Lianggi Espinoza Ramírez, Andrea Vergara Gómez

ENSEÑANZA INTERDISCIPLINARIA MÚSICA-MATEMÁTICA: LA GUITARRA Y SU ROL PROTAGÓNICO EN EL DESARROLLO HISTÓRICO DE LA MÚSICA OCCIDENTAL

Interdisciplinary Music-Mathematics teaching: the guitar and its leading role in the historical development of western music

RESUMEN

El temperamento igual es la afinación estándar de instrumentos en Occidente y ha delineado nuestra actual manera de concebir la música. El propósito de esta investigación es explorar cómo los conocimientos puestos en uso y significados asociados al surgimiento histórico del temperamento igual en instrumentos antecesores a la guitarra pueden contribuir a un enfoque interdisciplinario para el aprendizaje de la matemática y la música. Para esto se realizó un análisis interpretativo del contenido del libro *Armonía universal* de Mersenne de 1637, y se estudió el proceso de génesis y desarrollo en el siglo XVI de los saberes presentes en este libro. Los resultados revelan que es posible repensar la enseñanza de algunos contenidos geométricos a nivel escolar, como el teorema de Euclides y la progresión geométrica, a partir del problema de la división proporcional del mástil de la guitarra. Se revela, además, que la noción de autosimilitud permitiría generar propuestas didácticas interdisciplinarias, que propicien una vinculación transversal entre la Matemática y la Música.

PALABRAS CLAVE:

- *Temperamento igual*
- *Relación Música-Matemática*
- *Guitarra*
- *Autosimilitud*

ABSTRACT

Equal temperament is the standard tuning for instruments in the West and has shaped our current way of thinking about music. The purpose of this research is to explore how the knowledge put to use and the meanings associated with the historical emergence of equal temperament, in instruments that preceded the guitar, can contribute to an interdisciplinary approach to learning mathematics and music. For this, an interpretative analysis of the content of the book Mersenne's Universal Harmony of 1637 was carried out, and the process of genesis and development in the 16th century of the knowledge present in this book was studied. The results reveal that it is possible to rethink the teaching of some geometric contents at school level, such as Euclid's theorem and geometric progression,

KEY WORDS:

- *Equal temperament*
- *Music-Math relationship*
- *Guitar*
- *Self-similarity*

Espinoza Ramírez L. y Vergara Gómez A. (2023). Enseñanza interdisciplinaria Música-Matemática: la guitarra y su rol protagónico en el desarrollo histórico de la música occidental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 26*(1), 13 - 46. https://doi.org/10.12802/relime.23.2611. Recepción: Enero 29, 2021 / Aceptación: Agosto 12, 2023

based on the problem of the proportional division of the guitar neck. We also conclude that the notion of self-similarity would allow the generation of interdisciplinary didactic proposals that foster a transversal link between Mathematics and Music.

RESUMO

O temperamento igual é a afinação padrão para instrumentos no Ocidente e moldou nossa maneira atual de pensar sobre música. O objetivo desta pesquisa é explorar como o conhecimento posto em prática e os significados associados ao surgimento histórico do temperamento igualitário, em instrumentos que antecederam o violão, podem contribuir para uma abordagem interdisciplinar da aprendizagem da matemática e da música. Para isso, realizou-se uma análise interpretativa do conteúdo do livro A Harmonia Universal de Mersenne de 1637, e estudou-se o processo de gênese e desenvolvimento no século XVI do conhecimento presente neste livro. Os resultados revelam que é possível repensar o ensino de alguns conteúdos geométricos no nível escolar, como o teorema de Euclides e a progressão geométrica, a partir do problema da divisão proporcional do braço do violão. Concluímos também que a noção de auto-semelhança permitiria a geração de propostas didáticas interdisciplinares que fomentassem um vínculo transversal entre a Matemática e a Música.

PALAVRAS CHAVE:

- *Temperamento igual*
- *Relação Música-Matemática*
- *Violão*
- *Autossimilaridade*

RÉSUMÉ

Le tempérament égal est l'accordage standard des instruments en Occident et a façonné notre façon actuelle de penser la musique. Le but de cette recherche est d'explorer comment les connaissances mises en œuvre et les significations associées à l'émergence historique du tempérament égal, dans les instruments qui ont précédé la guitare, peuvent contribuer à une approche interdisciplinaire de l'apprentissage des mathématiques et de la musique. Pour cela, une analyse interprétative du contenu du livre L'Harmonie universelle de Mersenne de 1637 a été réalisée, et le processus de genèse et de développement au XVIe siècle des connaissances présentes dans ce livre a été étudié. Les résultats révèlent qu'il est possible de repenser l'enseignement de certains contenus géométriques au niveau scolaire, comme le théorème d'Euclide et la progression géométrique, à partir du problème de la division proportionnelle du manche de la guitare. Nous concluons également que la notion d'auto-similarité permettrait de générer des propositions didactiques interdisciplinaires favorisant un lien transversal entre les mathématiques et la musique.

MOTS CLÉS:

- *Tempérament égal*
- *Relation Musique-Mathématiques*
- *Guitare*
- *Autosimilitude*

1. Introducción

La educación integrada o interdisciplinar es un enfoque que responde a las demandas del siglo XXI. Si bien existen distintas perspectivas, es posible identificar propósitos comunes: conectar conocimientos y habilidades de distintos dominios, promover el aprendizaje auténtico, fomentar métodos centrados en el estudiante para la resolución de problemas, y considerar las motivaciones y contextos de la comunidad educativa (Chi, 2021). Un enfoque interdisciplinario implica un intercambio y confrontación entre dos o más disciplinas, es decir, busca la interacción y el enriquecimiento mutuo (Ander-Egg, 1999). De ahí la dificultad que involucra generar situaciones de aprendizaje que realmente fomenten relaciones interdisciplinarias. La Educación Matemática aún presenta varios desafíos en este sentido, y uno de ellos está asociado a la incorporación de encuadres históricos-culturales que permitan rastrear las particularidades de la Matemática en su vinculación con otras disciplinas (Doig y William, 2019). Esta investigación se propone precisamente indagar en las bases históricas y epistemológicas de los vínculos entre la Matemática y la Música, considerando un problema que involucró construcción de conocimiento para ambas disciplinas.

En la actualidad se busca que los aprendices vinculen la Matemática que aprenden en la escuela con la experiencia social que tienen como individuos Así, las iniciativas de educación interdisciplinaria e integrada deberían propiciar la resolución de problemas reales que aborden los intereses y el disfrute del estudiantado (Homes *et al.*, 2013). Las vivencias y experiencias de los estudiantes se hacen palpables a través de los objetos culturales con los cuales interactúan, entre los que destacan los instrumentos musicales. Y la guitarra, acústica o eléctrica, no solo ha sido uno de los instrumentos más populares del último siglo, sino también ha jugado un rol histórico protagónico en la constitución de lo que, en el actual occidente, entendemos por música. En efecto, la afinación usada en la música actual —el temperamento igual— surgió gracias a la invención y popularización de instrumentos de cuerdas con trastes, predecesores a la guitarra.

El estudio de la relación Música-Matemática es basto. Existen investigaciones que ahondan el estudio musical desde su relación con las frecuencias mediante el uso de series y el análisis físico-matemático de la vibración de la cuerda mediante funciones trigonométricas (Benson, 2006; Wright, 2009). También, existen estudios que indagan en el uso de la Matemática para la realización de composiciones musicales (Pareyon, 2011; Xenakis, 1992). En esta misma línea, en Latinoamérica se han logrado grandes avances de investigación sobre las conexiones entre Matemática y producción musical, considerando especialmente propuestas y métodos científicos (Pareyon *et al.*, 2022). Respecto al uso de la relación Música-Matemática en la Educación Matemática, se ha estudiado, por ejemplo, cómo la relación Música-Matemática puede potenciar la memorización de información, de patrones numéricos o de figuras geométricas (Trinick *et al*., 2016), cómo el uso de aspectos rítmicos o de intervalos musicales puede contribuir en la enseñanza de las fracciones o de los números irracionales (Nisbet, 1991; Walsh, 2010; Conde *et al*., 2011) y también la integración entre discursos matemáticos y musicales en procesos de creación musical (Venegas-Thayer, 2019). A pesar de la diversidad, la mayoría de las investigaciones se centran en contenidos matemáticos como operaciones numéricas y fracciones, sin enfatizar en estrategias didácticas que promuevan el aprendizaje integrado de la Música y la Matemáticas (Oliveira, 2023). Además, de acuerdo con la indagación realizada, son escasas las investigaciones ligadas al uso del temperamento igual que busquen integrar Música y Matemática con fines educativos (e.g. Chao-Fernández *et al*., 2019).

El temperamento igual se creó y formuló teóricamente durante el siglo XVI en y para instrumentos de cuerdas con trastes. La teorización geométrica de este temperamento fue realizada por el español Francisco de Salinas (1513-1590) y el italiano Josefo Zarlino (1517-1590). Esta teorización ha sido estudiada en el ámbito de la musicología por García-Pérez (2003), García-Pérez (2014) y Barbour (2004/1951). A su vez, Floris Cohen (1987) y Rasch (2008) analizaron la formulación aritmética del temperamento igual del matemático y científico húngaro Simón Stevin (1548-1620). Además, Espinoza *et al*. (2020) analizaron el proceso de génesis del temperamento igual, describiendo tanto su uso germinal en los instrumentos de cuerdas con trastes como su formulación teórica en el siglo XVI. Medio siglo después de esta teorización, el clérigo y científico francés Marín Mersenne (1588-1648) publica un libro de teoría musical en 1637, llamado *Armonía universal*, en la que sintetiza, entre otros sistemas de afinación usados en la época, la construcción del temperamento igual.

Este temperamento, que divide una octava en 12 partes iguales (12 notas), ha delineado nuestra manera de concebir la música en Occidente. En términos prácticos, define cómo se afinan las cuerdas de un piano y la cantidad de teclas del mismo, los lugares donde se hacen orificios a los instrumentos de viento o las ubicaciones de los trastes sobre los mástiles de las guitarras y bajos. Dada la importancia que tiene en la actualidad este sistema de afinación, nos preguntamos ¿cómo fue su proceso de génesis y desarrollo histórico?, ¿qué conocimientos matemáticos y significados asociados fueron usados en medio de este proceso? y ¿cómo esta información puede ser útil para promover enfoques interdisciplinarios entre Música y Matemática en el aula de secundaria? Para responder estas preguntas se plantea como objetivo explorar cómo los conocimientos puestos en uso y significados asociados al surgimiento histórico del temperamento igual en instrumentos de cuerda con trastes pueden contribuir a un enfoque interdisciplinario para el aprendizaje de la Matemática y la Música. Para ello se asume una perspectiva histórica sociocultural, a través del estudio de los procesos de constitución de los saberes que dieron origen al temperamento igual, presentes en el libro de Mersenne (1637). A continuación, presentamos el marco teórico de nuestra investigación.

2. Marco teórico

Desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa se considera al saber social, cultural e históricamente situado (Cantoral, 2013). En esta línea, se postula que “para atender la complejidad de la naturaleza del saber y su funcionamiento […] se deberá *problematizar al saber* en el más amplio sentido del término, situándole en el entorno de la vida del aprendiz” (Cantoral, 2013, p. 51). Siguiendo esta idea, la presente investigación problematiza el mástil de la guitarra, un instrumento tocado particularmente por muchos adolescentes y jóvenes en edad escolar. Nos preguntamos ¿por qué los trastes del mástil se ubican de esa manera? Esto nos llevó a considerar todo un proceso histórico y cultural de construcción de conocimientos, donde la Matemática juega un rol protagónico.

