José Luis Belmonte, Modesto Sierra

MODELOS INTUITIVOS DEL INFINITO Y PATRONES DE EVOLUCIÓN NIVELAR

Intuitive models and pattern of level development

RESUMEN

El concepto de infinito es esencial para comprender nociones matemáticas como límite, continuidad, derivada, integral, sucesiones y series, entre otras. En el presente trabajo se estudia la evolución del concepto de infinito desde el último curso de educación primaria (estudiantes de 11 a 12 años) hasta el primer curso de enseñanza universitaria (estudiantes de 18 a 19 años). Un cuestionario, cuyo diseño en parte se basó en bibliografía existente sobre el tema, se aplicó a más de dos mil estudiantes para identificar los modelos tácitos del infinito en su desempeño o en sus expresiones. En el análisis de las respuestas se ha utilizado un nuevo indicador, el *patrón de evolución nivelar* (PEN), como elemento cuantificador que permite comparar nuestros resultados con los de otras investigaciones. Junto a modelos ya identificados en otros estudios, en nuestro trabajo hemos encontrado tres nuevos modelos intuitivos tácitos.

PALABRAS CLAVE:
- *Infinito*
- *Modelo intuitivo*
- *Patrón de evolución nivelar*
- *Esquema conceptual*
- *Estudiantes de 11 a 19 años*

ABSTRACT

The concept of infinity is essential for understanding mathematical notions as a limit, continuity, derivative, integral, succession and series, among others. This paper studies the evolution of the concept of infinity from the last year of primary education (students aged between 11 and 12) to the first year of university education (students aged between 18 and 19 years old). A questionnaire designed in part on the basis of the existing bibliography in this field was taken by more than 2,000 students in order to identify the tacit models of infinity in their performance or in their expressions. During the analysis of answers, a new indicator was used, the pattern of level evolution (PEN) as a quantifying element which allows our results to be compared with those of other investigations. Together with models already identified in other studies, our paper found three new tacit intuitive models.

KEY WORDS:
- *Infinity*
- *Intuitive model*
- *Pattern of level development*
- *Conceptual diagram*
- *11 to 19 years old students*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2011) *14* (2): 139-171.
Recepción: Octubre 28, 2010 / Aceptación: Junio 14, 2011.

RESUMO

O conceito de infinito é essencial para compreender varias noções matemáticas como limite, continuidade, derivada, integral, sucessões e séries. Neste trabalho estuda-se a evolução do conceito de infinito desde o 3º ciclo do ensino básico (estudantes de 11-12 anos) até ao 1º ano do ensino superior (estudantes de 18-19 anos). Elaborou-se um questionário (baseado, em parte, numa revisão exaustiva da bibliografía existente sobre o tema) e aplicou-se a mais de dois mil estudantes para detectar neles esses modelos implícitos. Na análise das respostas foi utilizado um novo indicador, o *padrão de evolução dos níveis* (PEN), com o elemento quantificador que permite a comparação com resultados de outros trabalhos de investigação. A par dos modelos já detectados em outras investigações, no nosso estudo identificámos três novos modelos intuitivos.

PALAVRAS CHAVE:
- *Infinite*
- *Modelos intuitivos*
- *Padrão de evolução dos níveis*
- *Esquema conceptual*
- *Estudantes de 11-19 anos*

RÉSUMÉ

Le concept d´infini est essentiel pour comprendre des notions mathématiques telles que limite, continuité, dérivée, intégrale, suites et séries, entre autres. Dans ce travail on étudie l´évolution du concept d´infini dés la dernière année de l´enseignement primaire (élèves de 11-12 ans) jusqu´à la première année de l´enseignement universitaire (étudiants de 18-19 ans). Un questionnaire élaboré par nous-mêmes (dont l'élaboration s'est basé en partie sur la bibliographie qu´il y a sur ce sujet) a été appliqué à plus de deux mille élèves pour identifier á ses réponses ces modèles tacites d'infini. Dans l´analyse des réponses on a utilisé un nouvel indicateur, le patron d´évolution des niveaux (PEN), en tant qu´élément quantificateur qui permet la comparaison de nos résultats avec les résultats des autres travaux de recherche. À côté des modèles déjà identifiés dans d´autres recherches, nous avons trouvé dans notre étude trois nouveaux modèles d´intuition tacite d´infini.

MOTS CLÉS:
- *Infiniti*
- *Modeles intuitifs*
- *Patron d´evolution des niveaux*
- *Concept Image*
- *Étudiants 11-19 ans*

1. Introducción: Problema de investigación

La incorporación del concepto de infinito al currículo y los textos escolares (un tema que aún falta por desarrollar en la literatura científica sobre Historia de la Educación Matemática), presenta una singularidad frente a cualquier otro: no se define ni se acompaña de manual de uso alguno. A pesar de su ubicuidad desde edades tempranas, en que se ocupa para representar la *numerosidad* de un conjunto, hasta la finalización del bachillerato, donde se considera más o menos formalmente la *idea de límite*, no es fácil hallar referencias explícitas sobre su significado en un contexto educativo. Es decir, durante más de diez años en el aprendizaje de las matemáticas de un individuo, el infinito desempeña un papel exclusivamente simbólico o bien sólo como sinónimo de *muy grande* o *muy pequeño.*

Sin embargo, dicho concepto va ligado a innumerables tópicos habituales en la enseñanza obligatoria y postobligatoria, como decimal periódico, irracional, número real, sucesión, serie, asíntota, límite, derivada y tangente a una curva, integral, resolución numérica de ecuaciones, sistemas de ecuaciones y su significado geométrico, fractal, geometría proyectiva, cardinal de un conjunto, inducción, número transfinito y un largo etcétera. Este carácter singular del infinito y el inevitable interés que despierta entre los estudiantes su mención o cualquiera de sus paradojas constituye una buena razón para estudiar con detalle sus características cognitivas.

Por una parte, no hay referentes inmediatos en nuestro entorno que permitan establecer una primera aproximación a la noción que nos ocupa. Sencillamente vivimos y exploramos un mundo finito y, en consecuencia, la intuición y el pensamiento metafórico tendrán un claro papel protagonista (Núñez, 1993; Lakoff & Núñez, 2000). Será necesario, por tanto, desvelar los *modelos intuitivos tácitos* (Fischbein, 1987, 1989, 2001) que subyacen a su conocimiento y analizar su evolución, a medida que la instrucción tiene un mayor peso específico en la formación matemática. Por otra parte, la generación de un *esquema conceptual* (Tall & Vinner, 1981) en torno a la idea de infinito, que sea suficientemente rico, supone un grado de abstracción poco común en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; en particular, la identificación del sistema de *metáforas* asociado a tal concepto contribuirá a la definición y comprensión del esquema.

En el presente trabajo nos centraremos en establecer los modelos intuitivos que funcionan ante situaciones que implican la noción de infinito, así como en el análisis de su evolución a lo largo de los niveles educativos considerados.

2. Algunos antecedentes

Desde que Fischbein, Tirosh y Hess (1979) publicaron su trabajo empírico y pionero, llamado "The intuition of infinity", son ya más de setenta las investigaciones sobre las características cognitivas del infinito que han visto la luz (Figura 1). Entre los artículos y más de una decena de tesis doctorales hechos en este campo de estudio podemos distinguir algunos trabajos que siguen la línea de paradigmas ya establecidos en el terreno de la Educación Matemática, y aquellos que abordan alguna de las singularidades propias de este concepto desde una perspectiva mixta, la cual incluye aspectos de diferentes teorías; algunas serán consideradas a continuación.

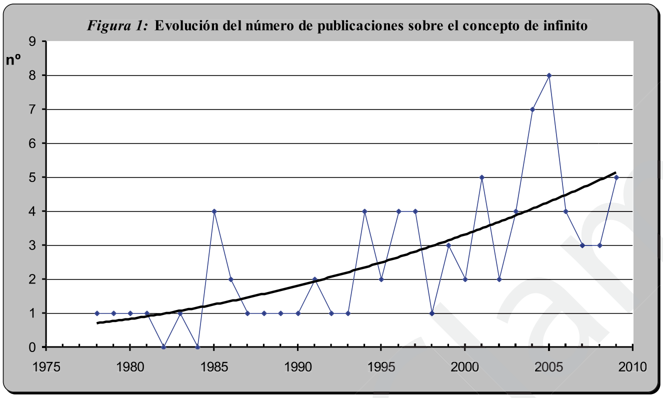


Figura 1. Evolución del número de publicaciones sobre el concepto de infinito.

En primer lugar, la vía que abrió Fischbein ha sido continuada por Tirosh, Tsamir y otros, cuyas publicaciones redundan en los modelos hallados por Fischbein, y giran en torno a las *reglas intuitivas* que rigen el conocimiento del infinito, como *todo llega a su fin* o *todo puede dividirse* (Tirosh & Stavy, 1996a, 1996b; Tsamir & Tirosh, 1994). Fischbein, Tirosh y Hess (1979) advierten sobre el carácter contradictorio del infinito, el cual se traduce en una serie de modelos intuitivos que permiten al estudiante dotarle de sentido. Dichos modelos son autoevidentes, poseen una certeza intrínseca y ejercen un claro efecto coercitivo que les proporciona un status de teoría sintética y globalizadora (Fischbein, 1987). Ahora bien, la estabilidad y resistencia de las intuiciones suponen un inconveniente a considerar para superar obstáculos tanto didácticos como epistemológicos. Fischbein distingue a las *intuiciones primarias*, que se desarrollan sobre la base de la experiencia cotidiana, antes e independientemente de la instrucción académica, de las *intuiciones secundarias*, adquiridas mediante la intervención educativa.

Falk (1994), Falk y Ben-Lavy (1989) y Sierpinska (1985, 1987) también presentan resultados sobre los aspectos intuitivos del infinito. Dentro de esta línea, Monaghan (2001) se centra en la influencia que tienen los contextos (como el numérico-geométrico, el cálculo-medida o el estático-dinámico) en las imágenes que generan la alusión a los procesos infinitos. En particular, Jirotková y Littler (2003, 2004) analizan la repercusión de un contexto geométrico, mientras que Sbaragli (2003a) estudia las intuiciones consolidadas en los profesores y estudiantes, debido a su formación específica.

