Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa | RELIME

El círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas: una propuesta integradora para la evaluación en el aula

The hermeneutic circle of understanding in mathematics: an integrative proposal for the evaluation in the classroom

Jesús Gallardo Romero gallardoromero@uma.es
Universidad de Málaga , España

Verónica Aurora Quintanilla Batallanos veronicaquintanilla@uma.es
Universidad de Málaga, España

El círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas: una propuesta integradora para la evaluación en el aula

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, vol. 22, núm. 1, 2019

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Cita recomendada:

Gallardo Romero, J. & Quintanilla Batallanos, V.A. (2019). El círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas: una propuesta integradora para la evaluación en el aula *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 22*(1), 97-122. https://doi.org/10.12802/relime.19.2214

Recepción: 14 Abril 2018
Aprobación: 30 Octubre 2018
DOI: https://doi.org/10.12802/relime.19.2214

Resumen:
La actividad matemática escolar se desarrolla en entornos interpretativos complejos condicionados por la comprensión de sus protagonistas. Con la intención de contribuir al esclarecimiento de los procesos involucrados en tales entornos, en este trabajo exploramos distintos cuestionamientos que afectan la interpretación de la comprensión en matemáticas. En este recorrido previo encontramos la justificación para sugerir una propuesta integradora con la que acceder de forma operativa a la comprensión matemática de los estudiantes. Fundamentamos dicha propuesta al configurar las bases teóricas y metodológicas de lo que denominamos *el círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas*. También evidenciamos la potencialidad metodológica de este círculo interpretativo, al aplicarlo en un estudio de caso en el ámbito de la divisibilidad de los números naturales. En este episodio obtenemos resultados favorables para reconocer que el círculo hermenéutico puede mostrarse útil en la práctica para interpretar la comprensión involucrada en la actividad matemática de los escolares.

Palabras clave:
comprensión, divisibilidad, evaluación, interpretación, pensamiento numérico.

Abstract:
The mathematical activity in school takes place in interpretive complex environments which they are conditioned by the understanding of its protagonists. To clarify the processes involved in such environments, in this work we explore different principal issues related to the interpretation of the understanding in mathematics. In this path, we find the reasons to suggest an integrative proposal to access from an operative

way to the mathematical understanding of the students. We support this proposal by setting the theoretical and methodological bases of what we call *the hermeneutic circle of understanding in mathematics*. We also show the methodological potential of this interpretative circle, by applying it in a case study in the field of the divisibility of the natural numbers. In this episode, we obtain favourable results to recognize that the hermeneutic circle can be useful in practice to clarify the understanding involved in the mathematical activity of the students.

Keywords:
understanding, divisibility, assessment, interpretation, number thinking.

Resumo:
A atividade matemática escolar ocorre em ambientes interpretativos complexos condicionados pela compreensão de seus protagonistas. Com a intenção de contribuir para a elucidação dos processos envolvidos em tais ambientes, neste artigo nós exploramos várias questões importantes que afetam a interpretação da compreensão em matemática. Nesta revisão encontrámos a justificação para sugerir uma proposta integradora para aceder a compreensão matemática dos alunos. Nós oferecemos a fundamentação desta proposta desenvolvendo as bases teóricas e metodológicas do que chamamos *o círculo hermenêutico da compreensão em matemática*. Nós mostramos também a potencialidade metodológica deste círculo, aplicando-o a um estudo de caso no campo da divisibilidade dos números naturais. Este episódio oferece resultados favoráveis para reconhecer que o círculo hermenêutico pode ser útil na prática para esclarecer a compreensão matemática envolvida nas atividades escolares.

Palavras-chave:
compreensão, divisibilidade, avaliação, interpretação, pensamento numérico.

Résumé:
L'activité mathématique dans l'école se développe dans complexes environnements interprétatifs conditionnés par la compréhension de ses protagonistes. À l'objectif de contribuer à l'élucidation des processus impliqués dans ces environnements, dans ce travail nous examinons divers questions principaux relatifs à l'interprétation de la compréhension en mathématiques. Dans ce parcours, nous trouvons la justification pour suggérer une approche inclusive avec laquelle accéder de manière opérationnelle à la compréhension mathématique des étudiants. Nous étayons cette approche en définissant le cadre théorique et méthodologique de ce que nous appelons *le cercle herméneutique de la compréhension en mathématiques*. Nous montrons aussi la potentialité méthodologique de ce cercle interprétatif en l'appliquant à une étude de cas dans le domaine de la divisibilité des nombres naturels. Dans cet épisode nous obtenons des résultats favorables pour reconnaître que le cercle herméneutique peut se montrer utile dans la pratique pour clarifier la compréhension impliquée dans l'activité mathématique des élèves.

Mots clés:
compréhension, divisibilité, évaluation, interprétation, pensée numérique.

1. Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es una actividad esencialmente interpretativa. Los procesos cognitivos y discursivos involucrados en las prácticas matemáticas demandan ejercicios permanentes de interpretación por parte de los estudiantes y del profesor. Esta interpretación transcurre en entornos compartidos donde la comprensión matemática, propia y ajena, interactúa de manera compleja. En particular, cada protagonista se enfrenta al desafío constante de obtener información sobre la comprensión matemática de su interlocutor. Esta situación, que pone en evidencia el problema fundamental del acceso a la comprensión matemática del otro, justifica la pertinencia de realizar esfuerzos encaminados a esclarecer la naturaleza de la interpretación de la comprensión que acontece durante la actividad matemática y configurar procedimientos operativos con los que llevar a cabo esta interpretación.

En Educación Matemática percibimos diferentes posicionamientos básicos que dan respuestas distintas a esta problemática en función del lugar hacia donde dirigen sus correspondientes propuestas interpretativas. Al mismo tiempo, contemplamos que se pueden establecer vínculos dialécticos compatibles entre ellos como alternativa a la elección justificada de enfoques. Por esta razón, en este trabajo nos planteamos la posibilidad de configurar una visión extendida de la interpretación de la comprensión donde distintas orientaciones contribuyan de forma complementaria a una misma propuesta interpretativa. Con esta intención integradora, en los últimos años hemos desarrollado un modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas basado en el análisis de la experiencia matemática de los estudiantes (Gallardo y González, 2006; Gallardo y Quintanilla, 2016; Gallardo, González y Quintanilla, 2013, 2014; Gallardo, González y Quispe, 2008). En la investigación que ahora presentamos avanzamos en el desarrollo de la dimensión hermenéutica de nuestro modelo, al incorporar a su fundamentación actual la configuración de un círculo interpretativo con el que buscamos acceder de una forma operativa a la comprensión matemática de los escolares.

Iniciamos el estudio exponiendo, en el apartado 2, cuestiones fundamentales que afectan a la interpretación de la comprensión y que son foco actual de debate en Educación Matemática. Utilizamos estas referencias para justificar y desarrollar, en el apartado 3, las bases que fundamentan nuestra propuesta interpretativa: el círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas. En los apartados 4 y 5 describimos su aplicación a través de un episodio concreto donde interpretamos la comprensión matemática desplegada por una alumna de primer curso de educación secundaria (12-13 años) al intentar resolver una tarea de divisibilidad de números naturales. Concluimos el estudio subrayando en el apartado 6 las características fundamentales y las contribuciones más destacadas de nuestra propuesta interpretativa en relación con algunas de las principales orientaciones a la interpretación en Educación Matemática. También esbozamos algunas posibilidades de desarrollo futuro para nuestro modelo de interpretación de la comprensión en matemáticas.

2. Antecedentes

La interpretación de la comprensión en matemáticas despierta interés en Educación Matemática y sus problemáticas asociadas generan discusiones abiertas en el campo de la investigación. Las controversias giran en torno a distintos problemas abiertos en la interpretación, específicos y relacionados, como los relativos a la dualidad cognitivo-semiótica, el distanciamiento con el otro, la referencia al interpretar, la gestión de la intencionalidad, el retorno inclusivo y la apropiación de la comprensión, o el protagonismo del estudiante. En las siguientes secciones transitamos por los debates generados por tales cuestiones.

2.1. *Sobre el acceso a la comprensión matemática del alumno*

¿Hasta qué punto es posible obtener información sobre la comprensión matemática que poseen los estudiantes? Toda actividad matemática está propiciada por, y es consecuencia de, acciones intelectuales que demandan unas exigencias cognitivas necesariamente vinculadas a la esfera mental de sus protagonistas. Y la comprensión en matemáticas también comparte el carácter interno e inmaterial propio de las actividades intelectuales cognitivas específicas. Esta realidad oculta impide considerar el acceso y la observación directa como opción metodológica para obtener información sobre la comprensión matemática de los estudiantes.

