Solange Roa-Fuentes, Asuman Oktaç

Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE

Validation of a genetic decomposition of linear transformation: An analysis refined by the implementation of the research cycle related to APOS theory

RESUMEN

Tomando el análisis teórico propuesto en Roa-Fuentes y Oktaç (2010), se presenta el desarrollo de la tercera componente del ciclo de investigación de la teoría APOE: análisis y verificación de datos. Mediante el diseño y aplicación de una prueba diagnóstico y una entrevista, se plantea una descomposición genética refinada del concepto transformación lineal. Con base en el análisis de los datos se sugiere el desarrollo de modelos de clase que tomen en consideración los resultados de investigación, así como ideas metodológicas sobre cómo construir este concepto.

PALABRAS CLAVE:

- *Teoría APOE*
- *Ciclo de investigación*
- *Transformación lineal*
- *Análisis de datos*

ABSTRACT

Based on the theoretical analysis in Roa-Fuentes and Oktaç (2010), we present the third component of the research cycle related to APOS theory: data analysis and verification. Using the design and application of a diagnostic test and an interview, we propose a refined genetic decomposition of the linear transformation concept. Based on the data analysis we suggest the development of lesson models that would take into account the research results, and some methodological ideas to build this concept.

KEY WORDS:

- *APOS theory*
- *Research cycle*
- *Linear transformation*
- *Data analysis*

RESUMO

Levando em conta a análise teórica proposta em Roa-Fuentes e Oktaç (2010), apresenta-se o desenvolvimento do terceiro componente do ciclo de pesquisa da teoria APOE: análise e verificação dos dados. Através da criação e aplicação de um diagnóstico e uma entrevista, propõe-se uma decomposição genética refinada do conceito de transformação linear. Com base na análise dos dados, sugere-se o desenvolvimento de modelos de classe que levem em consideração os resultados da pesquisa, assim como ideias metodológicas sobre como construir esse conceito.

PALAVRAS CHAVE:

- *Teoria APOE*
- *Ciclo de pesquisa*
- *Transformação linear*
- *Análise de dados*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2012) *15* (2): 199–232.
Recepción: Marzo 1, 2012 / Aceptación: Junio 11, 2012.

RÉSUMÉ

Prenant en compte l'analyse théorique proposée chez Roa-Fuentes et Oktaç (2010), cet article présente le développement de la troisième composante du cycle de recherche propre à la théorie APOS : analyse et vérification des données. Par le biais de la conception et de l'application d'un diagnostic et au moyen d'un entretien, une décomposition génétique affinée du concept de transformation linéaire est envisagée. En se basant sur l'analyse des données, le développement des modèles de classe est suggéré, qui prennent en considération aussi bien les résultats des travaux de recherche que les idées méthodologiques pour expliquer comment il est possible de construire ce concept.

MOTS CLÉS:

- *Théorie APOS*
- *Cycle de recherche*
- *Transformation linéaire*
- *Analyse de données*

1. Introducción

En Roa-Fuentes y Oktaç (2010), presentamos un análisis detallado sobre cómo construir una descomposición genética, enfocándonos en el concepto transformación lineal. Allí propusimos dos caminos de construcción de dicho concepto, determinados por diferentes mecanismos mentales: el primero por la coordinación de procesos y el segundo por la aplicación de acciones específicas sobre objetos iniciales, como mostramos en las siguientes dos figuras.

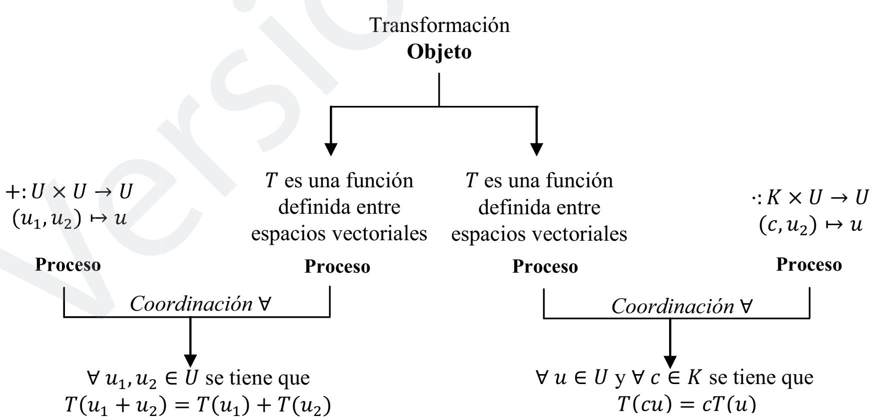


Figura 1. Camino 1: Objeto transformación como elemento preliminar (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010, p.103).

La figura 1 muestra el primer camino cognitivo de construcción que parte de una concepción objeto de transformación: una función de un espacio vectorial en otro. En la figura 2 aparece la descripción del segundo camino. Allí partimos de la aplicación de acciones específicas sobre elementos de un espacio vectorial que se transforman por la aplicación de una función dada. La coordinación de los procesos resultantes en cada una de las descripciones, se propone mediante la construcción de un único proceso. Esto se da cuando un estudiante considera como equivalentes la preservación de las operaciones de linealidad con la preservación de combinaciones lineales, de cuya encapsulación surge la transformación lineal como un objeto (para más detalles ver Roa-Fuentes & Oktaç, 2010).

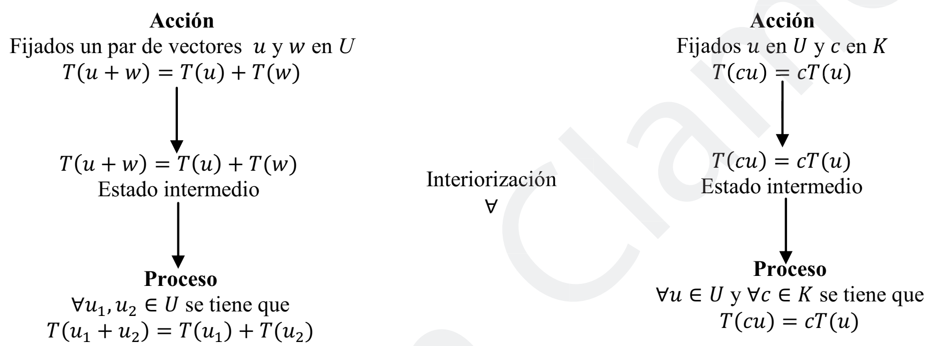


Figura 2. Camino 2: Asimilación del objeto espacio vectorial por el esquema de función (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010, p.105)

En este escrito pretendemos hacer una presentación detallada de cómo evidenciar y legitimar el análisis propuesto, que en particular busca determinar la viabilidad de alguna de las descomposiciones genéticas iniciales. De esta manera el análisis de los datos empíricos y su comparación con el análisis teórico dan lugar a un análisis fino y veraz sobre la manera como los estudiantes pueden construir el concepto transformación lineal.

Para iniciar, en la siguiente sección hacemos una presentación general de las estructuras y mecanismos que la teoría APOE propone para describir la construcción del conocimiento matemático de un individuo, así como los elementos fundamentales de su paradigma de investigación, el cual se vuelve el método que guía nuestra investigación. En la sección 3, planteamos el diseño de los instrumentos aplicados con base en la descomposición genética preliminar presentada en Roa-Fuentes y Oktaç (2010). En esta parte, hacemos énfasis en el análisis a priori de los instrumentos y su relación con el análisis cognitivo. Con base en esta reflexión, presentamos en la sección 4, las evidencias sobre el tipo de estructuras mentales que los estudiantes entrevistados han logrado construir acerca del concepto de transformación lineal. El análisis de estos resultados nos lleva a retroalimentar la descomposición genética inicial, de tal manera que en la sección 5, tenemos descripciones más finas de las construcciones dadas inicialmente. Con los elementos anteriores, presentamos las conclusiones que abordan sugerencias de tipo didáctico sobre el desarrollo del concepto en la clase de matemáticas. Asimismo, ofrecemos elementos que pueden guiar el rumbo de futuras investigaciones, relacionados con la representación matricial y geométrica de una transformación lineal y su evolución, por las conexiones con el concepto de base.

2. La teoría APOE y el ciclo de investigación

En la primera sección de este apartado hacemos una descripción general de la teoría APOE y sus principales componentes. En la segunda parte, presentamos el paradigma de investigación asociado a este marco teórico del cual hemos desarrollado la primera y tercera componente para guiar nuestro trabajo de investigación.

2.1. *Construcción de estructuras*

La teoría APOE es una teoría de aprendizaje constructivista que extiende las ideas de Piaget sobre la teoría de abstracción reflexiva, al análisis cognitivo de conceptos matemáticos que son estudiados en un nivel escolar superior (Dubinsky, Weller, Stenger & Vidakovic, 2008). Dubinsky et al. (2008) resaltan: "Piaget señaló una cercana relación entre la naturaleza matemática de los conceptos y su desarrollo en la mente de un individuo. Por tanto el análisis basado en la teoría APOE es a la vez epistemológico y psicológico" (p.100). La teoría APOE da cuenta de las estructuras mentales (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) y de los mecanismos mediante los cuales éstas se logran (interiorización, coordinación, encapsulación, tematización) cuando un individuo construye su conocimiento matemático al intentar solucionar situaciones matemáticas.