Tall, por su parte, de inicio trata el tema desde la perspectiva del *esquema conceptual* (Tall, 1981,1992) y luego a la luz de su teoría sobre *crecimiento matemático,* donde postula los *tres mundos matemáticos* (Tall, 2004, 2007). Su principal aportación consiste en incorporar al esquema conceptual los *números de medida infinita* como una imagen mental que puede favorecer el acceso a la noción de infinito, vinculando los contextos numérico y geométrico; según Tall y Tirosh (2001), esto permitiría adaptar las intuiciones finitistas a la aritmética infinita. Asimismo, subraya el efecto coercitivo del lenguaje utilizado para referirse al infinito, como ocurre en expresiones del tipo *se aproxima al límite* o *tan cerca como queramos*, que sugieren que un límite no puede ser alcanzado y supone, por otra parte, una dificultad adicional para considerar la completitud de un proceso potencialmente infinito, como:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$$

Garbín (2000, 2005) y Garbín y Azcárate (2002) presentan una serie de resultados con los que pretenden identificar las inconsistencias y categorizar las situaciones de coherencia manifestadas por los estudiantes en relación con sus esquemas conceptuales asociados al infinito actual; las autoras establecen una serie de líneas de coherencia que permiten clasificar las diferentes aptitudes frente a este concepto. De igual manera, introducen el concepto de *tarea de conexión*, que permitiría establecer vínculos entre contextos y/o representaciones diferentes en un proceso de enseñanza.

La mayor parte de los autores han considerado en sus trabajos la noción de cardinal de un conjunto infinito y la comparación entre este tipo de conjuntos. En particular, a Penalva (1996) le sirve para identificar tanto las dificultades lingüísticas como las conceptuales en su tratamiento, y a Waldegg (1996) para observar cómo incide el carácter acotado o no acotado de un conjunto en su naturaleza infinita, así como para rechazar el criterio de biyección al comparar un conjunto con uno de sus subconjuntos. Para justificar este tipo de dificultades, Duval (1983) introduce la noción de *obstáculo de desdoblamiento,* que representa la incapacidad del sujeto para entender como objetos diferentes aquellos elementos que se repiten en los conjuntos comparados.

En lo que se refiere al lenguaje asociado al concepto de infinito, es habitual hallar su tratamiento en una buena parte de las investigaciones revisadas (Falk, Gassner, Ben-Zoor & Ben-Simon, 1986; Moreno & Waldegg, 1991; Montoro, 2005; Mura & Maurice, 1997). Así, podemos encontrar desde la incapacidad para denominar los números grandes en individuos de menor edad hasta el análisis de equivalencias sinonímicas, pasando por el sentido de infinito como pura representación. Hay que realizar una mención especial a los trabajos de Lakoff y Núñez (1997, 2000), ya que abordan el pensamiento metafórico en relación con el infinito y sus consecuencias en prácticamente todas las dimensiones de sus aspectos cognitivos, ya sean aritméticas, geométricas o analíticas. Lakoff y Núñez atribuyen a las metáforas, tanto *básicas* como *vinculatorias*, un papel crucial en la comprensión definitiva del infinito por parte de los estudiantes y los matemáticos profesionales.

También conviene citar la aportación del grupo de Dubinsky (Dubinsky, Weller, McDonald & Brown, 2005 a, 2005 b ; Brown, McDonald & Weller, 2008), ya que en los últimos años, bajo el marco de la teoría APOE, está intentando establecer los requerimientos para encapsular un proceso sinfín como objeto cognitivo sobre el cual se puedan aplicar nuevas acciones.

En Belmonte (2009) se incluye una detallada recopilación de las publicaciones y tesis relacionadas con este tema, una categorización con base en sus objetivos y líneas teóricas de investigación y un cronograma de publicaciones.

Para finalizar este apartado, nos detendremos brevemente en los modelos intuitivos del infinito ya identificados y analizados en la literatura correspondiente. En primer lugar, el *modelo de inclusión* (Fischbein, Tirosh & Hess, 1979; Fischbein, 1987; Tirosh, Fischbein & Dor, 1985; Falk, 1994), que aparece más ampliamente tratado en la bibliografía consultada, responde a la noción euclidiana *el todo es mayor que la parte*, propia de los conjuntos finitos. La aplicación de este modelo por parte de los sujetos, ya sea en un contexto numérico o geométrico, se extiende de manera natural a los conjuntos infinitos, lo cual supone un obstáculo al momento de comparar, por ejemplo, el conjunto de los números pares y el de los números naturales. Por su parte, el *modelo infinito=infinito* introducido por Fischbein *et al* (1979, 1987), que es considerado por numerosos autores, entre ellos Falk (1994) y D'Amore y Arrigo (2006), quienes lo denominan modelo *de aplanamiento*, concibe como equivalentes a todas las cantidades infinitas, sin que medie necesariamente una correspondencia biunívoca entre ellas; por el contrario, es el carácter indefinido que la mayor parte de los sujetos atribuyen al infinito el que implica tal equivalencia. Por último, el *modelo punto-marca*, también introducido por Fischbein (1987), y catalogado por D'Amore et al. (2006) como el modelo del *collar de puntos*, consiste en atribuir dimensiones o una naturaleza material a un punto geométrico, con las consecuencias que esto entraña, para comparar conjuntos continuos o geométricos. En efecto, dicho modelo obstaculiza el establecimiento de una correspondencia entre los elementos de ambos conjuntos; el único argumento que puede funcionar para admitir la equivalencia es el de la identidad de infinitos. Por lo tanto, los conjuntos continuos, de manera especial en los contextos geométricos, introducen un elemento adicional que dificulta la comprensión de las relaciones que se puedan crear entre ellos; en realidad, el hallazgo de una dependencia funcional entre los elementos de ambos conjuntos, que pudiera establecer su equivalencia, pertenece a un estadio formal muy alejado del conocimiento intuitivo de los estudiantes de los niveles considerados. Estos modelos también han sido hallados en el presente trabajo y son discutidos y comparados en Belmonte (2009). Asimismo, en el apartado 5 se recogen y analizan tres nuevos modelos intuitivos identificados en la investigación anterior, que suponen la aportación original de este estudio.

3. Instrumentos metodológicos

El propósito de nuestra investigación es conocer y describir con profundidad las dificultades asociadas al concepto de infinito, a fin de transformar las condiciones de la enseñanza y mejorar su calidad. Se trata de un estudio *transversal* o *sincrónico* que se centra en un aspecto del desarrollo de los sujetos en un momento dado, ya que compara diferentes grupos de edad (G_1, G_2, G_3,…, G_n) observados en un único momento (T), lo cual permite realizar un análisis diferencial de dichos grupos e introducir indicadores de comportamiento que hagan posible compararlo con otras muestras o estudios (Latorre, Del Rincón & Arnal, 1996)[1]. La metodología aplicada ha sido mixta porque no ha sido exclusivamente cuantitativa, debido a que esto supondría una perspectiva mecanicista y reduccionista del proceso de educación (Keeves, 1988); por el contrario, los resultados cuantitativos se han conjugado con métodos propios de una metodología cualitativa, a pesar de los riesgos de subjetividad que conlleva.

La elaboración de los cuestionarios se hizo con base en los criterios habituales que marca la bibliografía en uso (Ary, Jacobs & Razavieh, 1982; Sierra, 1988; Cohen, Manion & Morrison, 2007). Asimismo, se ha apoyado en los trabajos publicados, ya que hace uso de ítems de referencia que permitan la comparación con los resultados de dichos estudios e introduce nuevos ítems con los que se les aporten nuevos puntos de vista. En primer lugar, conviene destacar que los cuestionarios incluyeron ítems de opción múltiple para facilitar la concreción de

[1] En nuestro caso se han considerado cuatro grupos de edad o niveles, según la estructrura del actual sistema educativo español: Nivel I (6º de Educación Primaria, 1º y 2º de ESO), Nivel II (3º y 4º de ESO), Nivel III (1º y 2º de Bachillerato) y Nivel IV (1er curso universitario).

imágenes, así como preguntas abiertas que permitieran a los sujetos justificar su respuesta ante el concepto que nos ocupa y, de este modo, expresar en lengua escrita ideas, intuiciones o definiciones, con lo que darían una información cualitativa amplia y plural que contribuyese a completar aquellas respuestas más concisas. Por otra parte, este tipo de respuestas facilitaría el análisis del lenguaje utilizado, uno de los objetivos principales de esta investigación.

En segundo lugar, el hecho de que este trabajo abarcase un amplio abanico de edades obligaba a variar de manera paulatina el contenido de los cuestionarios para evitar la descontextualización o incluso la banalización de algunos ítems, a medida que se aplicasen a niveles superiores. No obstante, se mantuvo un cierto número a lo largo de todas las edades consideradas, a fin de que actuasen como hilo conductor en este estudio, permitiendo así el análisis comparativo pretendido. Por último, debido a que un aspecto ineludible en cualquier investigación sobre el concepto de infinito es considerar diferentes contextos y representaciones para observar su influencia en las imágenes generadas, se incorporó una amplia variedad de ellos.

El tiempo máximo para resolver el cuestionario fue de 50 minutos. No se ha pretendido en ningún momento evaluar el nivel de conocimientos adquiridos por la ausencia práctica del concepto de infinito en los contenidos curriculares, a excepción de algunas materias universitarias. Sin embargo, el reflejo de la incorporación de esos conocimientos al esquema conceptual resulta evidente en todos aquellos casos en que así ocurre. A pesar de ello, en los niveles más avanzados se introdujeron ítems de control de claro contenido académico, con el fin de establecer referencias entre la asimilación de esos contenidos y los aspectos más intuitivos.

Se diseñó un cuestionario inicial que permitiera observar la bondad de sus ítems. Por una parte, se incluyeron necesidad, redundancia de los tópicos, concreción, información que posee el sujeto para responder, sesgos no equilibrados. Por otra, se consideraron puntos sobre el estilo utilizado en la redacción de las cuestiones, como posibilidad de malentendidos, información superflua, carácter abierto, dicotómico o múltiple de la pregunta, longitud de los enunciados, etc.

Tras someterlo a triangulación, aplicarlo a grupos piloto de alumnos de los niveles considerados y efectuar el correspondiente análisis de las respuestas, se procedió a redactar el cuestionario definitivo. Para ampliar el número de preguntas y, con ello, la redundancia de ciertos tópicos bajo representaciones diferentes, se diseñaron dos tipos de cuestionarios para cada nivel no universitario y tres para el nivel universitario. Seis de los ítems fueron comunes a todos los niveles. Los diferentes ítems de los cuestionarios se ubicaron dentro de cada uno de los tópicos hallados en la revisión bibliográfica: comparación y equivalencia de conjuntos continuos y discretos, divisibilidad indefinida, series convergentes, operatividad e infinito, lenguaje del infinito e inducción[2].

La distribución y tamaño de las muestras se presentan en la Tabla I[3]. Participaron en este trabajo de campo diez colegios de educación primaria, doce institutos de educación secundaria y cinco universidades.

