

Figura 4. Tarefa exploratório-investigativa implementada

Com essa tarefa, pretendíamos que os alunos: explorassem a relação e variação entre as grandezas envolvidas; sentissem necessidade de utilizar uma letra, como variável, para representar uma das grandezas envolvidas; compreendessem a noção de termo geral da sequência numérica obtida a partir do desenho ou da tabela construída; formulassem e testassem conjecturas matemáticas na exploração das subtarefas propostas; obtivessem uma fórmula (expressão matemática) que representasse a relação entre as grandezas ou o termo geral (*enésimo* termo) da sequência.

9 A tarefa investigativa "Álgebra em festa de casamento?" foi adaptada de Fernandes (2010).

Na realização da tarefa, está em jogo uma correspondência ou função que relaciona o número de cadeiras (variável dependente) e o número de mesas (variável independente). Os conjuntos inicial e final são as quantidades de mesas e cadeiras e suas respectivas medidas. Consideramos que a emergência ou manifestação do pensamento algébrico não está em que o aluno "maneje", reconheça ou aplique conceitos abstratos (número, quantidade, medida, multiplicação, adição, em casos particulares). O referido pensamento manifesta-se quando a regra ou critério de correspondência é identificado: $c = 4m + 2$. Essa regra pode ser expressa de diversas maneiras, por exemplo, "obtém-se o número de cadeiras multiplicando por quatro o número de mesas e somando as duas cadeiras que são colocadas nas cabeceiras". Um nível superior de raciocínio algébrico é alcançado quando o aluno é capaz de generalizar essa regra, escrevendo, por exemplo, $y = 4x + 2$, utilizando x e y para indicar quaisquer valores numéricos.

5. Identificação do sistema de normas e metanormas

Segundo Godino, Font, Wilhelmi e Castro (2009), um importante estímulo para o estudo da Matemática parece estar na eleição dos tipos de situações-problema, tarefas, atividades concretas que o professor propõe aos alunos. O modelo "instrucional" que adota em classe - tipos de configurações e trajetórias didáticas que organiza e administra - condiciona as oportunidades de aprendizagem dos alunos e pode despertar maior compromisso com o estudo.

Sendo assim, nesta seção, identificamos normas originadas principalmente dos pressupostos e do caráter aberto das tarefas exploratório-investigativas (assim como metanormas associadas a elas, por exemplo, as normas *metainstrucionais* que se referem à forma como se deve atuar para otimizar o ensino e a aprendizagem) e normas *epistêmicas* originadas da resolução da tarefa proposta.

Entendemos por normas *epistêmicas,* assim como D'Amore, Font e Godino (2007), as configurações de objetos que regulam a prática matemática em um marco institucional. Cada componente da configuração de objetos está relacionado com normas metaepistêmicas (refere-se, por exemplo, aos conceitos, proposições e procedimentos considerados válidos em uma prática). As normas *epistêmicas* foram identificadas, utilizando-se a ferramenta *configuração epistêmica* proposta pelo EOS (Godino, Contreras & Font, 2006), e organizadas na figura 5 em concordância com a referida ferramenta.

O grupo analisado neste trabalho, assim como toda a turma, ressentiu-se muito, nas primeiras oficinas, com o fato de as professoras *não aportarem todas as informações ou não darem a solução direta para o problema* (norma *metainstrucional*), principalmente quando o grupo se encontrava em um momento crítico/chave da resolução da tarefa.

No momento em que essa oficina é realizada, o grupo analisado já consegue trabalhar de forma mais independente. Tal fato se deve ao entendimento construído pelo grupo, ao longo das oficinas, de que o trabalho com as atividades exploratório-investigativas exige que *os alunos assumam a responsabilidade da resolução da tarefa* (norma *metainstrucional*). Nessa oficina, o grupo parece apresentar mais confiança no trabalho que realiza, o que, inferimos, advém do fato de, a partir de um processo de *metacognição didática*[10], aceitar as normas como inerentes ao trabalho e passar então a tomar a iniciativa de buscar resolver a tarefa, sem requisitar ajuda constante por parte das professoras.

