Eduardo Canul, Crisólogo Dolores, Gustavo Martínez-Sierra

DE LA CONCEPCIÓN GLOBAL A LA CONCEPCIÓN LOCAL. EL CASO DE LA RECTA TANGENTE EN EL MARCO DE LA CONVENCIÓN MATEMÁTICA

From global conception to local conception. The case of the tangent line in the framework of mathematical convention.

RESUMEN

El presente escrito muestra los resultados de una investigación que tuvo como objetivo posibilitar la transición de la concepción global (euclidiana) de recta tangente a la concepción local (leibniziana), a través de la convención matemática. Para ello, diseñamos una serie de actividades que indujeran a los estudiantes del nivel superior (18-19 años) a buscar consensos, los cuales les permitieran superar el conflicto cognitivo derivado de la naturaleza contradictoria de la concepción de tangente que *toca* en un punto a la curva con la concepción que admite que la puede *cortar*. Los resultados indican que la mayoría de los estudiantes fueron capaces de superar el conflicto cognitivo mediante el establecimiento una convención matemática que redefine a la tangente euclídea para poner en su lugar a la tangente leibniziana.

PALABRAS CLAVE:

- *Tangente euclideana*
- *Tangente leibniziana*
- *Conflicto cognitivo*
- *Convención matemática*

ABSTRACT

This document shows the results of research aiming to facilitate the transition from the global conception (Euclidean) of the tangent line to the local conception (Leibnizian) through mathematical convention. For this purpose, we designed a series of activities that led higher education students (18-19 years old) to look for consensus, which would allow them to overcome the cognitive conflict resulting from the contradictory nature of the conception of tangent that *touches* a point on the curve with the conception that admits that it can be *cut*. The results indicate that most of the students were able to overcome the cognitive conflict by establishing a mathematical convention that redefines the Euclidean tangent and replaces it with the Leibnizian tangent.

KEY WORDS:

- *Euclidean tangent*
- *Leibnizian tangent*
- *Cognitive conflict*
- *Mathematical convention*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2011) *14* (2): 173-202.
Recepción: Marzo 30, 2010 / Aceptación: Junio 21, 2011.

RESUMO

Este artigo apresenta os resultados de uma investigação cujo objectivo era promover nos alunos a transição da concepção global (euclidiana) para a concepção local (leibniziana) de recta tangente através do uso da convenção matemática. Para este fim, desenvolvemos uma série de atividades que induzem os estudantes de Nível Superior (18-19 anos de idade) desenvolvessem uma actividade matemática que os induzisse na procura de consensos, e que lhes permitisse superar o conflito cognitivo decorrente da natureza contraditória do conceito de recta tangente – "aquela que toca a curva num ponto" com a que "admite que a recta tangente pode cortar a curva". Os resultados indicam que a maioria dos alunos foi capaz de superar o conflito cognitivo mediante o estabelecimento de uma convenção matemática, que redefine a tangente euclidiana colocando no seu lugar a tangente leibniziana.

PALAVRAS CHAVE:

- *Euclidiano tangente*
- *Leibniziana tangente*
- *Conflito cognitivo*
- *Matemática convenção*

RÉSUMÉ

Cette lettre présente les résultats d'une enquête dont l'objectif était de faire la transition vers une conception globale (euclidienne) de la ligne tangente à la conception locale (Leibnizienne) grâce à l'utilisation de la convention mathématique. Pour ce faire, nous avons conçu une série d'activités qui incitent les étudiants à un niveau supérieur (18-19 ans), la recherche d'un consensus qui leur permettrait de surmonter le conflit cognitif résultant de la nature contradictoire de la notion de tangente «touche» à la un point de la courbe avec le concept qui prend en charge qui peut «couper». Les résultats indiquent que la plupart des élèves ont réussi à surmonter le conflit cognitif en dressant une convention mathématique qui redéfinit la tangente euclidienne de mettre en place la tangente leibnizienne.

MOTS CLÉS:

- *Tangente euclidienne*
- *Tangente leibnizienne*
- *Conflit cognitif*
- *Mathématiques Convention*

1. Introducción

Diversos estudios en el área de la Matemática Educativa reportan la existencia de dificultades (Orton, 1983; Hitt, 2003), obstáculos epistemológicos (Sierpinska, 1985; Dolores, 1989; Artigue, 1995) o imágenes conceptuales (Vinner, 1991) que se asocian al aprendizaje de los conceptos matemáticos. Estos fenómenos se producen, indican Cantoral y Farfán (2003), cuando los saberes matemáticos constituidos socialmente en ámbitos no escolares se introducen en el sistema de enseñanza, provocando una serie de modificaciones que afectan tanto su estructura como su funcionalidad. Tal situación ha motivado el desarrollo de investigaciones que estudian la presencia de dichos fenómenos y el desarrollo de propuestas didácticas que permitan mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido, estudios efectuados en la línea de investigación denominada Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV)[1] han desarrollado, por un lado, propuestas didácticas donde se promueve el uso de la estrategia de graficación (Cantoral & Montiel, 2001; Farfán, 2000); por otro, han identificado diferentes fenómenos didácticos, como es el caso de Dolores, Alarcón y Albarrán (2002), quienes detectaron las concepciones alternativas de los estudiantes cuando analizan gráficas de funciones que representan fenómenos físicos.

El aporte principal de estos estudios, en el ámbito educativo, ha sido contribuir en la mejora de los procesos didácticos de las matemáticas; sin embargo, debido a las deficiencias que presentan los estudiantes en su aprendizaje de las matemáticas, como reporta Zavaleta (2009), es necesario llevar a cabo más investigaciones de esta índole, ya que pareciera que los estudiantes acreditan sus cursos de matemáticas sin que ocurran cambios en su aprendizaje.

El presente estudio pretende aportar elementos que permitan adaptar el saber matemático a las prácticas, tanto de los estudiantes como de sus profesores, con el fin de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. De modo particular, centra su atención en el concepto de recta tangente, y comparte la tesis del PyLV que indica que el uso adecuado de un universo de formas gráficas puede contribuir al desarrollo del pensamiento matemático.

Partimos del hecho de que la recta tangente es un concepto que en el contexto escolar provoca fenómenos didácticos que obstaculizan la comprensión del trazo de rectas tangentes a curvas, debido a que los estudiantes[2] e incluso algunos profesores presentan inconsistencias al trazar la recta tangente a

---

1 Para acceder al Pensamiento y Lenguaje Variacional se precisa entre otros aspectos, que haya el manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende (Cantoral y Farfán, 1998).

2 Es frecuente que en los estudiantes que cursan cálculo diferencial, e incluso en quienes ya lo cursaron (y que se supone que saben la relación entre la derivada y la tangente), se susciten contradicciones entre el uso de la derivación algebraica y la interpretación de la derivada como pendiente de la tangente. Pueden derivar usando algoritmos, pero no aceptan que la tangente pueda "cruzar" a la curva cuando se les pide que lleven esos procedimientos al terreno de la interpretación geométrica.

cualquier curva, ya que ocupan la definición global de tangente sin percatarse de que ésta es insuficiente (Orton, 1983; Cantoral, 1988; Dolores, 1989; Vinner, 1991; Castela, 1995; Cantoral & Mirón, 2000; Viseu & Almeida, 2003; Alarcón, Suescún & De la Torre, 2005; Serna, 2007; Pinto & Moreira, 2008). Para superar tales inconsistencias se requiere utilizar una definición de tangente más general, como la concepción leibniziana, que trasciende la concepción global y pone en su lugar una concepción local, donde se acepta que la tangente eventualmente puede cortar a la curva y no sólo tocarla en una vecindad razonablemente pequeña. De este modo la concepción leibniziana establece una nueva definición de curva, ya que la considera como una poligonal de lados infinitesimales. La tangente en este contexto es la prolongación de un lado de la poligonal.

En vista de lo anterior proponemos una secuencia de actividades que hagan posible la transición de la concepción global de tangencia a la concepción local en estudiantes de nivel superior. Asumimos como hipótesis que los alumnos establecerán una *convención matemática* —en el sentido que indica Martínez-Sierra (2005, 2010)— tras realizar las actividades, que estarán orientadas por cuatro etapas: antecedentes, planteamiento del conflicto cognitivo, interiorización del conflicto y superación del conflicto.

