Gustavo Martínez Sierra

CONCEPCIONES Y MATEMÁTICA ESCOLAR: UNIDADES DE MEDIDA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Perceptions and school mathematics: units of measurements for trigonometrical functions at high school level

RESUMEN

Este artículo presenta un análisis didáctico-cognitivo sobre la unidad de medida que contiene el argumento de las funciones trigonométricas, situándolo en el nivel medio superior mexicano. El estudio didáctico muestra el fenómeno de *destematización* en el radián, entendido como *concepto articulador*, mientras que el estudio cognitivo ofrece elementos para conocer las concepciones que tienen los profesores y los estudiantes sobre las unidades angulares de las funciones trigonométricas en la matemática escolar. Por su parte, el análisis de los cuestionarios que se aplicaron a los estudiantes y los profesores indica: 1) el nulo uso de las calculadoras o algún otro sistema de cálculo y la tendencia de los profesores a centrarse en los valores notables; 2) los estudiantes no perciben que el uso de la calculadora para las funciones trigonométricas se encuentra mediado por, al menos, dos modos de cálculo: el sexagesimal y el radián.

PALABRAS CLAVE:

- *Matemática escolar*
- *Concepciones*
- *Articulación y convención matemática*
- *Radián*
- *Funciones trigonométricas*

ABSTRACT

This article presents a didactic-cognitive analysis of the unit of measurement that contains the argument of the trigonometrical functions at Mexican high school level. The didactic study demonstrates the phenomenon of *dethematization* in the radian, understood as the *articulator concept*, while the cognitive study offers elements for understanding the perceptions of teachers and students in relation to the angular units of trigonometric functions in school mathematics. In turn, the analysis of questionnaires applied to students and teachers indicate: 1) the improper use of calculators or other calculation systems

KEY WORDS:

- *School Mathematics*
- *Perceptions*
- *Mathematical articulation and convention*
- *Radian*
- *Trigonometric functions*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2012) *15* (1): 35-62.
Recepción: Septiembre 24, 2010 / Aceptación: Agosto 26, 2011.

and the tendency of teachers to focus on significant values; 2) that students do not perceive that the use of the calculator for trigonometric functions is mediated by at least two methods of calculation: the sexagesimal and the radian.

RESUMO

Apresenta-se neste artigo uma análise didática e cognitiva sobre a unidade de medida que contém o argumento das funções trigonométricas, situando-o no colegial do ensino mexicano. O estudo didático mostra o fenômeno de *desarticulação de temas* para o radiano, entendido como um *conceito articulador*, ao mesmo tempo em que o estudo cognitivo oferece elementos para conhecer os conceitos que os professores e os estudantes têm sobre as unidades de ângulo das funções trigonométricas na matemática escolar. No entanto, a análise dos questionários aplicados aos estudantes e professores indica: 1) o não uso das calculadoras ou qualquer outro sistema de cálculo e a tendência dos professores em concentrar-se em valores notáveis; 2) os estudantes não percebem que o uso da calculadora para as funções trigonométricas está mediado por, pelo menos, dois sistemas de cálculo: o sexagesimal e o radiano.

PALAVRAS CHAVE:

- *Matemática escolar*
- *Conceitos*
- *Articulação e convenção matemática*
- *Radiano*
- *Funções trigonométricas*

RÉSUMÉ

Étude didactique et cognitive, cet article aborde le thème des unités de mesure dans les problèmes sur les fonctions trigonométriques en lycée au Mexique. La composante didactique de ce travail montre comment le radian est *dé-thématisé*, phénomène qui peut être vu comme un *concept articulateur*, alors que sa partie didactique offre, elle, des éléments permettant de se familiariser avec les conceptions personnelles des professeurs et des lycéens quant aux unités d'angles dans les fonctions trigonométriques en mathématiques dans un établissement scolaire. D'autre part, l'analyse des questionnaires soumis aux professeurs et élèves montre 1) que les calculatrices, ou tout autre système de calcul, ne sont utilisées par personne et que les professeurs ont tendance à se focaliser sur les valeurs remarquables 2) que les étudiants ne perçoivent pas que l'utilisation de la calculatrice pour les fonctions trigonométriques leur permet d'utiliser au moins deux mode de calcul : degré et radian.

MOTS CLÉS:

- *Mathématiques scolaires*
- *Conceptions personnelles*
- *Articulation et convention mathématiques*
- *Radian*
- *Fonctions trigonométriques*

1. Introducción

En el campo de la Matemática Educativa se han desarrollado investigaciones que ofrecen explicaciones acerca de las particularidades, en tanto su construcción conceptual y en tanto a los fenómenos didácticos asociados, de algunos tipos especiales de funciones como son: la función logaritmo (Ferrari, 2008), la función exponencial (Lezama, 2005; Martínez-Sierra, 2007), las funciones trigonométrica (FF. TT.) (Buendía y Cordero 2005; Montiel, 2005; Maldonado, 2005).

La consideración de que cada tipo de función produce fenómenos didácticos específicos, contrasta con los resultados y elaboraciones teóricas clásicas alrededor del concepto de función; ya que todos utilizan la idea de que hay un proceso que explica la construcción o aprendizaje del concepto de función. Al respecto se destaca los trabajos de Sierpinska (1992), Dubinsky (1992) y Sfard (1992), en donde, por ejemplo, Sfard establece un proceso cognitivo caracterizado por las etapas de interiorización, condensación y reificación, partiendo del modelo epistemológico de que la función posee una naturaleza dual entre una faceta operativa y una estructural. En este mismo sentido Dubinsky caracteriza las construcciones mentales, necesarias para construir el concepto de función, en términos de Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas. Estos autores no prestan atención a los diferentes tipos de función, quizás porque responden al paradigma vigente que considera que la apropiación de un universal conlleva al entendimiento de lo particular (Ferrari, 2008).

En los últimos años hemos desarrollado una línea de investigación que estudia la construcción del conocimiento matemático a través del estudio de los procesos presentes en la construcción de sistemas conceptuales matemáticos a los que hemos llamado *procesos de articulación y convención matemática* (Martínez-Sierra, 2010, 2011). En esta línea hemos desarrollado el concepto de convención matemática, que ha sido útil, entre otros aspectos, en la explicación de algunos fenómenos didáctico-cognitivos y en la interpretación de procesos epistemológico-cognitivos (Martínez-Sierra, 2007, 2010, 2011). En particular, en el plano de lo epistemológico-cognitivo, hemos dado evidencia de que ciertas piezas de conocimiento, a las que hemos llamado convenciones matemáticas, serán entendidas como producto de un proceso de articulación matemática o proceso de integración de conocimientos. En el mismo sentido, en el plan de lo didáctico-cognitivo, hemos dado cuenta de que algunas de las rupturas conceptuales presentes en la escuela tienen su origen en la dialéctica articulación/desarticulación entre diferentes partes del corpus de la matemática escolar.

En relación a las funciones trigonométricas (FF. TT.) Algunas investigaciones (Maldonado, 2005; Méndez, 2008) han mostrado la existencia de fenómenos didácticos que *pueden ser* interpretados como consecuencia directa de la existencia de conceptos articuladores en corpus de la matemática escolar. En particular el concepto de radián, en el marco de la matemática escolar, puede ser interpretado como un concepto articulador, debido a que su función es la de proporcionar una articulación entre la Trigonometría, que utiliza el grado como unidad de medida angular y al ángulo como argumento funcional de las razones y de las FF. TT., y el Cálculo diferencial, que incluye a las FF. TT. como parte de su sistema como funciones reales de variable real[1]. En el sistema educativo mexicano el concepto de radián aparece por primera vez en el nivel medio superior.

Todo lo anterior motiva a realizar la presente investigación que tiene por objetivo conocer la estructura matemática escolar (M. E.) de las unidades de medida de las funciones trigonométricas y conocer las concepciones que de dicha matemática escolar tienen profesores y estudiantes del nivel medio superior mexicano. Todo ello bajo la hipótesis de que existen rupturas conceptuales asociadas al concepto de radián en el contexto del nivel medio superior mexicano.