Para estudiar este proceso de construcción de conocimientos, usamos el modelo teórico para el estudio de la constitución del saber propuesto por Espinoza *et al.* (2018), que permite desarrollar comprensiones amplias acerca de los procesos de construcción del saber matemático y su devenir histórico, social y cultural. A su vez, en esta investigación concebimos al saber como conocimiento puesto en uso. En este sentido, “el conocimiento es la información sin uso, mientras el saber es la acción deliberada para hacer del conocimiento un objeto útil frente a una situación problemática” (Cantoral, 2013, p.52). Se asume que lo que hoy existe deviene de un proceso que puede ser caracterizado mediante su *génesis*, *desarrollo* y *transversalidad* (Figura 1). La *génesis* hace alusión a los momentos en los que el saber surge en el contexto del ser humano resolviendo problemas. Estos momentos germinales son de gran importancia para la epistemología, pues determinan significativamente la forma, cualidades intrínsecas y significados del saber en cuestión. El análisis de estos momentos permite “explorar tanto la producción y naturaleza del saber, como aspectos relativos a su devenir en el tiempo” (Espinoza *et al*., 2018, p. 253).

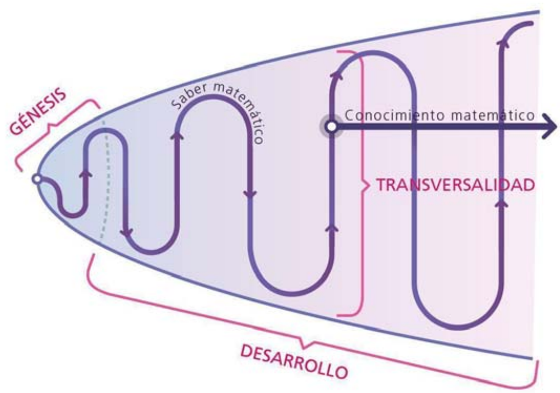


Figura 1. Esquema del modelo teórico para el estudio de la constitución del saber (Espinoza *et al.*, 2018, p. 252)

A su vez, el *desarrollo* da cuenta de cómo, en su devenir histórico, el saber transita hacia discursos científicos y escolares. Los saberes pasan por un proceso de desarrollo y toman paulatinamente su forma en el seno de disciplinas científicas, técnicas y/o prácticas, mediante procesos de disciplinarización, escolarización y/o circulación de saberes. En este desarrollo, el saber "tiende a la especialización y su consecutiva fragmentación" (p. 253). Por último, la *transversalidad* expresa el cómo el saber se constituye en el uso del mismo en diversos ámbitos de acción en prácticas humanas, principalmente, mediante prácticas que son ancestrales, permanecen en el tiempo y se desarrollan en distintos ámbitos culturales, como es el caso de la música. En definitiva, siguiendo a Espinoza *et al.* (2018, p. 253), se tiene lo siguiente:

– La *Génesis:* Explora la pregunta ¿cómo el saber llega a ser? Aborda aspectos relativos a su producción y naturaleza, situándose en contextos, intencionalidades y prácticas específicas.
– El *Desarrollo:* Explora la pregunta ¿cómo el saber es difundido? Aborda aspectos sobre su devenir histórico y sus tránsitos hacia y entre discursos disciplinares y escolares.
– La *Transversalidad:* Explora la pregunta ¿cómo este saber vive en diversas prácticas? Aborda el uso y desarrollo en prácticas científicas, técnicas, artísticas y cotidianas.

Al respecto, al explorar al saber nos interesa, en parte, analizar tanto los conocimientos puestos en uso como los procedimientos utilizados, con miras a develar significaciones del conocimiento matemático que devienen del uso en contextos específicos. En efecto, se concibe que "el significado deviene de este modo del uso situado que se dé al objeto y a sus procesos asociados a través de la actividad práctica donde el niño, el joven o el adulto dotan de significación relativa, situada y contextualizada a los objetos formales" (Cantoral *et al,* 2015, p. 16).

3. Consideraciones metodológicas

Asumiendo un enfoque cualitativo, se analizan documentos históricos. La selección e interpretación de las obras se realizó siguiendo las recomendaciones para el análisis documental de Bowen (2009). Primero se analizó la obra *Harmonie Universelle* de Mersenne (1637). Se escogió este libro dado que es una de las descripciones más completa de la teoría musical de mediados del siglo XVII en Europa y sintetiza el desarrollo de la teoría musical de su época, incluyendo elementos de música práctica y la formulación teórica del temperamento igual del siglo XVI. Su selección también se debió a las características del autor. En efecto, a diferencia de otros autores de tratados musicales de la época, los cuales eran teóricos musicales, Mersenne fue principalmente un matemático y un científico. Esto resulta de interés dado el propósito de estudiar la relación entre Música y Matemáticas. Realizamos un *análisis interpretativo* de contenido, el cual tiene como propósito identificar e inferir los significados denotativos —que se manifiestan de forma directa y literal— y los significados connotativos —que se infieren, considerando de manera conjunta elementos textuales y contextuales del corpus— (Drisko y Maschi, 2016) de la obra de Mersenne (1637). Para identificar los significados denotativos, se consideraron tres momentos, a saber: inmersión, focalización y profundización.

En el primer momento, realizamos una inmersión al contenido del libro, con miras a entender el contenido de la obra y seleccionar los capítulos a analizar, los cuales fueron los siete libros de los instrumentos. En el segundo momento, de focalización, identificamos en estos capítulos todas las proposiciones que hacen alusión al temperamento igual, y se seleccionaron aquellas que explicaban métodos de construcción. Por último, en el momento de profundización, se analizaron las proposiciones seleccionadas, identificando los métodos presentes en Mersenne (1637) para la construcción del temperamento igual. Tales proposiciones (que abreviaremos prop.) fueron las siguientes: prop. XIV y XV del libro I, prop. VII del libro II, prop. XVIII y XIX del libro IV, prop. XV, XXXVIII y XLV del libro VI.

Posteriormente, se analizó el proceso de constitución del saber matemático presente en dichas proposiciones. Para esto, primero indagamos la existencia de los tres métodos en obras del siglo XVI mediante el estudio de fuentes secundarias de musicología que han estudiado el proceso de formulación teórica germinal del temperamento igual (Floris Cohen, 1987; García-Pérez, 2003, 2014; Barbour, 2004/1951; Rasch, 2008; Van Wymeersch, 2008). Después, realizamos una revisión en las proposiciones de las fuentes originales en las que se formula teóricamente el temperamento igual (Salinas, 1577; Zarlino 1558, 1571, 1588; Stevin, 1585). Además, revisamos las obras de los teóricos de la música Faber Stapulensis (1496), Fogliani (1529), Bermudo (1555) y de los matemáticos Frisius (1585) y Bobillier (1827). En esta investigación presentamos de manera sintética el análisis de esta génesis, profundizando en elementos que aportan a nuestro objetivo de investigación. Un análisis filosófico más detallado de este análisis puede consultarse en Espinoza *et al.* (2020).

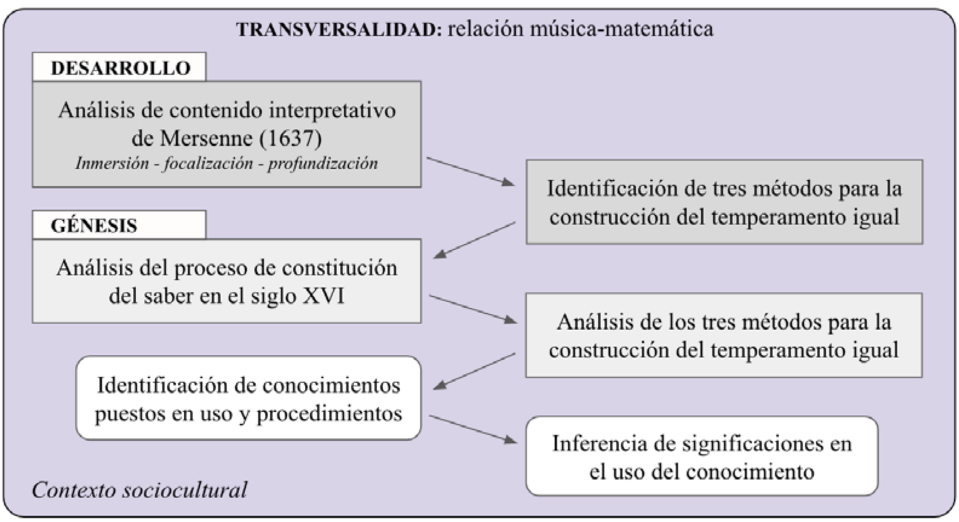


Figura 2. Esquema del proceso metodológico seguido en esta investigación

La revisión señalada en el párrafo anterior permitió además situar y contextualizar el trabajo desarrollado por Mersenne (1637). Considerando esta base contextual, como evidencia del proceso de constitución del saber del siglo XVI, se analizaron los tres métodos para la construcción del temperamento igual en las proposiciones seleccionadas en Mersenne (1637). Finalmente, en esta etapa del análisis de contenido, se identifican los procedimientos y conocimientos puestos en uso en cada uno de los métodos, con el propósito de inferir los significados connotativos propios del uso del conocimiento matemático en la formulación del temperamento igual (Figura 2).

4. Resultados

4.1. *Génesis: Surgimiento y formulación matemática del temperamento igual en el siglo XVI*

El sistema de afinación usado actualmente en Occidente es el temperamento igual. Para entender este temperamento y explorar sus procesos de génesis y desarrollo, hay que partir considerando el sistema de afinación usado en la Edad Media: el sistema pitagórico. Este sistema, ya en desuso en los instrumentos actuales, divide la cuerda mediante razones. Estas razones, a su vez, definían los intervalos musicales (½ definía la octava, ⅔ la quinta, ¾ la cuarta, etc.). Esto se explica visualmente en la figura 3, considerando la posición actual de los trastes de la guitarra, para una mejor comparación. Para el siglo XVI este sistema de afinación ya cumplía dos mil años de uso y desarrollo en Occidente.

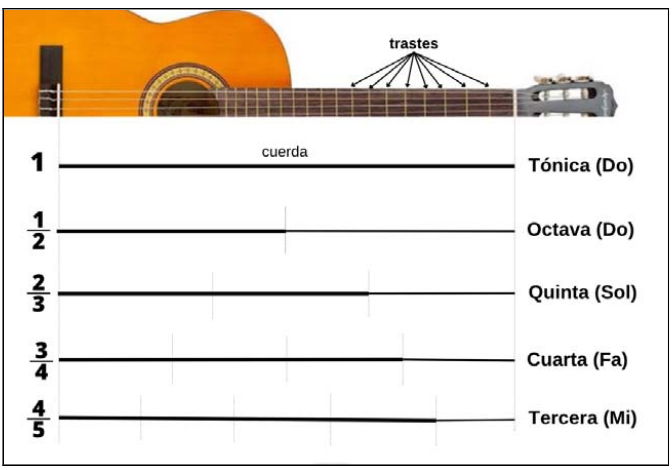


Figura 3. División pitagórica de la cuerda y su ejemplo para la tonalidad de Do

Ahora bien, durante el siglo XVI ocurre un hecho que revolucionó por completo la teoría y práctica musical de la Edad Media: la introducción de trastes a los instrumentos de cuerda con mástil. Estos instrumentos fueron el laúd, la viola y la vihuela, instrumentos predecesores de la guitarra, el bajo y el ukelele, entre otros (Figura 3). Al introducir los trastes sobre los mástiles, se creó una manera de dividir el traste que en términos geométricos es continuamente proporcional (Figura 4). Es así como nace el temperamento igual, el cual es el sistema musical que usamos en la actualidad.