Esta investigación puede contribuir a una mejora en la comprensión de la derivada, enfocándola desde su significado geométrico; es decir, como la pendiente de la recta tangente a una curva. De acuerdo con Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) son diversas las perspectivas teóricas que han utilizado los estudios que toman a la derivada como objeto de estudio. Una de ellas se relaciona con los sistemas de representación, en la cual Sánchez-Matamoros *et al.* (2008) plantean interrogantes sobre cómo las diferentes aproximaciones que pueden ser enfatizadas en la enseñanza pueden determinar el entendimiento de la relación entre lo local (derivada en un punto) y lo global (función derivada), así como el papel que cumplen los diferentes modos de representación para favorecer la comprensión de la relación entre lo local y lo global en el desarrollo de la comprensión del esquema de derivada.

Tal planteamiento abre caminos para investigaciones sobre la derivada en diferentes sistemas de representación; uno de ellos, que interesa en este trabajo, es el registro geométrico. En dicho contexto, la derivada se relaciona con la tangente, que tiene al menos dos concepciones: la clásica o global y la local o leibniziana, como es reconocida en esta investigación. Nos interesa, por tanto, estudiar la naturaleza transicional de la tangente, de ahí que proponemos una secuencia de actividades con la que pretendemos favorecer en los estudiantes una comprensión de la derivada en el contexto geométrico, al propiciar la transición entre la concepción global y la local en el trazo de tangentes a curvas.

2. Objetivo de investigación

Algunas investigaciones que toman como objeto de estudio a la recta tangente han diseñando propuestas que buscan mejorar el aprendizaje de la derivada en el plano geométrico, en la construcción de la recta tangente para gráficas de funciones elementales sin el uso de la derivada (Rondero, Karelin & Tarasenko, 2004, 2006; Rondero, Karelin, Tarasenko & Acosta, 2008), en su construcción con el uso de la tecnología (Cantoral y Mirón, 2000) y en su resignificación mediante el análisis de la parte lineal en los polinomios (Rosado y Cordero, 2006). Sin embargo, ninguna nos dice cómo enfrentar o trascender la concepción global de recta tangente para que quede como una reestructuración conceptual estable en los estudiantes (Dolores, 1998). Este último aspecto es lo que distingue la presente investigación de las hechas hasta el momento.

La detección de dichos resultados motivó el diseño de una investigación que tuviera como objetivo posibilitar la transición de la concepción global de recta tangente a la concepción local en estudiantes de nivel superior, a través del establecimiento de una convención matemática. Se espera que la transición ocurra cuando los estudiantes superen el conflicto cognitivo que genera el uso de la concepción euclidiana en el trazo de rectas tangentes a cualquier curva.

3. Concepción euclidiana y leibniziana de tangencia

A finales del siglo IV A.C., en su libro *Elementos de geometría*, Euclides (1970) definió a la tangente de la siguiente manera: *se dice que una recta es tangente al círculo cuando lo toca y prolongada no lo corta*. Con el descubrimiento de las secciones cónicas en el siglo III A.C., los geómetras griegos, en especial Apolonio de Pérgamo, idearon métodos para trazar las tangentes basándose sólo en las propiedades geométricas de estas curvas. Fue así como Apolonio logró extender a las cónicas la concepción de tangencia que Euclides había establecido para el círculo. Sin embargo, al usar esas definiciones había dificultades para aplicar los métodos euclideanos a otra clase de figuras geométricas planas conocidas por los griegos, como la espiral de Arquímedes.

De acuerdo con Cantoral (1988), habría que precisar tres aspectos en la concepción euclidiana de tangencia (*aquella recta que toca a la curva en un único punto*). Primero, el carácter estático de su determinación, pues tanto la curva como la tangente son dadas desde un inicio como lugares geométricos. Segundo, el significado de la palabra *tocar*, que debemos distinguir de *cortar* (Figura 1). Tercero, la concepción global de la tangente, ya que aún cuando una recta es tangente a la curva en un punto, la definición euclidiana pide que la tangente no vuelva a tocar a la curva en un punto alguno, por lejano que se encuentre. Obsérvese que esta condición surgió debido a que el universo de formas, en la Grecia clásica, consistía sólo de unas curvas cónicas, pues en ellas efectivamente ocurre que la tangente toca en un punto y no vuelve a intersectar a la curva. Estas características en conjunto son las que llevaron a la geometría griega al estudio de los procesos infinitos en el cálculo de áreas y no en el de tangentes o, por así decirlo, a concebir ideas del cálculo integral y no del cálculo diferencial.

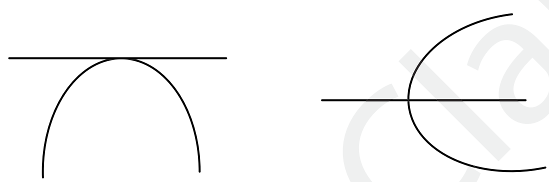


*Figura 1***.** Distinción entre tocar y cortar una curva (Cantoral, 1988).

De acuerdo con Alarcón *et al.* (2005), el desarrollo de la geometría analítica clarificó la relación entre las curvas y las ecuaciones. El hecho de que toda ecuación en dos variables determinara una curva en el plano produjo una verdadera explosión de nuevas curvas, ya que con algunas resultaba inadecuado el concepto griego de tangente. Sin embargo, durante varios siglos se siguió trabajando con el punto de vista estático y global de las curvas y de sus rectas tangentes hasta que, a mediados del siglo XVII, los nuevos métodos fueron estudiados con Descartes, Fermat y otros. Por ejemplo, la *parábola cúbica* que presentamos en la Figura 2 era una curva bien conocida por Fermat, quien se refiere a ella en una carta de 1636 en los términos siguientes:

"… una figura como una parábola, de tal tipo que los cubos de las ordenadas están en proporción con los segmentos que ellas cortan en el diámetro. Esta figura es algo como una parábola y difiere de esta sólo en el hecho de que en la parábola tomamos la razón de los cuadrados, mientras que en esta figura yo tomo la de los cubos. Esta es la razón por la cual M. de Beaugrand, a quien le presenté este problema, la llama parábola cúbica" (Fermat, 1959, p. 611, citado en Alarcón *et al.,* 2005).

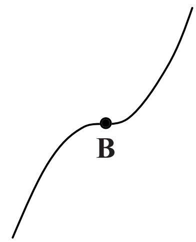


Figura 2. Parábola cúbica.

Con ello surgieron preguntas como la siguiente: *¿Cómo se determina la tangente en el punto B, donde la curva y el diámetro coinciden, si se concibe la tangente como una recta que toca, pero no corta, a la curva?* Dichas interrogantes llevaron a los matemáticos del siglo XVII, como Descartes, Fermat, Roberval, Barrow y Torriccelli, a retomar los métodos de los antiguos griegos con la intención de darse a la tarea de desarrollarlos y aplicarlos para obtener la recta tangente a cualquier curva. Algunos razonaron de manera geométrica, otros lo hicieron con orientación algebraica, y otros introdujeron elementos cinemáticos en su razonamiento (Alarcón *et al.* 2005).

En 1638, el francés Pierre Fermat, con su método para hallar máximos y mínimos, propuso una solución novedosa para el problema de las tangentes, ya que ocupó ideas muy cercanas a las infinitesimales. De acuerdo con Cantoral (1988), en dichos estudios de Fermat se encuentra el germen de la idea de lo que posteriormente será la derivada. Es preciso resaltar que Fermat afirma que la recta tangente aproxima "tan bien", y que el valor sobre la recta es casi igual que el valor sobre la curva en las proximidades del punto de tangencia. Como diríamos hoy en día, la tangente es la mejor aproximación lineal a la curva en el punto de tangencia y en sus *proximidades.* En este trabajo, Fermat pasa de la concepción global de la tangente a la concepción local; es decir, para ser tangente no se requiere que la recta cruce una y sólo una vez a la curva en toda su extensión, sino que ello ocurra en las proximidades infinitesimales del punto. Esa concepción local de tangencia es la que posteriormente adoptó Leibniz en sus estudios.