2. Marco conceptual

2.1. *Construcción social*

Siguiendo a Bergmen y Luckmann (2006, p. 11) bastará con definir la realidad como una cualidad propia de los fenómenos o hechos que se reconocen como independientes de la voluntad (se pueden hacer desaparecer) y definir el *conocimiento* como la certidumbre de que los fenómenos son reales y que poseen características específicas. En el sentido anterior aquí se parte del supuesto de que *toda realidad es representada*, es decir, se la apropia un individuo o grupo, el cual la reconstruye en un sistema cognitivo, y la integra en su sistema de valores dependiendo de su historia y del contexto social e ideológico que lo rodea.

[1] En el marco de la construcción escolar de las funciones trigonométricas encontramos la siguiente definición que permite incluir a las FF.TT. como funciones de variable real: Si x es un número real, (sen x) es igual, por definición, sen [x radianes].

En complemento a lo anterior aquí se considera que la construcción del conocimiento es producto de la actividad humana en su intento por construir su realidad social o material y a su vez la actividad humana está *normada socialmente*. El concepto de *norma social* se utilizará aquí según las aproximaciones sociológicas en la línea de Durkheim (1988), Gallino (2001) y Elster (1991) en donde se entiende por *norma social* a una proposición –o también idea, representación colectiva que de todas maneras puede expresarse en una proposición– que prescribe, implícita o explícitamente, a un individuo o a una colectividad el comportamiento más apropiado en una determinada situación. Es decir, una norma social orienta la conducta de una persona. Las normas sociales más sencillas (Elster, 1991, p.120) son: “Haz X” o “No hagas X”, las más complejas serían: “Si haces X entonces haz Y” o “Si otros hacen Y, luego tú haz X” o “Haz X si fuera bueno que todos hagan X”.

Por *matemática escolar* (M. E.) se entenderá a la organización social del *significado*[2] de las matemáticas en situación escolar. La M. E. puede ser entendida como la forma que el conocimiento matemático toma como producto de la *transposición didáctica* (Chevallard, 1997) al ser transpuesto a un sitio donde existen diferentes normas sociales producidas y reproducidas en situación escolar. De esta manera asumimos que las personas construyen conocimiento de manera indisociable a la institución, como la escuela, en las que están insertas. Así, las *concepciones* que poseen las personas o grupos, en situación escolar, de un objeto dado pueden ser interpretadas como formas *interiorizadas* de la M. E.

2.2. *El proceso de convención matemática*

Un *proceso de convención matemática* (Martínez-Sierra, 2005) es entendido como un proceso de construcción de conocimiento que surge de la búsqueda de consensos al seno de la comunidad que trabaja en dar unidad y coherencia a un conjunto de conocimientos. La producción de consensos es posible debido a que en tal comunidad existe una *norma social que prescribe los procedimientos para interrelacionar diversos conocimientos y articularlos en un todo coherente e interrelacionado*. Por su naturaleza esta norma social se encuentra en el plano de la teorización matemática, entendiendo por esto a la elaboración de conceptos interrelacionados que intentan describir, explicar un objeto de estudio, el cuál es, en este caso el sistema de conocimientos aceptados. Este proceso de síntesis conlleva al surgimiento de propiedades emergentes no previstas por los

[2] Por significado de X aquí se entiende como aquellos tipos de proposiciones que una persona o un grupo puede elaborar para preguntas del tipo ¿Qué es X? ¿Cómo es X? o ¿Para qué es X?

conocimientos anteriores. Las convenciones matemáticas serían una parte de las propiedades emergentes (Martínez-Sierra, 2005, 2010, 2011).

El estudio histórico-epistemológico de la construcción de significados de los exponentes nos mostró la presencia de una manera de generar significados, presente en las distintas formulaciones a lo largo de la historia de las ideas entre los siglos XIV y XVIII (Martínez-Sierra, 2003). Se puede resumir que el significado de los exponentes no naturales es convenido para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento matemático (es decir para la integración sistémica de conocimientos). Es por ello que de manera sintética designamos a esa manera de construir conocimiento con la expresión: convención matemática. En el caso de los exponentes no naturales y utilizando el lenguaje de nuestros días las reglas de transformación son algo necesario si se quiera que las leyes de los exponentes sean verdaderas y no como en los libros de texto cuando intentan demostrar las reglas de transformación. Por ejemplo, para construir la igualdad $2^0 = 1$, se puede proceder a través del producto de un razonamiento parecido al siguiente: si se quiere que $2^0 * 2^2 = 2^{0+2} = 2^2$ se debe convenir que 20 = 1.

En el marco de la convención matemática un concepto es articulador si su función dentro del sistema conceptual es proporcionar algún tipo de relación entre diversas partes del sistema. La unidad de medida angular radián, dentro de la estructura la M. E., es un concepto articulador debido a que su función es proporcionar una articulación entre las unidades de medida que se utilizan en Trigonometría (como argumento funcional de las razones y las FF. TT.) y en cálculo diferencial (que incluye a las FF. TT. como funciones reales de variable real).

Teóricamente, desde un principio, la búsqueda de integración de los procesos de articulación y convención matemática, que es una búsqueda de relaciones, puede tener dos salidas: 1) La *ruptura* ocasionada por dejar a un lado un significado por otro que eventualmente es construido para la tarea de integración; es decir, cambiar la centración de significado y 2) La *continuidad* al conservar un significado en la tarea de integración. Entonces la convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados. La integración de un sistema conceptual, entonces, conlleva potencialmente un conflicto de significados o *rupturas conceptuales* cuya solución o superación se encuentra en el *plano metamatemático* que establece, entre otros, los requisitos que debe cumplir un sistema conceptual y las funciones de cada una de sus partes. La contradicción entre diferentes significados de un corpus de conocimiento es la fuente potencial de las rupturas conceptuales. Una ruptura conceptual puede generar "discontinuidades" en la construcción del conocimiento matemático, debido a la ausencia de conceptos articuladores. Por ejemplo, la ausencia de un concepto articulador como el radián en el discurso de los libros de texto, provoca rupturas conceptuales en la transición de la geometría al cálculo (Méndez, 2008). De acuerdo con esto, los procesos de convención y articulación matemática se proponen como propiedades emergentes para enmendar rupturas conceptuales.

El marco de nuestro ejemplo con los exponentes para dotar de un significado al exponente cero o negativo es menester romper con el significado del exponente como multiplicación reiterada y dar continuidad a las propiedades estructurales de las operaciones con potencias (las leyes de los exponentes).

En el plano de lo cognitivo cuando las personas se enfrentan ante convenciones matemáticas o conceptos articuladores puede aparecer un *conflicto cognitivo*, entendido como un estado de desequilibrio entre diversas significaciones que las personas asignan a algo.

No hay que dejar de señalar la cercanía de la ruptura conceptual con el de *obstáculo epistemológico y el de obstáculo didáctico* ("tipos de conocimiento que están obstaculizando la construcción de uno nuevo") de Brosseau (1998). La diferencia sustancial consiste en que la ruptura conceptual está relacionado con la *construcción de sistemas conceptuales*, mientras que el obstáculo epistemológico y el obstáculo didáctico están relacionados con la construcción de nuevo conocimiento. De esta manera una persona o grupo puede enfrentarse a obstáculos epistemológicos que no son rupturas conceptuales.

En relación a la M. E. de las FF. TT., se distinguen al menos dos tipos de conceptos que pueden ser interpretados como articuladores, y por tanto posibles detonadores de rupturas conceptuales y conflictos cognitivos en el nivel medio superior mexicano: 1) Los ángulos mayores que 360° y los ángulos negativos y 2) El concepto de radián como recurso para definir a las FF. TT. como funciones de variable real.

3. Algunos antecedentes

Otras investigaciones (Maldonado, 2005; Méndez, 2008) han mostrado fenómenos didácticos que pueden ser explicados como consecuencia de la existencia de los conceptos articuladores señalados antes.

Maldonado (2005) presenta un análisis didáctico para el nivel medio superior mexicano y menciona que en el contexto de las costumbres escolares, antes de definir la función trigonométrica como función real de variable real, la definen como razón que involucra a los ángulos medidos en grados, después realizan la conversión de estos ángulos para pasar a los radianes en el círculo unitario y de ahí definir las FF. TT. de variable real "sin establecer una relación explícita" entre radianes y números reales.

