Luisa Ruiz-Higueras, Francisco Javier García García

ANÁLISIS DE PRAXEOLOGÍAS DIDÁCTICAS EN LA GESTIÓN DE PROCESOS DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA ESCUELA INFANTIL

Analysis of didactic praxeologies in the management of mathematical modeling processes in childhood education

RESUMEN. Este trabajo tiene como objetivo describir y analizar, con base en la metodología de *estudio de casos*, las praxeologías matemático-didácticas que surgen al realizar tareas de modelización matemática de un sistema dinámico de variación, donde participan una maestra y un grupo de alumnos de educación infantil. Se describe el conjunto de praxeologías matemáticas que serán construidas a partir del trabajo sobre el sistema y se pone especial hincapié en el análisis y la caracterización de la *praxis didáctica* y del *logos didáctico* de la profesora, utilizando un marco teórico que articula la Teoría Antropológica de lo Didáctico con investigaciones recientes sobre la acción didáctica del profesor. Los resultados abren una prometedora dimensión en el estudio y la identificación de metodologías efectivas para la enseñanza de las matemáticas basadas en la modelización.

PALABRAS CLAVE: Teoría Antropológica de lo Didáctico, praxeologías didácticas, acción didáctica del profesor, modelización matemática, educación infantil.

ABSTRACT. The objective of this work is to describe and analyze, based upon the *case study* methodology, the praxeologies for the teaching of mathematics, resulting from performing mathematical modeling tasks arising in the mathematical modeling of a dynamic variation system, with the participation of one teacher and a group of childhood education students. We describe the set of mathematical praxeologies to be built from work done in regard to the system, placing special emphasis upon the analysis and characterization of the *teaching practice* and *didactic logos* of the teacher, using a theoretical framework that articulates the Anthropological Theory of Didactics with recent research done on the teacher's teaching action. The results open a promising dimension in the study and identification of effective approaches for the teaching of mathematics based on modeling.

KEY WORDS: Anthropological Theory of Didactics, didactic praxeologies, didactic activity of the teacher, mathematical modeling, childhood education.

RESUMO. Este trabalho visa descrever e analisar, com base na metodologia de *estudo de caso*, as praxeologias matemático-didáticas que surgirem ao realizar tarefas de modelagem matemática de um sistema dinâmico de variação, onde participam uma professora e um grupo de alunos de

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2011) 14 (1): 41-70.
Recepción: Junio 16, 2010 / Aceptación: Enero 3, 2011.

educação infantil. Descreve-se o conjunto de praxeologias matemáticas que serão construídas a partir do trabalho sobre o sistema e enfatiza-se a análise e a caracterização da *praxis didádica* e o *logos didático* da professora, utilizando um padrão teórico que articula a Teoria Antropológica do Didático com investigações recentes sobre a ação didática do professor. Os resultados abrem uma prometedora dimensão no estudo e na identificação de metodologias efetivas para o ensino da matemática que se apoia na modelagem.

PALAVRAS CHAVE: Teoria Antropológica do Didático, praxeologias didáticas, ação didática do professor, modelagem matemática,educação infantil.

RÉSUMÉ. Ce travail a pour objectif de décrire et d'analyser, en se basant sur la méthodologie de l'*étude de cas*, les praxéologies mathématico-didactiques qui émergent lorsque l'on procède à des exercices de modélisation mathématique au sein d'un système dynamique de variation au cours d'une activité dirigée par une institutrice avec son groupe d'élèves dans le cadre de l'éducation maternelle. L'ensemble des praxéologies mathématiques qui seront construites à partir du travail sur le système est ainsi décrit et une attention toute particulière est portée sur l'analyse et la caractérisation de la *praxis didactique* et du *logos didactique* de la professeure en utilisant un cadre théorique articulant la Théorie anthropologique du didactique et de récents travaux de recherche sur l'action didactique de l'enseignant. Les résultats sont prometteurs pour l'étude et l'identification des méthodologies effectives pour l'enseignement des mathématiques reposant sur la modélisation.

MOTS CLÉS: Théorie anthropologique du Didactique, praxéologies didactiques, action didactique du professeur, modélisation mathématique, éducation en école maternelle.

1. Introducción:
El problema de la gestión de procesos de modelización en el aula

En la comunidad de investigación sobre la modelización matemática hay un amplio consenso para conceptualizar el trabajo de modelización como un proceso cíclico donde se establecen vínculos entre el *mundo real* y el *mundo matemático.* Este proceso cristaliza en múltiples versiones del *ciclo de modelización*, construidas en función del problema de investigación que se desee abordar y del marco teórico utilizado (véase, por ejemplo, Borromeo-Ferri, 2006). En trabajos previos (García, 2005; García, Gascón, Ruiz-Higueras y Bosch, 2006) hemos propuesto que se describan los "procesos de modelización" —desde el enfoque de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)— como procesos de reconstrucción y articulación de praxeologías de complejidad creciente (puntuales → locales → regionales), los cuales deben comenzar a generarse a partir del cuestionamiento sobre las *razones de ser* de las organizaciones matemáticas que se desean reconstruir y articular; de allí emergerán las *cuestiones cruciales* para los individuos de la institución en la que se desarrollará el proceso de estudio.