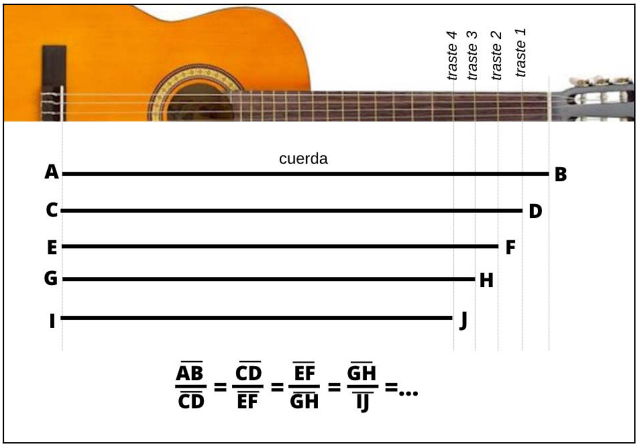


Figura 4. División proporcional del mástil (temperamento igual)

Espinoza *et al.* (2020) sostienen que existe evidencia del uso de instrumentos de cuerda con mástil en el mundo árabe desde el siglo VII. Sin embargo, fue en el siglo XVI que se le incluyeron trastes. Y esto ocurrió, dado que, en este siglo y en el contexto del renacimiento europeo, hubo cambios en la estética y el gusto musical en relación a los siglos anteriores. En efecto, en la Edad Media se valoró y desarrolló la música coral. Sin embargo, en el siglo XVI se dio una mayor preponderancia al uso de instrumentos musicales. La existencia de los trastes permite que personas con poco conocimiento musical puedan tocar estos instrumentos. Sin embargo, bajo el sistema de afinación pitagórico los trastes no quedan rectos (como se puede apreciar en la figura 5). En efecto, y a diferencia de otros instrumentos en los que cada cuerda se afina por separado, en los instrumentos de cuerdas con mástil los trastes rectos afectan simultáneamente a todas las cuerdas.

Figura 5. Muestra de división del mástil para tocar afinaciones pitagóricas del siglo XVI

En definitiva, las dificultades técnicas de la fabricación de instrumentos y el carácter más simple de su uso práctico, justificó que proliferaran los trastes rectos en la época (Figura 6). Con tales trastes no se siguió el sistema de afinación pitagórico (½, ⅔, ¾, etc.), más bien, era una división continuamente proporcional del mástil. Tal división de afinación alcanzó gran popularidad, al punto que su uso en instrumentos de cuerda con trastes se masificó durante el siglo XVI (Espinoza *et al.*, 2020). Dado el uso masivo de los instrumentos de cuerda con trastes, teóricos musicales de la segunda parte del siglo XVI se interesaron en el temperamento igual como objeto de conocimiento. Fue así como surgió la formulación teórica del temperamento igual.

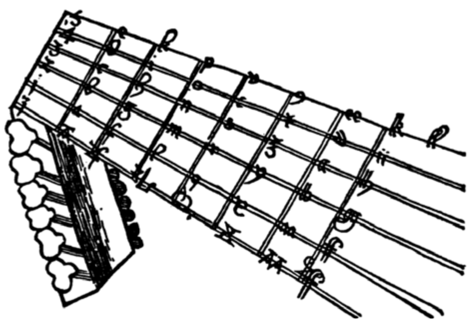


Figura 6. Ilustración de la ubicación de los trastes en instrumentos de cuerda con mástil publicada en 1511 (Virdung, 1993, p. 157)

El temperamento igual consiste en la división de la octava en doce partes iguales. Esta igualdad no se refiere a una longitud, sino hace referencia al sonido. Es decir, se refiere a intervalos de sonido que ascienden o descienden con base en una misma razón. De esta manera, en términos geométricos la división en *partes iguales* debe entenderse como división proporcional de longitudes. Cabe señalar que esta división de intervalos de sonido en partes iguales se puede realizar, de forma geométrica, mediante el uso del teorema de Euclides. Nos referimos a la proposición 13 del libro VI de los *Elementos* de Euclides, en la que se tiene, siguiendo la figura 7, que AB/BD = BD/BC.

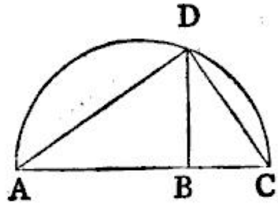


Figura 7. Teorema de Euclides en Simson (1774, p. 163)

Espinoza *et al.* (2020) señalan que la formulación teórica del temperamento igual puede ser analizada en tres momentos. En un primer momento, esta formulación teórica hizo alusión a la división de intervalos musicales en partes iguales. Teóricos musicales griegos de la antigüedad plantearon la imposibilidad de dividir un tono en *partes iguales* (Espinoza *et al.*, 2020). También Erasmo Heretius, un reconocido teórico de la música de su época, sostuvo en 1498 la imposibilidad de dividir ciertos intervalos musicales en *partes iguales*. Sin embargo, en 1504 se retracta y señala que esto sí es posible (Van Wymeersch, 2008). En nuestra indagación encontramos como referencia más antigua, de un uso explícito del teorema de Euclides para la división de intervalos musicales en *partes iguales,* a Faber Stapulensis (1496). Este autor usó el teorema de Euclides para dividir en *partes iguales* cuatro intervalos musicales (Figura 8). Con base en esta evidencia, ubicamos la génesis de la división de intervalos musicales en *partes iguales* entre la última década del siglo XV y la primera década del siglo XVI.

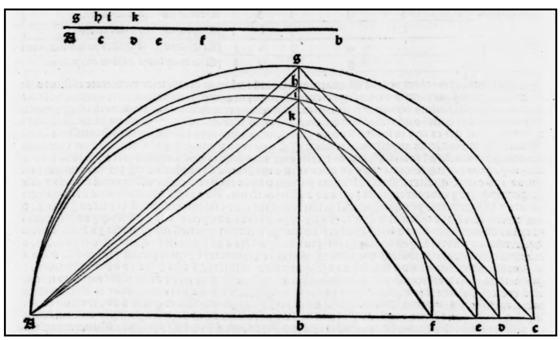


Figura 8. Uso del teorema de Euclides para dividir consonancias (Faber Stapulensis, 1496, p. 111)

Espinoza *et al.* (2020) también señalan que, a lo largo del siglo XVI diversos teóricos musicales usaron el teorema de Euclides para dividir intervalos musicales en *partes iguales* (Figura 9). Por ejemplo, está el caso de Fogliani (1529), Bermudo (1555), Zarlino (1571) y Salinas (1577). Tales teóricos musicales utilizaron estas divisiones en la fabricación de diversos temperamentos o afinaciones musicales (García-Pérez, 2003; Espinoza *et al.*, 2020).

En un segundo momento de la formulación del temperamento igual, encontramos su planteamiento teórico (Espinoza *et al.*, 2020). Esta teorización fue primero planteada por Salinas (1577) y posteriormente desarrollada con exhaustividad por Zarlino (1588). Para dividir el mástil en doce *partes iguales*, estos teóricos usaron tanto el teorema de Euclides como otros métodos geométricos-mecánicos que permitían encontrar dos o más medias proporcionales entre una magnitud y su mitad. Tales construcciones geométricas (Figura 10) pueden ser consultadas en detalle en García-Pérez (2003) y en Espinoza *et al.* (2020).

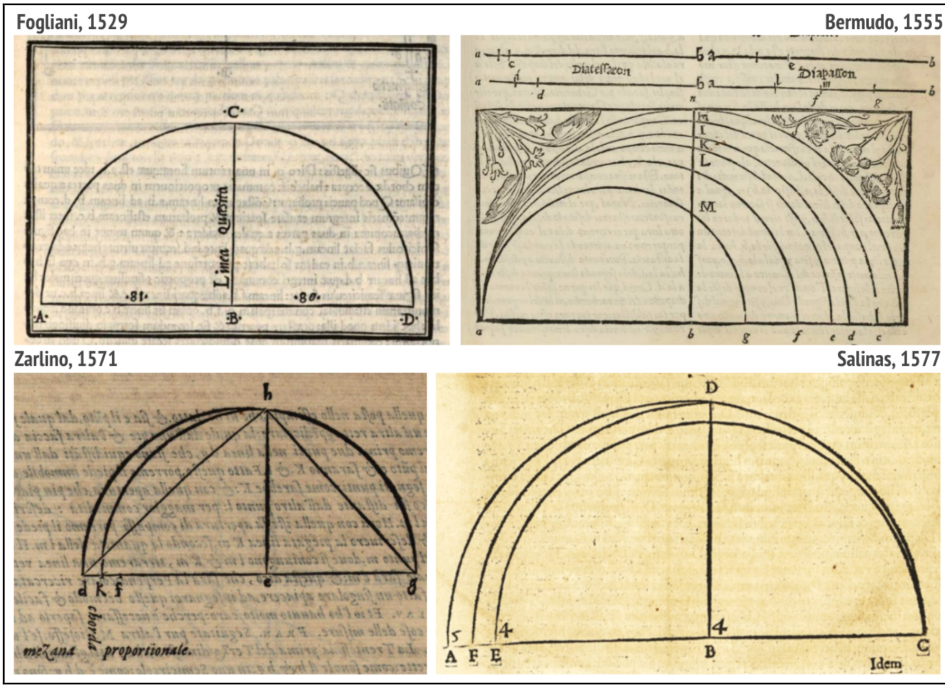


Figura 9. Uso del teorema de Euclides para la división de intervalos musicales en *partes iguales* (Fogliani, 1529, p. XXXVI; Bermudo, 1555, p. LXviii; Zarlino, 1571, p. 161; Salinas, 1577, p. 158)

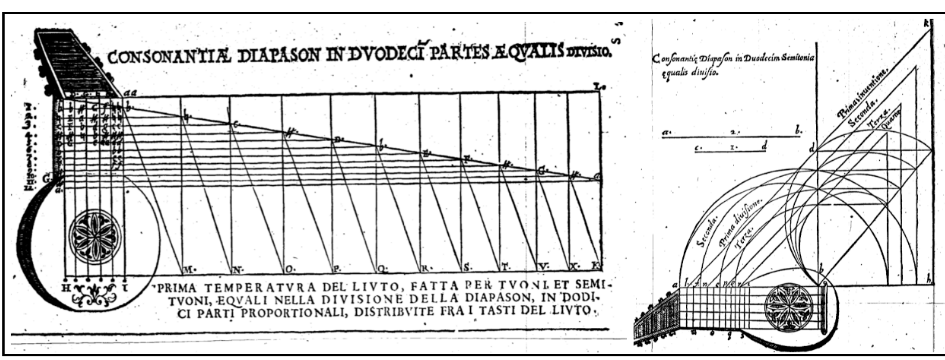


Figura 10. Construcciones geométricas del temperamento igual mediante medias proporcionales (Zarlino, 1588, p. 209 y 211)

Un tercer momento de la formulación teórica del temperamento igual lo encontramos en los desarrollos numéricos realizados por Simón Stevin (Espinoza *et al.*, 2020). Rasch (2008) plantea que, en la década de 1580, Stevin desarrolla una resolución aritmética al problema del temperamento igual y calcula aproximaciones numéricas para la división de la octava en doce *partes iguales* (Figura 11). En paralelo, Stevin publicó su *L'Arithmetique* en 1585, una obra en la que cuestiona la consideración de las magnitudes inconmensurables como irracionales o inexplicables. Stevin postula que, en aritmética, inconmensurabilidad no implica algo que sea inaccesible a la exploración racional. Así, en el contexto de la teorización del temperamento igual, los irracionales son por primera vez considerados como números pertenecientes a la aritmética (Van Wymeersch, 2008).

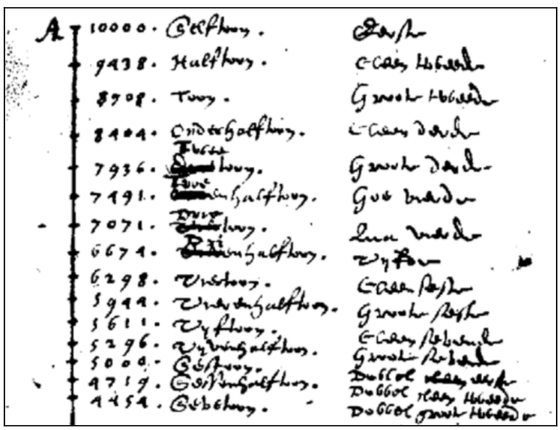


Figura 11. Registro de la formulación aritmética del temperamento igual de la década de 1580 en el tratado de música de Simón Stevin (Rasch, 2008, p. 273)

En síntesis, en lo referente a la *génesis* del temperamento igual, sostenemos que este surge tanto en la práctica de construcción y uso de instrumentos de cuerda con trastes como en su posterior formulación teórica. En tal formulación, los teóricos musicales no sólo procuraron posicionar a este temperamento en el ámbito disciplinar de la teoría musical, sino también buscaron brindar elementos prácticos para la construcción del temperamento igual en instrumentos de cuerda con trastes.