En Méndez (2008) se aplicó una entrevista a cuatro profesores de diferentes instituciones educativas del nivel medio superior del estado mexicano de Guerrero. La entrevista constó de dos fases. La primera fase se diseñó con el objetivo de detectar las concepciones que los profesores tienen de las características del dominio (el valor de x en sus diferentes posibilidades como grados, radianes o números reales) e imágenes de las FF. TT. La segunda fase constó de tres actividades con el propósito de detectar las concepciones que los profesores tienen respecto al significado de las operaciones entre FF. TT. y funciones algebraicas. En las entrevistas se puede apreciar algunos conflictos cognitivos, que pueden ser interpretados como señal de una ruptura conceptual. Los conflictos se encontraron cuando los profesores se enfrentan a la necesidad de elegir una unidad de medida angular (la sexagesimal o la cíclica) o utilizar números reales. Por ejemplo en una de las actividades un profesor asigna valores a x reales, mientras que a la x de $\sin x$ le da valores en grados a pesar de que ambas expresiones constituyan una sola expresión, ya sea en una adición o en una razón.

4. Metodología

La metodología elegida para cumplir con el objetivo de la investigación ha sido la realización de dos análisis complementarios e interdependientes: 1) *Un análisis de corte didáctico* realizado con el objetivo de caracterizar la M. E. de las FF. TT. y 2) *un análisis de corte cognitivo* realizado con el objetivo de conocer las concepciones que estudiantes y profesores han interiorizado de dicha matemática escolar.

El *análisis didáctico* se realizó a través del análisis de libros de texto que algunos profesores afirmaron utilizar y algunos que son sugeridos en los Planes y Programas de Estudio del nivel medio superior mexicano. El análisis de los libros se hizo abarcando tres aspectos: 1) Cuál es la intención de la conversión *grados* ↔ *radiantes*, 2) Cómo es el tránsito de *radiantes* → *reales* y 3) Cuál es la justificación de tales transiciones para la graficación de las FF. TT.

El *análisis cognitivo* se realizó a través del análisis de las respuestas a un cuestionario por parte de profesores y estudiantes del nivel medio superior mexicano. El cuestionario se diseñó con el objetivo específico de indagar la manera en que profesores y estudiantes asignan significado al argumento (variable independiente *x*) de las FF. TT. y saber cómo asignan significado a la suma de una expresión algebraica con una trigonométrica. En general la estrategia del diseño del cuestionario es favorecer el contexto gráfico como una manera de motivar a las personas encuestadas a realizar varios cálculos y potencialmente favorecer la aparición de rupturas conceptuales. La parte de las actividades matemáticas pide la realización, por escrito, de 6 actividades matemáticas en donde se permitió en todo momento el uso de cualquier tipo de calculadora[3]. De manera específica el objetivo de las actividades 1, 2 y 3 es conocer la manera en que se asigna significado al argumento de las FF. TT. seno y coseno, mientras que el objetivo de la actividad 4 es conocer los procesos de asignación de significado de la suma de los valores *x* y sin *x*.

TABLA I

Cuestionario aplicado a profesores y estudiantes

DATOS GENERALES
Para profesores
Nombre, Edad, Sexo, Años de experiencia como profesor del nivel medio superior, Años de experiencia como profesor del nivel superior, Materias impartidas en los últimos tres años, Libros usados para la planeación de sus clases en el tema de *funciones trigonométricas* / ¿Cuántas veces ha impartido el tema de *funciones trigonométricas*? ¿Dónde? ¿Cuándo? / ¿Ha notado alguna(s) dificultades en los estudiantes en el tema de *funciones trigonométricas*?
Para estudiantes
Nombre, Edad, Sexo, Grupo y Escuela

ACTIVIDAD 1
Para profesores
¿Cómo le explicaría a un estudiante el valor de las siguientes expresiones?
a) sin (-3) = , b) cos (5) = , c) sin (-10) = , d) sin (-580) = y e) cos (680) =
Para estudiantes
¿Cuál es el valor de cada una de las siguientes expresiones?
a) sin (-3) = , b) cos (5) = , c) sin (-10) = , d) sin (-580) = y e) cos (680) =

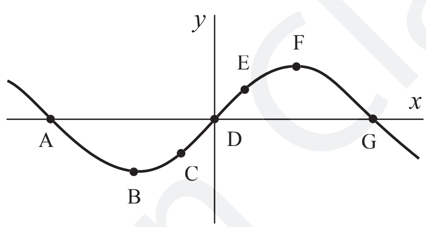
[3] Para los objetivos del presente escrito sólo se presentan las primeras 4 actividades.

ACTIVIDAD 2
Para profesores
¿Cómo le explicaría a un estudiante la construcción de la gráfica de la función $y = f(x) = \cos x$?
Para estudiantes
¿Construye un bosquejo de la gráfica de la función $y = f(x) = \cos x$. Si lo deseas utiliza la siguiente tabla como ayuda

x	$y = \cos x$

(La tabla continua hasta tener 8 filas)

ACTIVIDAD 3
Para profesores y estudiantes
La siguiente figura es la gráfica de la función $y = f(x) = \sin x$. Encuentre las coordenadas de los puntos señalados:



ACTIVIDAD 4
Para profesores
¿Cómo le explicaría a un estudiante la construcción de la gráfica de la función $y = f(x) = x + \sin x$?
Para estudiantes
Construye un bosquejo de la gráfica de la función $y = f(x) = x + \sin x$. Si lo deseas utiliza la siguiente tabla como ayuda.

x	$y = x + \sin x$

(La tabla continua hasta tener 8 filas)

De esta manera, nuestra principal hipótesis es que alguna parte de aquellos y aquellas que contesten el cuestionario muestren rupturas conceptuales relacionadas con el concepto de radián. En términos generales el cuestionario para estudiantes y profesores fue el mismo. Las diferencias consistieron en que a los profesores se les pidió información sobre su experiencia docente alrededor del tema de las FF. TT. y se redactaron las actividades matemáticas con la frase

"¿Cómo explicaría a sus estudiantes…" y en el cuestionario para estudiantes se sugirió el uso de tablas para apoyar la graficación.

5. Análisis de los libros de texto

En todos los libros consultados[4] que son usados en el nivel medio superior se encontró un patrón común, que puede ser interpretado como la evidencia de la existencia de una M. E. hegemónica de las FF. TT. (Ver Figura 1). La mayoría de los libros inician definiendo al ángulo como una abertura de dos semirrectas unidas por un punto denominado vértice o bien considerando una circunferencia que tiene de longitud 360º y la unidad de medida es el grado. Posteriormente se define a la medida angular en el sistema radián. En seguida se presentan fórmulas de conversión de un sistema a otro. Después prosiguen con la graficación de las FF. TT.; en donde a veces se usa a los grados como unidad para el dominio de las FF. TT. y otras veces múltiplos y fracciones de π.

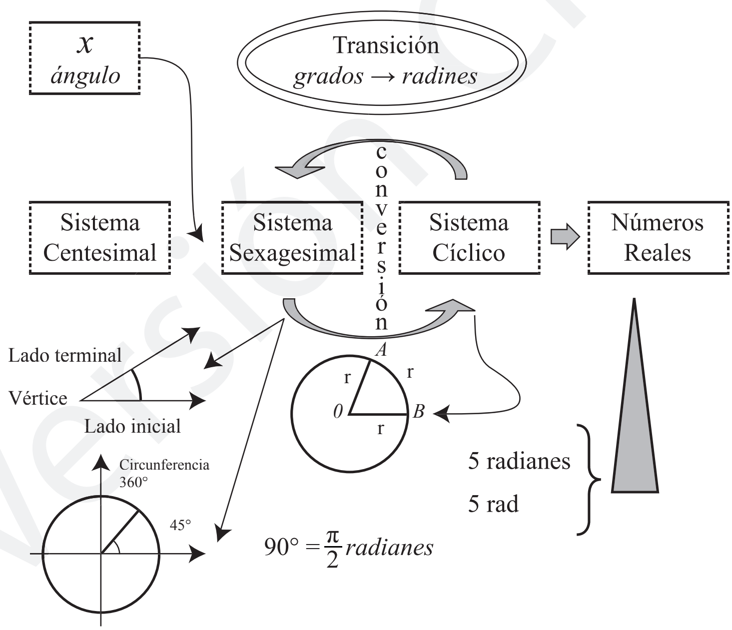


Figura 1. Estructura de la matemática escolar de las FF. TT. en los libros de texto (Méndez, 2008).