As normas anteriormente descritas são suportadas pelo pressuposto assumido no trabalho com atividades exploratório-investigativas, segundo o qual, caso se pretenda promover uma aprendizagem significativa, o *professor deve levar os alunos a construir o entendimento* (norma *metainstrucional*). Deve dar suporte à aprendizagem proporcionando "andaimes", mas não deve, por exemplo, dar respostas prontas.

Foi inferida a norma *metaepistêmica* de que *as tarefas não rotineiras exigem mais atenção* [1].

[1] *Prof 1*: Todo mundo agora vai pegar, por favor, essa folhinha aqui. Queria que vocês agora... Gente, vocês têm que prestar atenção porque senão não conseguirão desenvolver a atividade! *(tom de voz enfatizando que a atividade é diferente)*. Esta coisinha cinza *(retângulo recortado em lona),* nós vamos fingir que é uma mesa. Coloque essa mesa no centro do papel kraft. Agora, tirem do saquinho... Cada um destes pininhos ou tampinhas vai ser...

A professora Prof 1 introduz uma norma *epistêmica representacional ao convencionar que a peça retangular representa uma mesa*; posteriormente, o referido objeto poderá ser representado pela letra *m* (mesa) e finalmente pela letra *x*.

A norma *metainstrucional deve-se propiciar situações em que os alunos se dediquem à descoberta* gerou a norma *afetiva* relacionada à *autoria da descoberta da solução.* Após a resposta ser validada por uma das professoras, os

10 Metacognição relacionada ao ensino e aprendizagem. Para mais detalhes ver D'Amore, Font e Godino (2007).

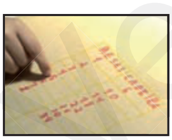
ELEMENTOS LINGUÍSTICOS

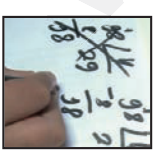
- Gestual:
  Ex:

- Verbal:
  Números naturais, adição, subtração, multiplicação, divisão, operação inversa, regra, equação, expressão, igual, variável parênteses, retângulo, centímetros, números decimais, resolver, construir, investigar, etc.

-Simbólico:
  x (variável), números naturais e decimais, símbolos para adição, subtração, multiplicação, divisão, igualdade, equação, etc.
  Ex:
  $(42 - 2) : 4$

- Gráfico-simbólico
  Exs:
  $4 . x + 2 = 100$





SITUAÇÃO -PROBLEMA
Tarefa exploratório-investigativa (Figura 4)

Motivam — Resolvem

Expressam e dão suporte — Regulam o uso

REGRAS

DEFINIÇÕES
Prévias: equação, operação inversa, expressão matemática.
Emergentes: padrões, relação entre grandezas, variável, sequência (implícitos).

PROPOSIÇÕES/PROPRIEDADES
Soluções para a tarefa:
P1 (item a) O número de cadeiras é 4 vezes o número de mesas mais 2.
P2 (item b) 62.
P3 (Item c) 10.
P4 (item d) Não.
P5 (item e) Para descobrir o próximo termo da sequência deve-se somar 6 (ao termo anterior) e subtrair 2.
P6 (item f) $(x . 4) + 2$
- As operações em uma expressão tem uma determinada ordem para serem resolvidas.
- Se usa parênteses caso seja necessário resolver a expressão em uma ordem diferente da estabelecida pela propriedade acima.

PROCEDIMENTOS
Prévios: contagem, soma, subtração, multiplicação e divisão de números naturais, simplificação de expressões, resolução de equações, construção de uma tabela.
Emergentes: reconhecimento de regularidades, generalização, construção de uma expressão para expressar a regularidade encontrada.

Intervêm e condicionam — justificam

ARGUMENTOS
A1 Comprovação empírica a partir da contagem e da construção de uma tabela.
A2 Para obter o número de cadeiras para 15 mesas, multiplicamos 15 por 4 e somamos 2.
A3 Para obter o número de mesas fazemos o contrário [refere-se à P1]: o contrário da adição é a subtração e o contrário da multiplicação é a divisão, então temos que calcular o número de cadeiras menos 2 dividido por 4. A solução obtém-se simplificando a expressão $(42 - 2) : 4$
A4 Resolução da equação $4 . x + 2 = 100$. Como $x = 24{,}5$ então não é possível.
A5 Cada nova mesa que acrescentamos "vem" com 6 cadeiras. Só que precisamos tirar 2 que são as que perdemos nas junções.
A6 Utilizando-se "x" para representar o número de mesas podemos escrever $x . 4$. Como é necessário também considerar as cadeiras das cabeceiras, somamos + 2. O número de cadeiras é dado pela expressão $x . 4 + 2$.