En Educación Matemática se reconocen los esfuerzos de la orientación cognitiva por superar esta situación y buscar estrechar progresivamente la distancia entre las realidades interna y externa de la comprensión. Un claro exponente lo encontramos en el conocido enfoque representacional que desarrolla una visión de la comprensión vinculada a las representaciones y conexiones, internas y externas, del conocimiento matemático (Barmby et al., 2007; Goldin, 2002; Hiebert y Carpenter, 1992). No obstante, la transición entre objetos de ambos mundos resulta compleja y, de hecho, la relación entre los ámbitos externo e interno de la comprensión no es tan morfológicamente homogénea como la plantea el representacionalismo (Sierpinska, 1994; Font, Godino y D'Amore, 2007). Si bien la orientación cognitiva de la interpretación contribuye al esclarecimiento del fenómeno de la comprensión en matemáticas, no logra desprenderse por completo de las dificultades operativas derivadas de los propios rasgos mentales de ésta, así como de la transición fundamental entre sus ámbitos externo e interno.

2.2. *Sobre el distanciamiento con el alumno y la referencia para interpretar su comprensión matemática*

No poder observar directamente la naturaleza y el funcionamiento interno de la comprensión desplaza el centro de atención al ámbito de la actividad matemática observable; desde el estudiante, cuya comprensión se quiere valorar, hacia su propia producción matemática externa. Se trata de una inevitable transición *de lo interno a lo externo* que también trae consigo como consecuencia un distanciamiento con el propio alumno. Las propuestas interpretativas que centran su atención en el propio registro observable se ven afectadas por la cuestión de cómo mantener o recuperar el estatus cognitivo del alumno que comprende. El análisis cognitivo de la comprensión matemática propuesto por Duval (2006) contribuye en parte a la resolución de esta problemática, al introducir un cambio de estatus en las representaciones semióticas, y presentarlas como entidades de carácter externo e interno. Esta circunstancia impone un inevitable traslado al ámbito de lo semiótico, también a nivel interno, en el estudio de los procesos de pensamiento requeridos para comprender los objetos matemáticos.

Esta alternativa integradora, sin embargo, no parece encajar totalmente en el marco de la orientación semiótica de la interpretación en matemáticas en la que se aprecia una clara renuncia al carácter mental de la comprensión, por lo que el distanciamiento entre ella resulta especialmente acentuado. De hecho, la interpretación en esta orientación se circunscribe exclusivamente al análisis de la complejidad de las relaciones semióticas externas desplegadas durante la actividad matemática visible. Encontramos evidencias de esta orientación semiótica en los planteamientos de Otte (2006) o en la visión peirceana de la interpretación como doble proceso semiótico propuesta por Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012).

La primera transición de la interpretación desde la esfera cognitiva a la semiótica, cuya pertinencia se reconoce de forma justificada, podría constituir entonces una fase sólida, aunque también provisional, dentro del proceso de interpretación de la comprensión en matemáticas. Más aún, en este punto se plantea la discusión sobre la conveniencia de seguir transitando hacia referencias externas situadas más allá de la propia representación semiótica. ¿Hemos de aceptar una interpretación que transcurre exclusivamente en el entorno de lo semiótico o por el contrario podemos pensar en sortear sus límites? Para autores como Brown (2001) o Morgan (2014), la interpretación de la comprensión matemática no parece concluir sólo con un análisis semiótico de las producciones de los estudiantes, puesto que la actividad matemática siempre conlleva acciones y usos que, por lo general, traspasan las fronteras del registro escrito literal.

2.3. *Sobre la posibilidad de hacer referencias complementarias y la realidad que proyectan más allá del texto matemático*

Al interpretar la comprensión en matemáticas, ¿cabe más de una posibilidad en la búsqueda de referencias extralingüísticas? Transitar del sentido a la referencia trae consigo dos nuevas problemáticas relacionadas. La primera de ellas pone el acento sobre cuáles pueden ser estas referencias que traspasan el ámbito semiótico, dónde ubicarlas y cómo valorar su pertinencia. ¿Adónde remite o hacia dónde apunta el registro observable producto de la actividad matemática (texto matemático) y depósito de los rastros de comprensión del estudiante? En esta cuestión cobra protagonismo el debate en torno a lo que la teoría antropológica de lo didáctico ha caracterizado como dialéctica de lo ostensivo y no ostensivo en los objetos matemáticos (Bosch y Chevallard, 1999). La segunda señala el estatus ontológico de los objetos matemáticos, puesto que, al trascender el texto, habríamos de aceptar una realidad ontológica para ellos más allá del signo. ¿Cuál sería esta realidad concreta? El carácter paradójico del conocimiento matemático promueve esta problemática, que Duval (2006) describe bien al cuestionarse cómo es posible reconocer y distinguir los objetos matemáticos de sus representaciones semióticas particulares si la vía de acceso a ellos es precisamente a través de estas mismas representaciones.

Entre las propuestas interpretativas en Educación Matemática que buscan superar las posiciones semióticas puras se aprecian diferencias a la hora de situar la referencia y dotar de existencia a los objetos matemáticos. Por ejemplo, el enfoque representacional opta por posicionarse en la perspectiva no-realista del psicologismo, y propone una existencia mental para los objetos matemáticos y una referencia que apunta al interior del sujeto (Rico, 2009). El enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2002), por su parte, sugiere adoptar una posición ficcionalista con referencia metafórica para explicar cómo emergen los objetos en las prácticas matemáticas. Aquí los objetos matemáticos cumplen una función de referencia global para la configuración socio-epistémica que surge de los objetos primarios y sus relaciones (Font, Godino y Gallardo, 2013).

2.4. Sobre el protagonismo del alumno en la interpretación de su comprensión matemática y la búsqueda de interpretaciones inclusivas

La conexión última entre los rastros visibles del conocimiento, las producciones externas y los signos objetivados empleados por los estudiantes durante el desarrollo de sus prácticas matemáticas, por un lado, y la propia comprensión matemática como actividad intelectual específica de carácter mental, por otro, todavía requiere una última concreción relativa a la transición de *lo externo a lo interno*. La cuestión es: ¿cómo recuperar el carácter cognitivo de la comprensión matemática si regresamos a ella con una interpretación sustentada en los registros observables del conocimiento matemático y en sus referencias asociadas? Se busca recomponer la comprensión matemática que fue provisionalmente distanciada en la fase interpretativa correspondiente al paso de lo cognitivo a lo semiótico.

La cuestión del retorno también pone de relieve el modo de hacer partícipe al estudiante de la interpretación de su propia comprensión matemática. En este sentido, se plantea la posibilidad de configurar interpretaciones donde el distanciamiento con el estudiante sea transitorio, donde cobre mayor protagonismo la presencia y la participación del alumno en su propio proceso interpretativo y donde quede desestimado cualquier desequilibrio o desigualdad manifiesta entre las partes intervinientes (Drouhard, Maurel y Sackur, 2011). De este modo, se garantizarían unas interpretaciones de la comprensión en matemáticas más justas e inclusivas con los estudiantes (Morgan y Watson, 2002; Brown, 2003). La teoría de la objetivación propone el posicionamiento crítico de los alumnos frente a los conocimientos matemáticos y al resto de las subjetividades en el aula como vía para el retorno a la consciencia del otro, entendida como experiencia social, emocional y sensible (Radford, 2014).

3. Marco teórico

En los debates anteriores encontramos justificación para concebir la comprensión como fenómeno mental de carácter cognitivo y, al mismo tiempo, plantear su interpretación centrando la atención, en un primer momento, en el ámbito semiótico de las producciones externas, sin necesidad de traspasar la frontera de lo observable hacia el interior (*de lo cognitivo a lo semiótico*). Además, percibimos la conveniencia de transitar en la interpretación hacia referencias externas, centradas en la experiencia matemática del otro, en el actuar y en el hacer más allá del propio registro observable literal. Ello legitima la propuesta funcional de buscar la comprensión matemática de los alumnos en los usos que éstos hacen de los conocimientos matemáticos (*más allá de lo semiótico*). Finalmente, vislumbramos la posibilidad de plantear un recorrido interpretativo de carácter circular, con una fase final que permita retornar a la comprensión matemática del estudiante mediante una interpretación inclusiva y transformadora centrada en la búsqueda del consentimiento (*retorno a la comprensión matemática del otro*). Estas conclusiones preliminares son el punto de partida para el desarrollo de la propuesta que presentamos a continuación para acceder de forma operativa a la comprensión matemática de los estudiantes.