Según la teoría APOE, la construcción de un concepto matemático parte de la aplicación de transformaciones sobre objetos iniciales que se relacionan con el nuevo objeto a construir. La aplicación de una acción es el resultado de un estímulo externo y generalmente es realizada paso a paso por un individuo. Esta concepción está limitada en un primer plano por la aplicación de algoritmos mecánicos sin mucho control sobre los elementos involucrados. Ahora, una vez un individuo repite y reflexiona sobre una acción sin realizarla de manera específica, ésta puede ser interiorizada en un proceso mental. De esta manera el individuo reconstruye la acción en su mente y logra aplicarla sin necesidad de ejecutarla de manera explícita. Puede ser necesario que una vez que se logre un proceso, éste tenga que coordinarse con otros para generar nuevos procesos.

Cuando un individuo logra reflexionar sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma consciencia del proceso como un todo, realiza transformaciones sobre él (ya sean acciones o procesos) y puede construir esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996). En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado por el individuo en un objeto. Este mecanismo es uno de los más complejos; en general los trabajos realizados con APOE han mostrado que los individuos tienen grandes dificultades para lograr una construcción estática de conceptos y nociones matemáticas. Por otra parte, el mecanismo de desencapsular es tan importante como el de encapsular. Una vez un individuo logra construir un objeto debe estar en capacidad de regresar sobre el proceso que lo generó. De esta manera, podrá ir y venir entre el objeto y el proceso y viceversa, cada vez que lo requiera.

Finalmente, los esquemas se definen como una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas y las relaciones entre ellos, todo asociado con un concepto particular (Asiala et al., 1996). Los esquemas que forman la estructura matemática de un individuo no están acabados, son estructuras dinámicas que evolucionan constantemente cada vez que un nuevo objeto es construido. Éstos pueden ser más o menos coherentes y esta coherencia está determinada por la capacidad del individuo para determinar si un esquema le permite o no solucionar un problema en particular.

En este escrito, reportamos un principio de construcción del esquema de transformación lineal que parte de la construcción de este concepto matemático como una función que preserva combinaciones lineales, como un objeto. Sin embargo, somos conscientes de la necesidad de continuar con el estudio de la construcción y evolución del esquema que se puede generar mediante la representación matricial y la expresión por coordenadas de una transformación lineal, así como las relaciones que se desarrollen con el concepto de base. La necesidad de parcializar la construcción del esquema responde sólo a tener un punto de partida así como una forma sistemática de representar el problema.

Sin duda, con base en la reflexión que hoy presentamos se podrán proponer análisis enriquecidos y describir los niveles de evolución que logra el esquema mediante la inclusión de los objetos matemáticos mencionados y las conexiones entre ellos.

A continuación explicaremos algunos elementos del paradigma de investigación propuesto por APOE, que ha guiado nuestro método en este trabajo.

2.2. *Paradigma de investigación*

La teoría APOE plantea un ciclo de investigación formado por tres componentes: el análisis teórico, el diseño y aplicación de enseñanza y el análisis y verificación de datos. La aplicación de este ciclo de investigación permite obtener una descripción más detallada y cercana a la manera como los individuos pueden construir un concepto matemático determinado, ya que tanto el análisis teórico como los instrumentos se refinan y mejoran como resultado del análisis de los datos empíricos, obtenidos en el desarrollo de la tercera componente.

Con base en los planteamientos de Asiala, et al. (1996) y nuestra experiencia en el desarrollo del ciclo, describiremos qué se busca alcanzar con el diseño y aplicación de la tercera componente. La primera componente la desarrollamos con detalle en Roa-Fuentes y Oktaç (2010); ésta es el eje fundamental de los resultados que aquí presentamos.

Una vez se establece una descomposición genética preliminar, el ciclo de investigación de APOE propone el diseño de un modelo de enseñanza que siga el camino cognitivo descrito, de tal manera que los individuos puedan construir el concepto con base en los principales elementos descritos en el análisis teórico. El desarrollo de esta componente, requiere de la asignación de un tiempo prudente para el desarrollo completo del modelo propuesto, ya que en algunos casos se hace necesario el rediseño curricular, y la construcción previa de los elementos que dentro del análisis teórico se consideran indispensables para establecer la nueva estructura.

Aspectos como éste, relacionados con el tiempo y el número de integrantes del equipo de investigadores necesarios para hacer el seguimiento de grupos de estudiantes, han generado la realización de investigaciones que pasan de la primera a la tercera componente. Como es el caso del trabajo que presentamos en este escrito, una vez se tiene la descomposición genética preliminar, se diseñan instrumentos como pruebas diagnósticas y entrevistas para analizar la manera como los individuos han construido o están construyendo un concepto. Esto permite que aún sin haber desarrollado un proceso de enseñanza, se analice la viabilidad de los aspectos puramente teóricos de la descomposición genética preliminar.

A continuación describiremos los principales aspectos de la manera como desarrollamos la tercera componente, teniendo en cuenta el diseño y análisis a priori de los instrumentos, así como el análisis de los datos ofrecidos por dos grupos de estudiantes universitarios.

2.3. *Análisis y verificación de datos*

Para el desarrollo de la tercera componente diseñamos una prueba diagnóstica y una entrevista (Roa-Fuentes, 2008) con base en la descomposición genética preliminar (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010). Por tanto hemos dividido esta componente en dos secciones que a continuación describimos.

2.3.1. *Diseño y Aplicación de Instrumentos*

Una vez definida la descomposición genética preliminar, es necesario documentarla, es decir, tener alguna certeza de la viabilidad del camino señalado en ella. Para esto se diseñan y aplican instrumentos que buscan identificar las construcciones descritas y aquellas que no se hayan incluido pero que persistan en los procedimientos de los individuos. Estos diseños construidos con base en la descomposición genética deben reflejar las construcciones expuestas en ella y los mecanismos de construcción mediante los cuales los individuos pueden lograrlas.

Un aspecto que consideramos fundamental, es el análisis a priori que debe acompañar el diseño. Este análisis puede estructurarse de tal manera que se tengan elementos que permitan generar en los individuos desequilibrios cognitivos durante el desarrollo de las situaciones planteadas. Esto permitiría que los datos obtenidos aporten elementos significativos para la descomposición genética.

En la mayoría de los trabajos realizados bajo la teoría APOE, esta componente se desarrolla mediante entrevistas que son video grabadas y después transcritas para un análisis más fino sobre las construcciones dadas por los individuos. En general, el análisis a priori debe ofrecer al entrevistador elementos que le permitan dirigir los argumentos de los individuos, de tal manera que durante la entrevista tengan la oportunidad de percatarse de aspectos que tal vez no sean considerados tradicionalmente y que pueden enriquecer las estructuras mentales de los participantes.

2.3.2. *Análisis y verificación de datos*

Esta componente consiste en el análisis de los datos empíricos obtenidos de la aplicación de los instrumentos de investigación. Los resultados deben ser analizados desde la descomposición genética preliminar detectando qué elementos no han sido considerados o cuáles de las construcciones dadas hipotéticamente no se perciben. Esto lleva a una reformulación de la descomposición genética y a la determinación de una versión refinada por la aplicación del ciclo.

Un aspecto vital que ha sido discutido en trabajos recientes que toman como referente la teoría APOE, es el alcance de las estructuras descritas en una descomposición genética respecto a qué tan cercanas son a lo que en realidad ocurre en la mente de un individuo (Dubinsky et al., 2008). Aunque la teoría APOE busca describir la manera como un individuo puede abordar un problema mediante la descripción de las estructuras mentales y los mecanismos mediante los cuales éstas pueden lograrse, hay factores que no se toman en cuenta o bien, de los cuales no se puede tener control. Por ejemplo, las características intrínsecas del individuo, las condiciones sociales y del medio, y en general, las condiciones de pensamiento y motivación individuales son algunas condiciones sobre las que no se tiene control en una investigación. Por tanto, lo que podemos conocer mediante la aplicación del ciclo es sólo una "…parte de la historia…" (Dubinsky et al., 2008, p.102). Sin embargo podemos afirmar que lo que muestran los trabajos realizados bajo los lentes de la teoría APOE es que esa parte, contribuye de manera eficiente en la realización de diseños de clase e instrumentos eficaces de evaluación en la construcción de conceptos matemáticos avanzados (Weller, Clark, Dubinsky, Loch, McDonald & Merkovsky, 2003; McDonald, Mathews & Strobel, 2000; Clark et al., 1997).

A continuación, describiremos nuestra experiencia en el desarrollo de la tercera componente del ciclo, explicando los elementos que tuvimos en cuenta para el diseño de los instrumentos que usamos.

3. Diseño y aplicación de los instrumentos de investigación

Como discutimos en Roa-Fuentes y Oktaç (2010), el análisis teórico es una reflexión de los investigadores sobre cuáles podrían ser los caminos de construcción de un concepto; por tanto este análisis es considerado inicialmente como preliminar o hipotético. Las construcciones y mecanismos mentales descritos en una descomposición genética pueden ser manifestados o no en un individuo. Como ya se ha planteado esto está determinado por su experiencia con el concepto, así como por otros factores que inciden a la hora de abordar una situación. Esto lleva a que el ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE considere importante la recolección de datos empíricos mediante el diseño y la aplicación de instrumentos.

En este trabajo con base en el análisis teórico (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010), realizamos el diseño de dos instrumentos: una prueba diagnóstica y una entrevista. En la sección 4 presentamos los principales aspectos de dicho análisis. El objetivo principal de la prueba diagnóstica fue, seleccionar los estudiantes que participarían en la entrevista, mediante el análisis del tipo de construcciones que podrían evidenciar al solucionar los problemas propuestos en la prueba. Un punto importante por mencionar, es que para los fines de nuestra investigación era necesario trabajar con buenos estudiantes –académicamente hablando–, ya que se esperaba entender cómo habían construido el concepto para comprenderlo. A continuación, describimos como parte de la metodología el diseño de cada instrumento y el análisis a priori que realizamos a los problemas planteados más representativos.