Figura 5. Configuração epistêmica implementada.

alunos, devido ao fato de estarem trabalhando em grupo, sentem necessidade de reafirmar [119,121] ou reivindicar [289] a autoria da descoberta.

[118] *Paulo*: [...] Vai dar 14.
[119] *Valter*: É o que eu já tinha feito antes.
[120] *Paulo*: 1, 2, 3, ...
[121] *Valter*: Já tinha falado antes.
[285] *Valter*: É 15 vezes 4 mais 2
[288] *Prof 2*: Então escreva o que o Valter tá falando.
[289] *Marcelo*: É, mais a ideia foi minha, no caso, né Valter?

Quando a autoria é reconhecida (na maioria das vezes, através de linguagem não verbal), o aluno "contemplado" mostra-se satisfeito, em alguns casos claramente feliz, o que se deve em grande parte ao fato de a experiência pessoal de resolver um problema ser um dos fatores que favorece a autoestima.

Foram identificadas também outras normas que regulam as interações e que implicitamente aparecem durante a realização da tarefa, comuns a muitas práticas matemáticas, por exemplo, as professoras têm um papel determinante no início, gestão e finalização das intervenções; na conversação, deve-se prestar muita atenção às intervenções dos demais envolvidos e perguntar se tiver dúvidas.

A seguir, enumeramos outras normas *epistêmicas* e *metaepistêmicas* e indicamos trechos da transcrição da aula para exemplificar.

a) *Os padrões/fórmulas precisam "funcionar" para quaisquer valores* (norma *epistêmica*) [244, 249, 407], bem como a norma *metaepistêmica,* segundo a qual *é necessário testar os padrões/fórmulas* [407-423].

[244] *Prof 2*: Mas isso vai dar certo para as outras?
[245] *Paulo*: Não.
[246] *Prof 2*: Então, vamos pegar, vamos lá...
[249] *Prof 2*: Agora, tem que ser pra todas!
[407] *Prof 2*: Então é o número de mesas que vai variar, não é isso? Então quer dizer que eu tenho que pegar 4 vezes o número de mesas e acrescentar 2? Vamos ver se vai dar certo: 4 vezes 1?
[408] *Todos*: 4!
[409] *Prof 1*: mais 2?
[410] *Todos*: 6!
[411] *Prof 2*: 4 vezes 2?
[412] *Todos*: 8!
[413] *Prof 2*: mais 2?

[414] *Todos*: 10!
[415] *Prof 2*: 4 vezes 3?
[416] *Todos*: 12!
[417] *Prof 2*: mais 2?
[418] *Todos*: 14!
[419] *Prof 2*: E se a gente estivesse na posição... 8! 4 vezes 8?
[420] *Todos*: 32!
[421] *Prof 2*: mais 2?
[422] *Todos*: 34
[423] *Prof 2*: Ok?

b) *Não basta dar uma solução, é preciso explicitar e justificar matematicamente o raciocínio* [66, 326, 327]. *Numa atividade matemática, é preciso chegar a um consenso* [312] (normas *metaepistêmicas*).

[66] *Prof 1*: Mas qual é o raciocínio? Você pensou assim: uma mesa tem 6...
[312] *Prof 2*: Mas é isso que eu quero saber, porque cada um fala uma coisa. Eu quero saber o seguinte: eu tenho 42 cadeiras. Quantas mesas eu preciso.
[326] *Prof 2*: Então, quanto que deu? Deu 10 mesas. Vocês vão ter que justificar aqui, ó! (refere-se ao registro escrito no papel kraft)
[327] *Prof 2*: Que conta que vocês fizeram para chegar nessas 10 mesas?