En 1670, Isaac Barrow siguió un camino parecido al de Fermat y utilizó explícitamente los infinitesimales en la resolución del problema de las tangentes. En su obra *Lecciones de geometría* aparece un procedimiento que considera una curva definida implícitamente por $f(x, y)=0$, un arco infinitamente pequeño MN (ver Figura 3) de coordenadas $M(x, y)$ y $N(x+e, y+a)$, en donde e y a son incrementos infinitesimales de x y de y, respectivamente, de modo que se cumpliera: $f(x+e, y+a)=f(x, y)$. Finalmente, al considerar como iguales el arco infinitamente pequeño y el segmento MN, aplica la semejanza de triángulos

TQM y el triángulo característico MNR, con lo que se obtiene la pendiente *m* de la tangente en M a partir de la expresión $y/s=a/e$, en donde $m=a/e$. Como *e* y *a* son en realidad los diferenciales de *x* y de *y*, respectivamente, su cociente es igual a una nueva función que en lenguaje moderno puede escribirse mediante la expresión $dy/dx=f'(x)$.

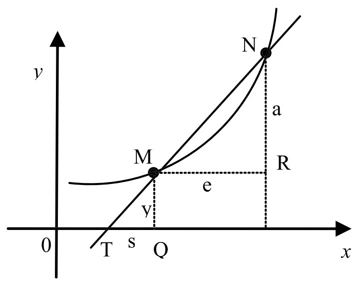
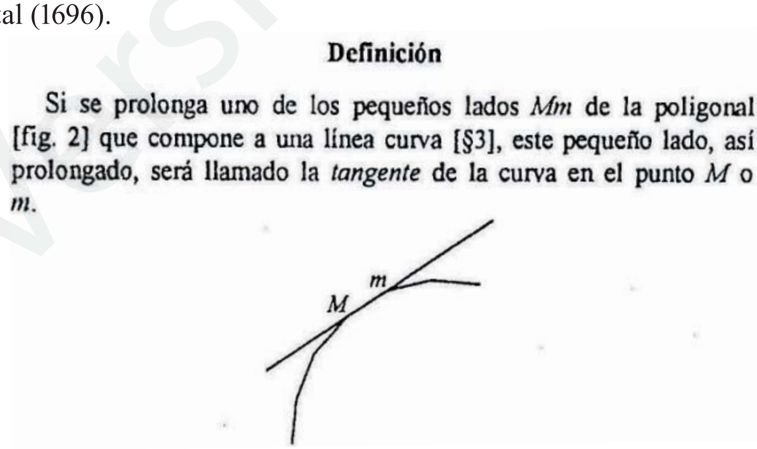


Figura 3. El método de Barrow.

De acuerdo con Edwards (1979), Barrow introduce la idea de que la tangente es la posición límite de líneas secantes cuando *e* y *a* se aproximan a cero, como consecuencia de los métodos descritos anteriormente, y también el concepto de *triángulo característico*, que posteriormente utilizó Leibniz en sus estudios.

El desarrollo de estos métodos para trazar tangente a curvas abrió el camino para la invención del cálculo por parte de Newton y Leibniz en el último tercio del siglo XVII. Con ello surgió la concepción local de tangencia ocupada en el cálculo leibniziano, que apareció en el primer libro de texto de cálculo, *Analyse des infiniment Petits pour l'intelligence des lignes courbes*, publicado por G. F. L'Hospital (1696).



Definición

Si se prolonga uno de los pequeños lados *Mm* de la poligonal [fig. 2] que compone a una línea curva [§3], este pequeño lado, así prolongado, será llamado la *tangente* de la curva en el punto *M* o *m*.

Figura 4. Definición leibniziana de tangencia presentada por L'Hospital (1998).

Esta concepción leibniziana de tangencia es omitida en la mayoría de los libros de texto de cálculo porque privilegian la concepción de tangencia en términos del límite de rectas secantes (Serna, 2007) y porque el concepto de tangente viene como una aplicación del concepto de derivada, no como la idea que origina al concepto (Cantoral, 1988). Para los fines de nuestra investigación, pretendemos que los estudiantes utilicen la concepción leibniziana para trazar rectas tangentes a curvas que no sean cerradas, como las curvas polinomiales que presentaremos en una secuencia de actividades.

Podemos decir que el concepto de recta tangente en un punto fue objeto de estudio de muchos matemáticos a lo largo de la historia. Como ya se mencionó, inició con la concepción griega, establecida por Euclides (siglo III A.C., aproximadamente), y después de muchos siglos fue *modificada* por los matemáticos europeos del siglo XVII (hecho que no fue reportado formalmente por los historiadores) ante el descubrimiento de nuevas curvas, donde se aceptaba que la tangente podría *cortar* y no sólo *tocar* a la curva. Dicho aspecto originó una nueva concepción de tangencia en términos del límite de rectas secantes porque se descubrieron los métodos generales para trazar tangentes a cualquier curva, como producto del desarrollo del cálculo leibniziano, donde se estableció una concepción de tangencia más amplia en el estudio de los infinitesimales, al definirse como la prolongación de un lado de la curva poligonal.

4. Fundamentos teóricos

4.1. *Acerca del conflicto cognitivo*

Los trabajos que presentamos en los nuestros antecedentes señalan que aparecen conflictos cognitivos en actividades donde se involucra el concepto de recta tangente, y pueden permanecer aún después de alguna enseñanza formal donde se aborde dicho concepto. De acuerdo con Aguilar y Oktaç (2004), el conflicto cognitivo se relaciona con un estado de desequilibrio que surge cuando una concepción que tiene un individuo entra en conflicto con otra concepción que lleva el mismo individuo, o bien con el ambiente externo; por ejemplo, el resultado de un experimento o el punto de vista de un compañero.

En cuanto al concepto de recta tangente, el conflicto cognitivo surge en los estudiantes al plantearles una tarea de trazo de tangentes a curvas en puntos de inflexión, ya que se dan cuenta de que al hacer los trazos mediante el uso de la definición euclídea la recta *corta* a la curva y no sólo la *toca.* Sin embargo, con argumentos numéricos y analíticos (apoyándose en la idea de límite) se puede demostrar que el trazo de tangentes en esos puntos es posible. Esto crea un conflicto cognitivo entre la imposibilidad del trazo de la tangente con la definición euclídea y la posibilidad manifiesta si se ocupa la vía analítica.

Para dar continuidad al conocimiento en un proceso de construcción se requiere, en el sentido didáctico, hacer explícita tal contradicción, ya que deja al descubierto la existencia de una ruptura y la necesidad de superarla. En ese sentido, sostenemos como hipótesis que mediante la convención matemática se puede superar la contradicción, al trascender la concepción euclidiana de tangente hacia una concepción leibniziana.

A través del conflicto cognitivo se pretende posibilitar un cambio conceptual intencional en los estudiantes, haciendo que dejen el concepto euclídeo de la recta tangente, formado en la escuela elemental, y utilicen el concepto leibniziano de la recta tangente. De acuerdo con Ferrari y Elik (2003, p. 36), el cambio conceptual intencional se define como el intento deliberado de una persona por lograr un cambio radical de un sistema conceptual a otro, debido a que es seducida por el poder de ese nuevo sistema conceptual, o percibe algún defecto profundo en su visión actual. Para posibilitar un cambio conceptual, se deben tener en cuenta las condiciones siguientes (Pozo, 1996, pp. 243-244):

- El aprendizaje de conceptos científicos no consiste sólo en reemplazar unas ideas cualesquiera por otras científicamente aceptadas, sino que en el aprendizaje existe una cierta conexión genética con la teoría alternativa del alumno y la teoría científica que se le pretende transmitir.
- Para que el alumno pueda comprender la superioridad de la nueva teoría es preciso enfrentarle a situaciones conflictivas que supongan un reto a sus ideas. Es decir, el alumno ha de darse cuenta de que su teoría previa es errónea en ciertas situaciones, ya que le conduce a predicciones que no se cumplen.
- Por último, a partir de lo anterior, puede deducirse que la toma de conciencia por parte del alumno es un paso indispensable para el cambio conceptual. Los conceptos alternativos de los alumnos suelen ser implícitos. Un primer paso para modificarlos será hacerlos explícitos mediante su aplicación a problemas concretos.

Para superar el conflicto cognitivo, se pretende que los estudiantes ocupen como estrategia didáctica una búsqueda de consensos en el trazo de rectas tangentes a curvas. Tal estrategia comparte objetivos establecidos bajo el enfoque enseñanza problémica en ciencias pedagógicas (Colectivo de Especialistas, 1989; Majmutov, 1983), donde se presentan cuatro objetivos didácticos establecidos para crear y superar situaciones problémicas:

- Atraer la atención del alumno hacia la pregunta, tarea o el tema docente para despertar su interés cognoscitivo.
- Plantear la dificultad cognoscitiva que resulte *asequible*, ya que en su superación va intensificando su actividad intelectual.
- Descubrir e interiorizar la contradicción entre la necesidad cognoscitiva que ha surgido y la imposibilidad de satisfacerla mediante los conocimientos, habilidades y hábitos que posee.
- Ayudar al alumno a determinar la tarea cognoscitiva en la pregunta o en el ejercicio y trazar el plan para hallar las vías de solución de la dificultad, lo cual conduce a una actividad de búsqueda.