En este sentido, describiremos un proceso de modelización diseñado e implementado en la etapa de la Educación Infantil en España, que comprende a niños de 3 a 6 años.

Los procesos de modelización matemática han ocupado, durante los últimos años, un papel central en la investigación en educación matemática desde una faceta dual: como herramienta didáctica para la enseñanza de las matemáticas y como objeto de enseñanza-aprendizaje. Recientemente, el decimocuarto estudio de la International Commission on Mathematical Instruction, ICMI (Blum, Galbraith, Henn y Niss, 2007) ha servido para clarificar las líneas de investigación prioritarias en este ámbito. Entre ellas, nos centraremos en el problema de identificar las *pedagogías efectivas* para implementar procesos de modelización en el aula.

Algunas publicaciones recientes e importantes, como la de Burkhardt y Pollak (2006), reconocen que la gestión de procesos de modelización en el aula supone un cambio en el rol del profesor, que transite del papel *directivo*, donde el alumno actúa como mero *imitador*, al de *facilitador*, en el que los alumnos proceden como *investigadores.* Søren, Haines, Højgaard y Niss (2007) también consideran que, en la gestión de los procesos de modelización en el aula, los *profesores efectivos* usan metodologías *activas, orientadas hacia los alumnos y contextuales.*

Doerr (2007) estima que la enseñanza de las matemáticas, desde un enfoque basado en la modelización, requiere que se inviertan algunos de los roles tradicionales, tanto de los profesores como de los estudiantes: los estudiantes deben asumir más la evaluación de sus propias ideas, mientras que los profesores deben crear oportunidades para que los alumnos puedan llevar a cabo dicha evaluación en forma productiva.

Borromeo-Ferri y Blum (2010) utilizan la perspectiva cognitiva para analizar cómo los *estilos de pensamiento matemático* de los profesores condicionan sus acciones didácticas en las tareas de modelización. En su trabajo, concluyen que el *estilo de pensamiento* identificado en cada profesor determina sus preferencias por una u otra parte del ciclo de modelización, y que la mayoría no era consciente de las decisiones que tomaba durante la gestión de estos procesos en el aula.

Por su parte, Leiβ y Wiegand (2005) identifican, de manera general, cinco categorías en la acción del profesor: *afectiva*, *metacognitiva*, *en relación al contenido*, *en relación a la organización* y *la diagnosis.* También distinguen, como aspectos relevantes, el momento en que profesor interviene, el tipo de problema en el que los estudiantes trabajan, así como el nivel y el método de intervención.

Sin embargo, una revisión profunda de las publicaciones más recientes en el campo de la modelización y de las aplicaciones muestra no sólo la escasez de investigaciones que se centren en clarificar y aumentar el conocimiento científico sobre las metodologías involucradas en los procesos de modelización, sino también la ausencia de teorías científicas que permitan describir con precisión y categorizar dichas metodologías, más aún desde una perspectiva epistemológica e institucional.

Cualquier intento de avanzar en esta dirección debe pasar por el uso de teorías científicas que describan y expliquen, con cierta profundidad, la actividad del profesor en el aula durante los procesos de estudio, en los cuales los alumnos se enfrentan a situaciones de modelización matemática. En el apartado 2 del presente trabajo exponemos un marco teórico que integra la TAD (Chevallard, 2002a, 2007), el modelo de la acción didáctica del profesor (Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni, 2000; Sensevy, Schubauer-Leoni, Mercier, Ligozat y Perrot, 2005) y el modelo de análisis sobre la actividad del profesor (Margolinas, Coulange y Bessot, 2005). En el apartado 3 ponemos en funcionamiento este marco para analizar, describir y justificar la acción didáctica de una profesora en la gestión de un proceso de modelización en la Educación Infantil. Finalmente, en el apartado 4 ofrecemos las implicaciones y potencialidades del modelo propuesto para investigar la *acción didáctica de la profesora* en la gestión de los procesos de modelización matemática en el aula.

Para finalizar esta introducción, deseamos llamar la atención sobre la ausencia de la Educación Infantil[1] en el debate y la investigación didáctica acerca de la modelización y sus aplicaciones. Precisamente en una etapa educativa en la que lo concreto y el entorno más cercano del alumno son los elementos principales para construir los saberes escolares, es paradójico que sea difícil encontrar investigaciones que describan y analicen la actividad de los niños en términos de procesos de modelización.

[1] Esto se puede constatar, por ejemplo, al revisar los libros emanados de las conferencias de la International Community of Teachers of Modelling and Applications (ICTMA). En los catorce volúmenes publicados desde 1984 son muy pocos los artículos que, de una u otra forma, se relacionan con la etapa de la Educación Infantil. Tampoco en el *14º. Estudio del ICMI* (Blum, Galbraith, Henn y Niss, 2007) encontramos un capítulo relacionado directamente con esta etapa educativa; sólo considera los problemas aritméticos verbales en la etapa de la educación primaria.