4.2. *Desarrollo: el temperamento igual en la Armonía universal de Mersenne (1637)*

Décadas después de la formulación teórica del temperamento igual, el clérigo y científico Mersenne sistematiza estos conocimientos en su *Armonía Universal*, la obra de teoría musical escrita en francés más completa de su época. Situamos a este libro en el momento de *desarrollo* del saber, dado que los conocimientos que desarrolla surgieron y fueron usados en el momento de *génesis* descrito en la sección anterior. Al ser un científico, Mersenne hace transitar estos saberes al ámbito de la ciencia, contribuyendo a la disciplinarización de los mismos. Por esto, Mersenne nos permite mirar, desde los ojos de un científico, la relación Música-Matemática en la formulación teórica del temperamento igual. Habiendo señalado esto, a continuación, presentamos los tres métodos para la construcción del temperamento igual identificados en nuestro análisis de Mersenne (1637).

4.2.1. *El método de los fabricantes de instrumentos*

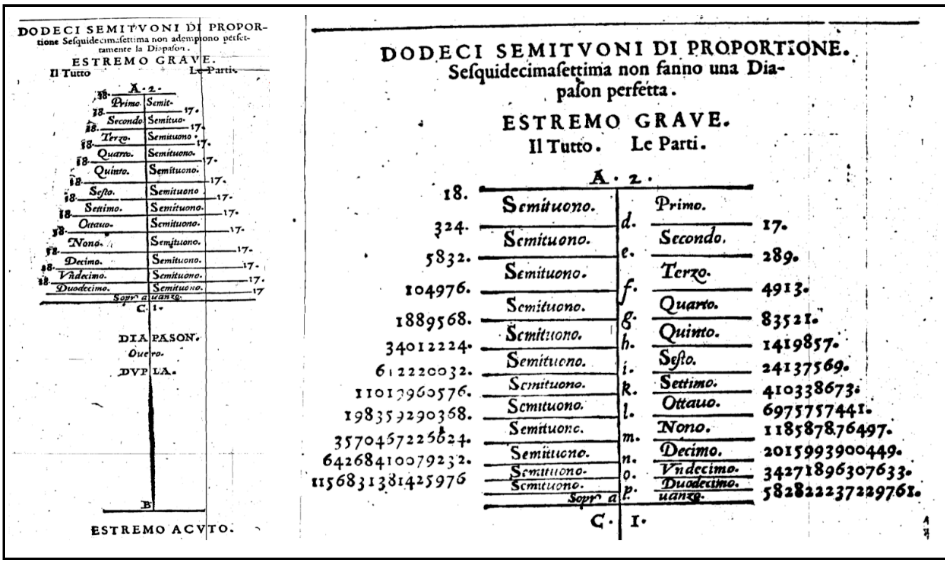
Un primer método que encontramos en Mersenne (1637) es el que usaron los fabricantes de instrumentos durante el siglo XVI. En la primera proposición del libro segundo de los instrumentos, Mersenne señala lo siguiente (Figura 12):

> Pluſieurs Facteurs d'inſtruments diuiſent la longueur du Luth, ou de la chorde à vuide en 18 parties, dont la 17 fait la premiere touche; & puis ils diuiſent le reſte de la chorde en 18 parties, dont ils en prennent encor 17 pour faire le ſecond demiton, & ainſi conſequemment iuſques à ce qu'ils ayent 8. ou 9. demi-tons.

Figura 12. Método de los fabricantes de instrumentos para la fabricación del temperamento igual[1] (Mersenne, 1637, p. 48)

Mersenne (1637) menciona que esta manera de dividir la octava es atribuida a Vicent Galilei, padre de Galileo Galilei. El método consiste en considerar la longitud de la cuerda y tomar 17/18 partes. Posteriormente, de las 17 partes resultantes volver a tomar 17/18 partes y así sucesivamente. Es decir, este método de los fabricantes de instrumentos consiste en dividir repetidamente siguiendo una misma razón. Mersenne (1637) señala que Vicent Galileo se esforzó en probar que esta división en términos prácticos era el mejor sistema existente. Sin embargo, también cita la explicación de Zarlino (1588) para sostener que, dividiendo iteradamente con la razón 17/18 no se divide exactamente la octava (la ubicación de este esquema en un mástil será explicada más adelante, en la sección 5).

Zarlino desarrolló esta idea en su *Sopplimenti musicali* (1588). En la proposición XXVIX presenta un exhaustivo análisis de este método de los fabricantes de instrumentos, presentando la división de la cuerda AB de manera iterada usando la razón 17/18. En la figura 13, los números de la parte izquierda son potencias sucesivas de 18 y los de la parte derecha son potencias sucesivas de 17. De esta manera Zarlino (1588), usando la aritmética de números enteros de la época, muestra que al iterar doce veces siguiendo la razón 17/18 no se divide exactamente la cuerda por la mitad (su octava en términos musicales). En efecto, el número 582622237229761 no llega a ser la mitad del número 1156831381425976 (la división es aproximadamente 0.50363626591)[1].


DODECI SEMITVONI DI PROPORTIONE. Sesquidecimasettima non fanno una Diapason perfetta.

ESTREMO GRAVE.

Il Tutto. Le Parti.

A. 2.

Il Tutto				Le Parti
18.	Semituono.	d.	Primo.	17.
324.	Semituono.	e.	Secondo.	289.
5832.	Semituono.	f.	Terzo.	4913.
104976.	Semituono.	g.	Quarto.	83521.
1889568.	Semituono.	h.	Quinto.	1419857.
34012224.	Semituono.	i.	Sesto.	24137569.
612220032.	Semituono.	k.	Settimo.	410338673.
11019960576.	Semituono.	l.	Ottauo.	6975757441.
198359290368.	Semituono.	m.	Nono.	118587876497.
3570467226624.	Semituono.	n.	Decimo.	2015993900449.
64268410079232.	Semituono.	o.	Vndecimo.	34271896307633.
1156831381425976	Semituono.	p.	Duodecimo.	582822237229761.
	Sopr' a		uanza.	

C. I.

Figura 13. Método de los fabricantes de instrumentos (Zarlino, 1588, p. 202 y p. 205, respectivamente)

Zarlino (1588) concluye que con este método no se logra dividir exactamente la octava en doce *partes iguales*. Sin embargo, Mersenne (1637) señala que este método proporcionó una aproximación aceptable para los fabricantes de instrumentos. En efecto, García-Pérez (2014) plantea que en los instrumentos de cuerda con trastes "la tensión a la que es sometida la cuerda va aumentando ligeramente al irla presionando cada vez más lejos del clavijero" (p. 71). De esta manera, señala que el sonido sube un poco más de lo que debería, y esto compensa el error que produce la división de la cuerda siguiendo la razón 17/18. Al respecto, Mersenne (1637) señala que, a diferencia de los teóricos musicales que seguirán

[1] El último número de la columna derecha de la figura 13 es 582822237229761 y su cuarta cifra es 8. Sin embargo, el valor real de 17^{12} es 582622237229761, donde la cuarta cifra corresponde a un 6. Dado que todos los otros valores están exactos, atribuimos el error a un problema de la edición del texto.

las divisiones armónicas mediante razones, los fabricantes de instrumentos se guiaban más por el oído.

Además, la simplicidad de llevarlo a la práctica hizo que este método (división iterada siguiendo la razón 17/18) se hiciera popular al punto de convertirse en el método de fabricación de instrumentos más usado durante el renacimiento (García-Pérez, 2014). Ciertamente, como toda labor técnica, la práctica de los constructores de instrumentos estaba influenciada por la búsqueda de economía y simplicidad de la técnica (Espinoza *et al.*, 2018). Y este método práctico, a pesar de no dar una división exacta, fue objeto de estudio de los teóricos musicales y referenciado por Mersenne (1637) en su magna obra de teoría musical.

4.2.2. *El método geométrico*

Un segundo método para la construcción del temperamento igual en la obra de Mersenne (1637) lo encontramos en la proposición VII del libro segundo de los instrumentos, y hace alusión a una demostración geométrica de la posibilidad de dividir el tono en doce *partes iguales* (Figura 14).

PROPOSITION VII.

Dcmonſtrer que le ton maicur, & mineur, l'Octaue, & tous les autres interualles peuuent eſtre diuiſez en deux, ou pluſieurs parties eſgales; d'où il s'enſuit que l'on peut diuiſer l'Octaue en 12. demy-tons eſgaux: où l'on verra la maniere de trouuer vne, & deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données, de doubler le cube, & de mettre les touches ſur le manche du Luth, & des autres inſtrumens.

Figura 14. Método geométrico para la formulación teórica del temperamento igual[2] (Mersenne, 1637, p. 249)

Mersenne (1637) señala que, para dividir la cuerda en dos *partes iguales*, solo hay que construir una cuerda que sea media proporcional entre las dos cuerdas que conforman el tono, la octava, o cualquier otro intervalo que se desee dividir.

---

2 "Laquelle divise la raison double d´AB à EF en deux raisons egales, & consequemment l'Octave en deux intervalles esgaux, car il y a mesme raison de CE, à EF, que d`AB à CD".

Agrega que esto se puede hacer mediante el teorema de Euclides (Figura 15). Considerando las cuerdas AB y EF que producen un intervalo de octava, donde EF es la mitad de AB, el autor señala que para encontrar la media proporcional CD es necesario ubicar las dos líneas dadas de manera contigua. Así, GH=AB y HI=EF. Luego, desde *l,* punto medio de GI se construye un semicírculo. Se traza la línea perpendicular a GI desde el punto H, obteniendo el punto K. Por último, se construye CD=HK.

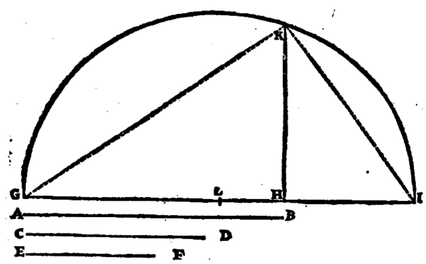


Figura 15. Uso del teorema de Euclides para la formulación teórica del temperamento igual (Mersenne, 1637, p. 249)

Mersenne (1637) señala que la recta HK será la media proporcional buscada, pues esta "divide la razón doble de AB y EF en dos razones iguales, y consecuentemente la octava en dos intervalos iguales, ya que hay la misma razón de CD, a EF, que de AB a CD"[2] (Mersenne, 1637, p. 66). A su vez, justifica este hecho señalando que los triángulos GHK, y KHI son semejantes, de lo que se infiere que la razón entre GH a HK es la misma que entre KH a HI. Aquí, al aludir a la semejanza de triángulos, la argumentación de Mersenne hace referencia a la proposición 8 del libro VI de los *Elementos* de Euclides y sus significados. Estos significados aluden a que CD está en la misma razón a AB que EF a CD $\left(\frac{AB}{CD}=\frac{CD}{EF}\right)$. Además, el método de construcción de la media proporcional geométrica está descrito en la proposición 13 del libro VI de los *Elementos* de Euclides.

Posteriormente, Mersenne (1637) plantea que, al usar iteradamente el método, se podrán encontrar una infinidad de otras medias proporcionales. Así, usando el teorema de Euclides se pueden dividir los intervalos AB y CD, y CD y EF en partes proporcionales, con lo que se dividirá la octava en cuatro *partes iguales*. Continuando con la iteración, el autor señala que se pueden encontrar 1, 3, 7, 15, 31, 63, etc., medias proporcionales, lo cual permite dividir la octava en 2, 4, 8, 16, 32, etc., *partes iguales*. Es decir, no se logra dividir la octava en 12 *partes iguales*. Por este motivo, Mersenne plantea que se requiere incluir otro método complementario para dividir un intervalo musical en tres o más *partes iguales*. Del mismo modo, el autor afirma que, si bien no se pueden construir dos medias proporcionales de manera geométrica, existen múltiples formas de hacerlo mediante técnicas geométricas-mecánicas, de las cuales presenta una.