4.2. *Acerca de la convención matemática*

De acuerdo con Martínez-Sierra (2005, 2008, 2010) la convención matemática es una forma particular de construir conocimiento. En los últimos años, este tema se ha consolidado como una línea de investigación, que estudia la construcción del conocimiento a través de los procesos de articulación y construcción de conceptos matemáticos, a los que se denomina *procesos de convención matemática*. La naturaleza de sus resultados pueden ser englobados en tres rubros: investigaciones de corte epistemológico, sobre fenómenos didácticos y sobre puestas en escena (Martínez-Sierra, 2010). En esta última se ubica el presente estudio.

La convención matemática tiene sentido en la construcción del conocimiento cuando existe una *ruptura* ocasionada por dejar a un lado un significado por otro, que eventualmente es construido para la tarea de integración de un sistema de conocimientos; es decir, implica un cambio en la centración del significado; por ello, el principio de convención matemática posibilita la continuidad, ya que conserva un significado en la tarea de integración. La convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o ruptura de significados. En este sentido, un proceso de convención matemática puede ser entendido como un proceso de búsqueda de consensos en el seno de la comunidad que trabaja por dar unidad y coherencia a un conjunto de conocimientos. La producción de consensos es posible debido a que en esa comunidad existe la actividad intencional de relacionar diversos conocimientos y articularlos en un todo coherente e interrelacionado. En nuestro caso, trabajaremos con una comunidad de estudiantes de nivel superior.

Dentro del contexto escolar, la noción de *convención* se considera de manera usual como una norma a la que hay que atender. En los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, las convenciones forman parte de aquellos objetos y procesos matemáticos como definiciones, axiomas y algoritmos que es necesario que sean memorizados por estudiantes y profesores. En el presente estudio, la convención matemática tendrá una acepción diferente, ya que será el conocimiento matemático construido por los estudiantes, como producto de un proceso de búsqueda de consensos (Martínez-Sierra, 2005, 2010), el cual les permita redefinir la concepción global de recta tangente en términos de una concepción local que conlleve a superar los conflictos cognitivos que genera el trazo de tangentes a curvas.

La búsqueda de consensos se utilizará como una estrategia de aprendizaje que incorpore a la convención matemática en el contexto didáctico. Tal estrategia, fundamentada en las ideas de Pozo (1996), el Colectivo de Especialistas (1989) y Majmutov (1983), estará orientada por cuatro tipos de acciones: antecedentes, planteamiento del conflicto cognitivo, interiorización del conflicto y superación del conflicto.

Los *antecedentes* tienen como objetivo atraer la atención de los estudiantes hacia la pregunta o la tarea para despertar el interés cognoscitivo que impulse su actividad. Lo constituyen todos los ejercicios precedentes que proponen los estudiantes sobre las curvas y sus tangentes.

El *planteamiento del conflicto cognitivo* consiste en hacer explícita tal dificultad, pero que resulte asequible, ya que su superación va intensificando su actividad intelectual. Esto queda de manifiesto al plantear a los estudiantes el trazo de tangentes a curvas en sus puntos de inflexión o que al prolongarlas las cortan. Se establece la diferencia entre *cortar* y *tocar.*

La *interiorización del conflicto* radica en que los estudiantes interioricen que hay una contradicción entre la necesidad cognoscitiva y la imposibilidad de satisfacerla mediante los conocimientos que poseen. No es lo mismo que el profesor exhiba una contradicción a que el estudiante la interiorice. A estos procesos se les suele llamar *interiorización*, donde juegan un papel fundamental los *instrumentos* *de mediación* que son creados y proporcionados por el medio sociocultural. El más importante de ellos, desde la perspectiva vigotskiana, es el lenguaje (oral, escrito y el pensamiento). Para nuestro caso, son las representaciones geométricas de las curvas y sus tangentes. En suma, por internalización se entiende al proceso que implica la transformación de fenómenos sociales considerados externos en psicológicos a través del uso de herramientas y signos. Esta serie de transformaciones psíquicas se sintetizan de la siguiente forma:

- Una operación que inicialmente representa una actividad externa, se construye y comienza a suceder interiormente.
- Un proceso interpersonal queda transformado en otro de carácter intrapersonal.
- La transformación de un proceso interpersonal en un proceso intrapersonal es el resultado de una prolongada serie de sucesos evolutivos.

La *superación del conflicto* consiste en plantear una estrategia de búsqueda de superación del conflicto; en nuestro trabajo recurriremos a la *convención matemática*. Como no se puede seguir utilizando la definición euclídea, que es limitada, se necesita una definición local de tangente que incluya la idea de que es la recta que mejor aproxima a la curva en una zona infinitesimal. Aquí es cuando entra el proceso de consensar una nueva definición mediante la *convención matemática*, la cual se espera que construyan los estudiantes en términos de las condiciones necesarias (matemáticamente aceptadas) para poder trazar una recta tangente a cualquier curva, de tal manera que sea equivalente o deducible de la definición de tangencia propuesta por Leibniz en el libro de L'Hospital (1998).

Este estudio adoptó a la convención matemática como un fundamento teórico, al ser una estrategia de aprendizaje o proceso de superación de conflictos y un producto de las condiciones necesarias para poder trazar una recta tangente a cualquier curva. De esta manera, se asume como hipótesis que la convención matemática permitirá explicar la articulación entre ambas concepciones de tangencia cuando los estudiantes establezcan una especie de *ruptura conceptual*, al redefinir la concepción global de tangencia en términos de una concepción local que permita superar los conflictos cognitivos que se presentan al trazar tangentes a cualquier curva.

5. Metodología

Nuestra investigación está orientada por una secuencia de actividades (A_i con i = 1, 2, …, 5) divididas en cuatro etapas: antecedentes, planteamiento del conflicto cognitivo, interiorización del conflicto y superación del conflicto (ver Esquema 1).

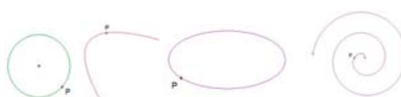
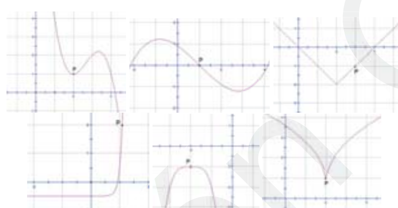
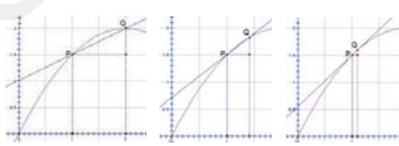
Esquema 1. Las etapas dentro de la secuencia de actividades

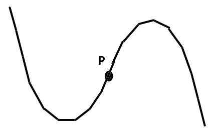
Las actividades tienen la intención de llevar a los alumnos a un conflicto cognitivo y propiciar las bases para superarlo. Se espera que el conflicto ocurra en la etapa de planteamiento del conflicto cognitivo, cuando los estudiantes tracen tangentes a diferentes curvas en el plano cartesiano. Para superarlo, los estudiantes serán orientados a una búsqueda de consensos en la etapa de interiorización del conflicto, y conlleve a proponer una convención matemática en la etapa de superación del conflicto, donde participen todos los integrantes en la secuencia de actividades. En las dos últimas etapas el profesor podrá intervenir para orientar las actividades. La Tabla I presenta una breve descripción de las actividades.

Al término de la Actividad 5, se espera que todos los estudiantes establezcan una convención matemática que permita, mediante la superación de conflictos cognitivos, transitar de la concepción global a la concepción local de recta tangente. Esto formará parte de la etapa de superación del conflicto.