TABLA I

Distribución y tamaño de las muestras para los cuestionarios previo y definitivo.

		Cuestionario previo	Cuestionario definitivo			
		Total	C1	C2	C3	Total
Nivel I	6 PRI	0	103	102		205
	1 ESO	48	104	107		211
	2 ESO	51	114	113		227
		99	**321**	**322**		**643**
Nivel II	3 ESO	41	113	104		217
	4 ESO	51	114	113		227
		92	**227**	**217**		**444**
Nivel III	1 BTO	41	120	111		231
	2 BTO	47	115	120		235
		88	**235**	**231**		**466**
Nivel IV	1 UNI	41	75	91	73	239
	Total	**320**				**1792**

---

[2] El número de ítems por nivel y cuestionario es el siguiente: Nivel I (9), Nivel II (10), Nivel III (15) y Nivel IV (15); algunos de los ítems se repetían en los dos (o tres) cuestionarios de cada nivel. A su vez, la distribución de ítems por cada uno de los tópicos reseñados es la siguiente:

	Conjuntos	Divisibilidad	Convergencia	Operatividad	Lenguaje	Inducción	Otros
Nivel I	3	3	1	1	1	0	2
Nivel II	5	4	4	2	1	0	2
Nivel III	8	5	7	3	1	0	2
Nivel IV	9	5	7	4	2	2	3

[3] Nomenclatura: 6PRI (6º curso de Educación Primaria), 1ESO (primer curso de Educación Secundaria) y, análogamente, 2ESO, 3ESO y 4ESO; 1BTO (primer curso de Bachillerato) y, análogamente, 2BTO; 1UNI (primer curso universitario).

Por último, con la finalidad de obtener información complementaria se realizó una serie de entrevistas a 32 de los alumnos que participaron en la prueba escrita, las cuales fueron audiograbadas. Las entrevistas fueron semiestructuradas con el objetivo de aprovechar su flexibilidad, ya que se puede modificar el guión base conforme a su desarrollo. La elección de los entrevistados se hizo tras la lectura y un primer análisis de las respuestas, pues se halló en sus resultados el mayor número de los tópicos registrados. Ahora bien, para evitar la mediación excesiva e inductora del entrevistador se organizaron las entrevistas entre parejas de estudiantes, en general del mismo nivel y, si era posible, enfrentados en algunas de sus respuestas, con el propósito de que fuesen ellos los que utilizaran sus propios argumentos para refutar y resolver contradicciones. La entrevista no pretendía corregir al sujeto subrayando sus errores u obstáculos, sino provocar la contradicción con declaraciones anteriores o con su interlocutor. El guión de partida correspondiente a cada entrevista estaba personalizado para cada uno de los sujetos en función de sus respuestas en el cuestionario escrito, realizado unos dos meses antes.

4. Conceptos y definiciones. Modelos intuitivos del infinito

Para el análisis cuantitativo es preciso introducir, además de definiciones tomadas de la bibliografía revisada, algunos conceptos que permitan describir globalmente el comportamiento de las categorías establecidas en cada caso.

Según Fischbein et al. (1987), Fischbein (1989), cuando nos enfrentamos a una noción que es intuitivamente inaceptable, tendemos a crear, deliberada o inconscientemente, sustitutos de esa noción que faciliten su accesibilidad, a los que denomina *modelos intuitivos tácitos* (MIT); en lo sucesivo los llamaremos *modelos intuitivos.* Debido a su naturaleza de tipo sensorial, esos modelos pueden ser percibidos, representados o manipulados como cualquier otra realidad concreta[4].

[4] Tall considera que, a lo largo de nuestro desarrollo, nuestras experiencias establecen nuevas estructuras en el cerebro que se utilizarán para dotar de sentido a experiencias posteriores. A dichas estructuras previas las denomina *met-before*, y presentan cierta semejanza con los modelos intuitivos de Fischbein.

La definición de *esquema conceptual*[5], propuesta por Tall y Vinner (1981), permite estudiar la evolución de un concepto en un sujeto a lo largo de su formación matemática, durante un periodo determinado de tiempo, o bien ayuda a establecer una descripción instantánea de tal esquema cuando se lleva a cabo la investigación. Sin embargo, en cualquiera de los casos, el *esquema conceptual individual* (ECI) no aporta información sobre comportamientos colectivos de grupos de individuos con ciertos rasgos comunes.

Por ello, a partir de esta noción definiremos el *esquema conceptual nivelar* (ECN) o *colectivo* como el esquema conceptual que tiene un grupo de individuos de una misma edad o un mismo nivel educativo. Formarán parte de esa estructura cognitiva colectiva todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados al concepto que presenten tanto características comunes como diferenciales significativas de los individuos que integren el colectivo; también se considerarán aquellas singularidades que establezcan un vínculo con niveles inferiores o superiores.

Ahora bien, se denominará *elemento del esquema conceptual nivelar* (EECN) a cada una de las imágenes, propiedades o procesos asociados al concepto de infinito, en cualquiera de sus representaciones posibles, que tenga una presencia porcentual significativa (a partir del 5%) en el patrón de evolución que se definirá a continuación. Desde un punto de vista general, distinguiremos los siguientes tipos de elementos:

- *Elemento propio:* Aquel que en cada nivel educativo supera el 15%. Este tipo de elementos definirá el esquema conceptual principal de cada uno de los niveles considerados.
- *Elemento emergente*: Aquel que a lo largo de la evolución nivelar presenta porcentajes bajos —cercanos al 5%— en los niveles inferiores, y elevados —por encima del 15%— en los superiores.
- *Elemento residual:* Representa la situación inversa al elemento emergente, ya que corresponde a aquellos elementos que presentan porcentajes superiores al 15% en los niveles inferiores y menores del 5% en los superiores.
- *Elemento impropio*: Aquel que, aún teniendo presencia en todos los niveles, no supera el 5% en ninguno de ellos.

[5] Conjunto de todas las imágenes mentales asociadas en la mente del estudiante con el nombre del concepto, junto con todas las propiedades que lo caracterizan. Es resultado de su experiencia con ejemplos y contraejemplos del concepto.

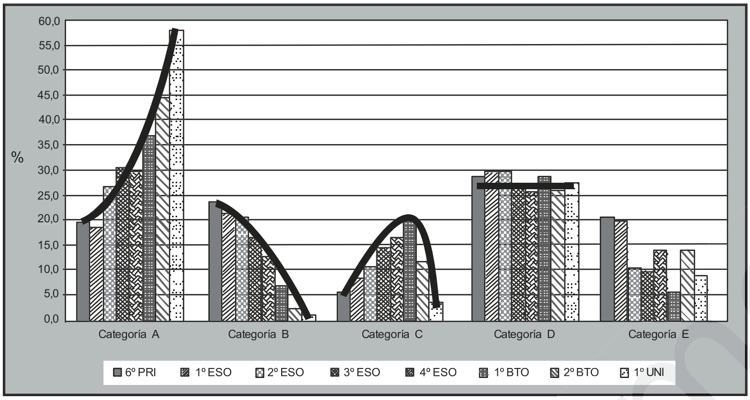


Figura 2. Diferentes patrones de evolución nivelar.

Cada una de las categorías establecidas en el análisis que sigue da lugar a un diagrama de barras o *serie* que representa su comportamiento a lo largo de diferentes niveles de edad. Denominaremos *patrón de evolución nivelar* (PEN) al perfil de tal serie, que indica el tipo de monotonía, grado de estabilidad y rapidez con que se incorpora o desaparece un determinado elemento del esquema conceptual; incluso puede presentar diferentes tendencias, como se aprecia en la Figura 2. Por último, el *grado de estabilidad* nos indicará el balance porcentual entre los elementos de una serie nivelar; aquí distinguiremos cuatro grados de estabilidad:

- *Grado 1. Alto*: Si la variación porcentual en una serie o un tramo de ella es igual o inferior al 5%. Corresponde a un patrón de evolución *invariante.*
- *Grado 2. Medio*: Si oscila entre el 5% y el 10%.
- *Grado 3. Bajo:* Si oscila entre el 10% y el 15%.
- *Grado 4. Nulo:* En cualquier otro caso se dirá que el patrón de evolución *no es estable.*

5. Modelos intuitivos del infinito

El tratamiento y análisis de los datos recopilados mediante los cuestionarios y las entrevistas permitió identificar diversos modelos intuitivos del infinito. Algunos ya han sido reconocidos por otros autores, como mencionamos en la sección 2; sin embargo, a continuación se expondrán y analizarán los nuevos modelos identificados, que suponen una novedad respecto a los anteriores y los complementarán.

5.1. *Modelo de indefinición*

Las respuestas y actitudes que induce este modelo están asociadas a cierta incapacidad de conocer o calcular, lo cual impide la concreción de resultados que se relacionen con procesos u objetos infinitos. De esta manera, es frecuente hallar expresiones del tipo *no se sabe*, *no se puede saber* o *calcular porque son infinitos* tanto en contextos numéricos como geométricos. Tal incapacidad está vinculada, en la mayor parte de los casos, a limitaciones propias de nuestra naturaleza que nos inhabilitan para acceder en un tiempo razonable a los datos necesarios, o bien para realizar las operaciones requeridas. Así lo ponen de manifiesto argumentos más explícitos que los anteriores, como *no se pueden contar porque son infinitos*; *no se puede calcular porque no sabemos dónde acaban*; *el segmento se puede dividir en muchas mitades de forma que no existe un número concreto*; *el resultado no se puede calcular porque las fracciones que se suman no llegarían a terminar*; *no se puede calcular porque jamás podríamos contar todos los diámetros.*

Observaremos a continuación el PEN de este modelo en algunos casos que se derivaron de los ítems planteados en nuestra investigación. Comenzaremos con el contexto numérico. Por ejemplo, en el primer apartado del ítem 1 (Tabla II), aunque no se solicitó, el porcentaje de sujetos que reconoció explícitamente la infinitud de N es elevado, variando desde el 53,4% en 6PRI hasta el 90,1% en 1UNI. La Figura 3 muestra cómo quedaron modificados esos resultados cuando se asoció un cardinal al conjunto resultante de eliminar un millón de elementos. En primer lugar, el porcentaje de estudiantes con respuesta claramente finitista que asimiló el infinito a un *número muy grande*, pero finito —el modelo intuitivo *indefinido primario*— disminuyó hasta ser casi despreciable a partir de 4ESO.

TABLA II
Ítem 1 del cuestionario, aplicado a todos los niveles.