3.1. Plano semiótico: identificación de rastros de comprensión en la actividad matemática

La comprensión es comunicable e incluye en su manifestación externa rastros interpretables. Asumimos que la exteriorización de la comprensión viene dada a través del lenguaje, medio privilegiado de transmisión de lo interno. Con base en esto, el registro observable generado durante la actividad matemática como resultado de la inscripción en el texto del quehacer matemático realizado, se erige como la primera fuente principal depositaria de las expresiones o rastros visibles derivados de la comprensión, y se constituye así en el primero de los centros de interés de nuestra propuesta interpretativa (Figura 1).

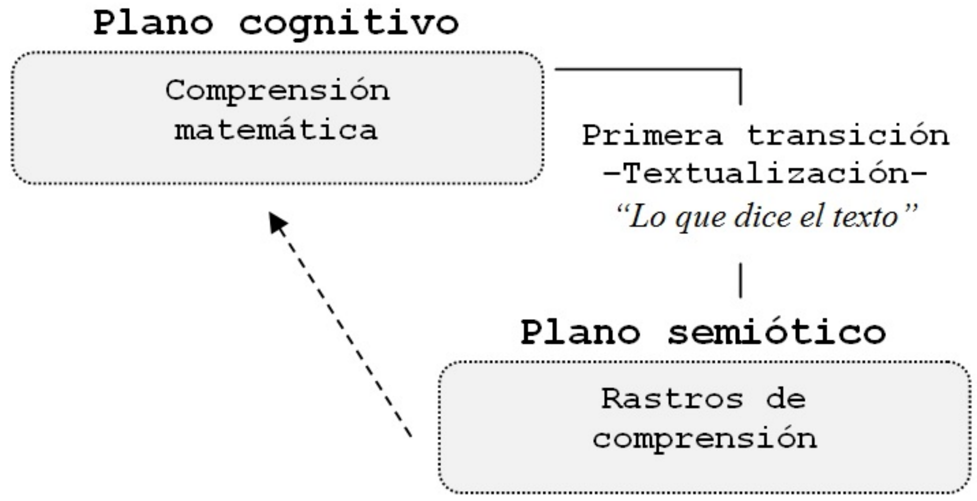

Figura 1
Círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas (parte I)

Nuestra interpretación demanda la *textualización* de lo observable en registros de naturaleza escrita. La inscripción textual de lo observable hace patente el progresivo distanciamiento entre lo mental, lo verbal y, finalmente, lo escrito, en donde se pone de manifiesto la inaccesibilidad directa de los aspectos internos de la comprensión, la imposibilidad de una relación especular entre lo verbal y lo escrito y la exigencia ineludible de una interpretación dirigida al texto. Otro objetivo en esta fase inicial es identificar y delimitar entre todo lo observado y registrado de la actividad matemática los *rastros de comprensión* del estudiante que podrían considerarse indicadores de algún uso tipificado dado al conocimiento matemático.

Los conocimientos matemáticos no siempre se utilizan del mismo modo, y son los componentes caracterizadores de su estructura epistemológica los que establecen en cada caso los distintos requisitos condicionantes de su empleo intencionado por parte del estudiante. A su vez, las situaciones matemáticas demandan la identificación de aquellos conocimientos matemáticos susceptibles de poderse emplear en ellas, en alguna de sus formas posibles, como medio de resolución, así como la decisión sobre cuál conocimiento matemático emplear, y de qué modo, entre las posibilidades identificadas previamente. La consideración conjunta de ambos aspectos nos permite percibir una estructura de conocimientos matemáticos y situaciones asociadas, conectados entre sí mediante vínculos epistemológicos (conocimiento-conocimiento) y fenomenológicos (conocimiento-situación). La descripción de esta estructura fenómeno-epistemológica, correspondiente a cada situación matemática planteada a los escolares, nos sirve de referencia para dirigir la búsqueda de los rastros de comprensión durante esta fase (Gallardo y González, 2006; Gallardo, González y Quintanilla, 2014; Gallardo, González y Quispe, 2008).

3.2. Plano fenómeno-epistemológico: caracterización de los usos del conocimiento matemático

Aunque la comprensión y la interpretación se ejerzan sobre la mediación de un texto, rebasan el campo de lo meramente semiótico. La capacidad para utilizar el conocimiento matemático depende en buena medida de su comprensión, por lo que situamos la referencia de la comprensión del estudiante, no ya en el propio registro escrito, sino en el uso del conocimiento matemático que deja entrever. Por ello, encauzamos la búsqueda de la comprensión matemática en una dirección que parte de un texto, pero prosigue más allá de él hacia el empleo del conocimiento matemático (Figura 2).

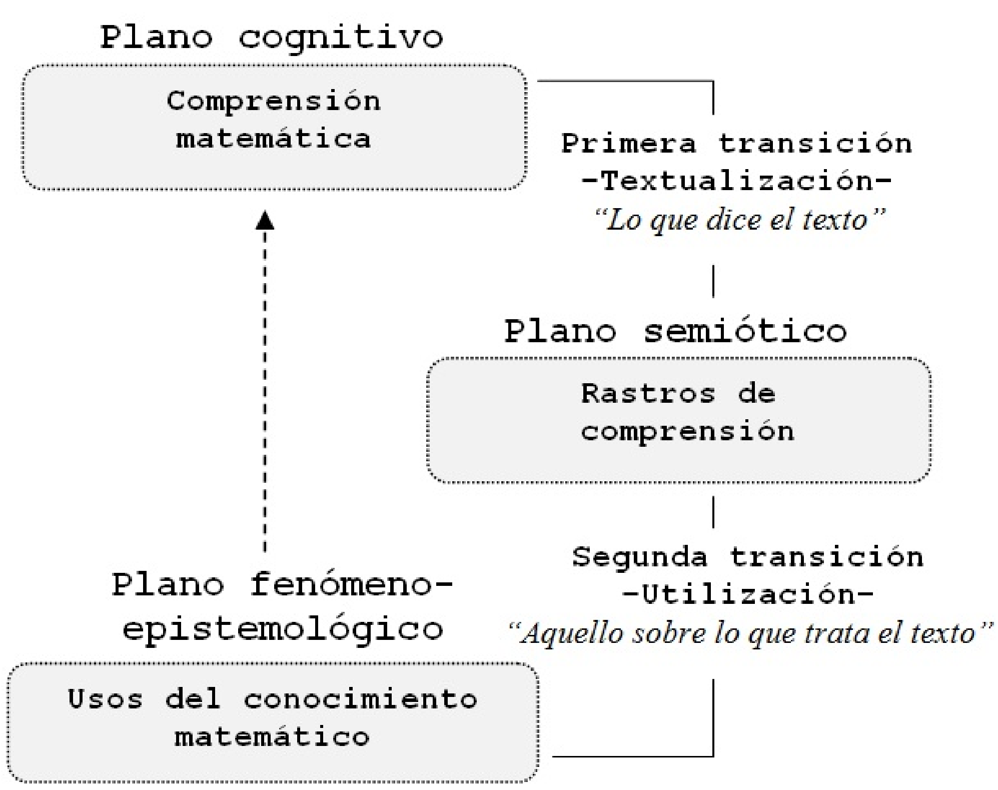

Figura 2
Círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas (parte II)

En la decisión que justifica el uso del conocimiento matemático siempre hay un ejercicio mental y privado de deliberación y elección de alternativas por parte del estudiante ligada a una intención y a un cierto convencimiento de que la actuación es posible y pertinente. Será el uso intencional del conocimiento matemático por parte del alumno, como forma de acción observable e interpretable, el que dé cuenta de su comprensión matemática. La interpretación en esta fase se dirige entonces a la exteriorización y la caracterización de los *usos del conocimiento matemático* que se desprenden de los rastros de comprensión emergentes de los registros escritos. La propia estructura fenómeno-epistemológica de las situaciones asociadas planteadas seguirá siendo la que actúe como referencia para certificar tales usos.