TABLA I

Descripción de las actividades que orientaron la secuencia de actividades

Actividades	*Ejercicios*	*Descripción*
Actividad 1 (etapa de antecedentes)	Traza la recta tangente a las siguientes curvas en el punto *P*. Justifica tu respuesta. 	Pretende que los estudiantes recuerden aspectos esenciales sobre la recta tangente que les fueron enseñados en cursos previos al cálculo diferencial, mediante el trazo de tangentes a ciertas curvas. Los conocimientos que se necesitan son: una noción (global) de recta tangente en un punto. No es necesario conocer a profundidad las propiedades de las secciones cónicas.
Actividad 2 (etapa de planteamiento del conflicto cognitivo)	Traza la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto *P*. Justifica tu respuesta. 	Pretende que los alumnos experimenten un conflicto cognitivo al trazar tangentes en algún punto de las rectas o en puntos (máximos, mínimos, inflexión, “picos”) de ciertas curvas. No es necesario conocer a profundidad las propiedades de dichas curvas. Se espera que los estudiantes empiecen a formular alternativas para solucionar las inconsistencias.
Actividad 3 (etapa de planteamiento del conflicto cognitivo)	Encuentra la pendiente de la recta que pasa por los puntos *P* y *Q* en cada una de las siguientes curvas. Recuerda que la pendiente está dada por: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva que pasa por *P*. ¿Qué relaciones encuentras entre la curva y la recta?	Pretende orientar a los estudiantes al planteamiento de una concepción local de tangencia, identificando la relación entre la recta tangente y la curva alrededor de un punto de tangencia, mediante el análisis de la pendiente de las secantes a la curva. Cabe mencionar que se presentaron las tres curvas con las mismas escalas. Los conocimientos en juego son: el cálculo de la pendiente de una recta, encontrar la ecuación de una recta y una noción de límite. Se espera que los alumnos formulen alternativas para superar el conflicto cognitivo.

Actividad 4 (etapa de planteamiento del conflicto cognitivo)	P Traza la recta tangente a la siguiente curva en el punto P. Justifica tu respuesta  	Pretende que los alumnos reflexionen sobre el aspecto local de las curvas, al trazar la recta tangente en el punto de inflexión de una curva poligonal. Se espera que los estudiantes formulen más alternativas para superar el conflicto.
Actividad 5 (etapa de interiorización del conflicto)	¿Qué condiciones se deben cumplir para poder trazar una recta tangente a cualquier curva?	Pretende que los estudiantes formulen y validen una convención matemática que les permita superar el conflicto cognitivo, analizando y discutiendo (mediante una búsqueda de consensos) los resultados obtenidos en las actividades anteriores, orientados por una pregunta.

5.1. *Procesos metodológicos*

Antes de llevar a cabo la secuencia de actividades en un salón de clases, se hicieron dos pruebas piloto videograbadas con la intención de perfeccionar las actividades mediante los comentarios y sugerencias de los participantes y obtener un diseño final.

Una vez elaborado el diseño final, se llevó a cabo la secuencia de actividades con un grupo de 19 estudiantes, cuya edad media era de 19 años, que cursaban el primer año de la Licenciatura en Matemáticas en la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). A cada estudiante se le entregaron las actividades en hojas impresas (instrumento de investigación) y se le dieron las instrucciones respectivas. La aplicación se realizó en tres módulos de 45 minutos cada uno. Cabe mencionar que, de acuerdo con el horario escolar, la población analizada tenía tres módulos el mismo día, dos consecutivos y otro después de un receso.

En el desarrollo de secuencia, los estudiantes resolvieron las Actividades 1, 2, 3 y 4, correspondientes a la etapa de antecedentes, de manera individual. En la Actividad 5, que se refería a la etapa de planteamiento del conflicto cognitivo, los alumnos llevaron a cabo una búsqueda de consensos en equipos de cuatro o cinco personas, donde discutieron las actividades hechas en la fase de interiorización del conflicto; este ejercicio culminó cuando cada equipo estableció su convención matemática en términos de las condiciones necesarias para trazar una recta tangente a cualquier curva.

Finalmente, con la participación de todo el grupo, bajo la orientación del profesor (Eduardo Canul), se realizó la etapa de superación del conflicto, en la que los estudiantes discutieron sus condiciones establecidas por equipos para establecer una convención matemática de manera grupal sobre las condiciones para trazar tangentes a curvas. El profesor fue el mismo investigador, y su labor consistió en dirigir las actividades de los equipos durante la búsqueda de consensos para aclarar dudas, dar instrucciones, cuestionar a los estudiantes sobre las actividades realizadas, guiar las discusiones en caso de ser necesario y orientar la convención matemática. Para obtener evidencia y efectuar un análisis respectivo de las actividades realizadas por los estudiantes, se videograbó la sesión de clase.

6. Análisis de resultados

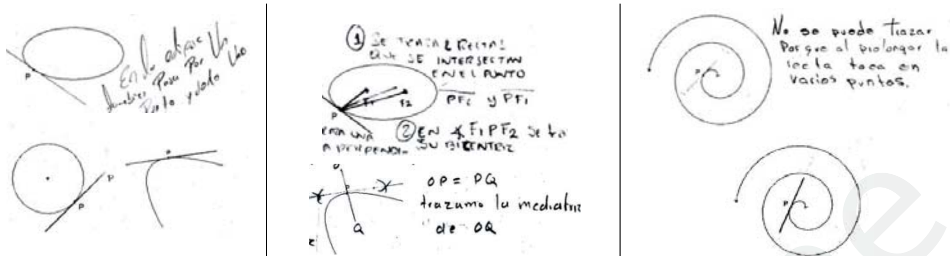
A continuación, explicaremos los resultados obtenidos en el estudio mediante un análisis cualitativo de las producciones verbales y escritas[3] que generaron los estudiantes. Las etapas de antecedentes y planteamiento del conflicto cognitivo, interiorización del conflicto y superación del conflicto, serán nuestro eje principal para el reporte.

6.1. *Fases de antecedentes y planteamiento del conflicto cognitivo*

Las producciones escritas de los estudiantes reflejan que al inicio de las actividades utilizaron la concepción euclidiana de tangencia. Por ejemplo, en la Actividad 1 algunos trazaron rectas que pasan por un solo punto en la parábola, la elipse y la espiral. Otros utilizaron métodos específicos o intuitivos para trazar tangentes. Con ello, notamos que los alumnos extrapolaron la definición euclidiana de tangencia a otras curvas, como hicieron los matemáticos griegos

3 Llamamos *producciones verbales* a los diálogos generados por los estudiantes en el desarrollo de las actividades, y *producciones escritas* a los argumentos que los estudiantes escribieron en el instrumento de investigación.

de la Antigüedad Clásica. Este aspecto marcó el inicio de un *conflicto cognitivo* en los estudiantes cuando se les pidió que trazaran una tangente a la espiral.



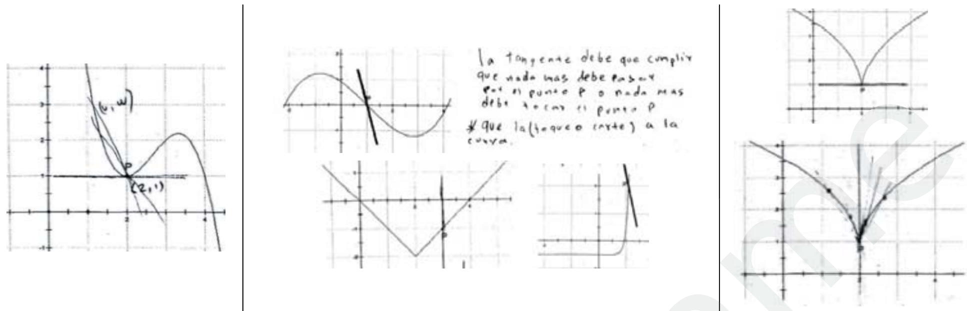
Trazaron la tangente	Utilizaron métodos específicos para trazar tangentes	Trazaron la tangente sin prolongar o no la trazaron

Figura 5. Concepción euclidiana de tangencia en los estudiantes

Los métodos que utilizaron los estudiantes para trazar tangentes a curvas fueron las construcciones que les enseñaron en sus cursos; por ejemplo, en el caso de la circunferencia trazaron una recta perpendicular al radio que pasara por el punto indicado. Algunos mostraron indicios de ocupar métodos intuitivos, lo cual se pudo deber a las deficiencias en el aprendizaje y/o en la aplicación de los métodos; por ejemplo, un estudiante trazó la tangente a la parábola dibujando la *mediatriz* a una recta que intersectaba el punto solicitado (ver Figura 5). Lo mismo sucedió en el caso de la espiral y en las demás curvas presentadas, ya que algunos alumnos trazaron la tangente utilizando o intentando un método intuitivo. El hecho de que algunos no trazaron la tangente se pudo deber a que no encontraron o recordaron algún método específico.