Dadas las rectas BH y GA, donde GA es la mitad de BH, considera la recta GE, sobre la cual copia la magnitud GA tres veces, obteniendo los segmentos GA, AH y HO (Figura 16). Luego, sobre el segmento GA y HO, construye los triángulos equiláteros GAD y HOF, y traza la recta AF. Finalmente, incluye un procedimiento mecánico al trazar una recta que pasa por D y cruza los segmentos AF y HO, obteniendo los respectivos puntos de intersección B y C. Mersenne plantea que hay que mover esta recta DC de modo que BC sea igual a la mitad de BH, es decir, a GA. Con esto, el autor sostiene que se encuentran las dos medias proporcionales buscadas, esto es, DB y AC. Cabe señalar que Mersenne atribuye este método a un tal Molthée y no brinda una justificación o demostración matemática.

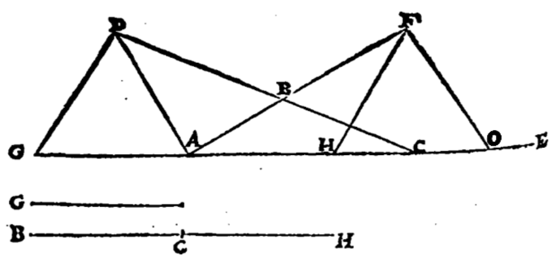


Figura 16. Construcción geométrica de dos medias proporcionales para la formulación teórica del temperamento igual (Mersenne, 1637, p. 249)

Mersenne (1637) plantea que, usando los métodos descritos de manera conjunta, se puede dividir la octava en doce *partes iguales*. En efecto, si la octava se divide primero en dos *partes iguales* (encontrando dos medias proporcionales), y después se encuentran medias proporcionales sobre estas divisiones mediante el teorema de Euclides, se dividirá la octava en seis *partes iguales*. Finalmente, si se usa el teorema de Euclides nuevamente sobre las divisiones resultantes, se logrará dividir la octava en doce *partes iguales*. Cabe señalar que el orden de iteración puede permutar. Es decir, también se puede dividir la octava primero en dos *partes iguales*, después en cuatro *partes iguales*, y después en doce *partes iguales*. O bien, primero dividir la octava en dos *partes iguales*, después en seis *partes iguales*, y después en doce *partes iguales*.

Este método geométrico explicado por Mersenne (1637) sigue la misma línea argumentativa presente en los métodos de teóricos musicales del siglo XVI, las cuales se sustentan en significaciones geométricas proporcionales. Para la división de intervalos musicales en *partes iguales*, los teóricos musicales usan el teorema de

Euclides (Faber Stapulensis, 1496; Fogliani, 1529; Bermudo, 1555; Zarlino, 1558; Salinas, 1577). Sin embargo, para la construcción de dos medias proporcionales estos usaron otros métodos. Stevin (1585) plantea la existencia de diversos métodos geométricos-mecánicos para realizar esta construcción, atribuídos a Platón, Herón, Apolonio, Diocles, Pappus, Spore, Menecmo, Arquitas, Eratóstenes y Nicomedes. Ejemplos de estos métodos son el uso del Mesolabio de Eratóstenes, el uso del método de Filón de Bizancio y otro método presentado también por Mersenne para la construcción de dos medias proporcionales (Figura 17).

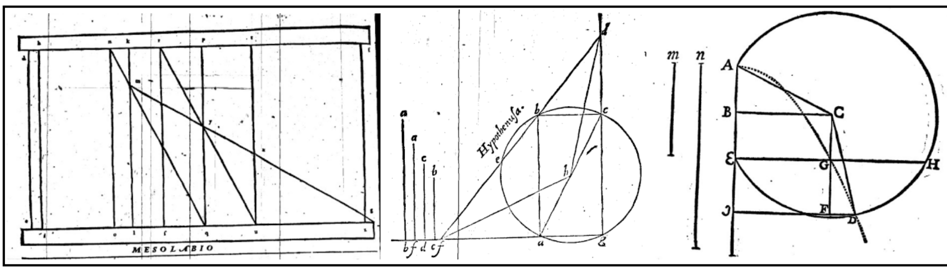


Figura 17. Métodos para la construcción de dos medias proporcionales (Zarlino, 1558, p. 96; Zarlino, 1588, p. 182; Mersenne, 1637, p. 410)

En definitiva, la idea de usar iteradamente los métodos de construcción de una y dos medias proporcionales para dividir la octava en 12 partes está presente, al menos, en Zarlino (1588) y Stevin (1585). Mersenne explora este mismo procedimiento y lo presenta con una generalidad que incluso supera las necesidades prácticas de la música. Es el caso de la mención que hace de iterar la división para dividir la octava, inclusive, en 48 y 96 *partes iguales*. En esto vemos el cómo estas ideas matemáticas surgen de la teoría musical y transitan hacia la generalización propia de la Matemática como quehacer científico. Además, Mersenne también generaliza el uso del temperamento para otros instrumentos. En efecto, los teóricos musicales del siglo XVI postularon el temperamento igual para instrumentos de cuerdas con trastes, mas Mersenne generaliza su uso, por ejemplo, para la afinación de los órganos.

4.2.3. *El método aritmético*

Un tercer método para dividir la octava en doce *partes iguales* que encontramos en Mersenne (1637) es un método aritmético. En la proposición XVI del primer libro de los instrumentos, Mersenne plantea una técnica aritmética para construir el temperamento igual (Figura 18).

PROPOSITION XIV.

Expliquer vn autre Monochorde qui sert pour diuiser le manche du Luth, de la Violè, du Cistre & de tous les autres instrumens à manches touchez en 9, 10, ou 12. demy-tons esgaux, & pour faire le Diapason des Orgues.

Figura 18. Método aritmético para construir el temperamento igual[3] (Mersenne, 1637, p. 37)

Mersenne (1637) comienza esta proposición afirmando que la división en *partes iguales* es la más útil y cómoda de las divisiones musicales del mástil. Acto seguido, presenta una tabla que atribuye a Jean Beaugrand y que plasma una técnica aritmética para encontrar once medias proporcionales comprendidas entre un intervalo y su mitad, logrando una división de la octava en doce *partes iguales* (Figura 19). Mersenne (1637) señala que, buscando la mayor exactitud que se pueda imaginar, esta técnica aritmética calcula las 11 medias proporcionales comprendidas entre 200000 y 100000. Con esto, obtendrá resultados aproximados de tales divisiones de manera exacta hasta la cienmilésima parte. La tabla que presenta es la siguiente:

Monochorde Harmonique d'egalitè composè d'onze nombres moyens proportionnels irrationels.

13	g	100,000.
12	x f	√ cccc. 2, 000000000000,000000000000,000000000000,00000 0000000,000000000000.
11	F	√ cc. 2, 000000,000000,000000,000000,000000.
10	E	√ qq. 2, 0000,0000,0000,0000,0000.
9	x d	√ c. 2, 000,000,000,000,000.
8	D	√ cccc. 32, 000000000000, 000000000000, 000000000000, 0000 00000000,000000000000.
7	x c	√ q. 2, 00,00,00,00,00.
6	C	√ cccc. 128, 000000000000,000000000000, 000000000000, 000 000000000,000000000000.
5	♯	√ c. 4, 000,000,000,000,000.
4	B	√ qq. 8, 0000,0000,0000,0000,0000.
3	A	√ cc. 32, 000000,000000,000000,000000,000000.
2	x g	√ cccc. 2048, 000000000000,000000000000, 000000000000,00 0000000000,000000000000.
1	G	200,000.

Figura 19. Cálculo aritmético del temperamento igual (Mersenne, 1637, p. 37)

En la notación de la época, el símbolo √ (o V) representa a la raíz y las letras q y c que acompañan al símbolo √ hacen referencia, respectivamente, al grado cuadrático y cúbico de la raíz (García-Pérez, 2014). De esta manera, √q representa a una raíz cuadrada, $\sqrt{c}$ a una raíz cúbica, $\sqrt{qq}$ a una raíz cuarta, $\sqrt{cc}$ a una raíz sexta y $\sqrt{cccc}$ a una raíz doceava. A su vez, los números de la tabla son enteros y la cantidad de ceros que están agrupados entre las comas equivalen al número del índice o exponente de la raíz. Nótese que todos los números tienen cinco agrupaciones de ceros (5 comas). Estas cinco agrupaciones corresponden a las cinco cifras cero (o cantidad de ceros) que tienen los valores de referencia 100.000 y 200.000. A su vez, el número de ceros entre las comas se refieren al grado al que tal número está elevado a la potencia (por ejemplo, 1,00,00,00,00,00 equivale a $100,000^2$ o 1,000,000,000,000,000 equivale a $100,000^3$). Considerando esto, los valores de Mersenne (1637) se expresan en potencia como se muestran en la columna A y F de la tabla I.

Respecto a los valores de las otras columnas de la tabla I, estos explican una reconstrucción de un procedimiento para llegar a los resultados de Mersenne (1637). En efecto, el autor presenta la tabla (Figura 19) pero no da detalles de su elaboración. Para indagar algunos significados de estos cálculos, realizamos una reconstrucción con métodos aritméticos de la época, usados para la resolución del problema del temperamento igual en el siglo XVI. En la proposición 45 de su *L'Arithmetique*, Stevin (1585) propone un método para encontrar las medias proporcionales que se deseen entre dos números cualesquiera. Plantea que, dada dos cantidades, la media proporcional se encuentra mediante el cálculo de la raíz del producto de ambos valores. Así, teniendo los números a y b, la media proporcional será $\sqrt{a*b}$. A la vez, plantea que también se pueden encontrar dos medias proporcionales mediante los cálculos de $\sqrt[3]{a^2*b}$ y de $\sqrt[3]{a*b^2}$. Posteriormente, Stevin (1585) plantea que se pueden encontrar más medias proporcionales mediante la iteración de las técnicas descritas. Siguiendo este método, realizamos una reconstrucción de los cálculos presentados en Mersenne (1637), primero calculando una media proporcional entre 100.000 y 200.000 (Columna B), después calculando una media proporcional en los dos intervalos resultantes (Columna C), y finalmente calculando dos medias proporcionales en los cuatro intervalos subsecuentes (Columna D).

Esta reconstrucción muestra que los datos de la tabla de Mersenne, teniendo en cuenta los valores numéricos y los grados de las raíces y exponentes, también se pueden explicar mediante la iteración de una y dos medias proporcionales. Considerando además que en la aritmetización del problema en Stevin (1585) se lleva el mismo procedimiento geométrico al ámbito aritmético (Espinoza *et al.*, 2020), concluimos que los significados germinales evocados en el método aritmético de Mersenne (1637) devienen de lo geométrico. En definitiva, y si bien las medidas para la construcción de los mástiles se brindan mediante cálculos aritméticos, los significados geométricos proporcionales se mantienen en la esencia de la resolución del problema.