---

4 Detalles de este análisis se puede consultar en Méndez (2008).

En algunos casos se mencionan de manera más o menos explícita argumentos y justificaciones con los que establecen el paso de radianes a grados y luego a números reales como antecedente para la definición de las FF. TT. como funciones de variable real.

El análisis anterior permite localizar algunas rupturas asociadas a los conceptos que hemos considerado como articuladores:

- No se hace explícito los motivos por los que repentinamente aparece un sistema de medición de ángulos como son los radianes.
- La *destematización* (es decir el no considerarlos como objeto de estudio desde el punto de vista conceptual) del tránsito de los radianes a los números reales como argumento de las FF. TT. Esto puede percibirse en las frases que algunos libros presentan, como por ejemplo: "*se acostumbra omitir la palabra radianes*", "*cuando se usa el valor de un ángulo en radianes, no suelen indicarse las unidades*", "*por comodidad y simplicidad omitiremos la palabra radianes*".

Una explicación de tales rupturas surge de considerar que existen diferentes normas sociales, tales como 1) aquella que considera la medición del ángulo en grados como "natural" y en consecuencia es la unidad de medida privilegiada dentro de la actividad matemática escolar, 2) aquella que considera que los nuevos conceptos y los viejos conceptos conforman un continuo. En contraste, desde nuestro enfoque, la medida de los ángulos en radianes es un concepto que articula, en el sentido matemático, la medición de los ángulos en grados y las FF. TT. como funciones de variable real. La contradicción entre el significado como concepto articulador y el significado como unidad de medida construido por la M. E. es la fuente de las rupturas conceptuales.

6. Las respuestas de profesores y estudiantes

6.1. *Las respuestas de los profesores*

El cuestionario para profesores se aplicó a un grupo de 12 profesores de matemáticas que laboran en dos instituciones de nivel medio superior. Seis de ellos laboran en un mismo Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECYT) del Instituto Politécnico Nacional ubicado en la ciudad de México. Los otros seis profesores trabajan en la misma Escuela Preparatoria Oficial del Estado de México (EPOEM) ubicada en el Estado de México. A todos se les solicitó contestar por escrito un cuestionario y a solicitud de ellos se les permitió llevarse el cuestionario para ser entregado días después. En términos metodológicos esta circunstancia no presentó ningún inconveniente ya que nuestro interés no era evaluar los conocimientos del profesor, sino conocer sus concepciones sobre las unidades de medida de las FF. TT.

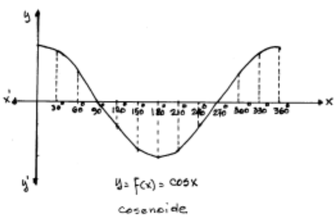
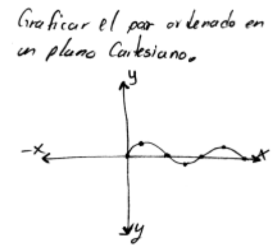
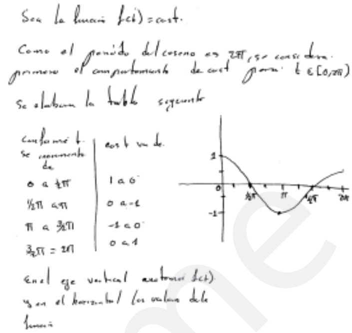
En lo expresado por los profesores en la *Actividad 1* es notorio que la mayoría (10 de 12) no proporcionaron valores a las expresiones solicitadas; es decir que no usaron calculadoras o algún otro sistema de cómputo. Los que sí lo hicieron dieron los valores usando una calculadora puesta en funcionamientos en el llamado "modo sexagesimal" (DEG) y sólo uno de estos últimos explica que es necesario poner atención en el uso de la calculadora pues "es muy importante que el alumno conozca a fondo el funcionamiento de la calculadora; muchas veces no se dan cuenta que utilizan la misma estando activada con RAD o G; se debe utilizar DEG para evitar resultados erróneos". Cinco de los doce profesores reprodujeron en menor o mayor medida el sistema explicativo, señalado en nuestro análisis de libros de texto, determinado por la matemática escolar en relación a los significados del argumento de las funciones seno y coseno; pues construyeron argumentos sobre el significado de los ángulos negativos. Al respecto hay que recordar que la actividad consistía en una consigna del tipo "¿Cómo le explicaría a un estudiante…?".

En la *Actividad 2* los profesores, no usaron calculadoras o algún otro sistema de cómputo para elaborar la gráfica de la función coseno. Cinco de los doce profesores presentaron una gráfica. Tres lo hicieron (Ver Tabla II-A) apoyando en algunos de los llamados *valores notables*[5] como puntos de referencia para contar con valores conocidos expresados en grados (0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330°, 360°), uno más construye una tabla en donde x toma los valores 1, 2, 3, 0, -1, -2, -3 (Ver Tabla II-B). El otro profesor que presentó una gráfica (Tabla II-C) lo hace señalando los puntos $0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ en el eje x.

[5] En el escrito haremos uso de la expresión *valores notables* para hacer referencia, respectivamente a los valores de las FF.TT. que en el primer cuadrante del círculo trigonométrico son {0°, 30°, 45°, 60°, 90°} y $\{(0)rad, \left(\frac{1}{4}\pi\right)rad, \left(\frac{1}{2}\pi\right)rad, \left(\frac{3}{4}\pi\right)rad, (\pi)\,rad\}$ expresados en sistema sexagesimal y radián respectivamente.

TABLA II

Tipos de gráficas elaboradas por los profesores para la función $y = f(x) = x + \sin x$

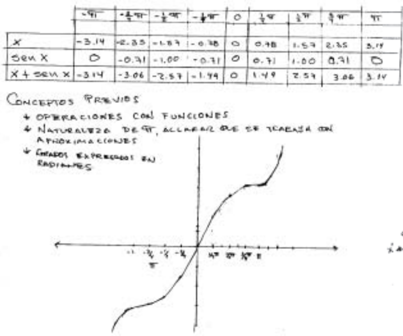
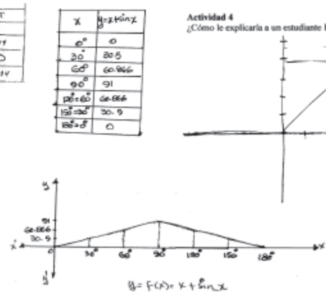
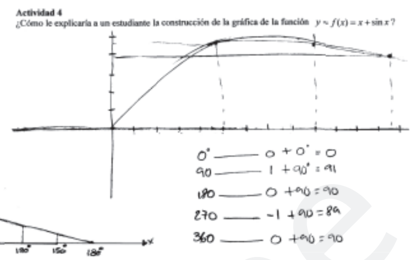
		
A	B	C

En lo que respecta a la *Actividad 3* se puede observar que once de los doce profesores identificaron las coordenadas solicitadas al relacionarlos a los valores notables. Siete de los profesores identificaron los puntos utilizando el sistema sexagesimal para dar valores a las abscisas, cuatro de los profesores identificaron las abscisas utilizando múltiplos y fracciones de π (sin especificar la unidad de medida en radianes) y uno de ellos utilizó ambas formas.

En la *Actividad 4*, sólo 3 de los 12 profesores presentaron una gráfica. Uno de los tres bosquejó la gráfica (Tabla III-A) interpretando el sumando x como número real (tomando en cuenta los valores notables: $-\pi, -\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{4}\pi, 0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}, \pi, \pi$) y la x del sumando sin x fue interpretada como radián. En otras palabras, sólo un profesor de los 12 presentó la gráfica "matemáticamente correcta". Los otros dos profesores que presentaron una gráfica (Tabla III-B y III-C) interpretaron el sumando x como número real y la x del sumando fue interpretado como grado. Tres de los profesores que no elaboraron gráficas, presentaron argumentos simililares. Uno de ellos menciona que "es la misma función trigonométrica seno pero desplazada una distancia x", otro al dar significado a la expresión $x + \sin(x)$ cambia el primer sumando por una constante a y el tercero menciona que "podemos realizar la gráfica de sin x y después desfasarla en x". En los tres casos al interpretar la expresión $x + \sin(x)$ como una función más una constante se evoca un ejercicio típico de graficación (coloquialmente: una función + una constante) que en términos gráficos corresponde a un desplazamiento vertical.