El conflicto cognitivo también se hizo presente, entre otras cosas, cuando los estudiantes usaron la concepción global de tangencia o la concepción de tangencia en términos del límite de rectas secantes para trazar tangentes a cualquier curva. En cuanto al empleo de la concepción euclidiana de tangencia, podemos decir que los limitó a trazar tangentes a ciertas curvas. Por ejemplo, en la Actividad 2, decían que en la primera curva *cúbica* de la Actividad 2 *no es tangente aquella recta que al prolongarla toca a la curva en otro punto*, y en la curva *valor absoluto* mencionaban que *no se puede trazar una tangente a una recta porque tocaría en varios puntos.*

La concepción global también provocó que algunos estudiantes trazaran una tangente en puntos donde no existía, como en la sexta curva *con pico.* Por otra parte, el uso de la concepción de tangencia como el límite de rectas secantes hizo que los estudiantes dibujaran tangentes sin seguir correctamente la trayectoria de la curva o en puntos donde no era posible que se trazara. Por ejemplo, algunos estudiantes trazaron la tangente a la curva *con punto de inflexión* de la Actividad 2 y a la curva poligonal de la Actividad 4 sin percatarse de la trayectoria de la curva, y otros trazaron una tangente vertical en la sexta curva *con pico* (ver Figura 6).



Trazaron sin prolongar | Trazaron sin seguir la trayectoria de la curva | Erraron al trazar la tangente

Figura 6. Conflictos cognitivos generados por la concepción euclidiana de tangencia.

Las Actividades 3 y 4 de esta fase no cumplieron con el objetivo de guiar a que los estudiantes para que transitaran de la concepción global a la concepción local de tangencia, ya que los resultados de la Actividad 3 indican que, en lugar de hallar alguna relación geométrica que orientara una concepción local de tangencia, se preocuparon por encontrar relaciones algebraicas en términos del límite para justificar sus respuestas, mientras que los pocos argumentos escritos en la Actividad 4 no permite concluir si los estudiantes reflexionaron sobre el aspecto local de las curvas. Con respecto a la Actividad 3, la mayoría de los alumnos ocuparon los datos que presentaban las gráficas y la fórmula proporcionada. Algunos mostraron dificultades numéricas al calcular la pendiente (ver Figura 7).

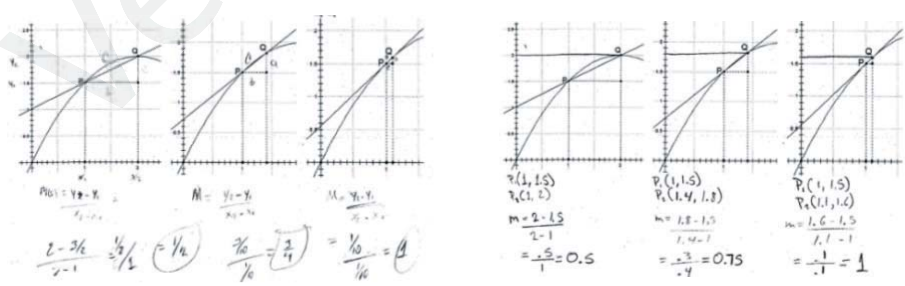


Figura 7. Producciones escritas de los estudiantes al resolver la Actividad 3.

Ningún estudiante encontró la ecuación de la recta tangente a la curva, algunos tuvieron dificultades algebraicas y en la sustitución de valores, mientras que otros no contestaron. Esto refleja la escasa relación que establecieron entre las condiciones gráficas dadas, las propiedades analíticas de las tangentes y las curvas mismas.

Sólo siete estudiantes respondieron la pregunta que pedía hallar la relación entre la recta y la curva, argumentando que la pendiente de la tangente era el límite de las pendientes de las secantes, escribiendo la fórmula para calcular la derivada de una función $f(x)$, o que la tangente sólo tocaba en un punto a la curva. Los demás no contestaron. Estos datos indican que los alumnos se centraron en encontrar relaciones algebraicas en términos del límite de una función para justificar sus respuestas, en lugar de hallar alguna relación gráfica que los orientara a una concepción local de tangencia; por ejemplo, argumentar que la recta se parecía a la curva alrededor del punto de tangencia. Así mismo (ver Figura 8), se observa que algunos estudiantes se resistieron a la concepción global de tangencia, ya que argumentaron que la tangente sólo tocaba a la curva en un punto.

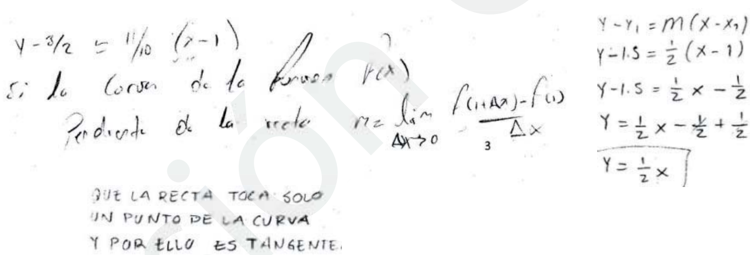
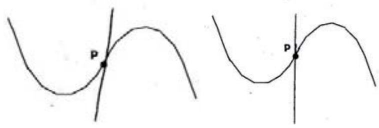
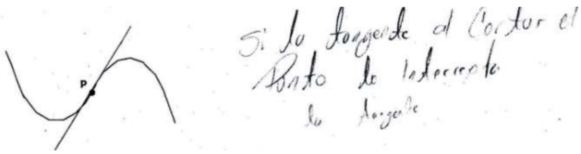


Figura 8.
Producciones escritas al establecer la relación entre una curva y su tangente.

En referencia a la Actividad 4, algunos estudiantes trazaron correctamente la tangente a la poligonal. Uno de ellos argumentó que la tangente *interseca* a la curva. Otros trazaron una recta que pasó por el punto de tangencia sin que siguiera la trayectoria de la curva; tres de ellos concibieron a la tangente como el límite de las secantes. Cinco estudiantes no trazaron la tangente; uno de ellos argumentó que no se podía trazar la tangente a la curva. La carencia de argumentos escritos no permite concluir si algunos estudiantes reflexionaron en esta actividad sobre el aspecto local de las curvas.



Trazaron sin seguir la trayectoria de la curva



Trazaron correctamente

Figura 9. Producciones escritas de los estudiantes al resolver la Actividad 4.

De manera general, las actividades de estas etapas (antecedentes y planteamiento del conflicto cognitivo) cumplieron con el objetivo de interiorizar el conflicto cognitivo que generó el trazo de tangentes a ciertas curvas. Sin embargo, los estudiantes también formularon alternativas para solucionar dicho conflicto, las cuales se presentaron en la etapa de interiorización del conflicto.

6.2. *Fase de interiorización del conflicto*

Esta etapa inició con la Actividad 5. Se pretendía que los estudiantes, en equipos, establecieran una búsqueda de consensos que permitiera superar el conflicto cognitivo presentado en las actividades anteriores. Para ello, se formaron cuatro equipos, tres de cinco integrantes y uno de cuatro, y se les formuló la siguiente pregunta con el fin de orientarlos: *¿Qué condiciones se deben cumplir para poder trazar una recta tangente a cualquier curva?*

Los estudiantes intercambiaron comentarios con los miembros de su equipo, por lo cual debatieron sobre los argumentos planteados en las actividades anteriores. A continuación, presentaremos algunas producciones de los equipos. En adelante, nombraremos con la Eij al i-ésimo estudiante del j-ésimo equipo, y con P al profesor.

Las producciones verbales indican que los estudiantes, durante la búsqueda de consensos, formularon algunas condiciones para poder trazar rectas tangentes a cualquier curva. Cuando analizaron lo que sucedía al prolongar la recta tangente en las curvas, un integrante del *Equipo 1* dijo lo siguiente:

E11: […] No es tangente (la recta en su prolongación)

P: ¿Entonces?

E11: Es tangente a la curva solamente en un punto.

Es decir, el alumno señaló que las curvas sí tienen tangente, no importando lo que suceda al prolongarse, como en el caso de las curvas *cúbicas.* Los integrantes del *Equipo 2* mencionaron que no sería tangente aquella recta que toca a la curva en más de un punto:

E22: No es tangente porque corta así (con la mano gesticula la prolongación de la tangente)…

E32: Si estuviera afuera, sí (refiriéndose a que la tangente toque a la espiral del dibujo en un punto donde al prolongarla no la vuelva a cortar).