3.3. Plano dialógico: el retorno a la comprensión matemática a través del consentimiento con el otro

Para proporcionar una respuesta satisfactoria al problema del retorno a la comprensión matemática del estudiante, a partir de la caracterización de los usos dados al conocimiento matemático durante su actividad en el aula, proponemos una nueva extensión consistente en retornar a la comprensión matemática a través del *consentimiento con el otro*. Éste es un nuevo rastro visible complementario al uso evidenciado en el registro escrito matemático que conecta y permite transitar desde el ámbito externo de los usos del conocimiento matemático a la esfera mental de la comprensión (Figura 3).

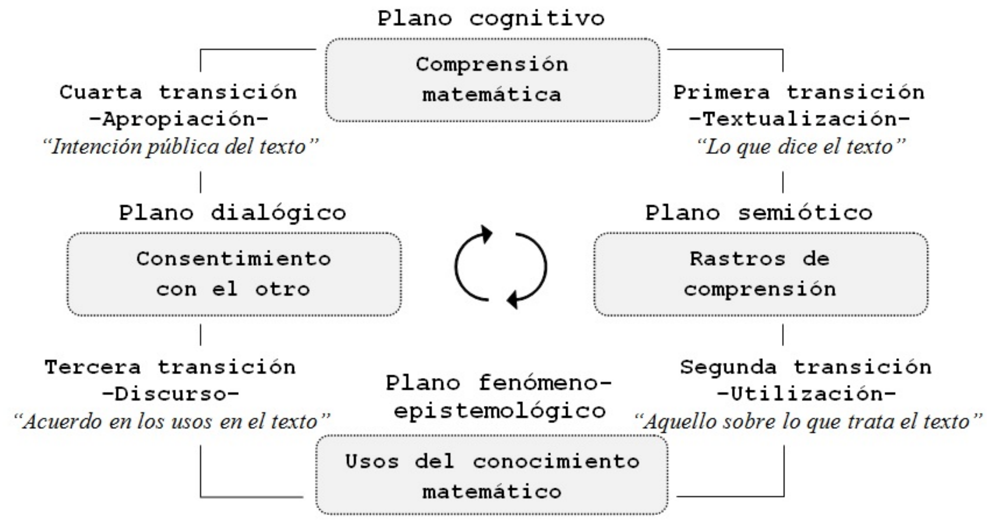

Figura 3
Círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas (parte III)

Sugerimos entonces continuar el proceso interpretativo con la búsqueda de una conformidad recíproca entre el propio estudiante y su agente intérprete (investigador, profesor, compañeros) acerca de las conclusiones sobre los usos del conocimiento matemático obtenidas en las fases precedentes. En esta nueva fase, la comprensión interpretada se contrasta discutiendo con el propio alumno, directa o indirectamente, sobre los usos del conocimiento matemático evidenciado. Este intercambio finalizará cuando las respuestas sean consideradas suficientes por quien las da y aceptables como tales por quien las recibe. Hablamos de alcanzar el consentimiento con el otro en el ejercicio de la interpretación de su comprensión matemática (Gallardo y Quintanilla, 2016).

La interpretación de la comprensión matemática del estudiante exige su participación como mediador entre lo que él previamente ha realizado (el registro escrito de la acción matemática acontecida) y el agente que persigue concretar lo que comprende y cómo lo comprende. El alumno interviene de forma directa en la construcción del consentimiento durante su práctica matemática, por lo que se convierte en artífice directo y protagonista del proceso de interpretación de su propia comprensión.

La fase de consentimiento, de carácter esencialmente dialógica, exige (a) la explicitación de la intención del estudiante a través de sus acciones matemáticas (lo que hace y lo que dice que hace), y (b) la apropiación por parte del agente intérprete de los usos intencionales identificados. En esto último es donde reside el efecto transformador de la comprensión sobre el agente: comprender al estudiante termina transformando al propio intérprete como consecuencia de hacer propio lo que en un principio le resultaba ajeno. En esta fase, el estudiante puede verse involucrado de manera directa y real junto con el intérprete en los procesos interpretativos de su propia comprensión matemática. También puede manifestarse indirectamente en tales procesos, a través de la intención pública que expresa el texto autónomo que produce y después deja como herencia al intérprete de su comprensión. Tanto la explicitación de la intención del alumno, directa o indirectamente, como la apropiación por parte del agente intérprete transcurre en la fase de consentimiento con el otro. En esta confluencia de la explicitación y la apropiación es donde concluye el círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas.

En definitiva, el consentimiento con el otro nos ofrece una vía para retornar a la comprensión matemática. Por medio del protagonismo final adquirido por el estudiante, garantizamos de nuevo el carácter cognitivo de su comprensión, desplazado provisionalmente al comienzo del círculo, y con la correspondiente apropiación completamos de un modo más inclusivo nuestra propuesta para interpretar la comprensión de la actividad matemática en el aula.

4. Metodología

4.1. Escenario básico de interpretación y actividad matemática de clase

Pretendemos mostrar la operatividad metodológica del círculo hermenéutico a través de su aplicación en uno de los escenarios básicos de interpretación que utilizamos con regularidad en el aula de matemáticas con alumnos de educación secundaria. Nos referimos a la interpretación que realizamos de la comprensión matemática desplegada por Isabela, una alumna de primer curso de educación secundaria (12-13 años), en su intento por resolver una tarea escrita de divisibilidad de números naturales. En esta ocasión, este trabajo interpretativo lo realizamos en el marco de un programa educativo más amplio, destinado al fomento de la elaboración y análisis de protocolos escritos entre los alumnos del centro educativo donde también desempeñamos parte de nuestra labor profesional como docentes. Dicho programa tiene como objetivo general fomentar los aprendizajes con comprensión y las acciones concretas que se ponen en marcha para su consecución tienen, a su vez, como objetivos principales favorecer (a) la argumentación escrita en matemáticas, (b) la búsqueda de acuerdos en la interpretación y la evaluación conjunta de la actividad matemática y (c) la configuración de criterios para consolidar buenas interpretaciones en el aula. Isabela y sus compañeros participaron en este contexto de trabajo como alumnos propios mientras cursaban la asignatura de matemáticas que les impartimos. El estudio de caso que presentamos ejemplifica el tipo de actividad matemática que desarrollaron los estudiantes en su ambiente natural de aula, que involucraba la descripción y explicación de los procesos y resultados obtenidos durante la resolución, propia y ajena, de tareas matemáticas escritas.

4.2. Tarea

Parte de las tareas matemáticas incluidas en el programa de interpretación de protocolos, como la utilizada en el episodio de Isabela, son tareas escolares, convencionales y estereotipadas, extraídas de los libros de texto implantados en el centro educativo. Elegimos de forma intencionada este tipo de tareas con el propósito de asignar al libro de texto una utilidad didáctica alternativa y complementaria a la tradicional usualmente extendida. En esta ocasión, la tarea aritmética utilizada aparece incluida en la propuesta didáctica del libro de texto de Isabela para la enseñanza y el aprendizaje de la divisibilidad de números naturales:

Un granjero, tras recoger en una cesta su cosecha de huevos, piensa:

"Si los envaso por docenas, me sobran 5."

"Si tuviera uno más, podría envasarlos exactamente en cajas de 10."

"Casi he cogido 100."

¿Cuántos huevos tiene? (Colera y Gaztelu, 2011, p. 71)

De acuerdo con nuestro modelo interpretativo, se requiere un análisis fenómeno-epistemológico de la tarea que tomaremos como referencia previa para la aplicación de las dos primeras fases del círculo hermenéutico. En este caso, se trata de una tarea que pertenece a la esfera fenómeno-epistemológica de varios conocimientos matemáticos distintos, susceptibles de emplearse de manera relacionada durante el proceso de resolución. En concreto, la tarea admite diferentes vínculos situación-conocimiento con los conocimientos matemáticos principales incluidos en la Tabla I.

Tabla I
Análisis fenómeno-epistemológico de la tierra

Conocimientos matemáticos	Concepto de división en su significado quotitivo. Elementos de la división: dividendo, divisor, cociente y resto. Concepto de divisibilidad. Conceptos de división entera y exacta. Idea de número próximo a 100 ("Casi he cogido 100"). Idea de siguiente/anterior de un número ("Si tuviera uno más"). Algoritmo estándar escrito para la división de números naturales (división entre 12 y entre 10). Uso de la calculadora como alternativa atractiva para el cálculo de las divisiones. Procedimiento de sumar 1 ("Si tuviera uno más"). Criterio de divisibilidad por entre.
Relaciones	División entera – división exacta. Divisibilidad entre 10 – criterio asociado ("…podría envasarlos exactamente en cajas de 10"). Relación divisor – resto ("Si los envaso por docenas, me sobran 5").
Estrategias heurísticas	Considerar las condiciones del enunciado en sentido inverso y argumentar desde el final.