2. Un modelo para describir las praxeologías didácticas

En el proceso de estudio escolar, un profesor y un conjunto de alumnos participan de manera integrada. El profesor lleva a cabo una *acción didáctica* con objeto de que los estudiantes construyan una organización matemática (OM). En la medida en que las características de la OM condicionan las posibles formas de organizar su estudio —la organización didáctica (OD)— y las características del proceso de estudio de la OD condicionan a la OM realmente construida, la TAD describe todo proceso de estudio como un par (OM, OD), lo cual permite aprehender de manera conjunta esta dependencia entre *lo matemático* y *lo didáctico*.

Por tanto, al describir un proceso de estudio es necesario vincular la OM en juego y la OD que guía su construcción en el aula. Sin embargo, mientras que la descripción de la OM parece relativamente sencilla y es fácil hallar descripciones detalladas en muchos artículos y publicaciones relacionadas con la TAD, la descripción de la OD es mucho más compleja. Las técnicas didácticas parecen más transparentes y escurridizas, ya que muy a menudo tienen una naturaleza básicamente discursiva. Además, en contraste con las técnicas matemáticas, parecen depender mucho más fuertemente del contexto donde la acción didáctica se lleva a cabo.

El objetivo de este apartado es elaborar un modelo tentativo para la descripción de las praxeologías didácticas, el cual nos ofrezca una terminología común y un conjunto de herramientas teóricas para llevar a cabo este análisis.

Toda *acción didáctica del profesor* implica la existencia de *tareas didácticas* a las que se tiene que enfrentar, así como la puesta en funcionamiento de determinadas *técnicas didácticas. Tareas* y *técnicas didácticas* constituyen la *praxis didáctica* del profesor. Pero, al mismo tiempo, también es posible identificar en toda *acción didáctica* la existencia —más o menos explícita— de discursos que describan y justifiquen la forma de actuar del profesor; estas son sus *tecnologías didácticas* y sus *teorías didácticas*, que integran el *logos didáctico.* La cuestión que nos plateamos es: ¿con qué elementos se pueden describir las praxeologías didácticas? Y, en particular, ¿con qué elementos podemos describir la *praxis didáctica*? ¿Y el *logos didáctico*?

2.1. *Un modelo para describir la praxis didáctica*

A la hora de poner en juego el par (OM, OD), el profesor se enfrenta a un conjunto de seis tipos de tareas, de acuerdo con las seis dimensiones básicas de todo proceso de estudio[2]: 1) realizar el momento del primer encuentro; 2) realizar el momento exploratorio; 3) realizar el momento tecnológico-teórico; 4) realizar el momento de la institucionalización; 5) realizar el momento de trabajo de la técnica, y 6) realizar el momento de la evaluación (Artaud, 2007, p. 243-244; Chopin, 2007, p. 308).

Con el fin de disponer de herramientas más finas para analizar la *praxis didáctica* del profesor, proponemos usar el modelo desarrollado por Sensevy et al. (2000, 2005). Este modelo propone cuatro elementos, que constituyen una estructura básica de la acción del profesor, y pueden ser entendidos como grandes tipos de tareas didácticas: *definir, regular, devolver e institucionalizar.* Consideramos que esta estructuración básica de la acción, combinada con las seis dimensiones fundamentales del proceso de estudio, nos permite describir con más precisión la *praxis didáctica* del profesor. Por ejemplo, durante el momento del primer encuentro, el profesor tiene básicamente que definir la situación y los objetos que la integran, así como asegurar la devolución[3]. Sin embargo, en numerosas ocasiones debe *reforzar* la devolución durante el momento exploratorio e incluso durante el trabajo de la técnica, con el fin de evitar que los alumnos *abandonen* la situación. Por otro lado, pequeñas institucionalizaciones (ya sea de términos, de notaciones, de técnicas, de saberes) resultan densas en todos los momentos del proceso de estudio.

Asimismo, el profesor lleva a cabo la *regulación* de la relación didáctica en forma continua durante todo el proceso de estudio. Dependiendo del momento didáctico, es responsabilidad del profesor *regular* las interacciones de los alumnos con la situación, de manera que la exploren y busquen técnicas iniciales (momento exploratorio); pongan en funcionamiento las técnicas, su alcance o su validez, haciéndolas evolucionar si es necesario (momento de trabajo de la técnica), o bien se construya un entorno tecnológico–teórico que explique y justifique la actividad matemática (momento tecnológico-teórico).

El modelo de Sensevy et al. (2000, 2005) desglosa el primer nivel de estructuración en un segundo nivel, donde se identifican de manera específica tareas didácticas (o de enseñanza); por ejemplo, *denominar, organizar la acción en el medio, analizar la acción, organizar la interacción* o *la integración de los objetos.* En un tercer nivel de descripción, proponen una categorización de las técnicas didácticas según la tripleta *mesogénesis*, *cronogénesis* y *topogénesis* (Chevallard, 1985). Sucintamente, para *definir, devolver, regular* e *institucionalizar* el profesor pone en funcionamiento técnicas didácticas:

[2] Chevallard (2002b).