Ítem 1	***Todos los niveles***
Imagínate que al conjunto de todos los números naturales, {1, 2, 3, 4, 5,...} le quitamos un millón de números	
a) ¿Cuántos quedan? ¿Por qué?	
b) ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que tendrá más números: {1, 2, 3, 4, 5,...} ó {1 000 001, 1 000 002, 1 000 003,...}? ¿Por qué?	
c) ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que tendrá más números: {1, 2, 3, 4, 5,...} ó {3, 6, 9, 12,...}? ¿Por qué?	

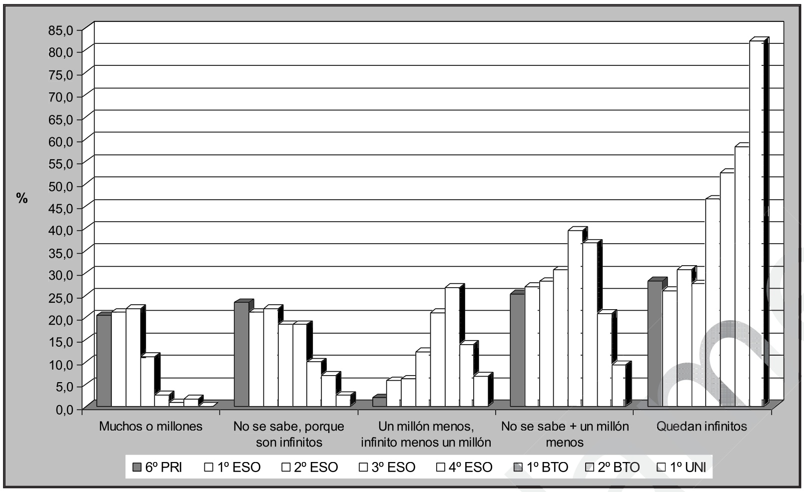


Figura 3. Patrón de evolución nivelar (PEN) del modelo de indefinición en respuestas del ítem 1.

En segundo lugar, los alumnos que distinguen como peculiaridad de un conjunto infinito a la *indefinición* —modelo intuitivo *indefinido secundario*— la expresaron fundamentalmente de dos maneras: *no se sabe* y *un millón menos*; ambas aparecen separadas y agrupadas en la Figura 3[6]. La primera de ellas, cuyo PEN corresponde a un elemento residual, considera al conjunto no como un ente en sí, sino como una cadena o sucesión de la que no se sabe dónde acaba, lo cual impide establecer afirmación alguna sobre su cardinal; la segunda admite la operación, pero no el resultado, debido a la indefinición del contenido que hay en el conjunto de partida. En ambos casos nos hallamos ante una perspectiva potencial del infinito y el conjunto de ambas no acaba de remitir a lo largo de los niveles considerados. Por tanto, la imagen de un conjunto como secuencia o *contenedor* se convierte en la clave para tomar una decisión que, de cualquier modo, lleva a estos sujetos a una perspectiva de indefinición. No obstante, conviene observar que la primera de estas imágenes presenta un mayor grado de estabilidad en los niveles inferiores, de ahí que se convierta en un elemento propio de su esquema conceptual, mientras que el decrecimiento de estas tres

[6] En Boero, Douek y Garuti(2003) se recogen algunas ambigüedades, también consideradas por Monaghan (2001). En particular, la frase *no puedo contar todos los números* podría significar *no tengo suficiente tiempo para contar todos los números, hay demasiados* o bien *no puedo llegar hasta el último número*. Otra ambigüedad depende del uso de infinito como nombre y como adjetivo. El adjetivo infinito es empleado tanto para el número 1,111… como para la sucesión de los números naturales: 1, 2, 3,…

series en los niveles superiores da lugar —en la última *quedan infinitos*— a un incremento notable que supone el reconocimiento de la dimensión infinita y sus consecuencias operacionales.

TABLA III

Ítem 2 del cuestionario, aplicado a alumnos de primaria y ESO.

Ítem 2	***PRI + ESO***
Ordena de menor a mayor los siguientes conjuntos y explica tu respuesta: *a)* Número de estrellas *b)* Número de granos de arena en la Tierra *c)* Números naturales {1, 2, 3, 4, 5,...} *d)* Número de puntos que caben en un cuadrado de 10 cm de lado *e)* Número de células que forman el cuerpo humano	

También en el ítem 2 (Tabla III) se nota cómo un porcentaje significativo de estudiantes con un PEN decreciente, pero con cierto grado de estabilidad, particularmente en el Nivel I, declara la imposibilidad de resolver el problema (*no se pueden ordenar*) debido a la indefinición que supone tal magnitud[7] (Figura 4): *porque todos estos conjuntos son infinitos.*

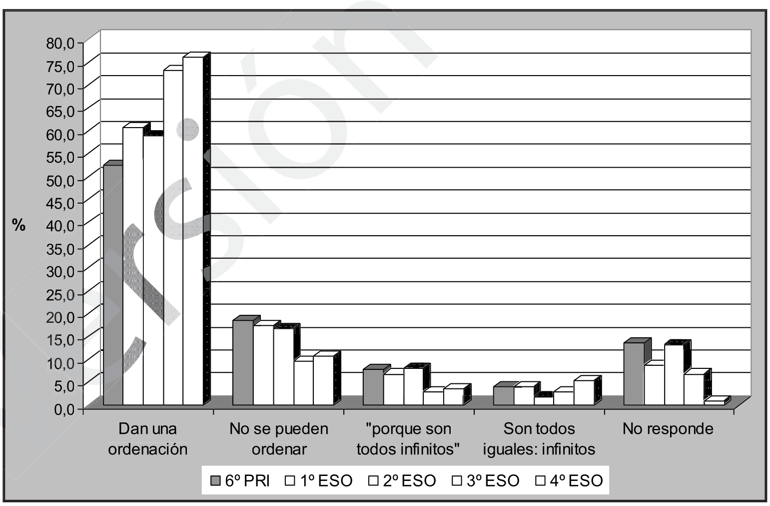


Figura 4. Patrón de evolución nivelar (PEN) del modelo de indefinición en respuestas del ítem 2.

[7] Cuando en un gráfico aparezca una categoría entrecomillada, nos referiremos a la justificación o justificaciones más frecuentes correspondientes a la categoría no entrecomillada que queda a su izquierda. Por tanto, los valores de estas categorías y subcategorías no se pueden sumar.

Este tipo de argumento, que no estaba muy presente en los cuestionarios escritos, se hizo más explícito en las entrevistas. Un ítem similar planteado en bachillerato, que incluyó el número de decimales de π y el conjunto R, arrojó valores que coincidieron con la línea de los anteriores. De nuevo, la dicotomía de imágenes contenedor/secuencia fue el criterio definitivo al dar una respuesta finita para los casos b), d) y e), mientras que la mayoría de los sujetos consideró a los puntos a) y c) como infinitos.

Una de las situaciones donde se nota de manera más clara este modelo atañe a la aritmética de ciertas cantidades. Tomemos en particular el ítem 3, aplicado a sujetos del Nivel I, en el que se planteó la resta 7,424242… - 3,1151515... (Figura 5).

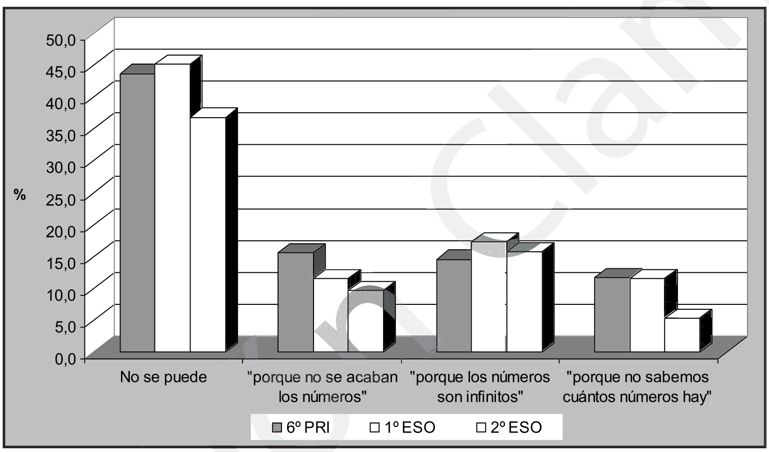


Figura 5. Patrón de evolución nivelar (PEN) del modelo de indefinición en respuestas del ítem 3.

La respuesta típica de este modelo intuitivo (*no se puede*) viene justificada por diferentes expresiones que reflejan la indefinición aludida: *porque no acaban los números, porque son infinitos* o *porque no sabemos cuántos hay.* Cualquiera de estas categorías pone de manifiesto el sentido secuencial atribuido a la parte decimal de los números periódicos, lo cual nos indica que un porcentaje elevado de estudiantes aún no los ha interiorizado como objetos matemáticos sobre los que pueden efectuar determinadas acciones. Debemos pensar que la simbología de los puntos suspensivos se convierte en un factor determinante a la hora de asociar la imagen conceptual correspondiente. Un PEN similar (Figura 6), pero con valores porcentuales ligeramente inferiores que acaban convirtiéndolo en un elemento residual, se muestra en el ítem 4, donde se solicita el resultado de la operación $0,\overset{\frown}{9} \times 0,\overset{\frown}{9}$.

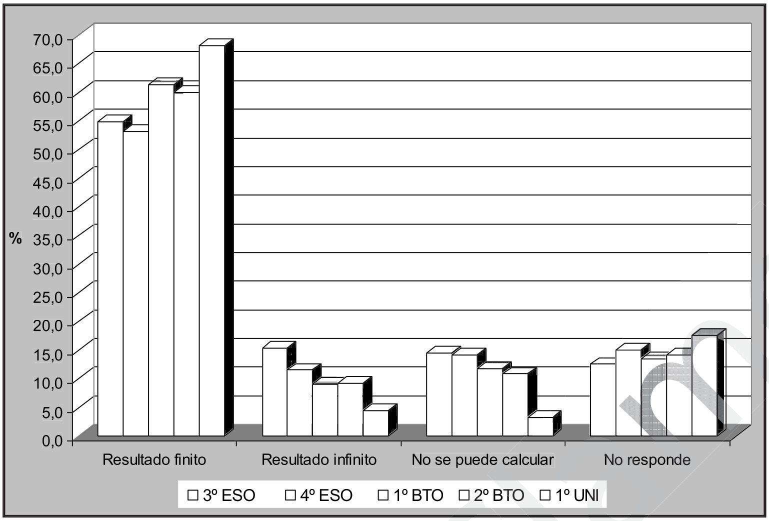


Figura 6. Patrón de evolución nivelar (PEN) del modelo de indefinición en respuestas del ítem 4.