TABLA III

Tipos de gráficas elaboradas por los profesores para la función $y = f(x) = x + \sin x$

		
A	B	C

6.2. *Las respuestas de los estudiantes*

El cuestionario para estudiantes fue aplicado a dos poblaciones, sin fines de inferencia estadísticas, de estudiantes de quinto semestre: 49 de un CECYT del IPN y 31 de una EPOEM. Aplicar el cuestionario a dos poblaciones de instituciones diferentes fue hecho con el objetivo de contrastar respuestas y recabar más información para alcanzar nuestro objetivo; sin pretender generalizar resultados.

Todos los estudiantes ya habían llevado los cursos de Álgebra, Geometría, Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo Diferencial. El Plan de Estudios para Matemáticas de la EPOEM está dividido en seis Programas de Estudio, correspondientes a los seis semestres del bachillerato: 1) Álgebra I, 2) Álgebra II, 3) Trigonometría, 4) Geometría Analítica, 5) Cálculo y 6) Estadística. El Plan de Estudios para Matemáticas de un CECYT está dividido en seis Programas de Estudio, correspondientes a los seis semestres del bachillerato: 1) Álgebra, 2) Geometría y Trigonometría, 3) Geometría Analítica, 4) Cálculo Diferencial, 5) Cálculo Integral y 6) Probabilidad y Estadística.

En mayor o menor medida todos los estudiantes ya habían tenido como objeto de estudio a las FF. TT.; ya que dentro de los planes de estudio de ambas instituciones se encuentra incluido el tema de las FF. TT. en el curso de Trigonometría y son parte de las funciones que son objeto de derivación e integración.

6.2.1. *Estudiantes del CECYT*

En la *Actividad 1* el 98 % (48 de 49) de los estudiantes utilizó calculadora en el modo sexagesimal (DEG) y sólo un estudiante uso el modo de radianes (RAD). Ninguno proporcionó justificación respecto al uso de la calculadora (sólo un estudiante escribió “resueltos con la calculadora”).

En la *Actividad 2* el 91 % (45 de 49) de los estudiantes utilizó calculadora en el modo sexagesimal (DEG) para llenar la tabla, tres estudiantes no llenaron las tablas y uno más utilizó calculadora en el modo radián (el mismo que lo hizo en la Actividad 1). La elección de valores x fue con números enteros “pequeños” en progresión aritmética de diferencia uno: el 63 % (31 de 49) utilizó los valores {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}, el 8 % (4 de 49) utilizó los valores {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, el 6% (3 de 49) utilizó los valores {0, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Sólo un estudiante utilizó los valores {0, 60, 90, 120, 180, 240, 270}, sin señalar la unidad en grados, en clara referencia a los valores notables en el sistema sexagesimal de las FF. TT.

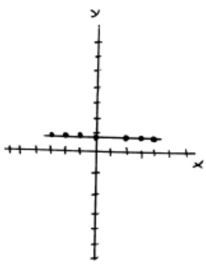
Los estudiantes presentaron 35 gráficas y fueron hechas por el método de tabulación, localización de puntos en el plano para posteriormente trazar una curva o recta continua que pase por esos puntos (a excepción de 2 estudiantes que presentaron un “polígono conexo” como gráfica). En términos generales el tipo de gráficas presentadas dependió de la capacidad de cada estudiante para dar sentido a los números decimales que proporcionaba la calculadora y obtener coordenadas más precisas para hacer un bosquejo de la gráfica. Las gráficas pueden ser englobadas en 3 grupos (13 estudiantes, 26.5%, no presentaron gráficas y uno presentó una gráfica que corresponde a una función lineal).

- 24.5% (12 de 49) presentaron una que corresponde a la gráfica de la función $f(x) = 1$ o parecida a ella. El parecido dependió de la cantidad de números decimales apuntados en las tablas y su manera de interpretarlos al momento de colocar puntos en el plano. Por ello este grupo puede dividirse a su vez en 2 subgrupos:
  - Cinco presentaron la gráfica de la función $f(x) = 1$, debido a que tomaron dos decimales y no consideraron significativo a que el valor en 0 de la tabla es 1. (Ver TABLA IV-A)
  - Siete presentaron una gráfica parecida a la gráfica de la función $f(x) = 1$. El parecido dependió del grado de precisión de graficar los puntos (Ver TABLA IV -B).
- El 22.5 % (11 de 49) de los estudiantes en mayor o menor medida presentaron una curva parecida a aquella parte de la gráfica de la función *coseno* en una vecindad pequeña alrededor de cero (Ver TABLA IV - C, IV -D).

- El 12.3 % (6 de 49) de los estudiantes presentaron gráficas que se pueden interpretar como intentos por de hacer coincidir los puntos a una curva tipo senosoidal. Nuestra interpretación es que los estudiantes recordaban que las gráficas de las FF. TT. son de ese tipo. (Ver TABLA IV-E y IV-F).
- El 8.1 % (4 de 49) presentaron poligonales como gráficos.

TABLA IV

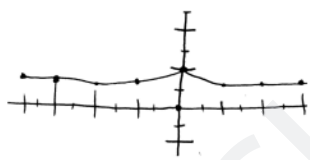
Tipos de gráficas presentadas por lo estudiantes del CECYT en la Actividad 2.



x	$y = \cos x$
-3	0.99
-2	0.99
-1	0.99
0	1
1	0.99
2	0.99
3	0.99
4	0.99

Alumno 40

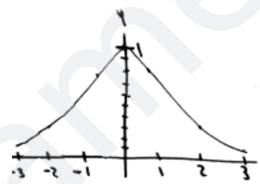
A



x	$y = \cos x$
-4	0.9975640
-3	0.9986295
-2	0.9993908
-1	0.9998476
0	1
1	0.9998476
2	0.9993908
3	0.9986295

Alumno 34

B



x	$y = \cos x$
-3	0.9986
-2	0.9993
-1	0.9998
0	1
1	0.9998
2	0.9993
3	0.9986

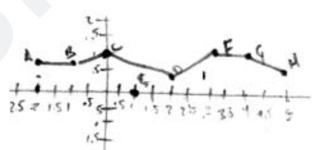
Alumno 42

C

	x	$y = \cos x$
A	4	0.9975
B	3	0.4986
C	2	0.9993
D	1	0.9998
E	0	1
F	-1	-0.9984
G	-2	-0.9939
H	-3	-0.9986

Alumno 38

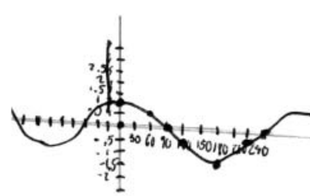
D



	x	$y = \cos x$
A	-2	0.999
B	-1	0.999
C	0	1
D	1	0.999
E	2	0.993
F	3	0.998
G	4	0.998
H	5	0.996

Alumno 16

E



x	$y = \cos x$
0	1
60	0.5
90	0
120	-0.5
180	-1
240	-0.5
270	0

Alumno 49

F

Las respuestas de los estudiantes en la *Actividad 3* se puede distribuir en dos grupos (19 estudiantes, 32.6%, no contestaron):

- El 59.1 % (29 de 49) identificaron las abscisas de los puntos con números enteros del tipo {-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Dentro de este grupo hubo dos estrategias para encontrar los valores de las ordenadas.
    - Catorce procedieron asignando valores a las abscisas para después calcular el valor de la ordenada usando la calculadora. Todos ellos usaron la calculadora en modo sexagesimal.
    - Quince asignaron los valores que sugería la gráfica sin usar la información de que correspondía a la función seno (por ejemplo, no considerar que los valores de las ordenadas deberían estar en el intervalo [-1,1]).
- Uno de los estudiantes, el mismo que graficó en Actividad 2 la función coseno con precisión, identificó las abscisas de los puntos con valores notables para el valor de x (sin especificar unidad): {-180, -90, -30, 0, 30, 90, 180}. Para calcular el valor de y usó la calculadora en el modo sexagesimal.