3.1. *Diagnóstico*

Los datos que mostramos a continuación fueron tomados durante el segundo semestre académico del año 2007, en una universidad chilena. En el diagnóstico participaron dos grupos de estudiantes: estudiantes de Licenciatura en Matemáticas que estaban tomando un curso de Álgebra Lineal II (al que llamaremos grupo 2) y estudiantes del programa de Estadística que estaban tomando un curso de Álgebra Lineal I (al que llamaremos grupo 1). Durante el semestre correspondiente, asistimos junto con los estudiantes a estos cursos. Así que conocíamos el contenido que se desarrollaba en ellos y sus expectativas e intereses frente a cada materia.

Inicialmente pensamos involucrar en esta componente sólo a los estudiantes del grupo 1, una vez se finalizara el capítulo correspondiente a transformaciones lineales. Sin embargo, fue evidente durante el desarrollo del curso que estos estudiantes no tenían las estructuras que habíamos considerado como previas a la construcción del nuevo concepto, fundamentalmente las estructuras de función como objeto y el esquema de espacio vectorial (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010); hecho que se evidenció en el diagnóstico. En la aplicación de este instrumento participaron un total de diecisiete estudiantes que asistían regularmente a clase, ocho del grupo 2, nueve del grupo 1. Los estudiantes del grupo 2 tienen como requisito para estar en el curso, tres materias: Álgebra y Geometría I y II y Álgebra Lineal I. Para los estudiantes del grupo 1 éste es su primer curso universitario de álgebra.

Para el diseño del cuestionario diagnóstico tuvimos en cuenta la descomposición genética preliminar, buscando que los problemas planteados dieran evidencias de las construcciones mencionadas allí; los textos guía utilizados por los estudiantes y nuestra experiencia personal. El diagnóstico constó de siete preguntas que fueron presentadas impresas en un cuestionario para que los estudiantes las respondieran por escrito de manera individual. La prueba se aplicó en el salón de clase y tuvo una duración aproximada de dos horas.

3.1.1. *Intención del diseño y su análisis preliminar sobre la construcción del concepto*

A continuación, presentamos la intención de dos de las preguntas del diagnóstico (ver figura 3 y 4) así como un análisis a priori de las posibles respuestas y planteamientos que los estudiantes podrían presentar. El análisis de todas las situaciones planteadas puede encontrarse en Roa-Fuentes (2008).

---

1. Sean $f: R^2 \rightarrow R^2$ y $g: R^2 \rightarrow R^3$ funciones definidas por: $f(x,y) = (y^2, x^2)$ y $g(x,y) = (x, 3y - 2x, y)$.

a. Sean $u = (1,0)$ y $v = (0,1)$.
   Calcula $(u+v)$ y determina $f(u+v)$.
   Calcula $f(u)$, $f(v)$ y encuentra el vector $f(u) + f(v)$.
   Comparando los resultados anteriores, ¿son $f(u+v)$ y $f(u) + f(v)$ iguales?

b. Sean $u = (-2,0)$ y $c = 1$.
   Calcula (cu) y determina $f(cu)$.
   Calcula $f(u)$ y encuentra el vector $cf(u)$.
   Comparando los resultados anteriores, ¿son $f(cu)$ y $cf(u)$ iguales?

c. Realiza los puntos a. y b. para la función g.

d. ¿Son f y g transformaciones lineales? Justifica tu respuesta.

e. ¿Qué es una transformación lineal?

Figura 3. Problema 1 de la prueba diagnóstica (Roa-Fuentes, 2008, p.52).

En el problema 1 de la prueba diagnóstica (figura 3) presentamos dos funciones entre espacios vectoriales, f es una transformación no lineal y g es una transformación lineal. En los incisos *a* y *b* se dan vectores específicos en los que el estudiante debe verificar el cumplimiento de las propiedades de linealidad para la función f, además de realizar el mismo procedimiento en el inciso *c* para la función g. En el inciso *d* el estudiante debe determinar si las funciones dadas son o no transformaciones lineales. Finalmente en el inciso *e* pedimos que definan el concepto transformación lineal.

En el inciso *d* es posible usar diferentes métodos para determinar si las funciones son transformaciones lineales o no. En este inciso buscamos determinar si un estudiante considera el cumplimiento de las propiedades de linealidad para todo elemento del espacio vectorial o se basa en los incisos *a* y *b* para determinar su respuesta. En este caso para los vectores u y v dados, las funciones f y g cumplen las igualdades. Sin embargo, en el caso de la función f la propiedad se cumple sólo con este par de vectores. A continuación, presentamos un análisis a priori sobre las posibles construcciones que consideramos los estudiantes podrían proponer sobre el problema planteado.

Un estudiante con una concepción objeto de vector y proceso de función podrá determinar los vectores solicitados en los incisos *a*, *b* y *c*, y compararlos para verificar el cumplimiento de las propiedades. En el inciso d un estudiante podrá considerar que las dos funciones son transformaciones lineales ya que cumplen con las propiedades para los vectores dados. En este caso, diremos que su construcción del concepto obedece a una concepción acción, ya que está considerando que el cumplimiento de las propiedades para un caso particular implica el cumplimiento de las mismas para todos los vectores de R^2. Por otra parte, si un estudiante considera los vectores generales $(x,y) \in R^2$ para demostrar que g es una transformación lineal mediante el cumplimiento de las propiedades por separado (suma vectorial y producto por un escalar) diremos que posee una concepción proceso de ellas al considerar su cumplimiento para todo vector del espacio. Si de manera clara asocia el cumplimiento simultáneo de ambas propiedades con la linealidad de g o verifica directamente la preservación de combinaciones lineales, diremos que tiene una concepción proceso del concepto transformación lineal. Es importante aclarar que aunque un estudiante no haga uso específico de los cuantificadores en sus argumentos, es sólo hasta la entrevista donde esperamos evidenciar cómo estos elementos matemáticos aparecen en sus procedimientos.

Como se puede ver, con este primer punto esperábamos encontrar evidencias principalmente de una construcción acción y proceso del concepto transformación lineal. Como presentamos en la primera parte de este trabajo (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010) las acciones están ligadas a la aplicación específica de la función a un número determinado de vectores. Además, surge la distinción entre tener una concepción proceso de las propiedades de linealidad y tener una concepción proceso de transformación lineal. La evolución de las construcciones de estos conceptos está determinada por medio de la transformación como una función que preserva combinaciones lineales; es decir, viendo el cumplimiento de las dos propiedades en un único proceso. Para la encapsulación de dicho proceso se requiere de la aplicación de una acción o un proceso sobre él.

El siguiente problema está relacionado con una concepción objeto del concepto y con el proceso que lo genera, en donde los individuos deben determinar una transformación lineal definida entre espacios vectoriales dados (figura 4).

---

2. Define una función:
a. $g: M_2(R) \rightarrow R$ tal que g sea una transformación lineal. Justifica tu respuesta.
b. $h: M_2(R) \rightarrow R$ tal que h sea una transformación NO lineal. Justifica tu respuesta.

Figura 4. Problema 2 de la prueba diagnóstica (Roa-Fuentes, 2008, p.55).

En este problema, buscábamos que los estudiantes determinaran dos funciones bajo las condiciones dadas, teniendo en cuenta la forma de los vectores del dominio y recorrido; a la vez que determinaran cómo deben estar definidas dichas funciones para definir una función lineal y una función no lineal. Considerábamos que este problema podría causar confusión en los estudiantes ya que la función es desconocida y son ellos quienes deben determinarla de tal manera que cumpla con las condiciones dadas. Pensar en una función como tal, que cumpla o no condiciones dadas, es un primer paso hacia la construcción de un objeto, de tal manera que se establece “algo” como un todo sobre el cual puede ejercer un juicio.

En este caso, un estudiante debería considerar la forma general de los elementos del conjunto de matrices 2×2 y de los números reales analizando qué características hacen que una función definida entre dichos espacios sea una transformación lineal. Si el estudiante puede determinar dichas transformaciones consideramos que cuenta con las construcciones previas de vector y función. Dependiendo de los argumentos que presente podemos decir que tiene una concepción proceso de las propiedades de linealidad o una concepción proceso de transformación lineal. En el análisis a priori consideramos que los estudiantes podrían, por ejemplo, definir las funciones y para el caso de la función g demostrar el cumplimiento de las propiedades. En el caso de la función h después de definirla, un estudiante puede mostrar cuál de las propiedades no cumple, o dar un contraejemplo específico con vectores del espacio y escalares del campo. En este caso diremos que el estudiante da evidencia de tener una concepción proceso de las propiedades. Por otra parte un estudiante puede definir correctamente las funciones y para el caso de la función g demostrar que es una transformación lineal por la preservación de combinaciones lineales, ésta es una evidencia de una construcción proceso del concepto transformación lineal. Como puede verse, este análisis se centra en los procedimientos mediante los cuales los estudiantes pueden demostrar que las funciones que define son o no transformaciones lineales. Por otra parte, podemos pensar que mostrar funciones con las condiciones dadas puede ser evidencia de una concepción objeto de transformación lineal. Este es un asunto que discutiremos con detalle más adelante, donde mostraremos el caso de un estudiante que puede dar ejemplos de transformaciones lineales pero en sus procedimientos demuestra que sólo está teniendo en cuenta la preservación del producto por un escalar.

Si el estudiante no puede definir las funciones, consideraremos que sus construcciones sólo le permiten actuar de manera mecánica sobre funciones definidas, pero no puede pensar en ellas como objetos. En caso de respuestas parciales, analizaremos cuáles construcciones mentales asociadas al concepto de transformación lineal son evidenciadas.