Por último, el PEN correspondiente al ítem 5 presenta una tendencia inversa a la de los casos anteriores. Este supuesto, típico de la división indefinida, da lugar al modelo de indefinición como elemento emergente, a diferencia del caso geométrico equivalente —división indefinida de un segmento—, en el que no se hallan valores significativos.

TABLA IV
Ítem 5 del cuestionario, aplicado a estudiantes de primaria y ESO.

Ítem 5	***PRI + ESO***
Considera un número positivo cualquiera. A continuación lo divides entre dos; el resultado lo vuelves a dividir entre dos; el resultado de nuevo entre dos y así sucesivamente. ¿Qué resultado se obtendrá al final? ¿Por qué?	

La respuesta *no se puede saber*, que define al modelo en cuestión, va asociada en los niveles inferiores al argumento *porque depende del número con que comencemos,* y en los niveles superiores al modelo de indefinición, con la afirmación *porque no sabemos cuándo hay que parar.* En el primer caso, resulta obvio el carácter secundario que se concede al proceso —la parte esencial del ítem—, al acentuar la importancia de la elección inicial; de este modo se crea una dependencia entre la elección y el resultado de la iteración que desvirtúa la respuesta, lo cual nos da a conocer las prioridades de estos sujetos y su estadio cognitivo. El segundo tipo de argumento responde al tópico de este modelo detectado en los ítems anteriores, que asume la infinitud del proceso, pero también la indefinición que se le asocia desde una perspectiva potencial o secuencial, como se aprecia en la Figura 7, donde también se han incluido los PEN de aquellas respuestas que sugieren o declaran la finalización del proceso con un grado de estabilidad muy elevado, y las correspondientes a ideas infinitistas potenciales.

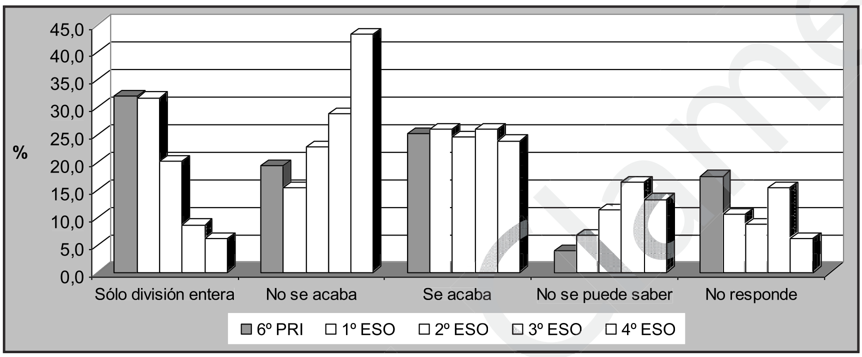


Figura 7. Patrón de evolución nivelar (PEN) del modelo de indefinición en respuestas del ítem 5.

Por último, cabe subrayar el hecho —recabado en la primera serie de esta figura— que evidencia que todavía hay una fuerte presencia de los números enteros en las edades correspondientes al Nivel I, ya que un porcentaje elevado de sujetos parte de uno de tales números y finaliza el proceso cuando el cociente es la unidad. En consecuencia, aunque la manipulación operacional de los números decimales en ese estadio ya está consolidada, aún no gozan del estatus adecuado para intervenir en cualquier tipo de razonamiento.

Este resultado es aún más pronunciado en el ítem 6, que dentro del mismo contexto plantea la división indefinida bajo la representación *mecánica* de un proceso iterativo:

> Una máquina divide entre 2 el número que introduzcas. El resultado lo vuelve a dividir entre 2 y así sucesivamente; sólo se detiene cuando alcanza el resultado más pequeño posible. ¿Cuál será ese resultado? ¿Estará funcionando mucho tiempo? ¿Por qué?

Como podemos observar en la Figura 8, los porcentajes se han incrementado sensiblemente, pero mantienen el tipo de argumentos que se expresaron en el caso anterior. El paralelismo entre la primera serie de este gráfico, *no se acaba*, y la tercera, *no se puede saber*, destaca la naturaleza de esas afirmaciones

—aunque son respuestas independientes— y establece un vínculo inevitable entre este modelo y el carácter inacabable del proceso. Tal hecho, que marca el esquema conceptual de manera sólida, incapacita a estos individuos para aventurar un resultado del proceso, a pesar de su clara convergencia. La contradicción entre la convergencia y la infinitud del proceso se resuelve una vez más mediante el modelo intuitivo de indefinición.

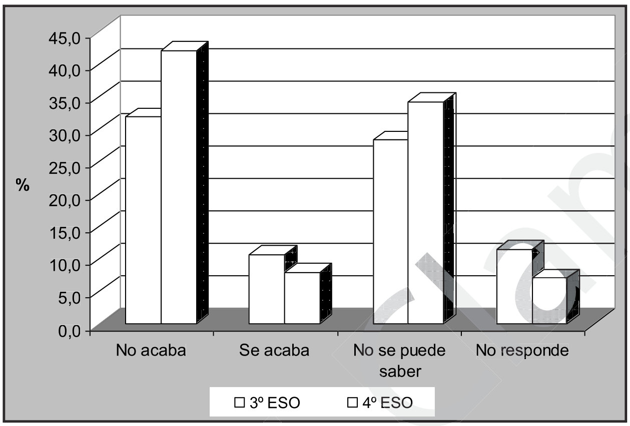
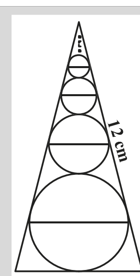


Figura 8. Patrón de evolución nivelar (PEN) del modelo de indefinición en respuestas del ítem 6.

Por su parte, en el contexto geométrico también pueden darse resultados que avalan la presencia del modelo de indefinición. En primer lugar, consideraremos el ítem 7, que solicita la suma convergente de una cantidad infinita de segmentos. Es preciso distinguir la incorporación de una limitación al proceso, el triángulo, que acota visualmente el resultado, si bien se ha atenuado tal condición mediante la posición horizontal de los diámetros.

TABLA V

Ítem 7 del cuestionario, aplicado a alumnos de 3º y 4º de ESO, bachillerato y universidad.

Ítem 7	***(3+4) ESO + BTO + UNI***	
¿Cuánto suman los diámetros de todos los círculos de la siguiente figura si continúan haciéndose cada vez más pequeños? *a)* Una cantidad finita. ¿Cuál? *b)* Una cantidad infinita. ¿Por qué? *c)* No se puede saber. ¿Por qué?		

La Figura 9 presenta los patrones de evolución correspondientes a las categorías. Una vez más podemos notar la presencia del modelo de indefinición —*no se puede calcular*— con una clara tendencia decreciente, pero sin llegar a convertirse en un elemento residual a lo largo de los niveles considerados. En la mayor parte de los casos se recurre a la insuficiencia de datos o a la incapacidad para obtenerlos *porque no se conocen todos los diámetros* o *porque hay círculos tan pequeños que ni se pueden medir*, con el fin de justificar la imposibilidad de los cálculos. En realidad, dichos argumentos constatan el reconocimiento de ciertas limitaciones que permiten eludir de nuevo la presencia de un proceso secuencial infinito; el resto de las justificaciones representan este modelo de manera más explícita: *porque no paramos de hacer círculos*; *porque no conocemos la magnitud del infinito*; *porque cuando una cantidad es infinita no se puede saber con exactitud el resultado.*

Por tanto, se puede distinguir que, a pesar del elemento *contenedor* que supone el contorno triangular, la fortaleza de este modelo se impone bajo esta representación geométrica. Asimismo, es preciso detenerse en la primera serie de la Figura 9, llamada *resultado infinito*, que cual guarda una estrecha relación con las consideraciones anteriores ya que, como hemos visto en las páginas anteriores, ese tipo de resultado va asociado en la mayoría de los casos al modelo de indefinición, particularmente en los niveles inferiores, con lo que se constituye en su versión implícita, y en el resto al modelo de divergencia que se tratará en el próximo apartado.

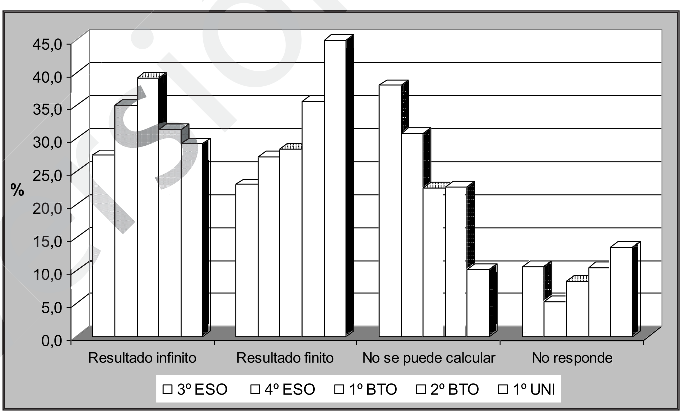


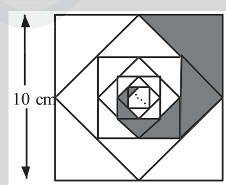
Figura 9. Patrón de evolución nivelar (PEN) del modelo de indefinición en respuestas del ítem 7.

Por otra parte, es fácil constatar la fuerte sensibilidad del PEN a pequeñas variaciones contextuales o representacionales. Así, en el ítem 8 podemos observar que su PEN adopta un perfil irregular, pues asume un cierto grado de estabilidad en los cuatro primeros grupos de edad, pero tiene unos valores claramente inferiores a los obtenidos en el ítem anterior. En ambos casos se presenta la convergencia como un hecho necesario, ya que los elementos de la suma están confinados a un recinto acotado, pero la variación de su dimensión provoca un cambio notorio en los resultados.

La figura que acompañó al enunciado del ítem permitió que se dieran otro tipo de respuestas, pues surgieron por la aplicación de alguno de los modelos alternativos al modelo de indefinición, incrementando su grado de estabilidad (Figura 10). Las respuestas que consideran el resultado infinito, aunque han variado su distribución, mantienen unos valores y argumentos similares a los del ítem anterior, mientras que las que reconocen la finitud del resultado han incrementado sus porcentajes debido, probablemente, al aspecto continuo de la región sombreada más que a su confinamiento ya presente en el ítem anterior.

TABLA VI

Ítem 8 del cuestionario, aplicado a alumnos de 3º y 4º de ESO, bachillerato y universidad.