[3] En el sentido de Brousseau (1998).

– Para modificar, cuando es necesario, el medio de la situación (técnicas *mesogenéticas*)
– Para organizar o re-organizar el reparto de responsabilidades entre profesor y alumnos (técnicas *topogenéticas*)
– Para regular el tiempo didáctico (técnicas *cronogenéticas*)

En una extensión del modelo, consideramos que también el profesor hace vivir y evolucionar los diferentes *momentos didácticos* a través de acciones sobre el medio, el *topos* —tanto el suyo como el de los alumnos— y el control del tiempo didáctico. Por lo tanto, proponemos usar esta categorización de las técnicas didácticas para describir y analizar con mayor precisión la *praxis didáctica* del profesor en el aula.

2.2. *Un modelo para describir el logos didáctico*

Un marco para estructurar la descripción, explicación y justificación de la *praxis didáctica* no está recogido explícitamente en el modelo teórico de Sensevy y sus colaboradores. Por ello, consideremos necesario elaborar un modelo más rico que permita describir el *logos didáctico.*

Margolinas et al. (2005) proponen otro modelo para analizar la actividad del profesor que, en sentido amplio, constituye una referencia para describir las praxeologías didácticas. Este modelo, basado en la estructuración del medio didáctico descrito en la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998), propone cuatro niveles característicos de la acción del profesor (tabla I).

TABLA I
Niveles de la actividad del profesor

Nivel +3	Valores y concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje	Es el nivel más general (nivel *noosferiano* o ideológico): reflexión muy general del profesor sobre la enseñanza y el aprendizaje
Nivel +2	Proyecto didáctico global	Concepción general sobre cómo organizar un tema de enseñanza: nociones a estudiar y conocimiento a adquirir
Nivel +1	Proyecto didáctico local	Proyecto didáctico específico de una lección o conjunto de lecciones: objetivos y organización del trabajo
Nivel 0	Acción didáctica	Interacción con los alumnos y decisiones durante la acción
Nivel -1	Observación de la acción de los estudiantes	Percepción de la actividad de los estudiantes y regulación de su trabajo

Proponemos usar dicho modelo para estructurar el *logos didáctico* del profesor. Si los niveles -1 y 0 corresponden a acciones que el profesor realiza en el aula, es decir, a su *praxis didáctica* —que hemos propuesto analizar a partir del modelo de Sensevy et al. (2000, 2005)—, los niveles +1, +2 y +3 nos permiten estructurar el porqué de esa *praxis*, es decir, su *logos didáctico.*

3. Descripción de las praxeologías didácticas: estudio de caso

A continuación, usando los modelos teóricos que explicamos en el apartado anterior, analizaremos el caso de la profesora Ana[4], para ponerlos a prueba y mostrar su pertinencia en el análisis de las praxeologías didácticas.

Si toda actividad del profesor en el aula puede ser modelizada como un par (OM, OD), entendiendo que la OM puede ser una praxeología local —e incluso regional—, integrada por un conjunto de praxeologías puntuales —respectivamente locales—, entonces no será posible describir y entender la praxeología didáctica de Ana sin explicitar también las praxeologías matemáticas que reconstruye en el aula. Aunque son descritas en apartados separados en aras de mayor claridad expositiva, ambas se hallan íntimamente relacionadas.

3.1. *Praxeologías matemáticas: un proceso de modelización en torno a un sistema de variación*

El proceso de estudio, cuya estructura praxeológica vamos a describir en esta sección, fue diseñado de manera conjunta por la maestra y los investigadores como un verdadero recorrido de estudio e investigación, en el sentido mostrado en trabajos como los de Matheron y Noirfalise (2007), Gaud y Minet (2008) o Guichard (2010), dentro del grupo (CD) AMPERES[5], o los de García (2005), Rodríguez (2005), Sierra (2006), Barquero (2009), García y Ruiz-Higueras (2010) o Ruiz (2010).

Para comprender este recorrido de estudio e investigación (al que, en adelante, llamaremos REI), consideramos importante introducir ciertas características fundamentales:

4 Nombre ficticio.

5 http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherche/equipes-associees/amperes.

- Tiene su origen en una cuestión generatriz extra-matemática, ya que si bien surge en el medio escolar, se relaciona con prácticas que lo exceden.
- Introduce un sistema de variación, de origen biológico, que cambia en el tiempo, lo cual dirige y condiciona toda la actividad matemática; además, sitúa en el corazón del proceso de estudio a la problemática de la modelización.
- Ha sido diseñado para que viva en una institución con características muy especiales: la etapa de la Educación Infantil en España, que comprende de los 3 a los 6 años.