TABLA I

Reconstrucción de los cálculos aritméticos de Mersenne (1637) para el temperamento igual

Columna A Datos de Mersenne		*Columna B* Primera media proporcional $\sqrt{a*b}$	*Columna C* Media proporcional en los intervalos resultantes $\sqrt{a*b}$	*Columna D* Dos medias proporcionales en los cuatro intervalos resultantes $\sqrt[3]{a^2*b}$; $\sqrt[3]{a*b^2}$	*Columna E* Resultado del cálculo.	*Columna F* Valores de Mersenne en notación actual.	*Columna G* Valores en formulación matemática actual.
13	Sol	100.000	100.000	100.000	100000	100000	$\sqrt[12]{2^0}*100.000$
12	Fa#			$\sqrt[3]{100.000^2*\sqrt[4]{200000000000000000000}}$	$\sqrt[12]{2*100000^{12}}$	$\sqrt[12]{2*100000^{12}}$	$\sqrt[12]{2^1}*100.000$
11	Fa			$\sqrt[3]{100.000*\sqrt[4]{200000000000000000000}^{2}}$	$\sqrt[12]{2^2*100000^{12}}$	$\sqrt[6]{2*100000^6}$	$\sqrt[12]{2^2}*100.000$
10	Mi		$\sqrt[2]{100.000*\sqrt[2]{20000000000}}$	$\sqrt[4]{200000000000000000000}$	$\sqrt[4]{2*100000^4}$	$\sqrt[4]{2*10000^4}$	$\sqrt[12]{2^3}*100.000$
9	Re#			$\sqrt[3]{\sqrt[4]{200000000000000000000}^2*\sqrt[2]{20000000000}}$	$\sqrt[6]{2^2*100000^6}$	$\sqrt[3]{2*100000^3}$	$\sqrt[12]{2^4}*100.000$
8	Re			$\sqrt[3]{\sqrt[4]{200000000000000000000}*\sqrt[2]{20000000000}^{2}}$	$\sqrt[12]{2^5*100000^{12}}$	$\sqrt[12]{2^5*100000^{12}}$	$\sqrt[12]{2^5}*100.000$
7	Do#	$\sqrt[2]{100.000*200.000}$	$\sqrt[2]{20000000000}$	$\sqrt[2]{20000000000}$	$\sqrt[2]{2*100000^2}$	$\sqrt[2]{2*10000^2}$	$\sqrt[12]{2^6}*100.000$
6	Do			$\sqrt[3]{\sqrt[2]{20000000000}^{2}*\sqrt[4]{800000000000000000000}}$	$\sqrt[12]{2^7*100000^{12}}$	$\sqrt[12]{2^7*100000^{12}}$	$\sqrt[12]{2^7}*100.000$
5	Si			$\sqrt[3]{\sqrt[2]{20000000000}*\sqrt[4]{800000000000000000000}^{2}}$	$\sqrt[6]{2^4*100000^6}$	$\sqrt[3]{2^2*100000^3}$	$\sqrt[12]{2^8}*100.000$
4	La#		$\sqrt[2]{\sqrt[2]{20000000000}*200000}$	$\sqrt[4]{800000000000000000000}$	$\sqrt[4]{2^3*100000^4}$	$\sqrt[4]{2^3*100000^4}$	$\sqrt[12]{2^9}*100.000$
3	La			$\sqrt[3]{\sqrt[4]{800000000000000000000}^{2}*200.000}$	$\sqrt[6]{2^5*100000^6}$	$\sqrt[6]{2^5*100000^6}$	$\sqrt[12]{2^{10}}*100.000$
2	Sol#			$\sqrt[3]{\sqrt[4]{800000000000000000000}*200.000^2}$	$\sqrt[12]{2^{11}*100000^{12}}$	$\sqrt[12]{2^{11}*100000^{12}}$	$\sqrt[12]{2^{11}}*100.000$
1	Sol	200.000	200.000	200.000	200000	200000	$\sqrt[12]{2^{12}}*100.000$

Mersenne (1637) concluye la proposición presentando aproximaciones por defecto y por exceso al cálculo exacto de cada valor de la tabla (Figura 20). Si bien, Mersenne (1637) señala que los datos no son exactos, por estar aproximados hasta la cienmilésima parte, sostiene que el error será imperceptible al oído humano. Por esta razón, establece que estos números se pueden considerar como la verdadera división de promedios proporcionales. En definitiva, plantea que estos valores pueden usarse para construir la división en el mástil del Laúd o en el de otros instrumentos. Al respecto, señala que, si se quisiera adicionar una treceava, catorceava o quinceava división en el mástil, solo hay que tomar el valor correspondiente de la división y dividirlo por dos. En esto se hace nuevamente palpable la racionalidad proporcional desde la cual se entienden estos cálculos.

Monochorde ou Diapason des touches.

I	II	III	IV	V
a	100,000.	c.	100,000.	n
xg	105946	♯	105945	m
G	112246	b	112245	l
xf	118921	A	118920	k
F	125993	xg	125992	i
E	133481	G	133480	h
xd	141422	xf	141421	g
D	149830	F	149829	f
xc	158741	E	158740	e
C	168179	xd	168178	d
♯	178172	D	178171	c
b	188771	xc	188770	b
A	200,000.	C	200,000.	

NOMBRES DE L'ACCORD EGAL.

	I	II	
I	100000000000	144000	000
II	94387431198	135919	009
III	89090418365	128290	202
IV	84089641454	121089	089
V	79370052622	114292	876
VI	74915353818	107878	109
VII	70710678109	101823	376
VIII	66741992715	96108	470
IX	62996052457	90714	317
X	59460355690	85622	912
XI	56123102370	80817	267
XII	52973154575	76281	243
XIII	50000000000	72000	000

Figura 20. Aproximaciones por defecto y exceso al temperamento igual y cálculos del temperamento igual, respectivamente (Mersenne, 1637, p. 38 y p. 786)

Cabe señalar que Stevin también presenta otras tablas en las que muestra los cálculos del temperamento igual entre 72000000 y 144000000 así como entre 50000000000 y 10000000000 (Figura 20). Estos valores, que superan el interés práctico de la teoría musical, surgen del tránsito del problema desde la teoría musical hacia el ámbito de la Matemática como disciplina científica. Destaca además que, en la aritmética, fueron matemáticos como Stevin y Mersenne los que concibieron al temperamento igual fuera de los cánones pitagóricos que predominaban en aquella época, aceptando a los irracionales como intervalos plausibles para la teoría musical (Espinoza *et al.*, 2020).

Estos tres métodos para la construcción del temperamento igual brindan contexto y significado a nociones matemáticas escolares que suelen enseñarse como procedimientos rutinarios. Un adecuado estudio didáctico permitiría implementar diseños para la resignificación, desde el contexto de la música, de la división sucesiva de longitudes a partir de una razón dada, del teorema de Euclides, de la media proporcional geométrica y de la operatoria de raíces enésimas.

4.3. *Significaciones matemático-musicales en el surgimiento del temperamento igual*

Hasta aquí, hemos analizado los tres métodos para la construcción del temperamento igual identificados en Mersenne (1637). A continuación, describimos los conocimientos puestos en uso, los procedimientos utilizados y los significados asociados identificados en esta investigación.

4.3.1. *Progresión geométrica y división proporcional*

Uno de los usos del conocimiento matemático identificados en esta investigación, en el método de los fabricantes de instrumentos, es la división iterada de una magnitud usando una misma razón. En la técnica descrita por Vincenzo Galilei, el procedimiento utilizado fue la división geométrica sucesiva del mástil en partes aritméticas iguales, en la que se consideran 17/18 parte en cada iteración. En la explicación de Zarlino, el procedimiento es la multiplicación iterada a la cuerda por los factores 17/18, $17^2/18^2$, $17^3/18^3$, En términos actuales, este conocimiento corresponde a una progresión geométrica, es decir, a una sucesión de la forma a, ak, akk, akkk, etc. o a, ak, ak^2, ak^3, etc., donde a es la medida de la longitud a dividir. En esta línea, y considerando que la fracción 17/18 no permite una división exacta de la octava en doce *partes iguales*, resolver el problema del temperamento igual implica encontrar un factor k de modo que $ak^{12}=\frac{a}{2}$, donde $k=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}$ es irracional. El uso de este conocimiento en la ubicación de los trastes de la guitarra se ilustra en la figura 21.

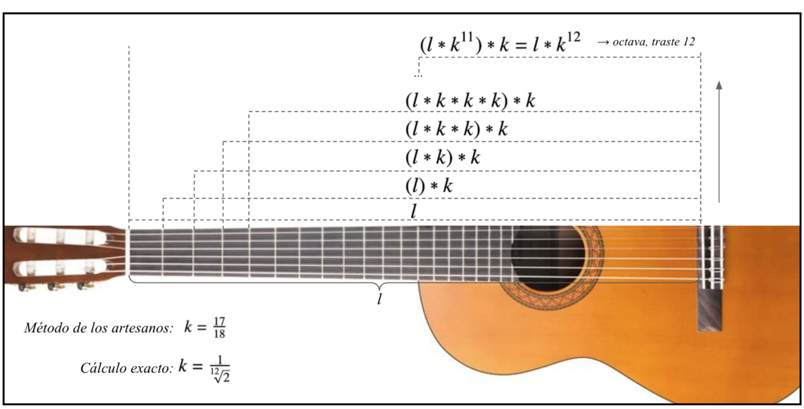


Figura 21. Ilustración del método de los fabricantes de instrumentos en una guitarra

Respecto a los *significados* asociados al uso de este conocimiento en el siglo XVI, la noción de progresión geométrica estaba en pleno desarrollo y se definía en el ámbito de lo proporcional. Evidencia de esto es Frisius, quien, en su *Arithmeticae practicae methodus facilis* publicada originalmente en latín, plantea que la progresión geométrica contiene “varios números precedentes con alguna proporción, es decir, que son producidos por una multiplicación continua de un número” (Frisius, 1585/1556, p. 27-28, trad. francesa)[3]. En esta línea, un significado identificado de este conocimiento puesto en uso en el problema de la ubicación de los trastes sobre el mástil de instrumentos de cuerda es el siguiente: la aplicación continua de un número o razón sobre la cuerda genera sucesiones de magnitudes proporcionales entre sí. Es decir, dividiendo con la misma razón se conserva la proporción.

4.3.2. *Medias proporcionales y magnitudes continuamente proporcionales*

Otro de los usos del conocimiento matemático, tanto en los métodos geométrico y aritmético, es la construcción de 11 medias proporcionales entre una magnitud y su mitad. Los conocimientos utilizados son el teorema de Euclides como otras construcciones geométrico-mecánicas para encontrar dos o más medias proporcionales entre una magnitud y su mitad. El procedimiento utilizado es la iteración de los métodos para encontrar una o dos medias proporcionales. De aquí que los significados asociados son geométricos y relativos a la construcción de “magnitudes continuamente proporcionales” (Mersenne, 1637, p. 224). Así como una media proporcional establece la relación proporcional a:b = b:c y dos medias proporcionales la relación proporcional a:b = b:c = c:d, la división del mástil evoca el siguiente significado proporcional a:b = b:c = c:d = d:e = e:f = f:g = etc. (Figura 22). Es decir, es una división de magnitudes continuamente proporcionales, o una división que conserva la proporción. Tal división divide la octava en 12 *partes iguales*.

Respecto al método aritmético, las técnicas para el cálculo de medias proporcionales se desprenden de los métodos geométricos. En este sentido, el cálculo de potencias y raíces está inmerso en un contexto de significados proporcionales. Tal significado aritmético también se encuentra en el proceso de desarrollo del saber. Es el caso de Bobillier (1827) quien, en sus *Principes d’algèbre*, plantea que “un término cualquiera de una progresión geométrica es igual a la media proporcional entre el término que le precede y el que le sigue” (p. 32)[4]. En definitiva, identificamos en el método aritmético los significados subyacentes al método geométrico. Y el hecho de que Stevin haya planteado

---

3 “Plusieurs nombres precedens avec quelque proportion, c´este à dire, quei sont products par una multiplicatió continue d´un nombre”.

4 “Un terme quelconque d´une progression par quotient est égal a la moyenne proportionnelle entre celui qui le précède et celui qui le suit”.

simultáneamente su método aritmético para medias proporcionales y la resolución aritmética del temperamento igual, devela la significación proporcional tras sus métodos de cálculo de potencias y raíces, y ubica a la música como un contexto de significación de tales conocimientos matemáticos.