Ítem 8	***(3+4) ESO + BTO + UNI***	
La suma de las áreas de los triángulos sombreados de la figura es: *a)* Finita *b)* Infinita *c)* No se puede saber Justifica tu respuesta		

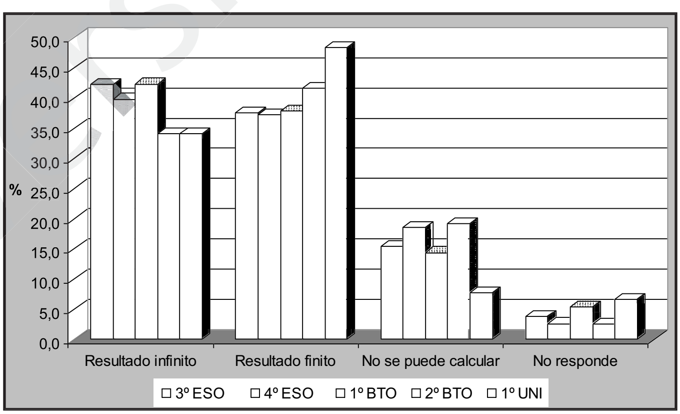


Figura 10. Patrón de evolución nivelar (PEN) del modelo de indefinición en respuestas del ítem 8.

5.2. Modelo de divergencia

Un tópico muy poco explorado en relación con el concepto de infinito, y que está íntimamente ligado a la idea de divisibilidad indefinida, es el de la suma de infinitos términos decrecientes y convergentes. Habitualmente se le ha utilizado en las investigaciones sobre límites o series, pero a nivel intuitivo existen numerosos ejemplos de series que permiten explorar nuevas perspectivas de las actitudes finitista e infinitista. Es cierto que este tipo de problemas apuntan hacia el carácter potencial del infinito; sin embargo, no olvidemos que la realidad que hemos descrito hasta ahora presenta un marcado sesgo *potencialista.* Junto a esto, los problemas nos permitieron identificar un nuevo modelo intuitivo: el *modelo de divergencia*. Definiremos este modelo como el que atribuye sistemáticamente un resultado infinito a la suma de una cantidad infinita de objetos matemáticos, sin considerar en absoluto su eventual convergencia. Sólo los argumentos *externos*, como la representación geométrica de los elementos de la suma, pueden contribuir a admitir dicha convergencia debido a las limitaciones o cotas que impone el objeto geométrico considerado, o bien en un contexto numérico, y en proporciones muy pequeñas, el comportamiento del término enésimo. En consecuencia, el modelo responde a la versión de la propiedad arquimedeana *la suma de infinitas cantidades finitas da un resultado infinito.*

La suma de una infinidad de cantidades, ya sean series de naturaleza geométrica o numérica, nos muestra que este modelo y sus imágenes asociadas constituyen uno de los tipos de elementos propios más genuinos del esquema conceptual correspondiente. Dichas imágenes representan mayoritariamente (a excepción del nivel universitario, donde se invierten los valores obtenidos en todos los ítems) el carácter divergente del resultado, independientemente de que la convergencia del término enésimo sea más o menos acentuada. De este modo, la expresión *el resultado es infinito porque siempre se suma* supone una clara aplicación de postulados finitistas que respondería al esquema *siempre que se suma* [un número finito de términos positivos] *el resultado es más grande*, sin reparar en cotas superiores, aun reconociendo en no pocas respuestas que *los números son cada vez más pequeños.*

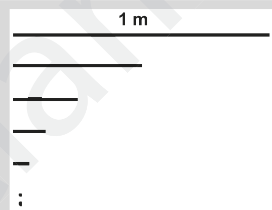
Comenzaremos presentando los resultados que arrojó el ítem 9 (ver tabla VII en la siguiente página).

La Figura 11 incluye los resultados de las tres categorías y sus valores más representativos. En primer lugar, podemos observar la complementariedad entre los patrones de evolución de las respuestas finita e infinita. Ambos presentan un elevado grado de estabilidad en los cinco primeros niveles, en especial la que corresponde al resultado finito; sin embargo, los valores de 2BTO y

1UNI sufren una variación muy acusada. Es evidente que, fuera del contexto de nuestro cuestionario, este enunciado no resulta trivial para un alumno de los niveles inferiores; sólo a partir de 3ESO, haciendo uso de las ideas aprendidas sobre progresiones geométricas, podría intentarse con éxito su resolución. La respuesta *no se puede saber*, con valores muy bajos en esta ocasión, tiene las mismas características que las halladas en ítems anteriores; es decir, se sustenta en la naturaleza indefinida del infinito: *no sabemos cuánto es infinito* o bien *no sabemos cuántos números se han de sumar*.

TABLA VII

Ítem 9 del cuestionario, aplicado a todos los niveles.

Ítem 9	***Todos los niveles***	
Si tienes el conjunto de segmentos de la figura, donde la longitud de cada trozo es la mitad del anterior, y los vas uniendo uno junto a otro, obtendrás un segmento más largo. ¿Cuánto medirá cuando los hayas unido todos? *a)* 2 metros *b)* Un valor muy próximo a 2 m *c)* 3 metros *d)* Infinito *e)* Una longitud muy grande *f)* Otra respuesta		

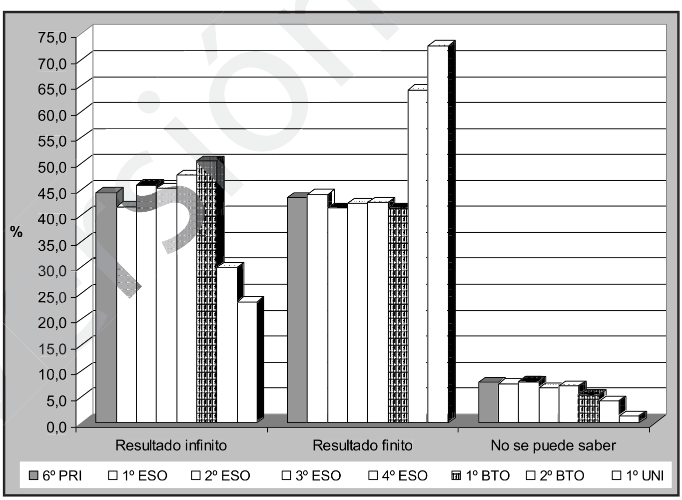


Figura 11. Patrón de evolución nivelar (PEN) del modelo de divergencia en respuestas del ítem 9.

Si centramos nuestra atención en el resultado infinito (véase Figura 12) nos encontramos con el nuevo modelo intuitivo *de divergencia,* que consiste en una extensión natural de los modelos generados por el uso de los números enteros. Cualquiera de las dos versiones que aparecen en la Figura 12, una implícita (*porque nunca se acaba*) y otra explícita (*porque siempre se suma algo*) definen ese modelo: *sumar siempre es aumentar sin límite* puede anular la consideración de resultados finitos de una suma infinita. Algunos sujetos pueden llegar a descubrir que *cada vez crecerá menos* o bien que *cada vez crece más despacio*, no obstante, cualquiera de estas afirmaciones, que se hallan envueltas por el dinamismo propio del contexto, irá acompañada de la expresión *pero siempre crecerá*.

En nuestra investigación, la fortaleza de este modelo de divergencia tuvo su máximo epítome en la respuesta de un alumno de 2ESO durante la entrevista: *si pones todas las mitades de estos segmentos dentro de un segmento de un metro acabas por pasarte del extremo*. Podemos observar que el desdoblamiento propuesto por Duval (1983) como una condición para captar la biyección entre dos conjuntos numéricos infinitos se muestra contraproducente en este caso, ya que el estudiante es incapaz de advertir la identidad entre el segmento de partida y su fragmentación. El patrón de evolución del resultado infinito queda roto al descomponerlo en los dos argumentos que dieron los alumnos, los cuales entrañan patrones de evolución creciente-decreciente, como se puede notar en las series que ilustra la Figura 12.

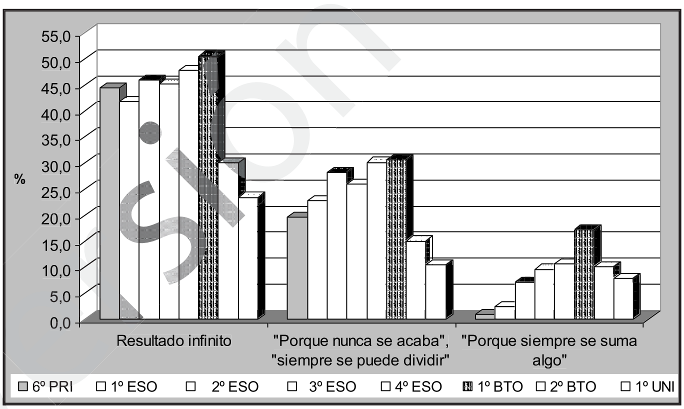


Figura 12. Argumentos del modelo de divergencia que dieron los alumnos sobre el ítem 9.

La singularidad que parece presentar el 1BTO se puede explicar desde la ubicación transitoria que representa este nivel. Cuando se aplicó el cuestionario todavía no se había impartido el concepto de límite; así, estos alumnos se encontraron entre el conocimiento de las sucesiones, cuya imagen es la de una colección ilimitada, y el acceso a la idea de límite, que ya supone la introducción de cotas a algunas de las sucesiones que estudian como ejemplos e incluso, en algún caso, una perspectiva actual del infinito. Se podría pensar que las nociones de límite y serie son diferentes, y que el currículo correspondiente no considera el concepto de serie —salvo las aritméticas y las geométricas— como algo anecdótico y completamente desubicado, pero tampoco se recoge tal concepto en 2BTO. Sin embargo, los estudiantes de este nivel modificaron en forma notoria sus perspectivas, inducidos sin duda por la noción de límite. Podemos considerar este caso como un ejemplo paradigmático de la frontera entre intuiciones primarias y secundarias del concepto de infinito, donde se puede apreciar cómo se modifica su esquema conceptual bajo el efecto del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Este tipo de situaciones se reeditan en otros ítems ya considerados anteriormente. Así, el *modelo de divergencia* permite al sujeto traspasar incluso las limitaciones geométricas o materiales introducidas, con afirmaciones del tipo *porque los círculos llegarán al infinito* o *porque el espacio es infinito*, junto a los argumentos citados en el caso anterior. En la Figura 13 se nota el paralelismo entre los PEN de ambos ítems en los niveles correspondientes, salvando las diferencias porcentuales debidas a variaciones representacionales obvias, como la acotación impuesta en el ítem 7, pero implícita en el ítem 9.