Asimismo, la tarea también exige para su resolución establecer diferentes relaciones adicionales de estos conocimientos matemáticos básicos. Entre las fundamentales se encuentran la relación del concepto de divisibilidad y el criterio de divisibilidad entre 10, la relación entre división entera y exacta, y las distintas relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto. Finalmente, la resolución de la tarea requiere el empleo de estrategias heurísticas que permitan gestionar de forma simultánea las tres condiciones aritméticas impuestas por el enunciado. Un ejemplo de posible estrategia sería argumentar desde el final y considerar las condiciones en sentido inverso al presentado: un número próximo a 100 (condición 3) divisible entre 10 (condición 2), podría ser 70, 80 o 90. Restando 1 a cada uno de los tres números candidatos (condición 2), obtendríamos 69, 79 y 89, respectivamente. Al dividir cada uno de estos números entre 12, por ejemplo, con el algoritmo estándar escrito de la división, encontraríamos el resto 5 (condición 1) en el caso del número 89, siendo éste la solución del problema.

4.3. Recogida y análisis de datos

La actividad de interpretación asociada a este episodio concreto se inicia con la propuesta de resolución individual de la tarea a todos los alumnos del grupo-clase, entre los que se encuentra nuestra protagonista, y se incorpora a su procedimiento particular de resolución un protocolo explicativo de las principales estrategias y acciones realizadas en casa caso. La figura 4 muestra el producto escrito elaborado por Isabela.

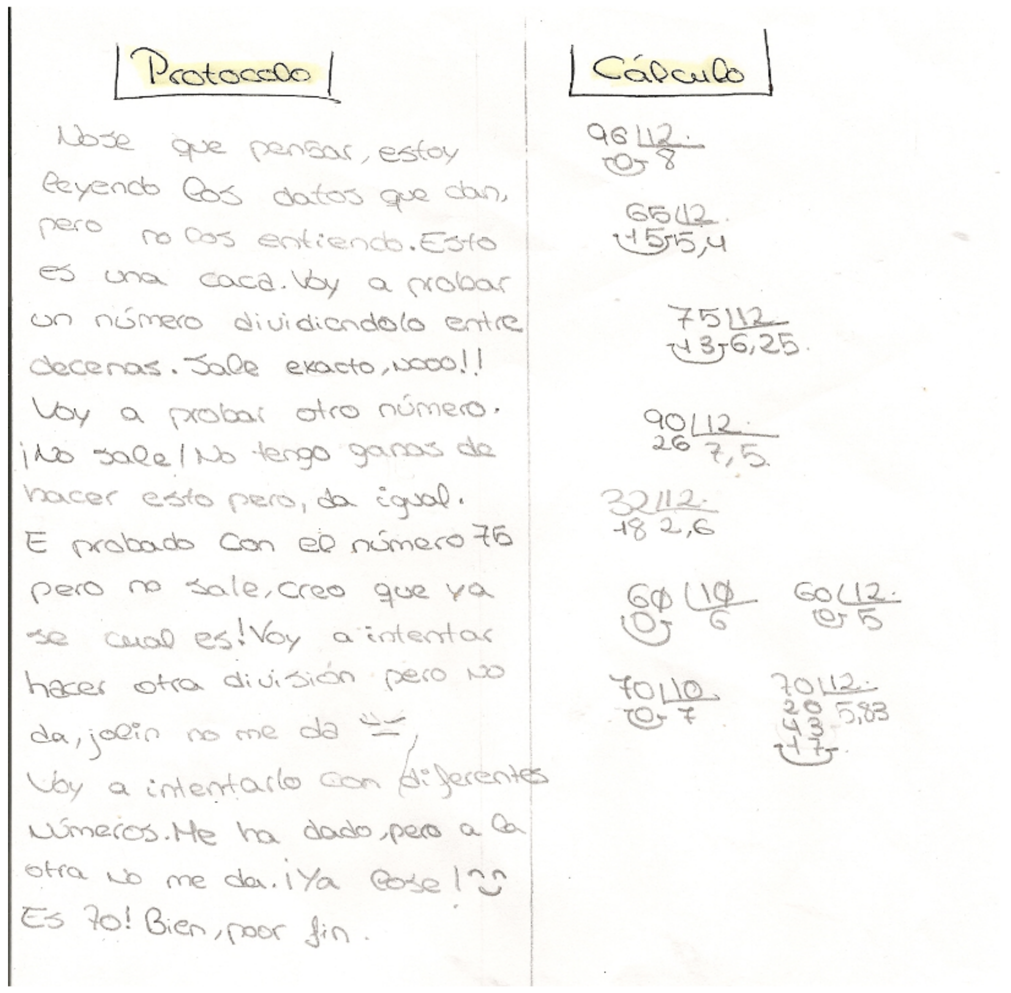

Figura 4
Registro escrito de Isabela en forma de protocolo

En una primera etapa interpretativa, aplicamos sucesivamente las fases semiótica y fenómeno-epistemológica del círculo hermenéutico sobre la propuesta de resolución con protocolo escrito que Isabela nos proporciona. En ella buscamos identificar rastros de la comprensión matemática desplegada y, con base en éstos, caracterizar los usos dados a los diferentes conocimientos matemáticos puestos en juego. Para esta labor utilizamos como referencia el análisis fenómeno-epistemológico previo aplicado sobre la tarea donde hemos caracterizado previamente diversos conocimientos matemáticos vinculados con la divisibilidad y sus posibles modos de uso en la resolución de la tarea (Tabla I).

Con los resultados obtenidos en esta primera etapa, proseguimos con la fase dialógica del círculo hermenéutico correspondiente a la búsqueda de consentimiento con Isabela. Desarrollamos esta fase unos días después de la entrega de su respuesta escrita inicial. La conversación transcurre en un entorno distendido y de confianza mutua que propicia el discurso, la discusión y el intercambio crítico, favorecido por la cercanía y la complicidad que mantenemos a diario con la alumna, por el carácter democrático e igualitario de nuestra propuesta de trabajo en el aula de matemáticas y por la regularidad con la que aplicamos nuestro método interpretativo. Registramos en audio la discusión durante el desarrollo de esta fase. La transcripción posterior de la grabación resultante nos permite generar un nuevo registro escrito complementario al protocolo de resolución de la tarea que refleja las interacciones con Isabela en forma de diálogo textual. El producto final presenta en esta ocasión una extensión total de 83 entradas correspondientes a las distintas intervenciones realizadas durante esta fase. Los datos así recopilados se analizan tomando como referencia la estructura completa del propio círculo hermenéutico. En concreto, en el protocolo escrito y en cada entrada del registro escrito del diálogo buscamos posibles rastros significativos del proceder característico de cada uno de los planos hermenéuticos. Estos elementos nos permiten reconocer en cada momento el centro de atención variable de la alumna, las facetas de comprensión en las que pone el interés y los lugares hacia donde dirige la interpretación.

5. Resultados y discusión

5.1. Textualización y rastros de comprensión en el registro escrito de Isabela

El primer desafío que nos impone el círculo hermenéutico es el de identificar rastros de comprensión en el registro escrito que resulta de la textualización de la actividad matemática de la alumna (parte I). En este caso, el registro elaborado por Isabela como respuesta a la tarea incluye notaciones numéricas, cálculos aritméticos básicos y un texto explicativo (protocolo) del procedimiento seguido en la resolución (Figura 4). Para ello, se requiere elaborar una descripción lo más detallada posible del proceso de resolución de la tarea, que refleje, entre otros aspectos, los registros ostensivos de los conocimientos matemáticos puestos en juego. Esta componente semiótica incluye términos y expresiones matemáticas, conceptos y definiciones, representaciones numéricas y simbólicas, procedimientos y propiedades empleadas por Isabela. También las posibles relaciones que establece entre los distintos registros y las estrategias heurísticas que utiliza durante la resolución.