Es pertinente aclarar que el trabajo de un estudiante en un problema específico, no puede ser prueba concluyente para determinar si ha logrado un tipo de construcción. El análisis a priori es, entre otras cosas, una guía que le permite al investigador tener cierto control sobre el problema, de tal manera que pueda evaluar el alcance de las situaciones frente a los objetivos de investigación reflejados en la descomposición genética.

3.2. *Entrevista*

Después del análisis de los datos obtenidos en el diagnóstico, decidimos entrevistar a aquellos estudiantes que daban evidencias de haber iniciado la construcción del concepto transformación lineal. El objetivo principal de la entrevista, fue determinar la validez de las hipótesis planteadas con base en los resultados del cuestionario diagnóstico, es decir, analizando las estructuras mentales que los estudiantes logran llevar a cabo para la construcción del concepto transformación lineal. Realizamos la entrevista de manera individual, en un aula adaptada para video grabar los procedimientos de los estudiantes sobre la hoja de trabajo. Las entrevistas tuvieron una duración aproximada de dos horas, los videos fueron transcritos para un análisis más detallado de los datos.

Con el diseño y aplicación de este instrumento esperábamos encontrar mayor información sobre la validez de nuestro análisis teórico. De la misma manera, pretendíamos encontrar información más clara sobre la concepción proceso del concepto en cuestión y la relación que guarda con las propiedades de linealidad (preservación de suma vectorial y producto por un escalar); además de identificar conductas que nos permitieran caracterizar con mayor claridad la concepción objeto de transformación lineal.

3.2.1. *Intención del diseño y su análisis preliminar sobre la construcción del concepto*

La entrevista consistió de seis preguntas, que se plantearon a siete estudiantes (todos del grupo 2) de manera individual. Durante la entrevista se entregó a los estudiantes un problema a la vez.

A continuación presentamos el análisis a priori de cada situación donde consideramos el trabajo que puede realizar cada estudiante. Además, explicamos las posibles construcciones que pueden haber realizado sobre el concepto estudiado, en términos de nuestra descomposición genética preliminar (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010) y las posibles relaciones que pueden establecer con otros conceptos.

---

1. Sea $S: R_3[x] \rightarrow R$ definida por $S(p) = \int_0^1 p(x)dx$.

a. Si $p(x) = 3x^2 + x - 1$, $q(x) = x^3 - 5x + 1,$, $a = -1$ y $b = 3$ ¿se cumple que $S(ap + bq) = aS(p) + bS(q)$?

b. ¿Es S una transformación lineal? Justifica tu respuesta.

Figura 5. Problema 1 de la entrevista (Roa-Fuentes, 2008, p.62).

En el problema 1 de la entrevista (figura 5) consideramos que los estudiantes verificarían sin mayor dificultad el cumplimiento de la igualdad para los vectores y los escalares dados específicamente. Esperábamos que se hiciera evidente el uso de cuantificadores al considerar si la función S es lineal, determinado por la preservación de combinaciones lineales para todo vector del espacio de polinomios de grado menor o igual a tres y todo escalar en R. Si un estudiante, para determinar la linealidad de una función, verifica las propiedades de preservación de suma y producto por un escalar por separado, lo cuestionaremos, intentando determinar si para él esto es equivalente a la preservación de combinaciones lineales o si por el contrario considera las propiedades de manera aislada. La respuesta correcta al inciso *b* puede mostrar que el estudiante tiene una concepción proceso de las propiedades y dicha concepción se evidenciará durante el desarrollo de los otros problemas planteados en la entrevista (la entrevista completa puede encontrarse en Roa-Fuentes, 2008).

Por otra parte, si el estudiante hace una lectura comprensiva del problema y tiene una concepción proceso del concepto transformación lineal podrá considerar que la respuesta al inciso *b* implica el caso presentado en el a, ya que la función es una transformación lineal y preserva combinaciones lineales para todos los vectores en el espacio y los escalares en el campo, en particular para el caso presentado. Incluso, podemos esperar que un estudiante con una concepción proceso de transformación lineal piense en demostrar que la función S es una transformación lineal sin tener en cuenta el caso particular, debido a que desde su experiencia conoce la función y sabe que es efectivamente un ejemplo de una transformación lineal.

---

2. Sean $U = \{(x, y, z) \in R^3 : x + y + z = 0\}$ y $V = \{(x, y, z, w) \in R^4 : x = y; z = w\}$.

Sea $T: U \to V$ una función tal que:

$$T(-1,1,0) = (1,1,0,0)$$
$$T(-1,0,1) = (0,0,1,1)$$

¿Es T siempre una transformación lineal? Justifica tu respuesta.

Figura 6. Problema 2 de la entrevista (Roa-Fuentes, 2008, p.63).

El problema 2 (figura 6), presenta características especiales sobre la función T y se plantea la interrogante si bajo estas características la función siempre será una transformación lineal. La fijación del dominio y recorrido de la función como conjuntos determinados y las imágenes de dos vectores bajo la función T invitan al estudiante (con las estructuras apropiadas) a determinar la naturaleza de U y V: ¿son espacios vectoriales?; igualmente juega un papel fundamental el concepto de dimensión y base. En este problema no es necesario pensar en las transformaciones como objetos que cumplen con una determinada definición. Es necesario que el estudiante relacione de manera consciente los conceptos de base y dimensión para establecer específicamente los datos que proporciona el enunciado.

Al leer el problema, los estudiantes pueden pensar en encontrar una transformación lineal que cumpla con las condiciones dadas. Un estudiante con una concepción proceso de transformación lineal (que no haya leído detenidamente el problema) puede comenzar determinando si U y V son espacios vectoriales y si el conjunto {(-1,1,0);(-0,1,0)} es una base para el espacio vectorial U. Con esto como fundamento puede mostrar que todo vector en U puede expresarse como combinación lineal de los vectores del conjunto base; en este momento puede pensar en T como una transformación lineal que debe preservar combinaciones lineales, sin embargo esta información no la presenta el problema. A pesar de esto el estudiante puede asumir desde el principio que T es una transformación lineal y contestar el problema partiendo de dicho supuesto. A pesar de que se puede generar una contradicción que lo lleve a replantear la situación, el estudiante puede pensar en la manera de determinar una transformación (o función) no lineal que cumpla con las condiciones del problema.

Si el estudiante determina una transformación lineal sin percatarse de esta situación y responde de manera afirmativa a la pregunta planteada en el enunciado, le presentaremos la siguiente función: $F(x,y,z)=(y^2,y^2,z^2,z^2)$ para todo (x,y,z) en U como un ejemplo que cumple las condiciones dadas. Esperamos que el estudiante pueda reflexionar sobre este ejemplo y pueda darse cuenta que en esta pregunta la linealidad de T no está dada.

Este problema promueve la reflexión del estudiante sobre una gran variedad de funciones que poseen las características dadas, sin embargo cuando nos referimos a aquellas funciones que preservan combinaciones lineales (funciones que preservan la estructura del espacio vectorial) son sólo un subconjunto de ellas. Esta caracterización hace énfasis en la existencia de funciones definidas entre espacios vectoriales, donde es clara la asimilación del objeto espacio vectorial por el esquema de función.

4. Observación, Análisis y Verificación de datos

En esta sección haremos un análisis de los datos obtenidos en los dos instrumentos aplicados mediante la descripción de las construcciones que evidenciaron tener los estudiantes. Con base en ellos en la siguiente sección analizaremos la viabilidad de nuestra descomposición genética preliminar (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010).

En general, el tipo de construcciones que un estudiante logra sobre un concepto, está determinado por la manera en que éste es presentado por primera vez. Ahora, ya que las definiciones que presentan los textos guía de álgebra lineal en general, no hacen referencia a la existencia del objeto transformación previo al de transformación lineal, no encontramos datos, que de manera evidente, hagan referencia al primer camino descrito en nuestra descomposición genética (ver Figura 1 y más detalles en Roa-Fuentes & Oktaç, 2010), donde partíamos de la desencapsulación del objeto transformación para su coordinación con los procesos de suma vectorial y producto por un escalar. Por tanto nuestro análisis se basará en el segundo camino descrito: “Asimilación del objeto espacio vectorial por el esquema de función” (figura 2). En general podemos decir que este camino se basa en la determinación de funciones entre espacios vectoriales. Por tanto, parte de la realización de acciones específicas, transformaciones sobre vectores particulares de un espacio vectorial bajo una función dada para verificar el cumplimiento de las propiedades de linealidad. La interiorización de estas acciones generan una construcción proceso para cada operación: suma vectorial y producto por un escalar. Los procesos construidos deben coordinarse en uno para que su encapsulación sea posible. Esta coordinación se da por la equivalencia entre la preservación de las dos operaciones y la preservación de combinaciones lineales. De esta manera tenemos un único proceso sensible a ser encapsulado, resultado de las transformaciones –acciones o procesos– que puedan realizarse con él.

A continuación, presentamos el análisis de nuestros resultados en los que se consideran las construcciones realizadas por los estudiantes. Para cada una de ellas agregamos apartados de la transcripción de las entrevistas que fundamenta nuestras observaciones.

4.1. *Concepción acción y pre-acción de las propiedades*

Con una concepción acción de las propiedades, los estudiantes pueden determinar la imagen de vectores particulares dadas las funciones. Estas acciones deben generar el mecanismo de interiorización por la experiencia con diferentes tipos de funciones lineales y no lineales, además de la reflexión sobre el uso de cuantificadores; de tal manera que se pueda continuar con la construcción del concepto. Sin embargo, hemos encontrado que este mecanismo no siempre se genera y que algunos estudiantes consideran que la preservación de las operaciones (suma vectorial y producto por un escalar) para un par de vectores del dominio y un escalar del campo implica que las funciones son transformaciones lineales. Por ejemplo el estudiante 14 en la pregunta 1 (ES14P1) al verificar las propiedades con los vectores dados concluye que las dos funciones son transformaciones lineales.