Los integrantes del *Equipo 3* afirmaron que no sería tangente aquella recta que toca a la curva en más de un punto, sino que sería secante:

E53: Sí, es decreciente […] entonces se supone que al momento de extenderse es aquella recta que toca en dos puntos…

E13: Entonces esa definición sería de secante… ya no sería tangente […]

E33: Pero es que, independientemente de cómo se trace la tangente, de todas formas en cualquier punto de este segmento va a llegar a cortar (señalando la prolongación de la tangente), y sería secante, ¿no?

Las formulaciones de los tres equipos muestran una falta de homogeneidad en los argumentos. Los razonamientos del *Equipo 1* son cercanos al conocimiento matemático aceptado, mientras que los Equipos 2 y 3 no tanto.

Con respecto a las gráficas analizadas, en particular de las funciones cuadráticas y cúbicas, un integrante del *Equipo 1* dijo:

E11: Es que para decir que (la tangente es la recta que) toca sólo en un punto a la función, si la función es cuadrática.

Para el caso de las rectas, integrantes de los *Equipos 2* y *3* mencionaron que las rectas sí tenían tangente:

E22: Porque sería la misma recta (haciendo alusión a la tangente de la curva *valor absoluto* de la Actividad 2), […], también en éste, nada más que toca en varios puntos (señala la tangente en el punto máximo de la quinta curva *parábola* de la Actividad 2).

E13: En ese punto… yo pienso que esa será la propia tangente (haciendo alusión a la tangente en la curva *valor absoluto*).

Los alumnos E22 y E13 señalaron en sus respectivos equipos que la tangente a una recta es la misma recta y, por tanto, puede tocar a más de un punto (infinitamente cercano al punto de tangencia), como en los puntos donde la curva tiene *tramos* rectos.

El análisis de las actividades hechas en la fase de antecedentes orientó a que los estudiantes formularan métodos que les permitieran trazar tangentes a diversas curvas. Por ejemplo, para las cónicas, los integrantes del *Equipo 2* comentaron:

E32: Yo tracé una línea perpendicular al radio (para construir la tangente en un círculo).

E12: Yo también hice lo mismo, y aquí no sabía qué poner (para construir una tangente a la parábola).

E22: Eso es lo mismo (hace referencia al método usado en la circunferencia).

Para las curvas no cónicas, el *Equipo 1* mencionó:

E21: Apenas la iba a trazar (la tangente), es que estaba recordando lo de (menciona a un autor)... pero aún así.

E11: Pero lo de él fue con una hipérbola…

E21: Casi (y traza la recta tangente a una curva en su punto de inflexión), pero no se sabe la propiedad.

De estos últimos argumentos, notamos que los estudiantes trataron de inventar métodos intuitivos para trazar tangentes a curvas no cónicas, puesto que sólo habían visto métodos para trazar tangentes a las cónicas.

Los estudiantes también formularon concepciones de tangencia distintas a la euclidiana. Por ejemplo, los *Equipos 1* y *3* adoptaron la concepción que propuso un integrante de su equipo.

E11: Recuerdo que una curva (dibuja una curva *cúbica*) estaba así, y que estaba formada por pequeños segmentos *tapaditos* y separados que se acostaban, ¿verdad?

E13: Yo pienso que esta será la tangente porque será el límite de toda esta sucesión de secantes (hace alusión a la curva *con punto de inflexión* de la Actividad 2).

En este diálogo, el *Equipo 1* propuso una concepción euclidiana de recta tangente, mientras que el *Equipo 3* planteó una concepción de tangencia en términos del límite de secantes. Ambas ideas fueron alternativas para superar los conflictos cognitivos generados y orientaron a todo el grupo para establecer las condiciones finales.

La evidencia presentada en las discusiones grupales muestra que algunos estudiantes intentaron validar algunas formulaciones. Por ejemplo, en el *Equipo 1*, al analizar la distinción entre *tocar* y *cortar* a una circunferencia y a una curva cualquiera, un alumno trató de convencer a sus compañeros cuando mencionó:

E11: Esta es tangente porque… ésta intersecta (señala la recta secante), y ésta toca (señala la recta tangente). Ésta toca y ésta intersecta (señala el ejemplo en una curva *cúbica*)

En cuanto a las condiciones que planteó el *Equipo 2*, dos integrantes expusieron argumentos opuestos para convencer a sus compañeros acerca de que si las curvas que tienen *tramos* rectos alrededor de un punto tienen tangente en dicho punto (como el caso de la curva *parábola* de la Actividad 2).

E32: (No tiene tangente)… si fuera curva… pero es recta hasta acá… es recta (señala alrededor del punto *P* de la curva *parábola* de la Actividad 2), y aquí hay más puntos, no nada más el sería el punto *P*, también podrían ser otros puntos aquí (dibuja un punto cercano al punto *P*).

E12: (Sí tiene tangente)… es que sí toca ese punto, y aquí nomás está determinando ese punto y sí toca ese punto de la tangente.

Al discutir si las rectas tienen tangente, un integrante del *Equipo 3* trató de convencer a sus compañeros de que la tangente a una recta es la misma recta, cuando analizaron la tangente a la curva *valor absoluto* de la Actividad 2:

E13: Es recta… y si es recta, su pendiente de la tangente… es recta también la misma tangente.

A partir de ello, los estudiantes del *Equipo 3* comenzaron a ampliar su concepción de tangencia, al mencionar otras curvas que sí tienen tangente, pues decir que la tangente a una recta es la misma recta implica que la tangente puede tocar en más de un punto.

En cuanto a las concepciones de tangencia que se formularon, un integrante del *Equipo 1* trató de convencer a su equipo de la concepción leibniziana de tangencia:

E11: Y aquí van siguiendo la forma de la curva (traza las tangentes *pequeños segmentos de recta* sobre la curva), no haces esto (traza una recta que corta a la curva en un punto de tangencia, sin que siga la forma de la curva) […] donde la *roza*, de manera que todas las tangentes por un punto que sigan forman la curva.

Por su parte, un integrante del *Equipo 3* validó la necesidad de extender la definición de tangencia, al concebirla como el límite de rectas secantes:

E13: Lo que nosotros pusimos es que la tangente es el límite de una sucesión de secantes. Por ejemplo, aquí una secante en el punto *P* se convierte tangente en el punto *P*, independientemente si corta otro punto, o sea, el que la corte nada más en un solo punto no es una definición *fuerte*.

Extender la definición de tangencia representa un argumento para superar los conflictos cognitivos en los estudiantes, ya que permitiría trascender de la concepción euclidiana tangencia (definición no *fuerte*) a una concepción más general.

El hecho de que algunos integrantes de los equipos no validaran sus resultados fue porque no habían terminado sus actividades de la fase de planteamiento del conflicto cognitivo. Debido a que hicieron sus argumentaciones durante la búsqueda de consensos, esto impidió que algunos estudiantes escribieran las condiciones solicitadas y/o propusieran una nueva definición de tangencia. El *Equipo 4* fue uno de esos equipos, y para los fines de esta investigación no presentó mucha información relevante.

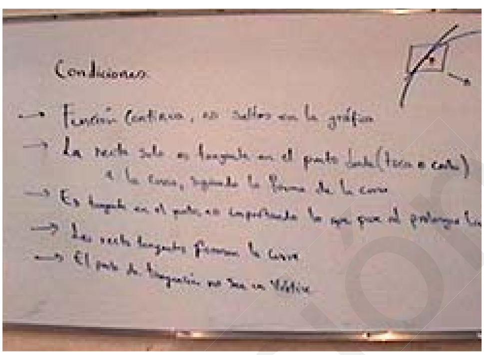
Las discusiones realizadas en la fase de interiorización del conflicto llevaron que los equipos establecieran condiciones para poder trazar rectas tangentes a cualquier curva; sin embargo, como muestran las producciones verbales y escritas, no todas fueron correctas. Por ejemplo la condición de que la recta tangente debe tocar un solo punto de la curva, establecida por el *Equipo 4.* Para subsanar dichas convenciones incorrectas en el sentido matemático y generar homogeneidad en los estudiantes planeamos una discusión grupal, bajo la orientación del profesor, en la fase de superación del conflicto.