c) As *fórmulas não admitem questionamentos* [397] (norma *metaepistêmica*). O aluno Marcelo afirma, ao responder o item d) da tarefa, que é possível utilizar 100 cadeiras, argumentando que ficariam 49 cadeiras de cada lado e 2 na cabeceira [396] A professora, no entanto, testa a fórmula $(x.4+2)$ encontrada pelo grupo [397]:

[394] *Marcelo*: Professora, não vai dar 49?
[396] *Marcelo*: se tiver 49 aqui e 49 aqui, vai dar 98; mais uma aqui e outra aqui [refere-se às cadeiras da cabeceira], vai dar 100!
[397] *Prof 2*: Vocês não estão usando essa regrinha aqui? Pois é, 4 vezes 25, 100 com mais 2, 102. Estourou! Vamos tentar agora 24! 24 vezes 4, segundo o Valter, deu 96. 96 mais 2, 98. Então não deu.

d) *É necessário interpretar o sentido da solução no contexto do problema* [470] (norma *metaepistêmica*).

[469] *Prof 1*: Isso... e o zero! Então deu 24,5. [refere-se à resolução da equação $4x + 2 = 100$, que é realizada para responder ao item d) da tarefa]
[470] *Prof 1*: Gente, por isso é que vocês responderam que não. 24 e meio... Existe meia mesa?
[471] *Valter* e *Paulo*: Não.

Tanto a professora Prof 2 [397] quanto a professora Prof 1[470] não aceitam a solução 24 mesas com 4 cadeiras e uma única mesa com 2 cadeiras (49 cadeiras de cada lado e 1 em cada cabeceira). Tal solução pode ser possível no contexto prático, mas não no contexto matemático. Ainda que matematicamente a função direta $c = 4m + 2$ exista para todo m pertencente ao conjunto dos números naturais, a função inversa $m = \frac{c - 2}{4}$ só existe quando c - 2 é múltiplo de 4.

Estabelece-se um conflito entre a solução de Marcelo (que considera o contexto prático/do cotidiano) e a solução aceita, em momentos distintos, pelas professoras (que consideram o contexto matemático). Inferimos que a não validação da resposta de Marcelo explicita normas *epistêmicas contextuais,* evidenciadas a partir da confrontação entre as normas de uso do contexto real e as do contexto acadêmico.

A seguir, buscamos também identificar normas supostamente implicadas no aparecimento dos conflitos semióticos, explicitados durante a realização da tarefa (Quadro 2). Para facilitar a identificação e descrição dessas normas, utilizamos o 4º nível de análise proposto por Planas e Iranzo (2009).

CONFLITO 1		
INTERAÇÕES	*PRÁTICAS*	*NORMAS METAEPISTÊMICAS*
[185] *Valter*: 22 *(refere-se ao número de cadeiras para 5 mesas)*, pra 10, vão ficar 44...	Procura descobrir o número de cadeiras necessário para 15 mesas.	
[186] *Paulo*: Não adianta somar não, tem que fazer!	Afirma que é preciso fazer a contagem.	
[188] *Paulo*: Essa regra pode mudar a qualquer hora.	Afirma que encontrar uma regra não “vale a pena”.	As regras não são confiáveis (podem mudar).
[201] *Paulo*: 61! *(depois de contar as cadeiras)*	Proporciona uma solução incorreta.	

[202] *Marcelo*: 62!	Proporciona uma solução correta.	
[203] *Marcelo*: 1, 2, 3, ..., 20,..., 40,..., 62!	Refaz a contagem para confirmar a solução.	Há uma única resposta correta (ao menos nesse caso), portanto, alguém está equivocado.
[204] *Paulo*: Não tem, não!	Discorda da solução.	
[205] *Marcelo*: é 62!	Reafirma a solução.	
[206] *Paulo*: 1, 2, 3, ..., 62	Afirma que concorda com a solução (tom de voz).	
[208] *Prof 2*: Como é que vocês descobriram que é 62?	Confirma a resposta e pergunta como chegaram a ela.	Não é suficiente dar uma solução. É necessário explicitar o raciocínio matemático.
[209] *Marcelo*: A gente contou.	Descreve o procedimento.	
[210] *Prof 2*: Ahhhh, tá.	Não valida o procedimento (tom de voz).	A contagem não é um procedimento válido (pelo menos não para essa tarefa).
[211] *Paulo*: Não tem jeito de errar.	Justifica a contagem.	A contagem é confiável
[212] *Prof 2*: Mas e se eu quisesse então saber, com 52 mesas?!	Não valida a justificação e propõe uma nova situação-problema, onde é mais difícil realizar a contagem.	A contagem não é um procedimento válido (pelo menos não para essa tarefa).
[213] *Paulo*: Com 52 mesas? Se aqui têm 62, vamos tirar 10! 1, 2, 3,...	Equivoca-se em relação à nova tarefa pedida. Tenta resolver a situação (como a interpreta) utilizando o procedimento de contagem.	
[214] *Prof 2*: Não, eu quero 52 mesas.	Esclarece a situação-problema.	