Otros estudiantes, por ejemplo los estudiantes 11 y 12 al dar la definición de transformación lineal muestran tener una idea vaga de las propiedades ya que plantean:

> *(ES11P1):* Cualquier cambio que le haga a un vector de manera lineal.
>
> *(ES12P1):* Es obtener una función o espacio que identifique y se cumplan las operaciones.

Estas definiciones del concepto, muestran cómo los estudiantes mecanizan definiciones de los conceptos de álgebra lineal, sólo replican algunas palabras que saben están relacionadas con el concepto pero sin un sentido real además del uso nulo de la notación matemática. Estas dificultades desde nuestro análisis, se relacionan con el tipo de construcciones que los individuos deben tener para enfrentar la construcción de un nuevo concepto. Por ejemplo, para nuestro caso esto tiene que ver con construcciones claras sobre el concepto de vector, espacio vectorial y función.

El estudiante 12, durante la realización de la prueba manifestó que podía reemplazar los valores pero que no se acordaba bien del tema. Los estudiantes del grupo 1 no tienen éxito al abordar la prueba diagnóstica, la mayoría, después de dos horas entrega en blanco el documento. En general, estos estudiantes no logran ver las transformaciones lineales como funciones con ciertas características. Por esto, en el problema 5 (ver figura 7), no logran pensar en casos de transformaciones lineales ya que no poseen una estructura previa de función como objeto. De hecho, no relacionan las funciones ya vistas en sus cursos de cálculo con el concepto transformación lineal.

---

5. ¿Es posible definir una transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ para cada uno de los siguientes casos?

a. $T(1,0) = (1,1)$
b. $T(1,0) = (1,-1)$ y $T(2,0) = (3,0)$
c. $T(1,0) = (1,-1), T(1,1) = (2,1)$ y $T(0,1) = (1,1)$.

Si tu respuesta es afirmativa define la transformación y determina si es única. En caso contrario justifica tu respuesta.

Figura 7. Problema 5 de la prueba diagnóstica (Roa-Fuentes, 2008, p.58).

Sumado a esto, las situaciones tratadas en su contexto escolar parten tradicionalmente de funciones representadas por expresiones algebraicas. Además al tratar el tema de transformaciones lineales, la nueva temática parece tratar sólo el cumplimiento de dos ecuaciones en donde basta con reemplazar valores numéricos en dichas expresiones. Entonces en situaciones como el problema 5 (figura 7), no saben cómo empezar, es más, durante el diagnóstico los estudiantes de grupo 1 afirmaban que no entendían qué debían hacer. Algunos de ellos incluso manifestaban su frustración, ya que pensaban que sí habían comprendido el tema visto en clase.

4.2. *Concepción acción del producto por un escalar*

Durante la realización de las entrevistas identificamos la construcción de la propiedad 2, la preservación del producto por un escalar de manera independiente y totalmente relacionada con el concepto transformación lineal. Durante la entrevista el estudiante 4, al trabajar sobre el primer problema de la entrevista (figura 5) muestra cómo su concepción del concepto transformación lineal está íntimamente relacionada con esta propiedad y la manera como la suma vectorial se vuelve invisible durante el desarrollo de sus argumentos.

> *[ES4P5]:* Eh… para que sea transformación lineal tiene que hacer eso (señala la expresión $S(ap + bq) = aS(p) + bS(q)$). Entonces si no me falla y los resultados están bien hechos no podría ser una transformación lineal, porque se tendría que cumplir eso (Escribe $S(ap) = aS(p)$) y al hacerlo con los dos debería ser lo mismo. Yo creo. Pero no sé.

Aunque realiza algunos cálculos mal, lo interesante está en cómo ve la expresión $S(ap + bq) = aS(p) + bS(q)$ que aparece en el enunciado del problema. Él considera esta expresión como dos veces la expresión $S(ap) = aS(p)$, como la propiedad del producto por un escalar sin tener en cuenta la suma vectorial. Esto lo reafirma, cuando al corregir el error de cálculo cometido, quiere demostrar que efectivamente la función S es una transformación lineal.

> *[ES4P5]:* Ah no (Risas). Es que lo multipliqué desde antes. Entonces esto es: (Escribe $\frac{3-30+12}{4} = -\frac{15}{4}$). Esto es igual a $-\frac{15}{4}$, ¿no es cierto? Entonces me devuelvo (escribe: $-\frac{15}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{17}{4}$) Ahí está, entonces sí es una transformación lineal. Yo digo que, que eso es una transformación lineal porque se cumple esa propiedad. Y si se cumple esa propiedad es una transformación lineal.
>
> [44E]: ¿Cuál propiedad? ¿Quieres escribirla?

$$S(ap) = aS(p)$$

$$\Rightarrow S(cx) = cS(x) \quad / \quad S(ap+bq) = S(ap) + S(bq)$$
$$= aS(p) + bS(q).$$

Claramente, se puede ver que este estudiante toma unos valores generales y escribe la propiedad del producto por un escalar que reproduce como la suma de dos productos por invitación del enunciado del problema. Durante la entrevista comenta: *"Es tener lo mismo dos veces"*. Los problemas que este estudiante tiene con la construcción del concepto se relacionan con sus construcciones previas.

3. Sean U, V y W espacios vectoriales, dadas $T_1: U \to V$ y $T_2: U \to W$ transformaciones lineales. Se define $T: U \to V \times W$ como $T(u) = (T_1(u), T_2(u))$ para todo $u \in U$.

a. Encuentra un caso particular del enunciado, es decir, determina ejemplos de transformaciones lineales T_1, T_2 y determina T. ¿Es T una transformación lineal?

b. ¿Es posible considerar en general, la transformación T como una transformación lineal? Justifica tu respuesta.

Figura 8. Problema 3 de la entrevista (Roa-Fuentes, 2008, p.65).

Por ejemplo, al trabajar sobre el problema 3 de la entrevista (figura 8), este estudiante reafirma su concepción del concepto transformación lineal y sus dificultades con el concepto de vector, ya que su definición de *"cualquier vector"* es equivalente a tomar uno en particular. Consideremos el siguiente extracto de la entrevista:

[ES4P3]: Ya, por ejemplo (escribe las transformaciones)

$$\begin{array}{ll} T_1: U \longrightarrow V & T_1: R^2 \to R \\ & T_1(x,y) = x + y \\ & \\ T_2: U \to W & T_1: R^2 \to R^3 \\ & T_2(x,y) = (x, y, x+y) \end{array}$$

[ES4P3]: ¿Algo así?

[E]: Sí… Esas, ¿son transformaciones lineales?

[ES4P3]: ¿Son transformaciones lineales? Eh… si van de un espacio a otro y lo convierto y… A ver ¿hay que demostrarlo con alguna propiedad?

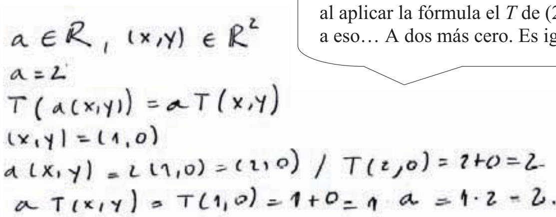
[E]: Eh… Pues si necesitas demostrarlo. Es decir, ¿son transformaciones lineales? Porque la condición es que las dos deben ser transformaciones lineales. [Pausa].

[E]: ¿Podrías demostrarlo? Demostrar que son transformaciones lineales…

[ES4P3]: O sea por ejemplo de la propiedad que en antes hablábamos, que saca el escalar... ¿que si me cumple acá todo eso?

Aunque este estudiante puede considerar casos particulares de transformaciones lineales, cuando la entrevistadora le cuestiona si en realidad las funciones definidas son transformaciones lineales, persiste su idea de la preservación del producto por un escalar como condición suficiente para determinar la linealidad de las transformaciones. Para demostrar realiza el siguiente procedimiento.

Tomémoslo para cualquiera (1,0) por ejemplo… Pongamos $a = 2$… Entonces al aplicar la fórmula el T de (2,0) nos lleva a eso… A dos más cero. Es igual a dos.



[ES4P3]: Se demuestra claramente que es una transformación lineal según yo. Porque eso es necesario. Sí. ¿Es necesario que lo demuestre?

[ES4P3]: O sea ¿es necesario sólo esto, para decir que es una transformación lineal?

[E]: Eh… Pues no sé, me interesa saber si consideras que debes hacerlo.

[ES4P3]: Ah ya, pues yo creo que sí. Y el otro se cumple… ¿Lo hago?

Como se puede ver, aunque usa la expresión *"para cualquiera",* trabaja con un caso particular, y esto es equivalente según lo que ha escrito a *"para todo".* Su concepción del cuantificador le hace pensar que demostrar para un caso particular es equivalente a demostrar para cualquier elemento del espacio y cualquier elemento del campo.

En general, este estudiante puede pensar en la transformación lineal en términos de acciones específicas y las relaciona con el cumplimiento de una propiedad aislada de los conceptos que ha construido previamente. Podemos afirmar que el estancamiento en esta concepción se presenta parcialmente por la falta de las estructuras previas que hemos considerado como fundamentales para la construcción del concepto transformación lineal. Esto no permite que un individuo pueda evolucionar sus construcciones sobre el concepto y limita por tanto sus procedimientos de análisis con determinadas situaciones. Por otro lado se observa el aislamiento de la propiedad producto por un escalar y la identificación de la transformación lineal con esta propiedad.