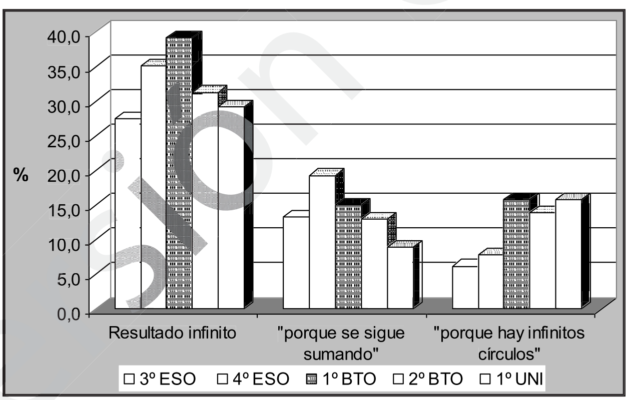


Figura 13. Patrón de evolución nivelar (PEN) del modelo de divergencia en los argumentos sobre el ítem 7.

Algo semejante ocurre con el ítem 8 (ver apartado 5.1), cuyos resultados presenta la Figura 14. No obstante, es conveniente reparar en una variación significativa del PEN de este caso, ya que pasa de una tendencia creciente-decreciente a otra ligeramente decreciente con un mayor grado de estabilidad. Además, los porcentajes experimentan cierto incremento, particularmente en los niveles inferiores, que podemos justificar debido a la representación bidimensional y continua de los elementos a sumar.

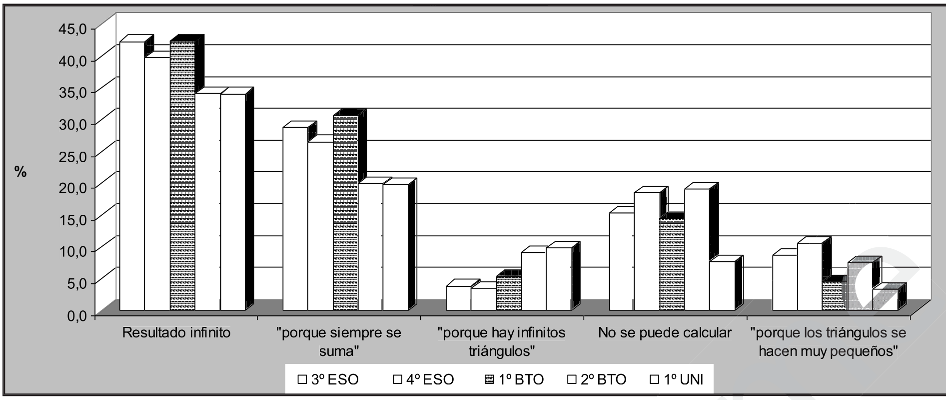


Figura 14. Patrón de evolución nivelar (PEN) del modelo de divergencia en los argumentos sobre el ítem 8.

5.3. *Modelo acotado-finito/no acotado-infinito*

Este modelo, aunque se halla presente en la literatura especializada, no ha sido identificado como tal ni tratado con suficiente detalle. Es producto de la relación que establece un número importante de sujetos entre la definición acotada o no acotada de un conjunto y el cardinal de sus elementos. La primera opción induce, por lo general, a actitudes finitistas (*llega un momento en que ya no caben más círculos en el triángulo porque llegamos al vértice*) o infinitistas actuales (*la suma de todos los diámetros será como mucho la altura del triángulo*). No obstante, es preciso indicar que su frecuencia depende si el contexto es geométrico o numérico y, evidentemente, del nivel educativo. Por su parte, la ausencia de cotas origina en mayor medida expresiones infinitistas bajo una perspectiva potencial: *en* [0, ∞] *hay más números que en* [0, 1] *porque no acaba*. Así, el hecho de que representemos el conjunto o conjuntos a evaluar mediante intervalos o segmentos, notación conjuntista o recintos bidimensionales tendrá una repercusión definitiva en la expresión del sujeto. Podemos observar el PEN de este modelo intuitivo en dos de los ítems ya considerados. En la Figura 15 aparecen los resultados obtenidos en el ítem 7 (ver apartado 5.1) y se comprueba la presencia de las expresiones citadas. Sin embargo, es preciso advertir que el porcentaje de estudiantes que ofreció algún tipo de justificación fue muy bajo con respecto al de las respuestas de la categoría *resultado finito*. Este dato, junto con el gran número de sujetos que consideraron que *no se puede calcular*, muestra una inseguridad evidente a la hora de recurrir a los modelos anteriores. Por ello, incluimos la subcategoría *aunque es una suma indefinida*, la cual manifiesta una duda por la contradicción entre la respuesta finita y el número de objetos que intervienen en la suma, lo que revela el conflicto cognitivo entre los dos modelos anteriores.

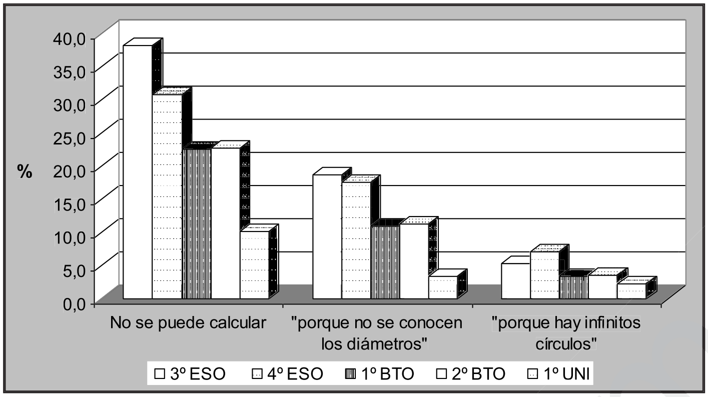


Figura 15. Patrón de evolución nivelar (PEN) del modelo acotado-finito/no acotado-infinito en las respuestas del ítem 7.

Asimismo, la Figura 16 muestra las distribuciones del ítem 8. En este caso, el PEN mantiene la tendencia, pero ofrece un grado de estabilidad medio que antes no tenía esta respuesta; asimismo, hay un aumento sensible en los porcentajes, salvo los correspondientes a 1UNI. Una vez más, el carácter acotado de la figura a la que se refiere la suma propuesta es el principal argumento para justificar tal resultado; asimismo, posee un patrón de evolución muy estable y porcentajes ligeramente superiores al ítem anterior.

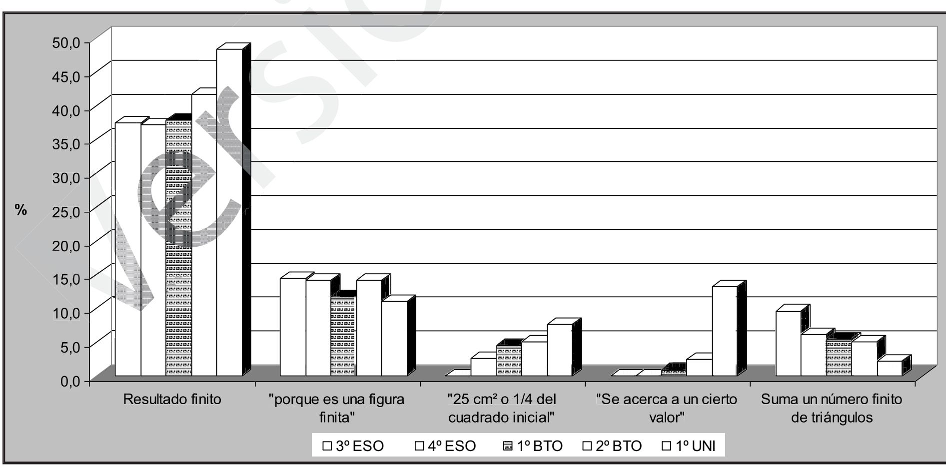


Figura 16. Patrón de evolución nivelar (PEN) del modelo acotado-finito/no acotado-infinito en las respuestas del ítem 8.

6. Conclusiones

Podría pensarse, como afirman Fischbein et al. (1979), que las respuestas de los estudiantes sobre el infinito y los procesos que se le asocian tienen un elevado grado de aleatoriedad. Sin embargo, en esta investigación, al observar los resultados que hubo en determinados casos, donde los porcentajes de respuestas infinitistas superaron con claridad el 60%, nos obliga a admitir la existencia de una idea intuitiva de infinito.

A lo largo del presente trabajo se ha tratado de determinar cuáles son los modelos intuitivos que operan cuando un sujeto se enfrenta a preguntas cuya respuesta implica, necesariamente, el uso del concepto de infinito. Algunos son reconocidos en la literatura correspondiente, y los que no aparecen o no quedan claramente definidos en las referencias consultadas se introducen en el presente trabajo: se trata de los modelos de *indefinición*, de *divergencia* y de *acotado-finito/no acotado-infinito.* Estos, junto con los de *inclusión*, *infinito=infinito* y *punto-marca,* que citamos en el apartado 2, son recursos e imágenes que alberga el esquema conceptual asociado, los cuales sirven para solventar la deficiencia o ausencia de elementos formales.

Estos modelos con frecuencia entran en conflicto bajo determinados contextos o representaciones contextuales, lo cual genera contradicciones internas que se expresan mediante respuestas incoherentes. Dicho carácter contradictorio se debe no sólo, como apunta Fischbein, a la dualidad finitista/infinitista, sino también al enfrentamiento de modelos diferentes en cada una de esas ideas. Asimismo, hemos podido constatar, tanto en los cuestionarios escritos como en las entrevistas, la acusada fragilidad de muchas respuestas y su fuerte sensibilidad frente a aspectos contextuales o representacionales.

Por otra parte, las concepciones propias de la evolución histórica de la idea de infinito también se hallan en los modelos anteriores, como el *infinito=infinito*, el *punto-marca* y el de *inclusión*. Pero, de acuerdo con Penalva (2006), es posible reconocer nuevos elementos característicos del concepto de infinito que se asocian exclusivamente al proceso de aprendizaje, como se puede observar en el tratamiento de los datos que efectúa Belmonte (2009).

La proliferación de investigaciones sobre el concepto de infinito y las notables diferencias entre algunos de sus resultados muestran la necesidad de introducir indicadores que permitan comparar esos resultados para que, en el futuro, se establezcan tanto los comportamientos como los factores de dependencia y la sensibilidad respecto a ellos. En este trabajo se ensaya el uso de alguno de estos indicadores, como el *patrón de evolución nivelar* (PEN) y su *grado de estabilidad*. Ambos se han aplicado para analizar la evolución de las respuestas a lo largo de los diferentes niveles educativos considerados, a fin de averiguar la implantación de los modelos anteriores en cada uno de esos niveles, y han evidenciado su bondad para desvelar la sensibilidad de modelos y elementos frente a variaciones contextuales y representacionales. A continuación, expondremos dos razones acerca de su apoyo.