Con respecto a la *Actividad 4* la elección de los valores de x y el modo de uso de la calculadora fueron factores determinantes para que los estudiantes presentaran una gráfica (6 dejaron la actividad en blanco). De los 41 estudiantes que contestaron todo o parte de esta actividad se menciona que:

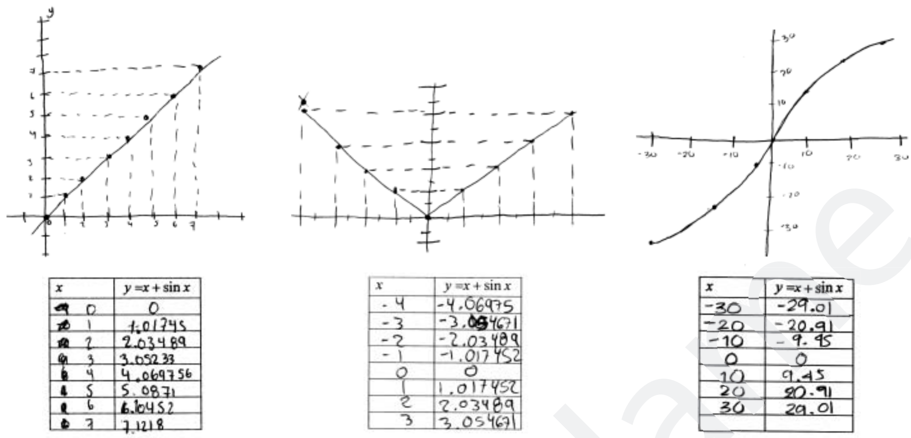
- 38 utilizaron la calculadora en modo sexagesimal y 3 usaron la calculadora en modo radián.
- 37 asignaron valores a x con números enteros "chicos" del tipo {-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}.
- 2 estudiantes utilizaron enteros "grandes" para los valores de x: {-30, -20, -10, 0, 10, 20, 30} y {15, 12, 9, 6, 3, 0, -8, -20},
- Un estudiante utilizó los valores notables (sin indicar que se tratasen de grados) {180, 90, 30, 0, -30, -90, -180}

Las gráficas presentadas por los estudiantes pueden clasificarse en los siguientes grupos:

- 20 de los estudiantes presentaron una gráfica que corresponde a una función lineal muy cercana a la gráfica de la función $f(x) = x$ (Ver VIII-A). Dos alumnos de este grupo usaron la calculadora en modo radián y el resto lo hizo en modo sexagesimal. Excepto 2 estudiantes, que utilizaron los valores {-30, -20, -10, 0, 10, 20, 30} y {15, 12, 9, 6, 3, 0, -8, -20}, todos los alumnos de este grupo asignaron valores a x con números enteros consecutivos contenidos en {-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Sólo un estudiante utilizó los valores notables {180, 90, 30, 0, -30, -90, -180} sin indicar que se tratasen de grados. El uso de la calculadora en el modo sexagesimal y la elección de números enteros "pequeños" para los valores de x fue determinante para que este grupo de estudiantes presentaran sus gráficas; ya que bajo esta condición $x + \sin x \approx x$. Los que usaron la calculadora en modo radián proporcionaron el mismo tipo de gráfica debido a la falta de precisión al momento graficar los puntos.
- Cinco no tomaron en cuenta el término $\sin x$ del sumando, por lo que en realidad graficaron la función $f(x) = x$.
- Cuatro sólo llenaron la tabla, usando la calculadora en modo sexagesimal, calculando el seno de los valores de x.
- Cuatro sólo llenaron la tabla, usando la calculadora en modo sexagesimal, calculando la suma $x + \sin x$.
- Tres llenaron la tabla, usando la calculadora en modo sexagesimal, calculando la suma $x + \sin x$ y graficando los puntos sin trazar una curva que los uniera.
- Tres llenaron la tabla usando la calculadora en modo sexagesimal calculando la suma $x + \sin x$ y cometieron errores de graficación, pues presentaron una gráfica parecida a la función $f(x) = |x|$ (Ver Tabla V-B).
- Dos estudiantes presentaron una gráfica que presenta una curva. Una de las gráficas es bastante aproximada a la gráfica solicitada y corresponde a la elección de los valores de x {-30, -20, -10, 0, 10, 20, 30} y al uso de la calculadora en modo radián (Ver Tabla V-C).

TABLA V

Tipos de gráficas presentadas por los estudiantes del CECYT en la Actividad 4.



Estudiante 32	Estudiante 34	Estudiante 44
A	B	C

6.2.2. *Estudiantes del EPOEM*

En la *Actividad 1* el 100% de los estudiantes utilizó una calculadora. El 83 % (26 de 31) de los estudiantes utilizó calculadora en el modo sexagesimal, tres estudiantes usaron el modo radián y dos dieron otros valores que no se logró interpretar. Ninguno proporcionó justificación para el uso de la calculadora de un modo u otro.

En la *Actividad 2* el 99% (30 de 31) de los estudiantes llenaron las tablas, tal y como era sugerido en la actividad. El 100% utilizó una calculadora: 3 de ellos en modo radianes y 27 en modo sexagesimal. Tres factores determinaron el tipo de gráfica ofrecida por los estudiantes: A) La elección de los valores de x, B) el manejo de las escalas en los ejes cartesianos, C) la capacidad de cada estudiante de interpretar, al momento de localizar puntos en el plano, los números decimales proporcionados por la calculadora. Desde el punto de vista de la elección de los valores de x, el tipo de gráficas presentadas por los estudiantes puede dividirse en 3 grupos:

- El 35% (11 de 31) utilizó números enteros en progresión aritmética de diferencia 1 o 2 del tipo {3, -2, -1, 0, 1, 2, 3} o {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} o {-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8}. En este grupo están 2 de los estudiantes que utilizaron la calculadora en modo RAD. En este grupo ocurrió que (4 estudiantes no presentaron gráficas, sólo llenaron las tablas).

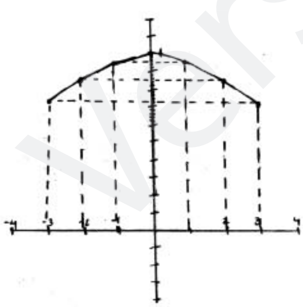
- El 32% (10 de 31) utilizó números enteros “grandes” en progresión aritmética del tipo {15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120} o {-40, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40, 50}.
- El 29% (9 de 31) eligió valores notables (6 expresados en grados y 3 en fracciones y múltiplos de π).

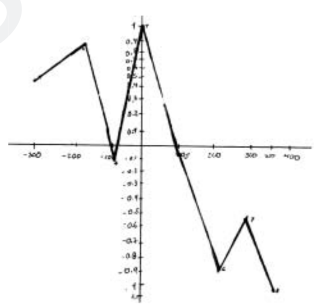
Visto en conjunto las gráficas presentadas por los estudiantes fueron (el 22.5%, 7 de 31, no graficaron):

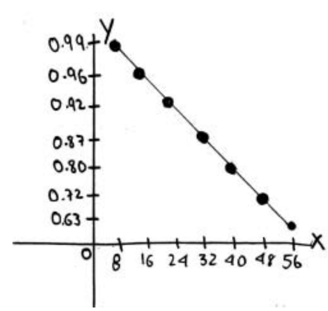
- El 25.8 % (8 de 31) presentaron una curva parecida a aquella parte de la gráfica de la función *seno* en una vecindad pequeña alrededor de 0 (ver TABLA VI-A).
- El 25.8 % (8 de 31) presentaron una poligonal (ver TABLA VI-B).
- El 9.6% (3 de 31) presentaron gráficas que corresponden a funciones lineales (ver VI-C).
- El 9.6% (3 de 31) presentaron una gráfica que corresponde con bastante precisión a la gráfica de la función seno en el intervalo [-360,360] o [-2π,2π] (TABLA VI-D y VI-E).
- El 6.4% (2 de 31) presentaron gráficas muy semejantes a la gráfica de $y = 1$ en una vecindad pequeña alrededor de 0.

TABLA VI

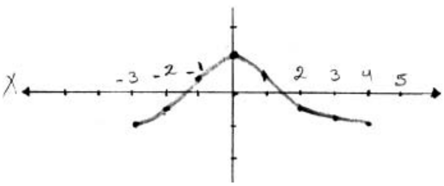
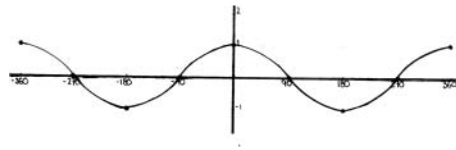
Tipos de respuestas de los estudiantes del EPOEM a la Actividad 2.