4.3. *Estado intermedio entre la concepción acción y proceso*

Hemos considerado este estado por aquellos estudiantes que dan muestras de tener elementos para empezar a pensar de manera general sobre las transformaciones lineales, pero que aún no muestran evidencias de haber interiorizado las acciones.

Por ejemplo, los estudiantes que parecen tener esta concepción plantean las siguientes definiciones del concepto:

> *[ES4P1e]:* Una transformación lineal es una función que puede cambiar o transformar elementos de un espacio, a otro; por ejemplo un elemento del plano cartesiano R^2 lo envía al espacio R^3.
>
> *[ES9P1e]:* Una función que va de un espacio vectorial a otro pudiendo ser el mismo y cumple con: $f(\alpha v + u) = \alpha f(v) + f(u); f: V \to V$.

Aunque hay un intento por definir el concepto es evidente que se está pensando sobre casos particulares de funciones. Además, se ve una clara exclusión de cuantificadores y existenciales al definir el concepto.

4.4. *Concepción proceso de transformación lineal*

Una concepción proceso en general se caracteriza por ser una construcción mental, en donde el individuo no necesita actuar paso a paso sobre los elementos del proceso sino más bien puede pensar sobre ellos. Esto fue evidente en el estudiante 3, quien en el primer problema de la entrevista, realiza una reflexión de la situación propuesta antes de realizar cualquier procedimiento.

> *[ES3P1]:* Bueno yo lo que, bueno me están pidiendo que de alguna forma evalúe $S(ap + bq)$ y que aparte evalúe $aS(p)$ y $bS(q)$ entonces bueno yo voy a obtener dos resultados y puede que sean iguales como también puede que no. Y después me pregunta si S es lineal, ¿ya? Entonces independientemente, obviamente si son distintos yo podría decir inmediatamente que no es transformación lineal pero si son iguales no puedo asegurar que sean transformación lineal porque esto es un caso particular. Entonces tendría al hacerlo, bueno yo lo haría y si son iguales diría son iguales, ¿ya? Pero después tendría que hacerlo en general, para poder decir si es transformación lineal o no y no solamente esto sino también ah, es que están las dos juntas.

La concepción del estudiante 3 le permite pensar sobre los elementos del problema sin actuar de manera directa sobre ellos. En su análisis, puede verse una reflexión consciente sobre el cumplimiento de la propiedad para todos los vectores del espacio, ya que considera que si en el caso particular presentado se cumple, no podría afirmar nada y necesitaría hacerlo de manera general. También señala que, en el caso en que no se cumpla la igualdad, podría afirmar que la función dada no es una transformación lineal. Este estudiante, tal como lo describimos en el análisis teórico reconoce que la función debe preservar combinaciones lineales para todos los elementos del espacio vectorial. Durante el desarrollo de la entrevista decide no hacer los cálculos para los casos particulares, ya que reconoce la función dada como una transformación lineal y se centra en demostrarlo.

Los cinco estudiantes que durante la entrevista dieron muestras de tener una concepción proceso definen el concepto de transformación lineal en términos del cumplimiento de las propiedades. Sin embargo, al demostrar que una función es transformación lineal lo hacen por medio de la preservación de combinaciones lineales. Incluso al pensar en una determinada función, pueden decidir de manera mental que no es una transformación lineal y presentar un contraejemplo con elementos específicos donde no se cumple una de las dos propiedades.

[ES8P1d]: (Escribe): no es una T.L. pues:

$f\big(2(1,1)\big) = f(2,2) = (4,4)$ y $2f(1,1) = 2(1,1) = (2,2) \therefore f\big(2(1,1)\big) \neq 2f(1,1)$. g sí es lineal pues:

$$g\big((a,b) + \alpha(c,d)\big) = g(a + \alpha c, b + \alpha d)$$
$$= (a + \alpha c, 3b + 3\alpha d - 2a - 2\alpha c, b + ad)$$
$$g\big((a,b) + \alpha(c,d)\big) = g(a, 3b - 2a, b) + \alpha(c, 3d - 2c, c)$$
$$= (a + \alpha c, 3b + 3\alpha d - 2a - 2\alpha c, b + ad)$$

Este es el caso del estudiante 8 (grupo 2), quien al trabajar en el problema 1 (ver figura 3), aunque no escribe de manera específica cuantificadores, evidentemente los considera implícitamente, al presentar un contraejemplo sobre la función f para determinar que no es una transformación lineal y demostrar para un par de vectores cualesquiera en R^2 que la función g preserva combinaciones lineales, y por tanto sí es una transformación lineal.

Además, en su definición del concepto estos elementos aparecen explícitamente.

[ES8P1e]: Una transformación lineal T es una función definida de un espacio vectorial V en otro espacio vectorial W y tal que se cumple:

1. $T(\vec{a} + \vec{b}) = T(\vec{a}) + T(\vec{b})\ \forall\, \vec{a},\ \vec{b} \in V$
2. $T(k\vec{a}) = kT(\vec{a}), \forall\, \vec{a} \in V, k \in F$ (Cuerpo).

Las construcciones de este estudiante le permiten pensar en transformaciones lineales con características particulares, por ejemplo en el problema 2 del diagnóstico, plantea la siguiente solución:

[ES8P2]:

a. $g\colon (R) \to R; g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + b + c + d$. Se afirma que g es lineal: ¿Se cumple la definición de T.L.?

$$g\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} a + \alpha e & b + \alpha f \\ c + \alpha g & d + \alpha h \end{pmatrix}$$
$$= (a + \alpha e) + (b + \alpha f) + (c + \alpha g) + (d + \alpha h)$$
$$g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \alpha g\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = a + b + c + d + \alpha(e + f + g + h)$$
$$\therefore g\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$ Por lo tanto g es una T.L.

b. $h\colon M_2(R) \to R$, $h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a^2$ no es lineal pues: $h\left(2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = h\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 4$. Pero $2h\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 = 2$. Y $2 \neq 4$, no se cumple la definición de T.L.

Aunque dio su definición de transformación lineal en términos del cumplimiento de las propiedades de manera independiente, sus demostraciones se basan en la preservación de combinaciones lineales (aunque no puso la letra g en algunos lugares de su demostración de arriba). Sin embargo, cuando debe demostrar que una transformación no es lineal, sabe que basta con que la función no preserve una de las propiedades. Esto está muy relacionado con nuestro análisis teórico, ya que en éste se establece la construcción del concepto a partir de las dos propiedades y la necesidad de coordinar estos procesos en uno único mediante la preservación de combinaciones lineales. Esto como lo plantean Dubinsky y McDonald (2002), tiene que ver con la no linealidad de las construcciones; la presentación de las construcciones como una lista jerárquica ordenada es sólo una forma de describir el proceso de construcción. Cuando un individuo logra una construcción puede ir y venir entre ellas dependiendo de las exigencias de la situación que esté abordando. De esta forma, el estudiante 8 decide de qué manera abordar el problema dependiendo de lo que éste plantee.

Asimismo los estudiantes con esta construcción muestran una concepción muy clara de los vectores como objetos. No tienen dificultades en determinarlos como elementos generales de un espacio vectorial y son conscientes de la existencia del campo, lo que les permite diferenciar la naturaleza de uno y del otro. Por ejemplo en la pregunta 1 de la entrevista (figura 5) el estudiante 3 inicialmente considera los polinomios de la forma $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pero por conveniencia en la realización de los cálculos decide tomarlos como $p(x)$ y $q(x)$. Algo similar sucede en el caso del estudiante 8 quien en el problema 3 (figura 8), define las transformaciones T_1 y T_2 de R en R y aclara que en este caso hay que tener cuidado porque los escalares se confunden con los vectores ya que son los mismos. Este estudiante hace referencia al conjunto de los números reales (R) como un espacio vectorial definido sobre el mismo conjunto. Esto reafirma, desde nuestra mirada, la necesidad de establecer de manera apropiada la construcción de los elementos previos indispensables para la construcción de un determinado concepto matemático, en este caso, mediante la construcción adecuada del concepto de espacio vectorial y el papel del campo dentro de dicha construcción.

4.5. *Concepción objeto de transformación lineal*

En nuestra descomposición genética preliminar describimos esta construcción en términos de las transformaciones que un estudiante pudiera realizar sobre este objeto, mediante la composición de transformaciones lineales por ejemplo, o mediante la consideración de las transformaciones lineales como elementos de un conjunto, en particular de un espacio vectorial. También consideramos que plantear preguntas sobre un concepto es una forma de realizar acciones sobre él; en este caso, decidir si las transformaciones lineales poseen cierto tipo de propiedades sería evidencia de una concepción objeto de este concepto.

Este tipo de construcciones se evidenció en cinco de los estudiantes entrevistados, aunque de alguna manera en diferentes grados de complejidad; con esto hacemos referencia al tipo de argumentos presentados por cada estudiante. Ellos, en general, dieron evidencias de haber encapsulado el proceso de conservación de combinaciones lineales y esto les permite desencapsular el objeto y relacionarlo con otros, en la medida en que las situaciones lo requerían. Este hecho señala la importancia de relacionar la preservación de operaciones como un único proceso que permita su encapsulación en un objeto.

Es importante mencionar que hablar en términos de transformaciones lineales y determinar ejemplos de ellas no es una condición suficiente para garantizar que un estudiante posee una concepción objeto de transformación lineal. Esto se evidenció en el grupo de estudiantes entrevistados. Por ejemplo, el estudiante 4 puede dar ejemplos de transformaciones lineales a pesar de su concepción del concepto centrada sólo sobre la preservación del producto por un escalar para vectores particulares de un espacio vectorial determinado.