En primer lugar, es posible apreciar en este análisis que hay, en numerosos casos, diferentes niveles de estabilidad dentro de un mismo patrón de evolución; es decir, a lo largo de dos o más niveles no se advierten variaciones significativas en un determinado modelo o elemento y, tras ello, se produce un salto notable en su perfil. Esto coincide con las conclusiones a las que llegaron otros autores, como Fischbein o Monaghan, sobre la práctica invariabilidad de las actitudes finitistas e infinitistas durante amplios periodos del proceso educativo. El fuerte arraigo de la naturaleza sincrética de los modelos intuitivos y su autoevidencia se extiende a todos los periodos piagetianos, tanto preoperacionales como operacionales, garantizando su perdurabilidad. En segundo lugar, cabe destacar la existencia de *elementos emergentes* y *elementos residuales* que nos aportan una valiosa información sobre los momentos del proceso de conocimiento en los que se implantan nuevas imágenes del esquema conceptual, o en los que van desapareciendo otras que desempeñaron su papel durante años, adaptándose a la realidad del contexto educativo.

En cuanto a los principales resultados logrados del trabajo de campo, podemos observar, por una parte, una predisposición natural a eludir el tratamiento de cantidades o procesos infinitos mediante el *modelo de indefinición*, con el que se recurre a todo tipo de limitaciones a la hora de ensayar un resultado: *no se pueden contar; no sabemos dónde acaban; no se pueden medir segmentos tan pequeños,* etc. Tal comportamiento es el resultado de un duro enfrentamiento entre posturas finitistas previas y una perspectiva potencial del infinito. El *modelo de divergencia* se manifiesta ante la suma de una cantidad infinita de números, longitudes o áreas, sin reparar en la posible convergencia de la serie; sus fundamentos los podemos hallar en los presupuestos arquimedeanos, como *la suma de infinitas cantidades finitas da un resultado infinito*, que los estudiantes interpretan en el sentido *siempre que se suma, el resultado es más grande*, aunque notan que *los números que se suman son cada vez más pequeños* o que *la suma crecerá cada vez menos.* Por el contrario, el hecho de introducir recintos que acoten conjuntos o sumas infinitas permite a un cierto número de sujetos hacer valer sus tesis finitistas y establecer las correspondencias pertinentes: el número de células en el cuerpo humano, el número de granos de arena de la Tierra o el número de puntos en el interior de un cuadrado es finito porque se hallan en un contenedor finito: estamos ante el *modelo acotado-finito/no acotado-infinito.* Por último, algunos PEN muestran *discontinuidades* entre niveles, las cuales representan el acceso a un nuevo elemento del esquema conceptual en una parte significativa de la muestra y, con ello, ofrece la posibilidad de analizar la influencia del proceso de aprendizaje.

Para terminar, debemos indicar que entre las tareas de investigación pendientes está la necesidad de efectuar un estudio sistemático sobre la presencia del concepto de infinito en los libros de texto de España, con el fin de delimitar el tipo de elementos asociados que sus contenidos generan en el esquema conceptual. Junto a la formación inicial, es un hecho reiteradamente comprobado que los elementos o imágenes que se difunden en los textos constituyen una participación activa en el proceso de aprendizaje, a través de su interpretación y reelaboración por parte del profesorado. Esto podría justificar la aparición o consolidación de algunos modelos intuitivos identificados en este trabajo y sugerir las modificaciones pertinentes.

También podría resultar de interés analizar qué influencia tiene el uso de software matemático (un aspecto cada vez más habitual en el ámbito docente) como *Derive*, *Waris* y *Cabri*, en la modificación de los modelos intuitivos y los patrones de evolución nivelar. En particular, la relación entre fenómenos o sistemas periódicos y el infinito, o entre inducción e infinito, son aspectos aún no tratados, y su investigación podría arrojar resultados de interés al familiarizar a los estudiantes con una perspectiva actual del infinito. Y, en fin, convendría analizar la influencia de factores como el nivel académico de los sujetos, el contexto sociocultural —conjeturado por Boero et al. (2003)— y los factores emocionales, debido a la dependencia del lenguaje natural en el desarrollo del esquema conceptual del infinito.

Referencias bibliográficas

Ary, D.; Jacobs, L. Ch. y Razavieh, A. (1982). *Introducción a la investigación pedagógica.* México: Interamericana.

Belmonte, J. L. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de Educación Primaria, Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad.* Tesis de doctorado no publicada. España: Universidad de Salamanca.

Boero, P.; Douek, N. & Garuti, R. (2003). Children's conceptions of infinity of numbers in a fifth grade classroom discussion context. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 121-128) Honolulu, Hawaii: University of Hawaii.

Brown, A.; McDonald, M. A. & Weller, K (2008). Step by step: infinite iterative processes and actual infinity. *Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS), Issues in Mathematics Education 15*, 117-144.

Cohen, L.; Manion, L &. Morrison (2007). *Research methods in education*. (6ta. ed.) London, UK: Routledge.

D'Amore B., Arrigo G., Bonilla Estévez M., Fandiño Pinilla M.I., Piatti A., Rodríguez Bejarano J., Rojas Garzón P.J., Romero Cruz J.H., Sbaragli S. (2006). El "sentido del infinito". *Epsilon 22* (2), 65, 187-216.

Dubinsky, E.; Weller, K.; McDonald, M. A. & Brown, A. (2005a). Some historical issues and parodoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis (part 1). *Educational Studies in Mathematics 58* (3), 335-359.

Dubinsky, E.; Weller, K.; McDonald, M. A. & Brown, A. (2005b). Some historical issues and parodoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis (part 2). *Educational Studies in Mathematics 60* (2), 253-266.

Duval, R. (1983). L'osbtacle du dedoublement des objets mahtematiques. *Educational Studies in Mathematics 14*, 385-414.

Falk, R. & Ben-Lavy, Sh. (1989).How big is an infinite set? Exploration of children's ideas. In S. Vergnaud, G. J. Rogalski & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 252-259). Paris: France.

Falk, R. (1994). Infinity: a cognitive challenge. *Theory & Psychology 4* (1), 35-60. doi: 10.1177/0959354394041002.

Falk, R.; Gassner, D.; Ben-Zoor, F. & Ben-Simon, K. (1986). How do children cope with the infinity of numbers? In *Proceedings of the Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 13-18). London, UK: University of London.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company.

Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. *For the Learning of Mathematics* 9 (2), 9-14.

Fischbein, E. (2001). Tacit Models and Infinity. *Educational Studies in Mathematics 48* (2-3), 309-329.

Fischbein, E.; Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The Intuition of Infinity. *Educational Studies in Mathematics 10*, 3-40.

Garbín, S. (2000). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años*. Tesis de doctorado no publicada. España:Universitat Autònoma de Barcelona.

Garbín, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (2), 169-193.

Garbín, S. y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias 20* (1), 87-113.

Jirotková, D. & Littler, G. (2003). Student's concept of infinity in the context of a simple geometrical construct. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 125-132). Honolulu, Hawaii: University of Hawaii.

Jirotková, D. & Littler, G. (2004). Insight into pupils' understanding of infinity in a geometrical context. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 97-104). Bergen, Norway: Bergen University College.

Keeves, J. P. (1988). *Educational research, methodology, and measurement: an international handbook.* New York, USA: Pergamon Press.

Lakoff, G. & Núñez, R. E. (1997). The Metaphorical Structure of Mathematics: Sketching Out Cognitive Foundations for a Mind-Based Mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: analogies, metaphores and images* (pp. 21-89). New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum.

Lakoff, G. & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from?* New York, USA: Basic Books.

Latorre, A.; Del Rincón, D. y Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa.* Barcelona, España: GR92.

Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics 48* (2/3), 239-257. doi: 10.1023/A:1016090925967

Montoro, V. (2005). Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios. *Infancia y Aprendizaje 28* (4), 409-427.

Moreno, L. E. & Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics 22* (3), 211-231. doi: 10.1007/BF00368339

Mura, R. & Maurice, L. (1997). L'infini, un ensemble de nombres? Enquête apures de futurs enseignants et enseignantes. *For the Learning of Mathematics 17* (3), 28-35.

Núñez, R. (1993). Approaching infinity: a view from cognitive psychology. In J. R. Becker & B. J. Pence (Eds.), *Proceedings of the 15th Conference for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 105-111). Pacific Grove, California: International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter.

Penalva, M. C. (1996). *Estudio sobre la comprensión del concepto de número cardinal de un conjunto infinito.* Tesis de doctorado no publicada. España: Universitat de Valéncia.

Sbaragli, S. (2003a). Le convinzioni degli insegnanti elementary sull'infinito matematico (1ª parte). *L'insegnamento della matemática e delle scienze integrate 26* (2), 155-186.

Sbaragli, S. (2003b). Le convinzioni degli insegnanti elementary sull'infinito matematico (2ª parte). *L'insegnamento della matemática e delle scienze integrate 26* (5), 573-588.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques 6* (1), 5-68.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics 18*, 371-397.

Sierra, R. (1988). *Técnicas de investigación social. Teoría y ejercicios*. Madrid, España: Paraninfo.

Tall, D. (1981). Intuitions of infinity. *Mathematics in School 10* (3), 30-33.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: function, limits, infinity, and proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495-511). New York, USA: Macmillan.

Tall, D. (2004). Building theories: the three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics 24* (1), 29-32.

Tall, D. (2007). Devoloping a theory of mathematical growth. *International Reviews on Mathematical Education 39* (1-2), 145-154.

Tall, D. & Tirosh, D. (2001). Infinity–the never-ending struggle. *Educational Studies in Mathematics 48* (2), 129-136.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12* (2), 151-169.

Tirosh, D., Fischbein, E. & Dor, E. (1985). The teaching of infinity. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 501-506). Noordwijkerhout, The Netherlands: State University of Utrecht.

Tirosh, D. & Stavy, R. (1996a). The role of intuitive rules in science and mathematics education. *European Journal of Teacher Education 19* (2), 109-119.

Tirosh, D. & Stavy, R. (1996b). Intuitive rules in science and mathematics: the case of "everything can be divided by two". *International Journal of Science Education 18* (6), 669-683.

Tsamir, P. & Tirosh, D. (1994). Comparing infinite sets: intuitions and representations. In J. da Ponte & J. Matos (Eds), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 345-352). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos epistemológicos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa 1* (1), 107-122.

Autores:

José Luis Belmonte Martínez. Departamento de Matemáticas del I.E.S. "Juan Gris", España, jlbelmonte@educa.madrid.org

Modesto Sierra Vázquez. Facultad de Educación. Universidad de Salamanca, España, mosiva@usal.es