Desde una perspectiva histórica, el REI pone a los niños ante situaciones de cuantificación y medida de cantidades discretas, similares a las que históricamente dieron lugar a la emergencia de la noción de número natural[6], mientras que, desde el enfoque epistemológico, está construido sobre el modelo de las magnitudes y su medida, diseñado en Bolea et al. (2005). Por ello, el REI enfrenta a los niños a un sistema en el que no sólo trabajan sobre diferentes cantidades de magnitudes discretas, sino ante el que surge la necesidad de medirlas y de formular esta medida. Es precisamente en la transición entre la gestión de cantidades de magnitudes discretas y la construcción de la aplicación medida donde el número natural toma sentido[7]. Y, ante la necesidad de formular dicha medida, comenzará a generarse la numeración.

En el REI diseñado, el sistema está configurado por una colección de gusanos de seda que va a sufrir una serie de transformaciones (*metamorfosis*) a lo largo del tiempo. Su pertinencia como actividad para realizar tareas de modelización matemática desde la Educación Infantil se justifica porque:

- Constituye un *medio*[8] que provoca gran curiosidad en los niños, lo cual permitirá desarrollar una actividad matemática rica y cargada de sentido en esta epata educativa, respetando el principio de enseñanza globalizada.

[6] Como aseguran historiadores y epistemólogos, tales como Boyer (1986), Rouche (1992), Diudonné (1978) o Kline (1985), entre otros, el concepto de número natural, cuyo origen se pierde en la antigüedad prehistórica, estuvo unido a la medida de cantidades de magnitudes discretas.

[7] Como puso en evidencia Brousseau (1995), al construir la situación fundamental del número en su aspecto cardinal.

[8] En el sentido de Brousseau (1998).

- Se trata de un sistema real y auténtico que tiene la gran ventaja de poder "vivir" en el aula para observar su evolución en directo. Sus componentes son fácilmente manipulables por los niños, lo que hará que validen sus hipótesis y contrasten sus soluciones empíricamente.
- Los distintos estados de este sistema están determinados por diferentes cantidades de magnitudes discretas (colecciones de objetos), cuya medida se puede expresar en números naturales.
- Se trata de un sistema dinámico: los gusanos de seda se transformarán en crisálidas, éstas en mariposas que, finalmente, morirán. Los niños deben controlar, e incluso medir, la evolución en el tiempo de al menos tres colecciones diferentes.

Este primer análisis sobre la caracterización del sistema constituye un *grado* 0*,* paso previo para comenzar el trabajo didáctico por medio del REI. Sin embargo, aún quedan muchas decisiones que tomar.

En el *grado* 1 de análisis, que correspondió al equipo investigadores-maestra, delimitamos las magnitudes que se pondrán en juego y formulamos la cuestión generatriz que lance el proceso de estudio:

> Q_G: *Hoy nos han regalado una caja con gusanos de seda. Debemos cuidarlos para que crezcan y se hagan muy grandes ¿Cómo debemos alimentar a nuestros gusanos con las hojas de morera para que puedan crecer y desarrollarse adecuadamente?*

A partir de esta cuestión, y con el propósito de generar una actividad matemática adecuada a las condiciones del sistema didáctico, fue necesario introducir nuevas restricciones[9] sobre el sistema:

- Se exige una hoja de morera por gusano y día.
- Es preciso reponer todas las hojas cada día: sustituir las hojas viejas por nuevas.
- Las hojas de morera hay que pedirlas por escrito al jardinero del colegio porque subir al árbol es peligroso.

[9] En general, este proceso de estructuración y delimitación del sistema forma parte de todo el trabajo de modelización. Sin embargo, las restricciones de la Educación Infantil nos han llevado a decidirlo a priori.

El conjunto de praxeologías matemáticas a construir depende de cómo se estructure el trabajo de modelización en la comunidad de estudio sobre el sistema *Gusanos de seda*. Al considerar las condiciones en que el sistema ha de *vivir*, a priori hemos identificado cuatro organizaciones matemáticas diferentes en torno a los *primeros conocimientos numéricos* (tablas II, III, IV y V). Es importante destacar que estas praxeologías se construyen de manera integrada a partir del trabajo sobre el sistema, en la medida en que nuevas cuestiones surgen, ya sea por la evolución del sistema, por la acción didáctica de la maestra o por ambos factores combinados.

TABLA II

Praxeologías matemáticas de complejidad creciente. Organización matemática OM_1

<table>
<tr><td colspan="2">Comparación, medida y producción de colecciones (en las familias de conjuntos G y H)

$G = \{G_i \,/\, G_i$ es una colección de gusanos de seda, para $i \in \aleph \}$

$H = \{H_i \,/\, H_i$ es una colección de hojas de morera, para $i \in \aleph \}$</td></tr>
<tr><td>Tareas</td><td>Técnicas</td></tr>
<tr><td>Esta organización matemática surge como primera respuesta a la cuestión generatriz Q_G. Contiene tareas problemáticas que se refieren a la construcción de colecciones equipotentes (en ausencia de una de ellas), la comparación de colecciones (diferentes o la misma en dos estados diferentes), la cardinación de colecciones, la codificación del cardinal de una colección, la comparación de mensajes escritos con información cuantitativa…