El estudiante 5, presenta un tipo de razonamiento en el desarrollo de la pregunta 3 (figura 8) que da muestra de su capacidad para realizar acciones sobre objetos específicos, al deducir que dadas dos transformaciones lineales $T_1: U \to V$ y $T_2: U \to W$ es posible determinar una nueva transformación lineal $T: U \to V \times W$ definida como $T(u) = (T_1(u), T_2(u))$ para todo u en U. Este estudiante puede determinar sin ninguna dificultad dos casos particulares de transformaciones lineales y ver que la nueva trasformación es una transformación lineal; veamos su procedimiento:

$$T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \; T(x,y) = x+y$$
$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$
$$T(x,y) = \big((-y,x),\, x+y\big)$$

El estudiante puede determinar casos particulares de transformaciones lineales y mediante la aplicación de acciones sobre ellas (determinando cada componente como la aplicación de T_1 y T_2), puede establecer una nueva transformación lineal. Incluso es posible ver cómo el objeto transformación lineal ha sido encapsulado desde el proceso adecuado ya que sus demostraciones se basan en verificar la preservación de combinaciones lineales. De esta manera demuestra que en general, la función T definida en el problema es una transformación lineal.

Sean $v_1, v_2 \in U$, $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} T(\alpha v_1 + v_2) &= \big(T_1(\alpha v_1 + v_2), T_2(\alpha v_1 + v_2)\big) \\ &= \big(\alpha T_1(v_1) + T_1(v_2), \alpha T_2(v_1) + T_2(v_2)\big) \\ &= \alpha\big(T_1(v_1), T_2(v_1)\big) + \big(T_1(v_2), T_2(v_2)\big) \\ &= \alpha T(v_1) + T(v_2) \end{aligned}$$

Además, se interesa en determinar la estructura del conjunto $V \times W$. Al parecer, nunca había considerado si dados dos espacios vectoriales, el producto cruz entre ellos define un nuevo espacio vectorial. Esto lo lleva a pensar en definir las operaciones de suma vectorial y producto por un escalar para dicho conjunto.

$$V \times W = \{(a,b) \in V \times W \,/\, a \in V \wedge b \in W\}$$
$$(a,b) + (c,d) =: (a+c, b+d)$$
$$\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$$

Mediante la determinación de las operaciones canónicas y después de verificar algunas propiedades del espacio vectorial, el estudiante 5 concluye que $V \times W$ conserva la estructura de espacio vectorial. Consideramos que este procedimiento nos señala el tipo de pensamiento global que un estudiante puede desarrollar al poseer una concepción objeto de transformación lineal. Puede considerar los elementos que hacen parte del concepto e integrarlos a su pensamiento, sabe que una transformación lineal debe estar definida entre espacios vectoriales; esto hace parte de su estructura mental.

5. Elementos que enriquecen el análisis teórico: Reformulación de la descomposición genética

Con base en el análisis de los datos obtenidos en la sección anterior, podemos afirmar que las estructuras de función como esquema y espacio vectorial como objeto son indispensables para la construcción del concepto transformación lineal. En este camino habíamos considerado un estado intermedio entre la concepción acción y proceso, determinado por el uso de los cuantificadores. Pensábamos que en algunos casos, los estudiantes podrían hacer uso de vectores en su forma general sin pensar en el cumplimiento de las propiedades para todos los elementos del espacio vectorial. Aunque algunos estudiantes parecían tener este tipo de concepción, no encontramos más evidencia en los problemas propuestos. Los estudiantes consideran el cumplimiento de las propiedades para todos los elementos del espacio vectorial cuando escriben los vectores de manera general. Aunque no escriban específicamente los cuantificadores, sus construcciones evidencian que consideran el cumplimiento de las propiedades para todos los vectores del dominio de las funciones o transformaciones lineales presentadas en los instrumentos.

Es interesante observar las construcciones que ha realizado el estudiante 4 sobre el concepto estudiado; centra sus construcciones en el cumplimiento del producto por un escalar y hace caso omiso de la suma vectorial. Esto nos deja ver que considerar la construcción de las propiedades como lo hemos establecido, puede ayudar a los estudiantes a evitar este tipo de construcciones erradas. Hacer énfasis sobre la construcción de las dos propiedades como procesos ayuda a los estudiantes a evidenciar la existencia de los espacios vectoriales y el campo, así como el uso de cuantificadores. Estas construcciones específicas y la coordinación de ellas forman un papel crucial en la construcción del concepto transformación lineal. La construcción, *proceso* de transformación lineal, como resultado de la coordinación de estos dos procesos (figura 9) es, desde nuestra perspectiva, un camino viable para la construcción de este concepto. Mediante este camino es posible considerar su posterior encapsulación en un objeto y motivar la evolución de su *esquema*.

Si las construcciones de las propiedades se perciben por los estudiantes de manera aislada, será imposible que éstas evolucionen, su tratamiento de las transformaciones lineales estará limitado por la percepción de dos procesos independientes. Por tanto, la coordinación entre estos procesos (ver figura 9), debe realizarse de manera explícita en la construcción del concepto. Hacemos hincapié en que algo que puede ser obvio matemáticamente (dos propiedades que se combinan mediante la "y" lógica) puede no ser tan evidente cognitivamente (donde se requiere una coordinación). El mecanismo de coordinación, en este caso, ayuda a juntar la suma vectorial y el producto por un escalar, resultando en un nuevo proceso que consiste en la preservación de combinaciones lineales.

Un estudiante con una concepción proceso de transformación lineal puede pensar previamente en la realización de acciones sobre una función dada, si ésta es o no una transformación lineal y elegir el tipo de argumento que utilizará para validar sus razonamientos. Es decir, podrá demostrar la preservación de operaciones (suma vectorial y producto por un escalar) o la preservación de combinaciones lineales si la función es transformación lineal, en el caso contrario, presentará un contraejemplo para un caso particular, o mostrará que en general no se cumple alguna de las propiedades.

Acción
Fijados a y b vectores particulares de U
$T(a+b) = T(a) + T(b)$

Acción
Fijado a en U y α en K
$T(\alpha a) = \alpha T(a)$

$(\forall)$
Interiorización

Proceso
$\forall u_1, u_2 \in U$ se tiene que
$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$

Proceso
$\forall u \in U$ y $\forall c \in K$ se tiene que$T(cu) = cT(u)$

Coordinación $(\wedge)$

$\forall\, u_1, u_2 \in U$ y $\forall b, c \in K$
$T(bu_1 + cu_2) = bT(u_1) + cT(u_2)$
Proceso
Transformación Lineal

Encapsulación

Objeto Transformación Lineal
Aplicación de acciones y procesos.

Figura 9. Descomposición genética refinada (Roa-Fuentes, 2008, p.112).

Una vez un estudiante logra tener una concepción proceso de este concepto está en capacidad de encapsularlo en un objeto. Cuando necesite aplicar determinadas transformaciones (acciones o procesos) sobre un concepto, no será posible si éste no ha sido encapsulado en un objeto. En este camino esta construcción está determinada por las transformaciones particulares que un estudiante puede considerar en un curso de álgebra lineal básico, por ejemplo mediante el álgebra de transformaciones lineales, donde ya sea por la suma, el producto por un escalar o la composición, nuevas transformaciones lineales son definidas como resultado de una transformación sobre dos o más de estos objetos.

De la misma manera, considerar una transformación lineal como un elemento de un espacio vectorial nos permite pensar que el estudiante ha logrado ver el proceso como un todo y puede actuar de manera consciente sobre él. Como se pudo percibir durante nuestro análisis de los datos empíricos, las construcciones descritas en esta descomposición genética no pueden verse de manera aislada. No es suficiente observar en un estudiante su capacidad para describir determinadas transformaciones lineales y generar otras a partir de un determinado procedimiento, para asegurar que posee una concepción objeto. En este asunto juega un papel fundamental el mecanismo de desencapsulación; un estudiante que logra una concepción objeto de transformación lineal debe mostrar evidencias de su capacidad para regresar sobre el proceso, mediante el cual logró encapsular dicho objeto. En este caso, su concepción proceso debe estar fundamentada sobre la preservación de combinaciones lineales, o sea, la coordinación de dos procesos relacionados con cada propiedad de linealidad. De otra manera, podremos considerar que a pesar de su capacidad para realizar transformaciones sobre ejemplos específicos, no ha logrado una concepción objeto adecuada de este concepto.

Durante el análisis de nuestros resultados fue evidente la necesidad de construir este concepto de manera paralela con otros. Pudimos percibir la necesidad de establecer principalmente, fuertes conexiones con el concepto de base ya que éste, según nuestro criterio, juega un papel fundamental en la construcción y evolución del esquema de transformación lineal. Este es un asunto que puede ser estudiado con detalle en futuras investigaciones, en donde el trabajo con estudiantes puede dar luces importantes sobre la manera como los conceptos matemáticos evolucionan en la medida en que se relacionan con otros.

6. Conclusiones

Un modelo de enseñanza que se base en el camino descrito en este artículo puede considerar el análisis de funciones entre espacios vectoriales que cumple con una u otra propiedad y las implicaciones que tiene el cumplimiento de una propiedad sobre la otra. Esto involucra un análisis más específico sobre la naturaleza del campo sobre el cual estén definidos los espacios vectoriales.