6.3. *Fase de superación del conflicto*

La discusión grupal orientó a que los estudiantes establecieran las condiciones finales para poder trazar rectas tangentes a curvas. En particular, las participaciones de los *Equipos 1* y *3* fueron relevantes para que los estudiantes superaran el conflicto cognitivo, ya que el *Equipo 1* presentó argumentos leibnizianos de tangencia, cuando argumentaron que los *pequeños segmentos tapaditos y separados* orientan y forman a la curva, mientras que el *Equipo 2* concibió a la tangente como el límite de rectas secantes. De hecho, como ya dijimos, un integrante de este último equipo mencionó la necesidad de extender la concepción euclidiana de tangencia, al decir que no era una definición *fuerte*.

El profesor orientó la discusión grupal en esta etapa. Partió del análisis de las gráficas de la Actividad 2 debido a que fueron las que causaron conflictos cognitivos. Para la superación del conflicto, tomó en cuenta tanto las opiniones de los estudiantes como las Actividades 3 y 4, diseñadas con tal fin. El análisis de las actividades muestra que los alumnos tuvieron mayores dificultades para identificar la *rectitud local* de las curvas. De hecho, fue la última condición que presentaron y a la que dedicaron más tiempo.

La convención matemática o condiciones finales que establecieron los estudiantes fueron las siguientes:



Condiciones

- Función continua, no saltos en la gráfica
- La recta sólo es tangente en el punto donde (toca o corta) a la curva, siguiendo la forma de la curva
- Es tangente en el punto, no importando lo que pase al prolongarse
- Las rectas tangentes forman la curva
- El punto de tangencia no sea un vértice

Figura 10. Convención matemática establecida por los estudiantes.

Con estas condiciones los estudiantes trazaron correctamente las tangentes a ciertas curvas, como en la espiral y en las curvas de la Actividad 2, y justificaron el hecho de no trazar tangentes en puntos donde las curvas tienen *picos.* Estos dos aspectos forman parte de la evidencia de que los alumnos superaron el conflicto cognitivo que generó el trazo de rectas tangentes. En términos del marco teórico adoptado, las condiciones establecidas, al ser producto de la búsqueda de consensos presentada en la fase de interiorización del conflicto, conforman la convención matemática.

7. Conclusiones

La secuencia de actividades que aplicamos mostró que la mayoría de los estudiantes interiorizaron el conflicto cognitivo que genera el uso de la concepción euclidiana de tangencia en el trazo de rectas tangentes curvas. El conflicto se presentó en los estudiantes cuando trabajaron de manera individual en la fase de planteamiento del conflicto cognitivo y por equipos en la fase de interiorización del conflicto.

Las formulaciones que propusieron los estudiantes los llevaron a establecer una convención matemática en términos de las condiciones necesarias para trazar rectas tangentes a curvas, la cual fue producto de la estrategia de búsqueda de consensos en la fase de interiorización del conflicto. De esta manera, se posibilitó que los estudiantes superaran el conflicto cognitivo que generó el trazo de tangentes a las curvas de la Actividad 2 y transitaran de la concepción global a la concepción local de recta tangente en la etapa de superación del conflicto.

Los resultados de este estudio abren el camino para desarrollar investigaciones que permitan superar la presencia de fenómenos didácticos asociados a la enseñanza y aprendizaje de la recta tangente. Consideramos que una iniciativa para mejorar nuestros resultados consiste en rediseñar la secuencia de actividades, a fin de realizar posibles reproducciones que permitan hacer ajustes o incorporar los resultados de otras investigaciones en busca de una secuencia de actividades más estable.

Referencias bibliográficas

Aguilar, P. y Oktaç, A. (2004). Generación del conflicto cognitivo a través de una actividad de criptografía que involucra operaciones binarias. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 7*(2), 117-144.

Alarcón, S.; Suescún, C. y De la torre, A. (2005). El método de las tangentes de Fermat. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria 13*(2), 101-124.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (1988). Historia del cálculo y su enseñanza: Del trazado de tangentes al concepto de derivada. En F. Hitt, O. Figueras, L. Radford y E. Bonilla (Eds.), *Memorias de la Segunda Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (pp. 381-386). Guatemala, Guatemala.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon 42*, 353-369.

Cantoral, R. y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(3), 265-292.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Prentice Hall.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2003). Mathematics education: a vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics 53(3),* 255-270.

Colectivo de Especialistas del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas del Ministerio de Educación de Cuba (1989). *Pedagogía.* La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieues-un exemple concret, celui da la tangente. *Recherches en Didactique des Mathématiques 15*(1), 7-47.

Dolores, C. (1989). Algunos obstáculos epistemológicos relativos a la noción de derivada. En F. Hitt, O. Figueras, L. Radford y E. Bonilla (Eds.), *Memorias de la Tercera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (pp. 391–396). San José, Costa Rica.

Dolores C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de Cálculo Diferencial. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática educativa II* (pp. 257-272). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C.; Alarcón, G. y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5*(3), 225-250.

Edwards, C. (1979). *The historical development of the calculus*. New York, USA: Springer-Verlag.

Euclides (1970). Elementos de geometría. En F. Vera (Ed.), *Científicos griegos 1*. Madrid, España: Aguilar.

Farfán, R. (2000). Lenguaje algebraico y percepción espacial. Un estudio de funciones pretextando la resolución de desigualdades. En R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanis, A. Rodríguez y A. Garza (Eds.), *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp. 89-144), México: Trillas.

Ferrari, M., & Elik, N. (2003). Influences on intentional conceptual change. In G. Sinatra & P. Pintrich (Eds.), *Intentional conceptual change* (pp. 21-54). Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Décimo Primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Superior.* Morelia, Michoacán: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

L´Hospital, A. (1696). *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris, France: ACL-Editions.

L´Hospital, A. (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. México: UNAM.

Majmutov, M. I. (1983). *La enseñanza problémica*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Martínez-Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8*(2), 195-218.

Martínez-Sierra, G. (2008). From the analysis of the articulation of the trigonometric functions to the corpus of eulerian analysis to the interpretation of the conceptual breaks present in its scholar structure. In R. Cantoral, F. Fasanelli, A. Garciadiego, R. Stein. & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the HPM 2008. History and Pedagogy of Mathematics*. The HPM Satellite Meeting of ICME 11.

Martínez-Sierra, G. (2010). Los estudios sobre los procesos de convención matemática: una síntesis metódica sobre la naturaleza de sus resultados. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(4)*, 269-282*.

Orton, A. (1983). Students understanding of differentiation. *Educational Studies Mathematics 14*(3), 235-250.

Pinto, M. & Moreira, V. (2008). School practices with the mathematical notion of tangent line. In A. Watson & P. Winbourne (Eds.), *New directions for situated cognition in mathematics education* (pp. 262-285). USA: Springer.

Pozo, J. I. (1996). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Rondero, C.; Karelin, O. y Tarasenko A. (2004). Métodos alternativos en la búsqueda de los puntos críticos y derivadas de algunas funciones. En L. Díaz Moreno (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*, 821-827. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rondero, C.; Karelin, O., y Tarasenko A. (2006). Propuesta didáctica sobre la construcción de la recta tangente sin el uso de la derivada. En G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*, 386-391. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rondero, C.; Karelin, O.; Tarasenko A. y Acosta, J. (2008). Un estudio sobre la recta tangente en puntos de inflexión desde la articulación de saberes. *Resúmenes de la Vigésimo Segunda Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, DF.

Rosado, M. y Cordero, F. (2006). Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica. En G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*, 793-799. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sánchez-Matamoros, G.; García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11*(2), 267-296.

Serna, L. (2007). *Estudio socioepistemológico de la tangente*. Tesis de Maestría no publicada. México: CICATA-IPN.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques 6*(1), 5-67.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers.

Viseu, F. & Almeida, C. (2003). Interpretacao gráfica do conceito de recta tangente a uma curva num ponto por profesores estagiários. *Revista Portuguesa de Educacao 16*(2), 197-220.

Zavaleta, A. (2009). Evaluación del currículum matemático escolar aprendido. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 141-149. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Autores:

Eduardo Rafael Canul Pech. Benemérita y Centenaria Escuela Normal de Educación Primaria "Rodolfo Menéndez de la Peña", México, educanul@gmail.com

Crisólogo Dolores. Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE), UAG, México, cdolores@prodigy.net.mx

Gustavo Martínez-Sierra. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México, gmartinezsierra@gmail.com