En nuestra aproximación semiótica al registro escrito de Isabela observamos que ésta comienza la resolución de la tarea considerando simultáneamente la primera y la tercera condición del enunciado. La estrategia empleada consiste en buscar números próximos a 100 que al dividirlos entre 12 den de resto 5: “Voy a probar un número dividiéndolo entre decenas”. Aquí comete el error, que consideramos fortuito, de denominar “decena” al número 12 del cociente de la división. Inicia la búsqueda con el 96 (número próximo a 100), lo divide entre 12 en apariencia con el algoritmo estándar escrito para la división de números naturales, se percata de que la división es exacta y finalmente descarta la posibilidad por no ser el resto 5.

Isabela prosigue la resolución realizando dos nuevos ensayos con los números 65 y 75. Observamos que en su estrategia de comprobación comienza a perder vigencia la tercera condición, dado que en esta ocasión ambos números se alejan del 100 de forma notable. Tras dividirlos entre 12 con el mismo algoritmo de la división, los desestima por no cumplir la primera condición. Respecto a la aplicación del algoritmo, apreciamos en este momento que la alumna no tiene en cuenta las llevadas al multiplicar y que también hay una falta reiterada de correspondencia entre el resto que resulta de la división entera (en la mayoría de los casos, un resto mayor que el cociente) y la obtención subsiguiente de decimales en el cociente. Estos errores bien podríamos catalogarlos como sistemáticos, puesto que afloran con estos dos números y también con algunos más de los siguientes, como el 90, el 32 o el 70. También es posible que las divisiones las haya realizado con ayuda de la calculadora, sin aplicar los pasos propios del algoritmo, tan sólo disponiendo los datos y resultados numéricos obtenidos según la forma usual del algoritmo. En cualquier caso, en un nuevo intento de búsqueda, Isabela cree haber encontrado la solución con el número 90: "Creo que ya sé cuál es". Sin embargo, tras una nueva comprobación del resto al dividir 90 entre 12 con el algoritmo de la división (de forma errónea), concluye una vez más que no cumple el primer requisito del enunciado del problema. Sigue persistiendo en su estrategia y prueba todavía con el número 32, un candidato distanciado ya del 100 de forma notoria. Parece que pronto también lo descarta por la misma razón que en los casos anteriores.

A partir de aquí, Isabela intenta incorporar a su estrategia de comprobación la segunda condición del enunciado de la tarea. Suponemos que esta vez elige los números 60 y 70 buscando garantizar primero una división exacta (resto 0) al dividir entre 10, para poder cumplir de este modo con el requisito "podría envasarlos exactamente en cajas de 10". Ambos números lo verifican. Sin embargo, no llega a reflexionar sobre la primera parte de la segunda condición: "Si tuviera uno más". En un primer momento, Isabela descarta el número 60 al acreditar que no cumple la primera condición. Al dividir 60 entre 12 no le sale resto 5, sino una división exacta: "Me ha dado, pero a la otra no me da". A continuación, finaliza la resolución proponiendo el número 70 como solución de la tarea. Es posible que esta conclusión la haya sustentado tan sólo en el hecho de no ser exacta la división 70 entre 12, sin tener en cuenta la exigencia del resto 5.

5.2. Indicios de comprensión matemática con base en los conocimientos matemáticos utilizados por Isabela

Isabela utiliza de manera relacionada distintos conocimientos matemáticos en su intento por resolver la tarea, que son empleados además de formas específicas a lo largo de la resolución. De acuerdo con nuestra propuesta interpretativa, el tipo de vinculación que establece entre estos conocimientos y la situación enfrentada, a través de sus usos particulares en ella, proporciona la primera información referencial acerca de su comprensión matemática en el episodio que estamos analizando (parte II). La aproximación semiótica descrita en la sección anterior nos ha permitido identificar rastros de comprensión significativos con los que caracterizar ahora los usos dados a los principales conocimientos matemáticos puestos en juego por la alumna durante la resolución de la tarea (Tabla II). Estos conocimientos incluyen, sobre todo, (a) conceptos vinculados con la divisibilidad de los números naturales, (b) el algoritmo estándar escrito para la división de números naturales, y (c) el heurístico consistente en la búsqueda de la solución mediante ensayo-error o tanteo delimitado y dirigido por las tres condiciones del enunciado, como estrategia de resolución.

Tabla II
Conocimientos matemáticos durante la resolución de la tarea de divisibilidad

Rastros de comprensión	Usos del conocimiento matemático
Divisibilidad de números naturales	
Realización de divisiones con divisores 12 y 10. Búsqueda de restos 5 y 0. Interpretación de restos y cocientes con decimales.	Conexiones fenómeno-epistemológicas: Envasar por docenas º Dividir entre 12; Sobrar 5 º Resto 5; Envasar en cajas de 10 º Dividir entre 10; Exactamente º Resto 0. El concepto de división. División entera y división exacta. Relación confusa.
Algoritmo estándar escrito para la división de números naturales	
Omisión en el algoritmo de las llevadas al multiplicar.	Aplicación no consolidada de la faceta técnica del algoritmo.
Estrategia de resolución	
Elección de números alejados de 100. El número 70 como solución de la tarea.	Vulnerabilidad en la aplicación de las condiciones del enunciado: posible relajación de la primera condición; aplicación parcial de la segunda condición; pérdida de relevancia de la tercera condición.

El proceso de resolución y la propuesta de solución para la tarea han estado determinados por los distintos usos, pertinentes y alterados, dados a estos conocimientos matemáticos. Caracterizar tales usos nos exige profundizar en las estrechas relaciones existentes entre el conocimiento conceptual, la destreza procedimental y la representación del problema evidenciados por Isabela. En lo que respecta a la divisibilidad de números naturales, la realización de sucesivas divisiones entre 12 y entre 10 junto con la búsqueda de los respectivos restos 5 y 0, evidencian conexiones de tipo fenómeno-epistemológico, a través de las equivalencias semióticas establecidas en la traducción del enunciado, entre la situación matemática y los conceptos de división y resto, vinculados ambos con la divisibilidad. Las consideramos muestras favorables de su comprensión de la división y el resto. Por otra parte, la interpretación de los restos por parte de Isabela también denota la incorporación del concepto de división entera a la resolución. Sin embargo, el uso que hace de esta división nos parece débil porque la división entera impone unos requerimientos matemáticos en su proceder (sobre todo, la determinación de un cociente entero y la consideración de un resto menor que el divisor) que no son suficientemente percibidos por la alumna. El uso de la división entera entra en conflicto además con la división exacta, que Isabela también utiliza al pretender calcular, tal vez con el apoyo complementario de una calculadora, unos cocientes más precisos con números decimales. Por todo ello, entendemos que los conceptos de división entera y exacta están presentes en la resolución, lo cual es un indicio favorable de su comprensión, aunque a través de un uso débil y confuso.

Sobre el algoritmo estándar escrito para la división de números naturales, Isabela proporciona indicios evidentes de un empleo técnico reiterado, centrado en el establecimiento de las relaciones externas usuales entre los elementos básicos del algoritmo que hacen posible recorrer el procedimiento establecido en el sentido apropiado (Gallardo y González, 2006; Gallardo, González y Quintanilla, 2013). En esencia, nos referimos al uso rutinario convencional del algoritmo como instrumento de cálculo aritmético elemental. No obstante, los errores cometidos en su aplicación, sobre todo el relativo a la omisión sistemática de las llevadas al multiplicar, ponen de manifiesto un uso no consolidado del procedimiento y una comprensión todavía incipiente de la faceta técnica del algoritmo.

Por último, la estrategia de resolución incorpora la aplicación de un heurístico que actúa como mecanismo de representación, gestión y control del procedimiento. El uso de este tipo de conocimiento es propio del quehacer matemático ordinario en las aulas y desde nuestro enfoque también lo consideramos indicador de la comprensión matemática de los alumnos. En el caso de Isabela, observamos que pretende someter sus posibles candidatos a solución a las condiciones iniciales del enunciado de una forma secuencial. Sin embargo, la aplicación de estas condiciones sufre distintas alteraciones a lo largo del proceso, lo que desemboca en una resolución errónea de la tarea. En concreto, nos parece que relaja la primera condición cuando propone el número 70 como solución definitiva, siempre omite el primer requerimiento impuesto por la segunda condición y ya desde el inicio resta protagonismo al cumplimiento de la tercera condición al ensayar con números alejados de 100. Todo ello pone de manifiesto que el uso dado al heurístico, aunque vinculado con la tarea y planificado de manera pertinente, evidencia sin embargo una cierta fragilidad en lo referente a la comprensión de Isabela.