Alumno 23	Alumno 9	Alumno 19
A	B	C

 Alumno 1	 Alumno 4
D	E

Las respuestas de los estudiantes en la *Actividad 3* se puede distribuir en dos grupos (7 no contestaron):

- Con menor o mayor precisión el 45% (14 de 31) de los estudiantes identificaron las abscisas de los puntos con valores notables. Diez de ellos usaron el sistema sexagesimal (4 de ellos al escribir no usaron la unidad de medida grados °) y 4 usaron fracciones y múltiplos de π.
- Diez identificaron las abscisas de los puntos con números enteros del tipo {-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Seis de ellos asignaron los valores que les sugería la gráfica sin usar la información de que ésta correspondía a la función seno (por ejemplo, no considerar que los valores de las ordenadas debería estar en el intervalo [-1,1]). Los otros 5 procedieron primero asignando valores a las abscisas para después calcular el valor de la ordenada usando la calculadora (2 de ellos, los mismos que lo hicieron en la Actividad 1 y 2, usaron la calculadora en modo RAD).

De las respuestas de la *Actividad 4*, se destaca que (5 estudiantes no realizaron la actividad):

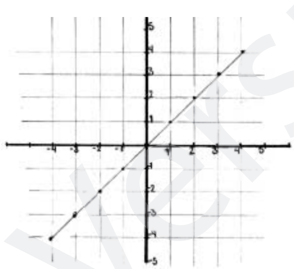
- El 54.8 % (17 de 31) de los estudiantes presentaron una gráfica que corresponde a una función lineal muy cercana a la gráfica de la función (2 cometieron errores de cálculo que provocaron presentaran una gráfica parecida a la función $f(x) = |x|$). Este grupo a su vez puede dividirse en 2 subgrupos:
  - Cuatro no tomaron en cuenta el término sin x del sumando, por lo que en realidad graficaron la función $f(x) = x$ (2 de estos estudiantes anotaron en la columna x de la tabla valores notables expresados en grados y en la columna y no usaron unidad alguna).
  - Trece interpretaron la suma x + sin x sin asignar unidades a x (TABLA VII-A, VII-B, VII -C). En este subgrupo se encuentran

los 2 estudiantes que presentarán una gráfica parecida a la gráfica de la función $f(x) = |x|$). El 100% de este subgrupo de estudiantes utilizó números naturales sin relación aparente con los valores notables de las FF. TT. y usó la calculadora en modo sexagesimal. El uso de la calculadora en el modo sexagesimal fue determinante para que este subgrupo de estudiantes presentaran sus gráfica; ya que bajo esta condición $x + \sin x \approx x$.

- El 13 % (4 de 31) de los estudiantes llenaron la tabla pero no presentaron gráficas. Todos interpretaron la suma $x + \sin x$ sin asignar unidades a x. El 100% de este subgrupo de estudiantes utilizó números naturales sin relación aparente con los valores notables de las FF. TT. y tres de ellos usaron la calculadora en modo sexagesimal y el otro uso el modo radianes.
- Dos estudiantes presentaron una “poligonal” (TABLA VII-D).
- Dos estudiantes presentaron curvas senosoidales sin justificar su proceso de construcción (TABLA VII-E).
- Un estudiante presentó una curva parecida a la gráfica $f(x) = x + \sin x$ en una vecindad alrededor de cero (TABLA VII-F). La precisión al tomar en cuenta los números decimales y el uso de la calculadora en modo RAD fue determinante para que el estudiante presentara la curva.

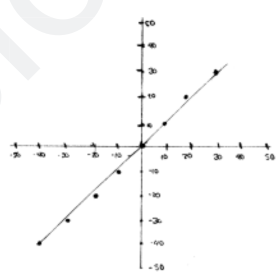
TABLA VII

Tipos de respuesta de los estudiantes del EPOEM a la Actividad 4.



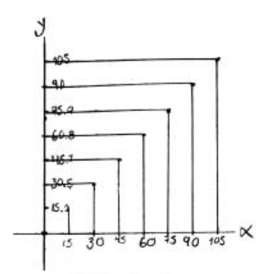
x	$y = x + \sin x$	Y
-4	-4+sen-4	-4.06
-3	-3+sen-3	-3.05
-2	-2+sen-2	-2.03
-1	-1+Sen-1	-1.01
0	0+sen0	0
1	1+sen1	1.01
2	2+sen2	2.03
3	3+sen3	3.05

Alumno 4



x	$y = x + \sin x$
-40	-40.64
-30	-30.5
-20	-20.34
-10	-10.17
0	0
10	10.17
20	20.34
30	30.5

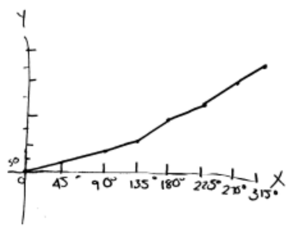
Alumno 16



x	$y = x + \sin x$
0	0
15	15.2
30	30.5
45	45.3
60	60.8
75	75.9
90	91
105	105

Alumno 17

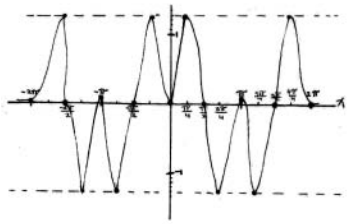
A	B	C



x	y = x + sin x
0	0
45°	45.7
90°	91°
135°	135.7
180°	180
225°	224.2
270°	269
315°	314.2

Alumno 3

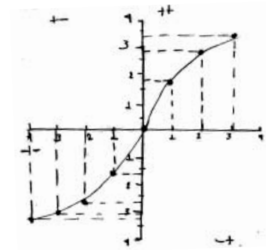
D



x	y = x + sin x
0	0
π/4	1.4
π/2	0
3π/4	-1.4
π	0.1
5π/4	-1.4
3π/4	0
7π/4	1.4
2π	0

Alumno 2

E



x	y = x + sin x
-4	-3.25
-3	-3.14
-2	-2.9
-1	-1.84
0	0
1	1.84
2	2.9
3	3.14

Alumno 13

F

7. Discusión de las respuestas

En general, desde el punto de vista cognitivo, se pueden interpretar las respuestas de los profesores y estudiantes como la manera que han manipulado unidad de medida del argumento de las funciones trigonométricas en la matemática escolar.

7.1. *Discusión de las respuestas de los profesores*

- El hecho de que la mayoría de los profesores (10 de los 12 profesores) no usan calculadora para evaluar y tabular, puede asociarse a la centración de los profesores en los valores notables de las FF. TT., convirtiéndose en los únicos valores donde se conoce el valor exacto de las FF. TT.
- La preferencia del uso del sistema sexagesimal para la identificación de los valores notables, puede ser explicada a través de la norma social que considera la medición del ángulo a través de grados como “natural” y que considera los radianes como “otra” unidad de medida. Y de ahí surge la no problematización del significado del argumento de las FF. TT. como número real.
- La escasa elaboración de gráficas para la función $y = f(x) = x + \sin x$ puede ser explicada por varios factores: 1) el escaso uso de las gráficas trigonométricas (diferentes a las canónicas seno y coseno) en la tradición escolar, 2) la falta de uso de calculadora y la centración en los valores notables y 3) a que, de acuerdo a nuestra hipótesis de trabajo, a la presencia

de las rupturas conceptuales que imposibilitan a los profesores dar sentido a la suma x + sin x, por tratarse de la suma de dos cantidades de "naturaleza" distinta.