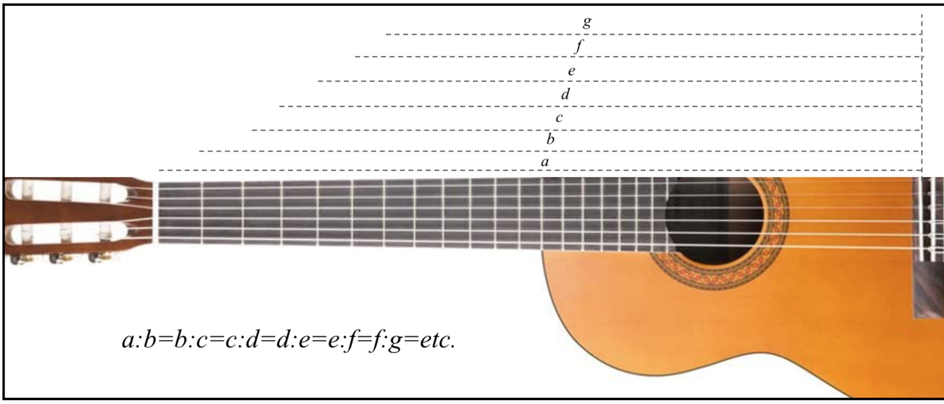


Figura 22. Ilustración de las magnitudes continuamente proporcionales en la guitarra

4.3.3. *Temperamento igual y la autosimilitud de la sucesión*

Una característica particular del temperamento igual, y que lo distingue de todos los otros sistemas de afinación existentes en los siglos XVI y XVII, es que iguala todos los semitonos en términos de sonido. Este hecho tiene significativas implicaciones tanto en la teoría musical como en las prácticas de fabricación e interpretación de instrumentos musicales. Al respecto, Mersenne (1637) señala que, en los otros temperamentos, dado que las divisiones entre los semitonos no se realizaban siguiendo una misma razón, las tonalidades no sonarán iguales. Sin embargo, con el temperamento igual todas las escalas tienen la misma sonoridad, de modo que con esta división se pueden construir todas las armonías. En efecto, para construir una armonía "no importa por donde uno comience, pues todos los tonos y medios tonos son iguales" (Mersenne, 1637, p. 38)[5]. El autor señala esto haciendo referencia a que en las tablas que presenta el temperamento igual se puede comenzar la división desde cualquier nota, como por ejemplo por las notas La, Do (Figura 20) o Sol (Figura 19).

De lo anterior se concluye que en el temperamento igual todas las armonías están autocontenidas en la misma división de la cuerda. Por ejemplo, en la figura 23, se tiene la división de la cuerda siguiendo el temperamento igual de la primera cuerda Mi, construida ya sea a través de la multiplicación iterada de un mismo factor

[5] "Il n´importe par où l´on commence, puis que tous les tons & les demy-tons sont esgaux".

o mediante medias proporcionales. Si desde Fa comenzamos a hacer la división usando el mismo factor o mediante medias proporcionales, las divisiones de la cuerda calzan exactamente, o bien, están autocontenidas, en la división de la guitarra realizada desde Mi. Y esto se cumple si iniciamos la división de la cuerda desde Sol, La, Si, Mi (una octava más arriba), Sol, etc. Es decir, la división contiene todas las posibles divisiones de todas las armonías.

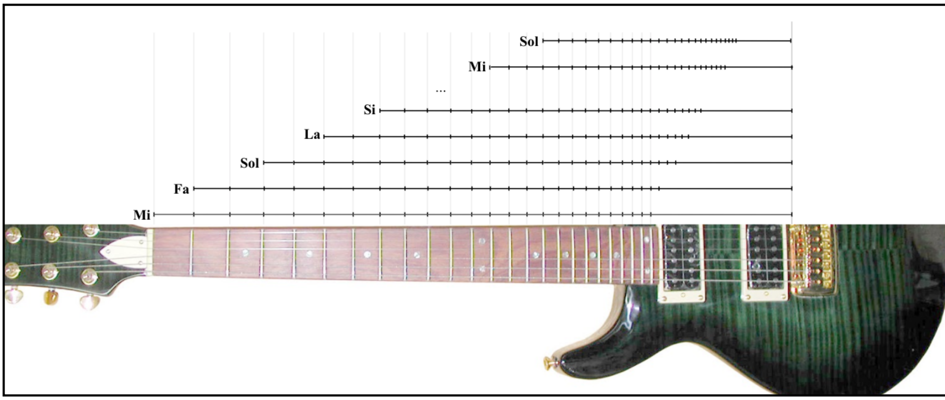


Figura 23. Ilustración de la autosimilitud de las armonías en la guitarra

Esta autocontención se puede explicar de la siguiente manera: cuando una magnitud se divide multiplicando iteradamente por una misma razón o mediante medias proporcionales, la sucesión resultante a_n será, en términos proporcionales, semejante a cualquiera de sus subsucesiones de la forma a_{n+m}, con n y m números naturales. En términos geométricos, el hecho de que en una progresión geométrica toda subsucesión sea semejante, proporcional u homotética a la sucesión dada, implica que cualquier parte de la sucesión tiene, por así decirlo, la "misma forma" que el todo. Es más, toda subsucesión de la sucesión será semejante, proporcional u homotética a cualquier otra subsucesión de la sucesión. Esta propiedad puede ser explicada mediante la noción de autosimilitud o autosemejanza. Pareyon (2011) caracteriza la autosimilitud como aquella propiedad en la que el todo es exacto, similar, o tiene la misma forma que una y cada una de sus partes. En el temperamento igual, esta autosimilitud se expresa en que el todo está autocontenido en sus partes y sus partes están autocontenidas en sus subpartes.

La construcción del temperamento igual hace emerger nociones que no pueden encerrarse en la Matemática o la Música como asignaturas escolares. En particular la autosimilitud moviliza significados que sólo pueden comprenderse desde la reciprocidad disciplinar. Esta es una característica de los problemas interdisciplinarios, que necesita seguir siendo discutida y profundizada desde la Educación Matemática. Habiendo señalado esto, a continuación, presentamos las conclusiones de esta investigación.

5. Conclusiones

En esta investigación, nos propusimos estudiar cómo los conocimientos puestos en uso y significados asociados al surgimiento histórico del temperamento igual en instrumentos de cuerda con trastes pueden contribuir a un enfoque interdisciplinario para el aprendizaje de la Matemática y la Música. Esto lo hicimos explorando tanto el uso del conocimiento en Mersenne (1637) como el proceso de constitución de estos saberes en el siglo XVI, identificando así aspectos epistemológicos de interés para la articulación didáctica entre Música y Matemática. A modo de conclusión, ubicamos a Mersenne (1637) en la etapa de *desarrollo* del saber e identificamos tres métodos para construir el temperamento igual, a saber: el método de los fabricantes de instrumentos, el método geométrico y el método aritmético. Respecto al proceso de *génesis* de estos saberes, sostenemos que el temperamento igual surge en el siglo XVI, primero en la práctica de la construcción y ejecución de instrumentos de cuerdas con trastes, y segundo en el proceso de su formulación teórica realizado por Salinas (1577), Zarlino (1588) y Stevin (1585). Tanto en la *génesis* como en el *desarrollo* identificamos el uso de conocimientos matemáticos y significados asociados. En la figura 24 presentamos una síntesis de estos resultados.

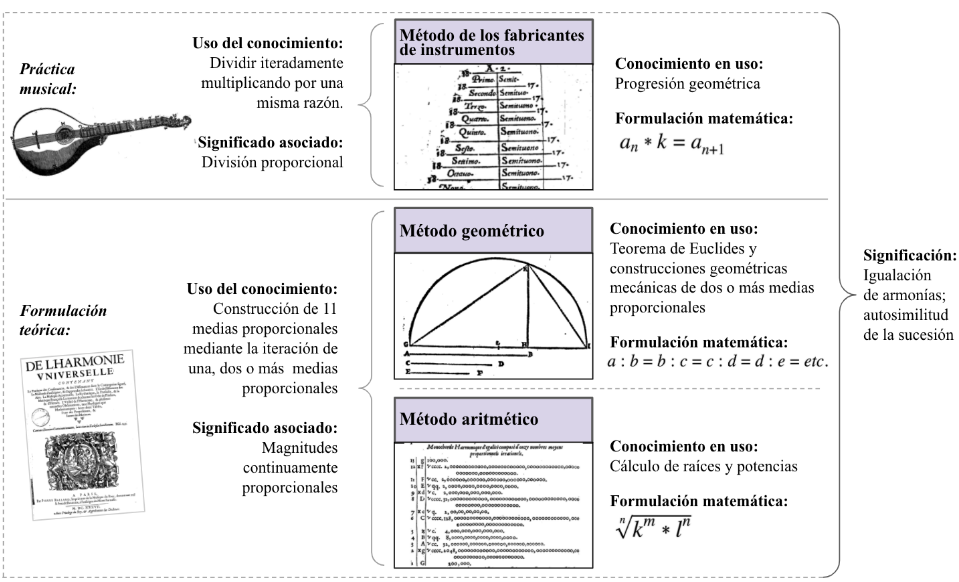


Figura 24. Síntesis de los resultados de la investigación

Hemos dado cuenta como tras el mástil de instrumentos de cuerda con trastes hay toda una historia de uso de conocimiento matemático que puede ser recuperada para delinear propuestas didácticas innovadoras que propicien una enseñanza en la que se vinculen transversalmente la Matemática y la Música. En efecto, a la ubicación de los trastes de la guitarra, el bajo, el ukelele y otros instrumentos de cuerda con trastes, subyace todo un proceso de génesis y desarrollo histórico que ha definido la manera actual de concebir la música en Occidente. En este proceso se usan y desarrollan diversos conocimientos matemáticos. Un ejemplo de propuesta didáctica es la siguiente actividad (Figura 25), en la cual se comienza dando una breve explicación del contexto histórico de Galileo Vincenzo y su método para construir los trastes usando la razón 17/18. Como recursos, se les brinda una guitarra, otra guitarra impresa a escala y sin trastes, un elástico marcado con la razón 17/18 y una cinta métrica.

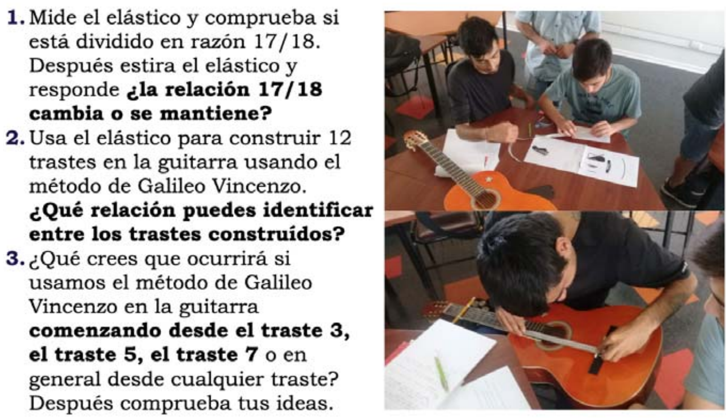


Figura 25. Ejemplo de propuesta didáctica sustentada en los resultados de la investigación

A su vez, se pueden usar las características de la práctica de tocar guitarra para hacer emerger, en el aula de Matemática, los conocimientos matemáticos y significados asociados descritos en esta investigación. De hecho, al igualar los semitonos y las armonías, el temperamento igual tiene implicancias significativas en la práctica guitarrística relativa a la forma de la mano para tocar acordes con cejilla, escalas o al usar el cejillo: 1) una misma posición de acorde con cejilla, al ser desplazada (o trasladada en el sentido de la Geometría Afín) a lo largo del mástil, produce diferentes acordes; y 2) una misma digitación de una escala, al ser desplazada a lo largo del mástil, genera distintas escalas (Figura 26).

Estas dos técnicas, que son fundamentales en la ejecución práctica de la guitarra acústica y eléctrica, existen gracias a la propiedad de la autosimilitud presente en la ubicación de los trastes de la guitarra. Al respecto, se pueden realizar dos importantes observaciones:

1. En términos matemáticos, esta autosimilitud existe dada la naturaleza proporcional de la división del mástil, la cual se puede construir dividiendo iteradamente por una misma razón.
2. En términos musicales, estas técnicas son posibles dado que el temperamento igual iguala todos los semitonos y, por ende, también iguala las armonías.