Estas tareas, en el nivel educativo donde nos ubicamos, constituyen verdaderamente cuestiones problemáticas, ya que los niños de Educación Infantil no utilizan de manera espontánea la numeración ni emplean óptimamente las técnicas para cardinar o medir colecciones; por ejemplo, el conteo o el cálculo aritmético.</td><td>Técnicas para comparar y medir colecciones discretas, con el fin de codificar y comunicar su medida:

– Correspondencia término a término
– Correspondencia subconjunto a subconjunto
– Estimación visual
– Subitización
– Conteo
– Conteo sobre el soporte banda numérica
– Conteo sobre el soporte calendario</td></tr>
</table>

TABLA III

Praxeologías matemáticas de complejidad creciente. Organización matemática OM_2

Gestión de un sistema dinámico: comparación y medida de colecciones en las familias[10]:

$$G = \{G_i\},\ H = \{H_i\},\ C = \{C_i\} \text{ y } M = \{M_i\}$$

En un determinado momento de la evolución del sistema, la colección inicial de gusanos $G_0=G(t_0)$ va transformándose en función del tiempo. El sistema, inicialmente estático, se ha convertido en un verdadero sistema dinámico. Desde el punto de vista matemático, la praxeología OM_1, que abordaba la cuantificación, ha evolucionado y se ha ampliado para incluir problemas de estructura aditiva (Vergnaud, 1991). En esta evolución temporal, la colección inicial de gusanos G_0 genera las colecciones $G_i=G(t_i)$, $C_i=C(t_i)$ y $M_i=M(t_i)$, de tal manera que hay intervalos temporales donde coexisten colecciones de las tres magnitudes señaladas, pero tienen modificaciones en sus respectivas medidas. Se debe controlar la evolución en el tiempo de al menos tres colecciones diferentes. En términos de un sistema dinámico, cada estado del sistema se puede describir con el vector (t_i, g_i, c_i, m_i), siendo t el tiempo y g_i=Card(G_i), c_i=Card(C_i) y m_i=Card(M_i). Además, una ley conservativa regula el sistema: en cada instante t_i, la suma de las medidas de las colecciones G_i, C_i y M_i tiene que ser constante e igual a la medida inicial g_0 de gusanos.

Tareas	*Técnicas*
En la OM_2, las tareas se agrupan en torno a la gestión de colecciones en situaciones aditivas (combinación, cambio, comparación). Por ejemplo, dadas dos o más colecciones (visibles o no simultáneamente), hay que determinar: (1) cuál tiene más elementos, (2) la diferencia entre ellas, (3) el cardinal del conjunto unión ($G_i \cup C_i \cup M_i$), conocido el cardinal de G_0, C_i y M_i, (4) el cardinal de G_i, etc.	Aparte de técnicas para comparar, medir y codificar el cardinal de colecciones discretas (OM_1), la actividad matemática se extiende a técnicas de cálculo aritmético: *recuperar de la memoria resultados de combinaciones aditivas, técnicas basadas en el conteo (recuento, sobreconteo, descuento) y técnicas de cálculo*.

[10] Gusanos, hojas, crisálidas, mariposas (que posteriormente se subdividirán en dos colecciones: mariposas vivas y mariposas muertas).

TABLA IV
Praxeologías matemáticas de complejidad creciente. Organización matemática OM_3

Registro de la evolución de diferentes estados del sistema: construcción de tablas para integrar y gestionar la variación de cantidades de las magnitudes: tiempo, gusanos, crisálidas, mariposas.

Esta organización matemática surge como respuesta a la cuestión problemática:

Q_3: *¿Cómo describir, registrar y gestionar la evolución de un sistema vivo y dinámico de gusanos de seda?*

Tareas	*Técnicas*
En la OM_3, el campo de tareas se amplía con la representación/lectura de datos en tablas y el trabajo sobre la magnitud tiempo: registrar la evolución temporal de diferentes estados del sistema, localizar en una tabla un estado del sistema, determinar la distancia temporal entre dos estados del sistema, determinar y denominar la posición de un estado del sistema dentro de una seriación lineal de estados,…	Las técnicas giran en torno a la estructuración de datos en tablas de doble entrada y, recíprocamente, en su lectura e interpretación. En esta situación, una de las razones de ser para la construcción y el trabajo en tablas es el registro y la cuantificación del tiempo. Este hecho introduce particularidades importantes, al incorporar técnicas primitivas que los niños usan para cuantificar periodos temporales, basadas en la discretización del tiempo en días y en el empleo del conteo sobre ostensivos como la banda numérica y el calendario.

TABLA V
Praxeologías matemáticas de complejidad creciente. Organización matemática OM_4

Producir conocimiento sobre el sistema (cuando el sistema ya no existe) a partir de los datos del modelo tabular que ha recogido su evolución.