Por ejemplo, consideremos la función $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como $T(z) = \bar{z}$. Esta función es una transformación lineal si el espacio vectorial $\mathbb{C}$ se define sobre el conjunto de los números reales (R) como un espacio de dimensión 2. Pero si se define sobre el conjunto de los números complejos $(\mathbb{C})$, no lo es, ya que la suma vectorial se preserva pero no el producto por un escalar. Basta tomar $z = 1 - i$ y $\alpha = 1 + i$ para ver que: $T(\alpha z) = 2$ y $\alpha T(z) = 2i$. Este tipo de ejemplos promueve un pensamiento distinto que, desde nuestra opinión, puede generar el desarrollo de razonamientos de tipo abstracto, donde el estudiante siente la necesidad de reflexionar sobre los contenidos más allá de desarrollar habilidades para repetirlos, por concebirlos como algo terminado.

De la misma manera, cuando se están construyendo por separado la preservación de la suma vectorial y el producto por un escalar es posible examinar la relación entre estas dos propiedades. Considerar si estas condiciones son independientes la una de la otra y analizar cómo bajo ciertas circunstancias la preservación de la suma vectorial implica el producto por un escalar (Maher, 1987), puede generar la reflexión de este concepto más allá de la mecanización. En este camino es importante mencionar los materiales propuestos por Weller et al. (2003), donde el trabajo con transformaciones lineales se inicia con acciones sobre vectores específicos de espacios vectoriales finitos como $\mathbb{Z}_3$. Con este tipo de alternativas, buscamos que los maestros motiven el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes, mediante una reflexión profunda de los conceptos. Sin duda, el camino que describimos en nuestra descomposición genética refinada puede ser la base que alimente esta reflexión que va más allá de la considerada por los libros de texto. Tal vez, ésta puede convertirse en una alternativa que genere razonamiento sobre éste y otros conceptos de álgebra lineal sin evadir su carácter abstracto que es, en definitiva, una de las razones por las cuales nos interesa incluirla en los programas de formación profesional.

Como resultado de nuestras observaciones en los grupos mencionados, es importante considerar que los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y Estadística sin duda tienen una formación distinta y por tanto, sus construcciones mentales respecto a los contenidos matemáticos pueden ser descritas desde diferentes concepciones. Sin embargo, es necesario reconsiderar cuáles son los objetivos de ofrecer un curso de álgebra lineal en estos programas, donde los conceptos son tratados con cierta “ligereza” respecto a la abstracción y profundidad con que son abordados en clase. Esto, desde nuestra perspectiva, desvirtúa la esencia del álgebra lineal y sólo promueve en los estudiantes la mecanización de algoritmos que luego deben reproducir para aprobar un requisito. Por lo anterior, consideramos de gran importancia abordar esta problemática y determinar cuáles son las razones importantes por las cuales un curso básico de álgebra lineal debe incluirse en un programa profesional y cuáles son los requisitos que de alguna manera el programa debe garantizar para que los estudiantes tengan el tiempo y las condiciones necesarias para abordar los contenidos propuestos.

Sin duda, los resultados de nuestra investigación pueden ser refinados mediante una nueva aplicación del ciclo de investigación. Sin embargo, consideramos que para obtener datos más significativos sobre las construcciones que los estudiantes realizan del concepto transformación lineal, resultaría muy interesante diseñar un modelo de enseñanza que, con base en nuestra descomposición genética, busque seguir el camino descrito para la construcción del concepto, teniendo en cuenta las consideraciones didácticas que hemos planteado. Esto puede brindar más luces sobre la manera como evoluciona el esquema de transformación lineal. Una manera de hacer un diseño adecuado puede ser retomando el acercamiento planteado en Weller et al. (2003) y con base en los resultados de esta investigación y la descomposición genética refinada, hacer modificaciones para su implementación.

Cabe aclarar que el trabajo que realizamos en esta investigación consiste en un punto de partida que puede continuarse y enriquecerse de diferentes maneras. Desde el punto de vista de la investigación, la comprensión de las construcciones mentales alrededor de los elementos básicos de la definición de un concepto matemático es fundamental para posteriormente, estudiar las relaciones complejas que empiezan a formarse entre ese concepto y otros. Por ejemplo, la descripción de una transformación lineal en sus coordenadas y la relación que ésta induce con las bases de los espacios vectoriales involucrados, ciertamente ofrecerá otra mirada a la problemática. De igual manera, el uso de diferentes tipos de representación es un asunto importante que merece estudiarse a profundidad, en relación con las construcciones que logran hacer los estudiantes con respecto al concepto transformación lineal.

Durante el desarrollo de nuestra investigación detectamos la necesidad de estudiar la construcción y evolución del esquema del concepto de base. En la actualidad, existen algunos trabajos sobre las dificultades que presentan los estudiantes al abordar situaciones relacionadas con este concepto (Chargoy, 2006; Da Silva & Lins, 2002). En particular Kú, Trigueros y Oktaç (2008) presentan una descomposición genética donde se aprecia la importancia que toman conceptos como dependencia lineal, combinación lineal y conjunto generador, al abordar la construcción del concepto de base. En esta vía consideramos importante analizar con detalle la construcción del esquema de base y su evolución, al relacionarse con el esquema de transformación lineal. Partiendo de la construcción del concepto de espacio vectorial, Parraguéz y Oktaç (2010) proponen la construcción del esquema de este concepto mediante su relación con otros conceptos como independencia lineal y operación binaria. El estudio teórico de las relaciones que se establecen entre las estructuras descritas, puede guiar el diseño de modelos de clase que motiven la construcción de conocimiento matemático en los estudiantes.

De la misma manera, es importante estudiar la representación matricial de una transformación lineal, de tal manera que pudiéramos determinar cómo puede relacionarse este concepto con nuestra descomposición genética y mejor aún qué tipo de construcciones y qué niveles de abstracción permite esta representación. Estas preguntas pueden guiar trabajos relacionados con este concepto matemático y contribuir en la construcción adecuada del mismo. Igualmente, podemos considerar que las nociones geométricas indudablemente están presentes en la mente de algunos estudiantes cuando piensan en el concepto transformación lineal. Si consideramos en detalle las entrevistas, podremos ver que los estudiantes 5, 6 y 8 (Roa-Fuentes, 2008) en más de un problema, intentan acudir a representaciones de tipo geométrico. Sin embargo abandonan sus intenciones rápidamente cuando este tipo de representación no les permite decir algo más acerca de los conceptos involucrados, o tal vez, cuando éstas ya han aclarado las ideas en su mente. Por lo anterior, consideramos de gran importancia abordar esta problemática más allá de la representación en el plano y el espacio de transformaciones lineales definidas entre los espacios vectoriales R^2 y R^3; es decir, podemos pensar en cómo estas representaciones de transformaciones particulares pueden contribuir con la generalización de argumentos sobre otros espacios o cómo el uso de estas representaciones limita la construcción adecuada del concepto. En este camino, el trabajo realizado por Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996) sobre la coordinación entre las estrategias visuales y analíticas especialmente al abordar situaciones relacionadas con el grupo D_4, puede ofrecer un camino en el estudio de esta problemática. Estos autores proponen un modelo donde los argumentos visuales y analíticos convergen hacia la construcción de los conceptos. Tal vez esta propuesta para abordar las representaciones geométricas de algunas transformaciones pueda fusionarse con la descripción del esquema de transformación lineal y permita establecer un modelo de enseñanza que integre de manera adecuada el concepto y sus representaciones.

Agradecimientos

La primera autora agradece al profesor *Javier Camargo García* por su contribución en el diseño y reflexión sobre los problemas matemáticos presentados en este escrito.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (Vol. 6, pp.1 – 32). Rhode Island, U.S.A.: American Mathematical Society.

Chargoy, R. (2006). *Dificultades asociadas al concepto de base de un espacio vectorial*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN, D.F., México.

Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., St. John, D., Tolias, G. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *The Journal of Mathematical Behavior 16* (4), 345 – 364.

Dubinsky, E., Weller, K., Stenger, K. & Vidakovic, D. (2008). Infinite iterative processes: The Tennis Ball Problem. *European Journal of Pure and Applied Mathematics 1* (1), 99 – 121.

Dubinsky, E. & McDonald, M. (2002). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. InD.Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, (Vol. 7, pp. 275 – 282). Kluwer, Netherlands: Springer. DOI: 10.1007/0-306-47231-7_25

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática 20* (2), 65 – 89.

Maher, P. (1987). What makes an operator linear? *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology 18* (2), 177 – 179.

McDonald, M., Mathews, D. & Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education* (Vol. IV, pp. 77 – 102). Providence, EE.UU: American Mathematical Society.

Parraguéz, M. & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint APOS theory. *Linear Algebra and its Applications 432* (8), 2112 – 2124.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13* (1), 89 – 112.

Roa-Fuentes, S. (2008). *Construcciones y Mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN, D.F., México.

Weller, K., Clark, J., Dubinsky, E., Loch, S., McDonald, M. & Merkovsky, R. (2003). Student performance and attitudes in courses based on APOS theory and the ACE teaching cycle. *CBMS Issues in Mathematics Education 12*, 97 – 117.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2002). *Learning Linear Algebra with ISETL*. Recuperado el 21 de junio de 2007 de http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf.

Zazkis, R., Dubinsky. E. & Dautermann, J. (1996). Coordinating Visual and Analytic Strategies: A Study of Students' Understanding of the Group D_4. *Journal for Research in Mathematics Education 27* (4), 435 – 457.

Autores:

Solange Roa-Fuentes. Universidad Industrial de Santander. Grupo de Investigación Educación Matemática, *EDUMAT – UIS*, Colombia.
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México. sroa@matematicas.uis.edu.co

Asuman Oktaç. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México. oktac@cinvestav.mx