5.3. Discurso hacia el consentimiento con Isabela y retorno a su comprensión matemática

Con la caracterización de los usos dados a los conocimientos matemáticos puestos en juego durante la resolución de la tarea, detallada en la sección anterior, hemos obtenido una primera información sobre la comprensión matemática desplegada por Isabela en el episodio. Todavía quedan por dilucidar algunas cuestiones relativas a su desempeño en la tarea y al uso de los conocimientos matemáticos en ella que pueden aportar información complementaria sobre su comprensión. La evolución en la aplicación de las tres condiciones del enunciado, la no consideración del criterio de divisibilidad entre 10, la relación entre división entera y exacta, la idoneidad de la estrategia empleada y la pertinencia de la solución dada son los contenidos sobre los que centramos el discurso hacia el consentimiento. La discusión en torno a ellos define en esta ocasión la forma en la que queda finalmente completado el círculo hermenéutico de la comprensión matemática de Isabela de acuerdo con nuestros últimos planteamientos relativos al retorno a la comprensión matemática a través del consentimiento con el otro (parte III).

5.3.1. Gestión simultánea de información aritmética diversa y uso del criterio de divisibilidad entre 10

El primer foco de atención sobre el que buscamos consentimiento con Isabela está relacionado con el tratamiento dado a las tres condiciones del enunciado durante el proceso de resolución. Profundizamos en la relación que establece entre tales condiciones, en su orden de aplicación, y contrastamos el sentido de la vulnerabilidad apreciada con anterioridad al interpretar el registro escrito.

[1] Investigador: ¿Y las otras condiciones? Antes has dicho que los cogerías cercanos al 100, para cumplir esa condición [la tercera]. Pero, ¿y esta segunda condición?: Si tuviera uno más, podría envasarlos exactamente en cajas de 10.

[2] Isabela: Pues, si da…. Si complace ésta y ésta [la primera y tercera condición], probaría con un número más a ver si complace la de aquí [la segunda condición].

[3] Investigador: Pero primero tiene que cumplir la primera.

[4] Isabela: Ajá.

[5] Investigador: ¿Y por qué probaste con el 65, si el 65 no es casi 100?

[6] Isabela: Ya, pero por probar.

[7] Investigador: Y aquí abajo con el 32. El 32 sí que no es casi 100, ¿no? ¿Por qué probarías con el 32? ¿Qué estarías buscando?

[8] Isabela: Podría probar con el 99 y bueno….

[9] Investigador: [Tras unos segundos en silencio] ¿Con el 99 no te convence?

[10] Isabela: No, porque si tuviera un número más, sería 100 entre 12.

[11] Investigador: Aquí dice: Si tuvieras uno más, podrías envasarlos exactamente en cajas de 10. Si tú tienes el 99 y le añades uno más, son 100. Y eso sí lo puedes empaquetar en cajas de 10. Aquí, algunas veces divides entre 10 y otras veces divides entre 12.

[12] Isabela: Claro, para comprobar si… en cajas de 10 sobraba alguna. Puede ser, espera…

Tal como ya percibimos, la aplicación de la primera y la tercera condición precede en su estrategia a la consideración de la segunda condición (2-4). Ahora bien, el hecho de que no haya logrado aplicar esta segunda condición en su totalidad junto con la aparente pérdida de relevancia de la tercera condición (5-7, 10), parecen estar motivados por la dificultad que encuentra para gestionar al mismo tiempo las condiciones del enunciado. No podemos atribuirle entonces a Isabela la omisión, por olvido o indiferencia, de la primera parte de la segunda condición como consecuencia de algún tipo de carencia en su comprensión sobre la misma. Su intento al probar con el número 99 pone de manifiesto unas dificultades que tienen que ver más con su capacidad para aplicar una variedad de condiciones numéricas de forma simultánea (9-11). Por otra parte, este fragmento de discurso también nos aporta nuevas evidencias que muestran que Isabela no ha logrado establecer el vínculo fenomenológico entre la tarea, a través de la segunda condición del enunciado, y el criterio de divisibilidad por 10. La alumna prefiere dividir entre 10 con el algoritmo estándar escrito antes que emplear el correspondiente criterio de divisibilidad, especialmente recomendable en este caso por su facilidad de uso (12). Desde nuestra perspectiva, interpretamos esta circunstancia como una evidencia desfavorable de su comprensión acerca del criterio de divisibilidad entre 10.

5.3.2. Incompatibilidad de las divisiones entera y exacta

En la interpretación del registro escrito de Isabela ya nos percatamos de la presencia de la división entera y la división exacta durante la resolución de la tarea. Sin embargo, con su uso no quedó del todo clara la relación concebida y establecida por la alumna entre las dos divisiones; ni tan siquiera si ella fue del todo consciente de la diferencia entre ambas. El consentimiento en torno a esta cuestión se manifiesta ahora a través del fragmento en el que Isabela prueba a dividir, como nueva opción posible, el número 99 entre 12.

[13] Investigador: ¿Ahora qué estás haciendo, dividiendo?

[14] Isabela: Sí, 99 entre 12, a ver… [Tras unos segundos trabajando en silencio] Sacaría 4, sobraría 51, …. Bueno, sacaría decimales.

[15] Investigador: Puedes seguir dividiendo. 51 lo puedes dividir entre 12, ¿no?

[16] Isabela: Pero saldría decimales.

Esta nueva evidencia nos ayuda a esclarecer la relación que Isabela aprecia entre las divisiones entera y exacta. A través de ella nos percatamos de que no sólo las diferencia, sino que además les atribuye una cierta relación de incompatibilidad. En efecto, la búsqueda de un resto, vinculada a la división entera, que en este caso es 51 y no 5 porque tampoco vislumbra la posibilidad de seguir dividiendo de forma entera (14-15), le resulta incompatible con la opción de extraer decimales, una circunstancia que es más propia de la división exacta (16). Es decir, lo que nos dice Isabela lo interpretamos del siguiente modo: si al dividir se calculan cocientes con decimales (división exacta), no se puede obtener como resto 5 (división entera).

5.3.3. Solidez de la estrategia empleada, delimitación de posibilidades y pertinencia de la solución dada

El discurso con Isabela nos permite interpretar la solidez de su estrategia de resolución, no sólo desde un punto de vista matemático, sino también en términos de convencimiento sobre su idoneidad y convicción al momento de aplicarla.

[17] Investigador: ¿Utilizaste una buena estrategia?

[18] Isabela: Hombre no, porque viendo los "destos" [en referencia a los restos], pues ya puedo descartar esos números y probar con otros más aproximados y a ver qué da.

[19] Investigador: Tú mantendrías la estrategia de seguir probando con números para que dé resto 5, ¿no?

[20] Isabela: Claro.

[21] Investigador: ¿Qué harías?

[22] Isabela: Bueeeno. Es que hasta que 5…. Es que es mucho lío.

[23] Investigador: Tampoco hay tantos números. ¿O piensas que hay muchos números?

[24] Isabela: Bueeeno. No, porque si es cercano a 100, sería de 80 para arriba.

[25] Investigador: De 80 para arriba. Entonces 20 números tan sólo, ¿no?

[26] Isabela: Sí.

Este fragmento revela la confianza que tiene Isabela en su estrategia, a pesar de los resultados negativos obtenidos hasta ahora con los dividendos contrastados y sus restos asociados. Su confianza se refleja en la decisión de mantener la estrategia (19-20), al entender que todavía tiene margen para seguir probando (18). Asimismo, observamos cómo modifica incluso su percepción inicial sobre la dificultad que supondría prolongar sus ensayos con otros números. Al final, llegamos a reconocer con ella una delimitación de posibilidades que consigue que el desafío se le muestre más factible (22-26). Todas estas circunstancias favorables para la resolución de la tarea vienen acompañadas además de una nueva reflexión conjunta, también con efectos positivos, sobre la pertinencia de la solución.

[27] Investigador: Y ya para terminar, ¿podrías explicar el porqué del 70?

[28] Isabela: Porque primero yo creo que hice éste, 70 entre 12, que dio 17 de resto. Y después ver si con un número más, podría envasarlo exactamente en 10 cajas.

[29] Investigador: Pero un número más es 71, no es 70.

[30] Isabela: Sí. Yo qué sé. No sé ni lo que he hecho. ¡Me habría liado!