7.2. *Discusión de las respuestas de los estudiantes del CECYT*

- En la Actividad 1 se puede notar que los estudiantes no lograron dotar de particularidades a la función coseno; ya que mayoritariamente utilizan valores naturales "pequeños" {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3} utilizados en la escuela para la graficación de otras funciones. Sólo un estudiante recurre a los valores notables de las FF. TT. (sin expresar unidades): {0, 60, 90, 120, 180, 240, 270}. Esto puede ser interpretado como señal de una escasa manipulación de las unidades de medida de las funciones trigonométricas en la matemática escolar por parte del los estudiantes del CECYT.
- Prácticamente la totalidad de los estudiantes utilizó la calculadora en el modo sexagesimal para tabular las funciones y después graficar. Consideramos que se debe básicamente al fenómeno, ya señalado en nuestro análisis de libros de texto, de destematización del uso del radián como concepto articulador. Pareciera que los estudiantes al interactuar con la calculadora interpretan dos cosas complementarias que son, al menos en parte, producto de las rupturas conceptuales de la M. E.: 1) Al ingresar un número en la calculadora para calcular su seno o su coseno lo entienden como una cantidad de grados y 2) no están concientes de que al momento de calcular un valor de una F.T. existe al menos dos maneras de usarla: en el modo sexagesimal y en el modo radianes. Cabe hacer notar que la mayor parte de las calculadoras científicas que utilizan los estudiantes de nivel medio superior se encuentran configuradas de origen en el modo sexagesimal.
- El uso de la calculadora en el modo sexagesimal y la elección de números enteros "pequeños" para los valores de x fue determinante para una parte de los estudiantes, pues el 50% de los que contestaron, presentaran gráficas parecidas a $f(x) = x$ en la Actividad 4; ya que bajo esta condición $x + \sin x \approx x$. Esto apoya lo dicho arriba en relación a que los estudiantes no conocen la existencia de diferentes maneras de utilizar la calculadora para FF. TT.

7.3. *Discusión de las respuestas de los estudiantes del EPOEM*

- En general se observa, a diferencia de los estudiantes del CECYT, un esfuerzo por reproducir la matemática escolar de las FF. TT. La primera señal de esto es el hecho de que el 45% de los estudiantes usan algunos de los valores notables para llenar las tablas y presentar sus graficas en la Actividad 3.

- En las actividades se observa que casi la totalidad de los estudiantes usaron la calculadora en del modo sexagesimal. Como se ha dicho este fenómeno puede ser considerado como subsidiario del fenómeno de destematización del concepto de radián y su reflejo en la capacidad de los estudiantes para interpretar los resultados que la calculadora les proporciona.
- Lo mismo que para estudiantes del CECYT, el uso de la calculadora en el modo sexagesimal y la elección de números enteros "pequeños" para los valores de x fue determinante para una parte importante de los estudiantes, 54% de los que contestaron, presentarán gráficas parecidas a $f(x) = x$ en la Actividad 4; ya que bajo esta condición $x + \sin x \approx x$. Esto apoya lo dicho antes en relación a que los estudiantes no conocen la existencia de diferentes maneras de utilizar la calculadora para las FF. TT.

8. Conclusiones

Se han presentado evidencias de la existencia de las rupturas asociadas al concepto de radián a través del análisis de la estructura de la matemática escolar en el nivel medio superior mexicano mediante el análisis de libros de texto y las concepciones de profesores y estudiantes. El análisis de los libros permitió localizar, el fenómeno de destematización del concepto de radián en tanto concepto articulador.

En lo que respecta a la producción de los profesores se destaca el nulo uso de calculadoras o algún otro sistema de cálculo de valores trigonométricos y la centración en los valores notables, convirtiéndose en los únicos donde se conoce el valor de las FF. TT. Esta circunstancia puede ser interpretada como el esfuerzo de parte de los profesores de reproducir la M. E. en sus respuestas (recuérdese que las respuestas fueron entregadas días después de ser proporcionado el cuestionario). La preferencia en el uso del sistema sexagesimal para la identificación de los valores notables, puede ser explicada a través de los siguientes aspectos: 1) a la existencia de la norma social que prescribe que la medición del ángulo a través de grados es "natural" y que considera los radianes como "otra" unidad de medida y 2) al fenómeno de la destematización del concepto de radián.

Visto en conjunto las respuestas de los estudiantes al cuestionario pueden ser interpretadas como sus concepciones en torno a las unidades de medidas de los argumentos de las FF. TT en la Matemática Escolar. Desde un punto de vista comparativo entre los estudiantes del CECYT y del EPOEM se puede observar que estos últimos dan señales de un mayor grado de interiorización de la matemática escolar; ya que son los que utilizan en mayor medida valores notables para asignar valores a x en las Actividades 2, 3 y 4 (en contraste de los estudiantes de CECYT donde sólo hubo uno que lo hizo). El uso de la calculadora es fundamental para entender las respuestas de los estudiantes; ya que los resultados señalan que no perciben el uso de al menos dos unidades de medida (el sexagesimal y el radián) para las FF. TT en la calculadora. Este aspecto tecnológico se encuentra asociado al fenómeno de destematización del concepto de radián en tanto concepto articulador. Lo anterior es particularmente notorio en la producción de los estudiantes en la Actividad 4, en donde la combinación de la elección de valores enteros "pequeños" y el uso de la calculadora en el modo sexagesimal ocasionó que los estudiantes presentasen gráficas parecidas a la gráfica de la función. En conclusión, una parte significativa de las producciones estudiantiles se percibe en gran medida como una consecuencia directa de la existencia de las rupturas conceptuales en la matemática escolar.

Lo aquí reportado señala el camino que pueden seguir investigaciones futuras que quieran profundizar en el conocimiento de las rupturas conceptuales de las unidades de medida de las funciones trigonométricas en la Matemática Educativa: 1) Debido que este estudio analizó sólo dos instituciones, sería interesante conocer si la estructura de la matemática escolar es la misma en otras instituciones de nivel medio superior mexicano o de otros países y si la matemática escolar es la misma en los niveles superiores de educación, 2) resta por hacer un estudio de corte histórico-epistemológico y de transposición didáctica del concepto de radián, 3) sería interesante determinar de una manera precisa el papel de la tecnología y las calculadoras en las rupturas conceptuales y 4) para hacer más detallados los resultados aquí reportados restaría por triangular información con otras metodologías, como podrían ser: entrevistas a profundidad, análisis de clases, análisis de cuadernos de estudiantes, entre otras.

Referencias bibliográficas

Berger. P. L. y Luckmann, T. (2006). *La construcción social de la realidad*. Buenos Aires, Argentina: Amorrurtu.

Buendía, G. & Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics 58*(3), 299−333. DOI: 10.1007/s10649-005-2295-5

Brosseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Cantoral, R.; Farfán, R. M.; Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9*(4), 83−102

Chevallard, Y., (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires, Argentina: Editorial Aique.

Dubinsky, E. (1992). The nature of the process of conception of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.) *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy* (Vol. 25, pp. 85−106). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Durkheim, E. (1988). *Las reglas del método sociológico y otros escritos sobre filosofía de las ciencias* sociales. España: Alianza Editorial.

Elster, J. (1991). *El cemento de la sociedad*. Barcelona, España: Gedisa.

Ferrari, M. (2008). *Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: de multiplicar sumando a una primitiva*. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Gallino, L. (2001). *Diccionario de sociología*. D.F., México: Siglo XXI Editores.

Harel, G. & Dubinsky, E. (1992). *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy* (Vol. 25). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Lezama, J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (3), 287−317.

Maldonado, E. (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Martínez-Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (2), 195−218.

Martínez-Sierra, G. (2007). Sobre la naturaleza y significado de los exponentes. En: C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán y C. Navarro (Eds.), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y visualización en el aula* (pp. 131−173). México: Editorial Díaz de Santos. ISBN: 84-7978-786-4.

Martínez-Sierra, G. (2010). Los estudios sobre los procesos de convención matemática: una síntesis metódica sobre la naturaleza de sus resultados. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13* (4), 269−282.

Martínez-Sierra, G. (2011). From the analysis of the articulation of the trigonometric functions to the corpus of eulerian analysis to the interpretation of the conceptual breaks present in its scholar structure. Accepted chapter in V. *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*, Katz & C. Tzanakis (Eds.).

Méndez, C. (2008). *Sobre la construcción escolar de las Funciones Trigonométricas: La transición grados ® radianes ® reales en el Nivel Medio Superior***.** Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Montiel G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. (Tesis inédita de Doctorado). CICATA-IPN, México.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathamatical objects and the quandary of reification. The case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy* (Vol. 25, pp. 59−84). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Sierpinska, A. (1992). On the understanding the notion of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy* (Vol. 25, pp. 25−58). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Autor:

Gustavo Martínez Sierra. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México. gmartinezsierra@gmail.com