Esta organización matemática toma pleno sentido en un proceso de estudio como este, donde la evolución del sistema conduce a su desaparición. Surge como respuesta a la siguiente cuestión problemática:

Q_4: *Una vez que murieron todas las mariposas, ¿cómo podemos construir, entre todos los equipos de la clase, varios murales que muestren con precisión los gusanos, crisálidas y mariposas que teníamos en una fecha determinada?*

Tareas	*Técnicas*
Producir colecciones que representen al sistema en diferentes momentos de su evolución —estados— a partir de los datos que ofrece la tabla, medir cantidades de tiempo, resolver problemas de estructura aditiva relativos a distintos estados del sistema (combinar, cambiar, comparar), establecer relaciones de comparación entre las informaciones alfa-numéricas contenidas en la tabla, etc.	Todas las anteriores. Aunque durante todo el proceso de estudio los diferentes objetos matemáticos han ido surgiendo según eran necesarios para controlar la evolución del sistema, ahora toman un sentido muy diferente: en la medida en que el sistema no volverá a existir, los modelos construidos —en especial los tabulares— se convierten en herramientas imprescindibles para aportar datos sobre el sistema.

Consideramos importante destacar que el hecho de tomar en serio el estudio de una cuestión generatriz implica cierto grado de indeterminación en el proceso de estudio asociado. Por consiguiente, la descripción previa de tareas y técnicas —así como de las tecnologías asociadas, que hemos omitido en este artículo— no debe entenderse como un camino a recorrer por la comunidad de estudio, sino como la explicitación de las posibilidades que el estudio del sistema *Gusanos de seda* ofrece.

3.2. *Proceso de estudio: análisis de la praxeología didáctica*

El proceso de estudio que aquí analizamos fue implementado durante el curso 2008-2009. Debido a la riqueza de la cuestión generatriz y la *vida* del sistema, el estudio se alargó durante varias semanas, por lo cual resulta imposible describirlo y analizarlo en su totalidad. En este apartado seleccionamos algunos episodios relevantes y analizamos la praxeología didáctica puesta en funcionamiento por la maestra.

En primer lugar, describiremos y analizaremos los elementos más importantes de la *praxis* de la maestra cuando estaba dirigiendo el proceso de estudio; en segundo, los aspectos más importantes de su *logos didáctico*, que explican y justifican su *praxis.*

3.2.1. *Descripción y análisis de la praxis didáctica de Ana (profesora)*

Para analizar la *praxis didáctica* de Ana identificaremos:

- Las tareas didácticas en función de los momentos de estudio y de los tipos de tareas determinadas por Sensevy et al. (2000, 2005): *definir, regular, devolver* e *institucionalizar*
- Las técnicas didácticas en función de su impacto sobre el medio didáctico (*mesogenéticas*), sobre el *topos* didáctico (*topogenéticas*) o sobre el tiempo didáctico (*cronogenéticas*)

Para describir los episodios, nos basaremos en el autorrelato del proceso de estudio que escribió la propia maestra, donde recogió no sólo los acontecimientos, sino también los diálogos entre los niños y ella, las producciones de los niños y sus reflexiones sobre el proceso de estudio vivido (tablas VI, VII y VIII).

TABLA VI

Descripción y análisis de la *praxis didáctica* de la maestra en el episodio 1

Ana (Profesora): Hoy nos han regalado una caja con gusanos de seda. Debemos cuidarlos para que crezcan y se hagan muy grandes.

Durante los días que los gusanos están en la clase, los niños se dan cuenta que son muy voraces y se comen rápidamente todas las hojas de morera, por lo que muestran mucho interés en su alimentación. Así surge nuestro primer problema: la gestión del alimento.

Para comenzar a trabajar con los niños en el sistema *Gusanos de seda,* la maestra plantea como primer problema el de su alimentación, con el propósito de que los niños comiencen a relacionar entre sí cantidades de dos magnitudes discretas: gusanos de seda (G) y hojas de morera (H):

Q_G: *¿Cómo debemos alimentar a nuestros gusanos con las hojas de morera para que puedan crecer y desarrollarse adecuadamente?*

Ante la gran expectación despertada en los niños y el deseo de poner, sin ningún tipo de control, todas las hojas de morera en la caja, la maestra indica:

Ana (Profesora): Eh, chicos, ¿qué os parece si ponemos una hoja fresca cada día a cada gusano? Una y sólo una para cada gusano. Así, cada uno tiene su comida y todos crecen sin problemas.

A todos les pareció una buena idea.

Ana (Profesora): ¿Qué podemos hacer para que todos coman una y sólo una hoja y no se nos quede ninguno sin su hoja fresquita diaria? ¿Cómo resolvemos este problema?

TAREAS DIDÁCTICAS	TÉCNICAS DIDÁCTICAS

TAREAS DIDÁCTICAS

Realizar el primer encuentro con la OM_1:

Definir la cuestión generatriz Q_G del proceso de estudio.

Definir el medio: objetos y relaciones entre ellos (sistema de variación).