[31] Investigador: Creo que no solamente te has dado cuenta de que está mal, sino que tienes una buena estrategia para resolverlo, ¿no? Con un poco de paciencia, poniéndote tranquilamente a dividir como has dicho antes.

[32] Isabela: Claro.

[33] Investigador: Bueno, eso es una ventaja ¿no te parece? Es un avance respecto a lo que hiciste.

[34] Isabela: O si no, hoy en mi casa lo intento resolver.

En este punto de la discusión, Isabela admite de una forma más explícita la aplicación inadecuada de las condiciones del enunciado y pone de manifiesto una vez más sus dificultades para relacionar y utilizar información aritmética diversa suministrada de forma simultánea (28-30). En cualquier caso, todas las puntualizaciones, modificaciones y rectificaciones producidas en esta fase de la interpretación han sido fruto de una discusión consensuada que concluye con el convencimiento compartido con Isabela de poseer una estrategia reforzada y mejorada que la sitúa en una situación propicia y prometedora para resolver la tarea de divisibilidad de números naturales (31-34). De esta forma particular es como queda materializada en esta ocasión el consentimiento con Isabela.

5.3.4. El retorno a la comprensión matemática de Isabela

A partir del registro escrito elaborado por Isabela, en las anteriores fases sucesivas, semiótica y fenómeno-epistemológica, hemos sido capaces de delimitar y caracterizar los usos, pertinentes y alterados, dados por ella a determinados conocimientos matemáticos específicos durante la resolución de la tarea. A continuación, en la fase dialógica de consentimiento hemos conseguido contrastar y consensuar con ella algunos de estos usos y abierto la posibilidad de reconducir su estrategia con la incorporación de nuevos usos a la resolución. Esta fase nos ha permitido además evidenciar una evolución en la toma de consciencia de Isabela respecto a la validez matemática de su razonamiento. Todo este esfuerzo interpretativo es el que nos ha permitido compartir los distintos usos, al reconocerlos, caracterizarlos y aceptarlos como tales conjuntamente con la alumna. De este modo, transitamos desde una producción matemática personal hacia un saber compartido por consentimiento que ofrece garantías de racionalidad y certidumbre matemática. Finalmente, es a través de la apropiación de todos estos usos, en la forma particular acontecida en este episodio, como accedemos o retornamos en última instancia a la comprensión que posee Isabela sobre los conocimientos matemáticos empleados en la tarea.

6. Conclusión

Nos hemos enfrentado al reto fundamental de acceder a la comprensión matemática de una estudiante al intentar resolver una tarea de divisibilidad de números naturales. Para ello, hemos llevado a cabo una interpretación multifacética de su comprensión tomando como referencia distintos rastros visibles, provenientes de los planos semiótico, fenómeno-epistemológico y dialógico del círculo hermenéutico. Este círculo lo presentamos como un método integrador, por cuanto en él se ven reflejadas distintas orientaciones de la interpretación en matemáticas. En primer lugar, reconocemos la especificidad de la actividad cognitiva requerida para comprender los conocimientos matemáticos, lo que la hace diferente a la implicada en otros aprendizajes (Duval, 1996). También prestamos atención al estudio de lo que comprenden los sujetos y cómo lo comprenden, tratándose por ello de una aproximación positiva a la comprensión, en la que la especificidad del propio conocimiento matemático desempeña un papel esencial (Sierpinska, 1994).

En el plano semiótico, buscamos textualizar en diferentes sistemas de representación semiótica las diversas evidencias observables de la actividad matemática. Más que proponer un análisis cognitivo en términos de registros en el sentido sugerido por Duval (1996, 2006), otorgamos al registro un carácter exclusivamente externo. En el plano fenómeno-epistemológico, no pretendemos acceder a las vivencias internas que originan las acciones del estudiante, ni tan siquiera mediante métodos fenomenológicos de introspección guiada, como el que proponen Drouhard *et al.* (2011). Planteamos la interpretación de la comprensión en términos de usos del conocimiento matemático, considerados objetos no mentales y al mismo tiempo no ostensivos (Bosch y Chevallard, 1999), que actúan como referencia de la actividad matemática del estudiante más allá del registro escrito matemático. También consideramos que los planos semiótico y fenómeno-epistemológico de nuestra propuesta son compatibles con otras opciones (Godino, 2002; Font et al., 2013) que plantean interpretar la comprensión con base en estrategias y procedimientos de valoración multifacética basados en el análisis del conocimiento matemático. En el plano dialógico, ponemos de relieve el protagonismo del otro en la interpretación de su propia comprensión a través del consentimiento.

La labor interpretativa aquí la percibimos próxima al enfoque de Radford (2006, 2014), como forma social de acción conjunta que garantiza de manera simultánea el acceso a la comprensión ajena, en forma de reencuentro con el otro, y la transformación continua de quien interpreta. Finalmente, con nuestra propuesta perseguimos reducir riesgos en la interpretación cuando transitamos entre los ámbitos externo e interno de la comprensión. Lo hacemos presentando la interpretación como un ejercicio de curiosidad hacia el otro y asombro desinteresado por sus acciones y producciones, en un proceso dirigido por una pretensión de reciprocidad y equidad (Brown, 2003; Morgan y Watson, 2002).

En el futuro, valoramos la posibilidad de utilizar el círculo hermenéutico para establecer diferencias entre las interpretaciones de los escolares y apreciar la idoneidad de cada una de ellas en función de su correspondencia con lo fijado por el propio círculo. Nos planteamos emplearlo también como referencia para hacer transitar a los alumnos desde sus modos idiosincrásicos de interpretar hasta el método interpretativo propuesto. Pensamos que haciendo explícito el método sugerido por el círculo podremos ayudar a los estudiantes a transformar el suyo propio y transitar hacia formas más operativas y efectivas de acceder a la comprensión matemática del otro. Nos planteamos además la interpretación a través del círculo como una vía para desarrollar la comprensión matemática propia y garantizar la obtención de nuevos aprendizajes de calidad. En definitiva, buscamos evidenciar que la interpretación de los escolares podría mejorar si los planos se conectan de forma cíclica y se organizan siguiendo la estructura del círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas.

Referencias

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S. y Suggate, J. (2007). How can we assess mathematical understanding? En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 41-48). Seoul, South Korea: PME.

Bosch, M. y Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 77-124.

Brown, T. (2001). *Mathematics education and language. Interpreting hermeneutics and post-structuralism*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0726-9

Brown, T. (2003). Making Mathematics Inclusive: Interpreting the Meaning of Classroom Activity. *Waikato Journal of Education, 9*,113-128.

Colera, J. y Gaztelu, I. (2011). Matemáticas 1. Educación Secundaria. Madrid, España: Anaya.

Drouhard, J-Ph., Maurel, M. y Sackur, C. (2011). La souffrance à l'école. Le cas des mathématiques: souffrance ou plaisir et liberté? *Les Collectifs du Cirp, 2*, 294-310.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16*(3), 349-382.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1/2), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics, 27*(2), 2-9.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*(1), 97-124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Gallardo, J. y González, J. L. (2006). Assessing understanding in mathematics: steps towards an operative model. *For the Learning of Mathematics, 26*(2), 10-15.

Gallardo, J. y Quintanilla, V. A. (2016). El consentimiento con el otro en la interpretación de la comprensión en matemáticas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, 30*(55), 625-648. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a16

Gallardo, J., González, J. L. y Quintanilla, V. A. (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Educación Matemática, 25*(2), 61-88.

Gallardo, J., González, J. L. y Quintanilla, V. A. (2014). Sobre la valoración de la competencia matemática: claves para transitar hacia un enfoque interpretativo. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(3), 319-336. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1158

Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2008). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(3), 355-382.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*(2/3), 237-284.

Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in Mathematics Education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan Publishing Company.

Morgan, C. (2014). Understanding practices in mathematics education: structure and text. *Educational Studies in Mathematics, 87*(2), 129-143. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9482-6

Morgan, C. y Watson, A. (2002). The interpretive nature of teacher's assessment of students' mathematics: issues for equity. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(2), 78-111. https://doi.org/10.2307/749645

Otte, M. (2006). Proof and explanation from a semiotic point of view. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(4), 23-43.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(4), 103-129.

Radford, L. (2014). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 46*(3), 349-361. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0591-1

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A peircean perspective. En S. J. Cho (Ed.), *The 12th International Congress on Mathematical Education ICME* (pp. 3117-3126). Seoul, South Korea: ICME.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.