[215] *Paulo*: Mesas? Não têm mesas suficientes!	Afirma que não é possível fazer a contagem.	Não é possível dar uma resposta confiável sem fazer a contagem.
[216] *Prof 2*: Pois é, então no caso temos que pensar em um jeito que a gente consiga pensar lá na frente, não é?	Propõe que generalizem (implicitamente).	A generalização é um processo indutivo válido.
[217] *Paulo*: *(inaudível)*		
[218] *Prof 2*: Não, vamos pensar, Paulo. Para uma mesa, eu teria 6 cadeiras. 2 mesas... 10 cadeiras. Vamos pensar numa fórmula *(tom de voz pausado e calmo)*	Inicia um procedimento que pode levar à generalização.	É necessário generalizar.
[219] *Valter*: Vamos chamar a quantidade de mesas de... de cadeiras de x.	Aceita desenvolver a tarefa, iniciando uma tentativa de generalização.	
[220] *Marcelo*: 52 vezes 6...	Aceita desenvolver a tarefa.	
[221] *Paulo*: Você vai multiplicar 4 por 6 e subtrair.	Parece aceitar desenvolver a tarefa.	
[231] *Prof 2*: Tem que chegar em uma fórmula... *(inaudível)*		É necessário chegar a uma fórmula.
[232] *Marcelo*: cinquenta e dois vezes quatro mais dois! (52 x 4 + 2)	Descobre a expressão que dá a solução para a tarefa.	

[233] *Prof 2*: Paulo, vai chegar uma hora que... *(inaudível)*	Tenta convencer Paulo da necessidade de generalizar.	A contagem é um procedimento considerado pouco sofisticado em Matemática (não é um procedimento adequado para grandes quantidades).

Quadro 2: Exploração de relações em torno ao conflito 1

A análise das práticas da professora Prof 2 permite-nos inferir normas *metaepistêmicas* baseadas em sua maneira de atuar (por exemplo, observando quais práticas valida). São elas: a contagem não é um procedimento válido (pelo menos não para essa tarefa); a generalização é um processo indutivo válido; é necessário chegar a uma fórmula; a contagem é um procedimento considerado pouco sofisticado em Matemática (não é um procedimento adequado para grandes quantidades).

A professora Prof 2 estabelece essas normas em um formato de interação regulativa. Não dá diretamente a resposta, mas vai estreitando o espaço de possibilidades ou comportamentos possíveis dos alunos. Este modo de interação limita o grau de trabalho independente dos alunos, mas proporciona o "andaime" cognitivo que o desenvolvimento da aprendizagem requer; ao contrário, os alunos permaneceriam bloqueados. O modelo instrucional efetivamente implementado localiza-se entre os níveis de investigação 2 e 3 (Quadro 1).

6. Considerações finais

Neste artigo, identificamos normas e metanormas, suscitadas no contexto de uma tarefa exploratório-investigativa sobre padrões, que delineiam o cenário normativo em que esta prática ocorreu. São elas:

- *normas metainstrucionais*: o professor deve levar os alunos a construir o entendimento; os alunos devem assumir a responsabilidade da resolução da tarefa; o professor não deve aportar toda a informação nem dar a solução direta para o problema; deve-se propiciar situações em que os alunos se dediquem à descoberta.