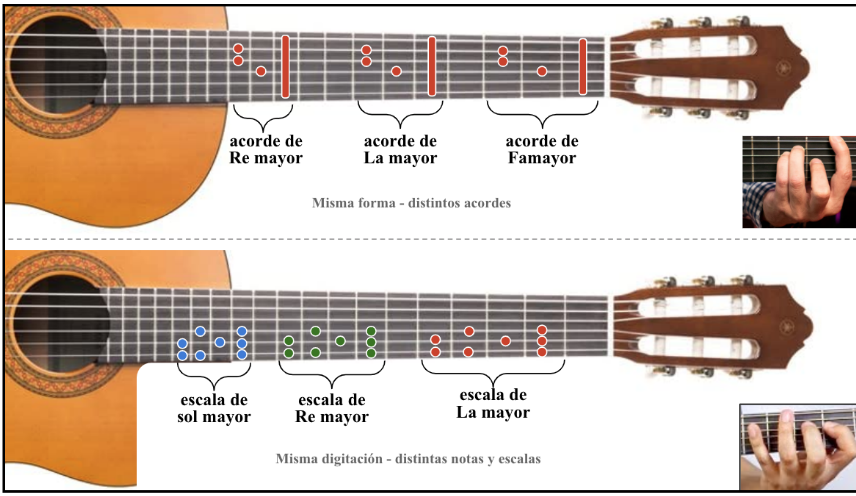


Figura 26. Implicancias del temperamento igual en la práctica de tocar guitarra

Subrayamos la importancia que puede tener la autosimilitud presente en el mástil de la guitarra para la creación de propuestas didácticas innovadoras. Particularmente, esto puede contribuir a la profundización en la comprensión en los estudiantes respecto al teorema de Euclides, la progresión geométrica y la función exponencial, entre otros conocimientos matemáticos de educación secundaria. Para esto, se podría pedir a estudiantes que expliquen la práctica de mover la forma de acordes y escalas en el mástil de la guitarra desde el método de Galileo Vincenzo (división iterada por la razón 17/18). Esto, consideramos, permitiría ir en la dirección de lo planteado por Tytler *et al.* (2019), respecto a que la enseñanza de la Matemática desde un enfoque interdisciplinar debería contribuir al desarrollo y uso del conocimiento en contextos propios de la realidad del estudiante.

De esta manera, el análisis histórico-epistemológico realizado en esta investigación provee interesantes insumos para futuras investigaciones que aborden la elaboración e implementación de diseños didácticos que vinculen la Matemática y la Música en el aula. Desde un enfoque interdisciplinar y atendiendo lo señalado por Hartzler (2000), concordamos en la importancia de incorporar prácticas de instrucción que hagan explícitas las conexiones entre los saberes en juego. En suma, más allá de ser dos disciplinas independientes con elementos en común, la Música y la Matemática forman parte de un saber que tiene sustento histórico y cultural, y que han sido fundamentales en la historia humana, no sólo como expresión artística sino también como productoras de conocimiento científico.

Referencias

Ander-Egg E. (1999). *Interdisciplinariedad en Educación. Colección respuestas educativas.* Editorial Magisterio del Río de la Plata.

Barbour, J. M. (2004). *Tuning and temperament: a historical survey.* Michigan State College Press (año de publicación del libro original; 1951). https://archive.org/details/tuningtemperamen00barb/page/n13/mode/2up

Benson, D. (2006). *Music: a mathematical offering.* Cambridge University Press. https://ds.amu.edu.et/xmlui/bitstream/handle/123456789/14630/Music-%20mathematics%20-%20531%20pages.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Bermudo, J. (1555). *Declaración de instrumentos musicales.* Taller de Juan de León.

Bobillier, E. (1827). *Principes d'algèbre.* Impr. de F. Gauthier (Lons-le-Saunier).

Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative Research Journal, 9*(2), 27-40. https://doi.org/10.3316/qrj0902027

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Gedisa.

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5-17. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1810

Chao-Fernández, R., Mato-Vázquez, D., y Chao-Fernández, A. (2019). Fractions and pythagorean tuning. An interdisciplinary study in secondary education. *Mathematics, 7*(12), 1227, 1-13. https://doi.org/10.3390/math7121227

Chi, N. P. (2021). Teaching Mathematics through interdisciplinary projects: A case study of Vietnam. *International Journal of Education and Practice, 9*(4), 656-669. https://doi.org/10.18488/journal.61.2021.94.656.669

Conde Solano, L. A., Figueras Morut de Montpellier, O., Pluvinage, F. C. B. y Liern Carrión, V. (2011). El sonido de las fracciones: una propuesta interdisciplinaria de enseñanza, *SUMA 68,* 109-116. https://www.researchgate.net/profile/Vicente-Liern/publication/359337787_El_sonido_de_las_fracciones_una_propuesta_interdisciplinaria_de_ensenanza/links/6235aa7d72d413197a332d0a/El-sonido-de-las-fracciones-una-propuesta-interdisciplinaria-de-ensenanza.pdf

Doig, B. y Williams, J. (2019). Conclusion to interdisciplinary Mathematics Education. En B. Doig, J. Williams, D. Swanson, R. Borromeo Ferri y P. Drake (Eds*), Interdisciplinary Mathematics Education. ICME-13 Monographs* (pp. 299-302). https://doi.org/10.1007/978-3-030-11066-6

Drisko, J. W., y Maschi, T. (2016). *Content analysis. Pocket Guide to Social Work Research Methods. Oxford* University Press.

Espinoza, L., Redmond, J., Palacios Torres, P. C., & Cortez Aguilera, I. (2020). Numerus surdus y armonía musical. Sobre el temperamento igual y el fin del reinado pitagórico de los números. *Revista de humanidades de Valparaíso*, (16), 137-167. http://dx.doi.org/10.22370/rhv2020iss16pp137-167

Espinoza, L., Vergara, A., & Valenzuela, D. (2018). Geometría en la práctica cotidiana: la medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 21*(3), 247-274. https://doi.org/10.12802/relime.18.2131

Faber Stapulensis, J. (1496). *Arithmetica et musica.* Joannes Higmanus et Volgangus Hopilius.

Floris Cohen, H. (1987) Simon Stevin's equal division of the octave. *Annals of Science, 44*(5), 471-488. https://doi.org/10.1080/00033798700200311

Fogliani, L. (1529). *Musica theorica Ludovici Foliani mutinensis.* Jo. Antonium et fratres de Sabio.

Frisius, G. (1585). *Arithmeticae practicae methodus facilis.* Apud Ioan Tornaesium et Gul. Gazeium. (Obra original publicada en 1556).

García-Pérez, A. S. (2014). El temperamento igual en los instrumentos de cuerda con trastes. En A. García-Pérez y P. Otaola González (coords.), *Francisco de Salinas. Música, teoría y matemática en el Renacimiento* (pp. 61-89). Ediciones Universidad de Salamanca.

García-Pérez, A. S. (2003). *El número sonoro: la matemática en las teorías armónica de Salinas y Zarlino*. Caja Duero.

Hartzler, D. S. (2000). *A meta-analysis of studies conducted on integrated curriculum programs and their effects on student achievement*. Doctoral dissertation. Indiana University. https://www.proquest.com/docview/304624583?pq-origsite=gscholar&fromopenview=true

Homes, A., Kaneva, D., Swanson, D. y Williams, J. (2013). *Re-envisioning STEM education: curriculum, assessment and integrated, interdisciplinary studies.* The Universtity of Manchester. https://royalsociety.org/~/media/education/policy/vision/reports/ev-2-vision-research-report-20140624.pdf

Mersenne, M. (1637). Harmonie universelle, Tomo 2. Pierre Ballard.

Nisbet, S. (1991). Mathematics and Music. *The Australian Mathematics Teacher, 47*(4), 4-8. https://search.informit.org/doi/10.3316/aeipt.56500

Oliveira, M. P. de (2023). A integração entre a Música e a Matemática: uma revisão sistemática de literatura. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 14*(1), 1–25. https://doi.org/10.26843/rencima.v14n1a08

Pareyon, G. (2011). On musical self-similarity. Intersemiosis as synecdoche and analogy. En E. Tarasti (Ed.), *Acta Semiotica Fennica XXXIX: Approaches to Musical Semiotics Series 13* (pp. 205-455). The International Semiotics Institute. https://helda.helsinki.fi/server/api/core/bitstreams/334af43a-1ca2-4dd3-ac17-d3df3627b160/content

Pareyon, G., Almada, C., Mathias, C., Saraiva, C., Moreira, D., Carvalho, H., Pitombeira, L., Gentil-Nunes, P., Mesz, B., Amster, P. y Riera, P. (2022). Music and Mathematics in Latin America. Major developments in the last 25 years. *Brazilian Journal of Music and Mathematics, 6*(1), 12–47. https://doi.org/10.46926/musmat.2022v6n1.12-47

Prada Dussán, M. (2009). Crítica moral de Francis Bacon a la Filosofía. *Folios: Revista de la Facultad de Humanidades 30*, 99-114. https://doi.org/10.17227/01234870.30folios99.114

Rasch, R. (2008). Simon Stevin and the calculation of equal temperament. En P. Vendrix (Ed.), *Music and Mathematics* (pp. 253-320). Brepols Publishers. https://doi.org/10.1484/M.EM-EB.3.3286

Salinas, F. (1577). *De música libri septem.* Mathias Gastius.

Simson, R. (1774). Los seis primeros libros y el undécimo, y duodécimo de los Elementos de Euclides. D. Joachin Ibarra, Impresor de Cámara de S.M.

Stevin, S. (1585). *L´Arithmétique*. A leyde: L´Imprimerie de Christophle Plantin.
Trinick, R. Ledger, G. Major. K. y Perger, P. (2016). More than counting beats: connecting Music and Mathematics in the primary classroom. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 17*(3). https://www.cimt.org.uk/ijmtl/index.php/IJMTL/article/view/32/20
Tytler, R., Williams, G., Hobbs, L. y Anderson, J. (2019). Challenges and opportunities for a STEM interdisciplinary agenda. En B. Doig, J. Williams, D. Swanson, R. Borromeo-Ferri y P. Drake (eds), *Interdisciplinary Mathematics Education. ICME-13 Monographs* (pp. 51-81). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11066-6_5
Van Wymeersch, B. (2008). Qu'entend-on par «nombre sourd»? En P. Vendrix (Ed.), *Music and Mathematics* (pp. 97-110). Brepols Publishers. https://doi.org/10.1484/m.em-eb.3.3281
Venegas-Thayer, M. A. (2019). Integration from a commognitive perspective:an experience with Mathematics and Music students. En B. Doig, J. Williams, D. Swanson, R. Borromeo-Ferri y P. Drake (Eds.), *Interdisciplinary Mathematics Education. ICME-13 Monographs*, (pp. 35–49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11066-6_4
Virdung, S. (1993). *A treatise on musical instruments.* University of Cambridge.
Walsh, T. P. (2010). Mathematics and Music. In L. Chen-Hafteck y J. Chen (Eds.), *Educating the creative mind: developing capacities for the future. An International Conference on Arts-Based Education* (pp. 90-92). Kean University. https://www.researchgate.net/profile/Jennifer-Chen-16/publication/271206509_Conference_Proceedings_of_the_Educating_the_Creative_Mind_Conference_2010/links/5649ee0108ae127ff9865ffa/Conference-Proceedings-of-the-Educating-the-Creative-Mind-Conference-2010.pdf#page=94
Wright, D. (2009). *Mathematics and Music*. American Mathematical Society. https://www.math.wustl.edu/~wright/Math109/00Book.pdf
Xenakis, I. (1992). *Formalized Music. Thought and Mathematics in Music*. Pendragon Press.
Zarlino, G. (1558). *Istitutioni harmoniche.* Francesco dei Francheschi Senese.
Zarlino, G. (1571). *Dimonstrationi harmoniche.* Francesco dei Francheschi Senese.
Zarlino, G. (1588). *Sopplimenti musicali.* Francesco dei Francheschi Senese.

Autores

Lianggi Espinoza Ramírez. Universidad de Valparaíso, Chile. lianggi.espinoza@uv.cl
https://orcid.org/0000-0003-1526-7229

Andrea Vergara Gómez. Universidad Católica del Maule, Chile. avergarag@ucm.cl
https://orcid.org/0000-0001-6388-8412