– *norma metaepistêmica*: as tarefas não rotineiras exigem mais atenção.
– *norma afetiva:* deve-se explicitar a autoria da descoberta.

Foram também inferidas normas (a partir da análise das interações em torno a um conflito de normas) específicas do nível de ensino e objetivos da tarefa proposta:

– *normas metaepistêmicas:* a contagem não é um procedimento válido (pelo menos não para essa tarefa); a generalização é um processo indutivo válido; é necessário chegar a uma fórmula; a contagem é um procedimento considerado pouco sofisticado em Matemática (não é um procedimento adequado para grandes quantidades).

Uma consequência que se deriva do estudo empírico realizado neste trabalho refere-se à necessidade de considerar um componente essencialmente local na otimização da aprendizagem.

Os processos de ensino e aprendizagem, como descrevem Godino, Contreras e Font (2006), têm um componente estocástico inevitável. Ainda que seja possível fazer previsões sobre o comportamento a médio prazo dos distintos componentes, por exemplo, a previsão do conteúdo a ser implementado, o uso de recursos materiais e temporais, ou a previsão de um padrão de interação (trabalho cooperativo, aprendizagem guiada, etc.), a realização das trajetórias didáticas requer que o professor tome decisões sobre a execução efetiva desses diferentes elementos.

O processo de ensino e aprendizagem é, portanto, um sistema dinâmico. Isso porque as interações estabelecidas são mediadas por múltiplos aspectos da situação, dentre outros: a natureza da tarefa, o tipo de investigação proposta (pelo professor ou a partir de uma demanda dos alunos), o engajamento / envolvimento dos alunos com a tarefa, enfim, o contexto da atividade.

As interações estabelecidas nesse contexto, principalmente quando as expectativas do professor entram em conflito com as expectativas dos alunos, geram uma alteração ou ruptura de normas que mudam o estado do sistema. A tomada de decisão do professor, por exemplo, em relação a como apoiar e quanto apoio proporcionar aos estudantes, dá-se momento a momento. Essa ação, por sua vez, restringe ou amplia a autonomia dos estudantes, gerando novas expectativas, o que em um processo cíclico, (Figura 6[11]), determina novo formato à trajetória ao longo do tempo.

11 Adaptada do modelo estrutural de cognição situada (Welzel & Roth, 1998).

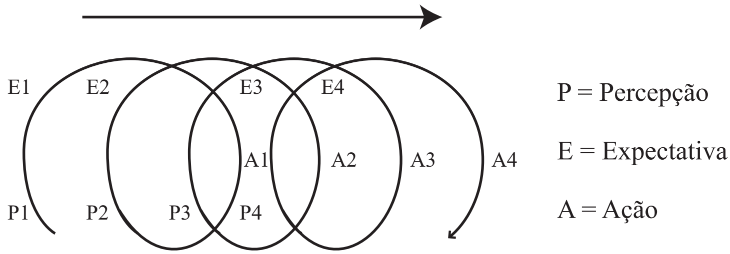


Figura 6. Processo cíclico de uma trajetória didática implementada

Como é descrito em Godino, Contreras e Font (2006), as trajetórias didáticas, que são compostas por trajetórias epistêmicas, docentes, discentes, mediacionais e interacionais, condicionam o desenvolvimento das trajetórias cognitivas dos sujeitos envolvidos. Essas trajetórias, por sua vez, descrevem a aprendizagem alcançada pelos estudantes, sendo sua otimização o principal objetivo do processo educativo.

Sendo assim, consideramos imprescindível que o professor tenha consciência da trama complexa de normas e metanormas envolvidas nas práticas matemáticas e didáticas, assim como da necessidade de que as gerencie, para garantir a otimização da aprendizagem dos alunos.

Isso porque, atingir uma idoneidade didática alta, em um processo de ensino e aprendizagem (Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2006), depende de múltiplas decisões sobre as diferentes dimensões do referido processo. As decisões tomadas pelo professor, relativas à execução dos componentes planificados e principalmente ao gerenciamento dos componentes locais (e consequentes criações ou alterações de normas), podem condicionar de maneira fundamental as trajetórias cognitivas e, portanto, a aprendizagem alcançada pelos alunos.

Um encaminhamento que nosso estudo aponta, portanto, é a necessidade de desenvolver modelos ou teorias instrucionais que considerem esse componente local para alcançar a otimização da aprendizagem. A implementação de modelos instrucionais, que atribuem um nível alto de autonomia aos estudantes, ou seja, um nível mais elevado de investigação, é um critério de idoneidade interacional. Tal critério está sujeito, no entanto, às idoneidades cognitiva, afetiva, epistêmica e mediacional.

Reconhecimento

A contribuição de Adriana Assis realizou-se com subsídio de bolsa concedida pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES - Ministério da Educação do Brasil. A contribuição de Juan. D. Godino foi parcialmente apoiada no marco do Projeto EDU2010-14947, Ministério de Ciência e Inovação (MICINN).

Referências

Arcavi, A. (2007). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas 44,* 59-75.

Banchi, H. & Bell, R. (2008). The many levels of inquiry. *Science and Children 46*(2), 26-29.

Bruner J. (2002). *Atos de significação.* Porto Alegre, Brasil: Artmed editora.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques 9*(3), 309-336.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705). Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

D' Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma 28*(2), 49-77.

Ernest, P. (1996) Varieties of constructivism: a framework for comparison. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin & B.Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning.* New Jersey, England: Lawrence Erlbaum Associates.

Frade, C. e Meira, L.(no prelo). Interdisciplinaridade na escola: subsídios para uma zona de desenvolvimento proximal como espaço simbólico. *Educação em Revista*.

Fernandes, F. L. P. (2010). Letramento algébrico em um contexto de aulas exploratório-investigativas. *Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática* (EBRAPEM). Recuperado em 24 de julho de 2010, em <http://ebrapem.mat.br/inscricoes/trabalhos/GT08_Fernandes_TA.pdf>.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje 33*(1), 89-105.

Franke, M. L., Kazemi, E. & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In J. F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 226256). Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques 22* (2/3), 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma 27*(2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques 26*(1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias 27*(1), 59-76.

Greeno, J. G. (1997). On claims that answer the wrong questions. *Educational Researcher 26*(1), 5-17.

Guzmán, M. (1992). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Buenos Aires, Argentina: Olimpíada Matemática Argentina.

Hiebert, J. S. & Grouws, D. A. (2007) The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In J. F. K. Lester (Ed), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-404). Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Hmelo-Silver, C. E., Duncan, R. G. & Chinn, C. A. (2007). Scaffolding and achievement in Problem-Based and inquiry learning: a response to Kirschner, Sweller, and Clark (2006). *Educational Psychologist*, *42*(2), 99-107.

Martin, L., Towers, J. & Pirie, S. (2006). Collective mathematical understanding as improvisation. *Mathematical Thinking and Learning 8*(2), 149-183.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Planas, N. y Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para el análisis de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática 12*(2), 179-213.

Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender. *Actas do ProfMat 2003* (CD-ROM, pp. 25-39). Lisboa, Portugal: APM.

Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática 85*, 36-42.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. Em I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (CD-ROM, pp. 5-27). Lisboa, Portugal: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ponte, J.P., Brocardo, J. e Oliveira, H. (2006). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte, Brasil: Autêntica.

Ponte, J. P., Fonseca, H. e Brunheira, L. (1999). As atividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. *Actas do ProfMat 1999* (CD-ROM, pp. 91-101). Lisboa, Portugal: APM.

Souza, E. R. e Diniz, M. I. S. (1996). Á*lgebra*: das variáveis às equações e funções. 2ed. São Paulo: IME - USP.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In P. Cobb, H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp.163-199). New Jersey, England: Lawrence Erlbaum Associates.

Welzel, M. & Roth, W. (1998). Do interviews really assess students'knowledge? *International Journal Science Education 20*(1), 25-44.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Socialmathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education 27*(4), 458-477.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational studies in mathematics 49*, 379-402.

Autores:

Adriana Assis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte / MG, Brasil.
aassisferreira@gmail.com

Juan D. Godino, Universidade de Granada, Espanha.
jgodino@ugr.es

Cristina Frade, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte / MG, Brasil.
cristinafrade@ufmg.br