Definir la relación de los alumnos y la profesora con el medio: contrato didáctico

Determinar la acción sobre el medio.

Devolver el problema: la maestra debe proponer un problema a los niños con la intención de obtener su total adhesión por la gran relevancia y significación que tendrá para ellos resolverlo.

Llevar a cabo el tránsito entre el primer encuentro y el momento exploratorio.

Realizar el momento exploratorio (OM_1).

Re-organizar el medio para la acción.

Definir diferentes tipos de problemas.

Regular la interacción de los alumnos con el medio.

TÉCNICAS DIDÁCTICAS

Técnicas mesogenéticas:

Presentar y describir un medio: la maestra presenta un conjunto de objetos (*gusanos*) y de declaraciones (*cuidar los gusanos, alimentarlos, nuestra responsabilidad…*).

Enunciar la cuestión problemática Q_G: *iniciación del proceso de devolución*. La maestra formula una cuestión muy pertinente para que los niños se involucren totalmente y "hagan suyo" el problema.

Delimitar el sistema e introducir restricciones (*una hoja fresca cada día para cada gusano…*).

Relanzar una nueva cuestión: *¿Qué podemos hacer para que todos coman una y sólo una hoja y no se nos quede ninguno sin su hoja fresquita diaria?* La maestra, con objeto de clarificar la situación, disminuye la incertidumbre de los alumnos y dota de sentido a la actividad matemática.

La maestra cambia el "medio" inicial, formulando una nueva cuestión para que los niños necesariamente modifiquen las técnicas de resolución primitivas del problema propuesto (coger sin el más mínimo control diferentes cantidades de hojas de morera).

Técnicas cronogenéticas:

Cambiar el momento de estudio: la maestra formula cuestionamientos nuevos para provocar la emergencia, exploración y construcción de nuevas técnicas.

Esperar el momento propicio: la maestra deja un tiempo para que los niños "vivan" las técnicas iniciales (sin control numérico) y *espera el momento propicio* para volver a cambiar el medio, con el fin de provocar la emergencia de técnicas basadas en la cardinación de colecciones.

Técnicas topogenéticas:

Fusión topogenética inicial: la profesora se ubica en el mismo grupo de los alumnos y la disimetría de la relación didáctica es ficticiamente borrada (*todos debemos, es nuestra responsabilidad*...). En este caso, realiza un desplazamiento topogenético mediante un *movimiento topogenético descendente.*

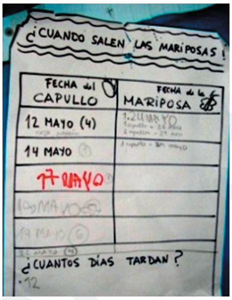
Provoca la organización cooperativa de la actividad en el grupo-clase (*los gusanos están bajo nuestra responsabilidad*).

Al avanzar el episodio, la maestra ocupa una posición topogenética dual: por un lado, intenta mantenerse en el topos del alumno (*ponemos, debemos, resolvemos*…), pero por otro asume su responsabilidad en la gestión de la actividad del aula y re-organiza el medio cuando lo estima oportuno para hacer avanzar el trabajo matemático de los alumnos.

TABLA VII

Descripción y análisis de la *praxis didáctica* de la maestra en el episodio 2

Cuando se inició la metamorfosis, hubo mucha expectación en toda la clase:



Ana (Profesora): ¿Y cuándo saldrán las mariposas?

Raquel: Pues mañana.

Mario: No, tardan más días.

Ana (Profesora): ¿Sí? ¿Cuántos?

Dani: Mi mamá me ha dicho que diez.

Ana (Profesora): Pues yo no lo sé.

María: Pues los contamos y cuando salgan ya sabemos cuántos días son.

Sobre la marcha la maestra prepara una tabla de doble entrada con la ayuda de los niños y niñas. Y, sin mediar palabra, clava la hoja en el corcho de la asamblea.

Mario: ¿Eso qué es?

Raquel: ¿Para apuntar?

Ana (Profesora): A ver, he pensado que vamos a apuntar el día de hoy para no olvidarnos, porque así cuando salgan los capullos sabremos desde qué día empezar a contar…

Ana (Profesora): Aquí apuntaremos la fecha cada vez que tengamos un capullo nuevo. Y cuando salga alguna mariposa, lo apuntamos también.

Dani: Eso, a ver si yo tenía razón, verás cómo son diez días.

(…)

Por suerte, la primera mariposa nació al día siguiente de que el último gusano se encerrara en el capullo. Entonces, la maestra pensó:

– ¿Cómo conseguir que los niños y niñas fueran autónomos para dar cuenta de la evolución sufrida por la colección de gusanos desde su inicio, señalando todas sus transformaciones?
– ¿Cómo ha ido cambiando?

La primera cuestión fue anotar en nuestro cuadrante la fecha y averiguar los días que había durado la metamorfosis. Para ello, fue necesario contrastar las diferentes estrategias que los equipos ofrecían:

Mario: Son tres días.

Dani: No, dije yo que diez *(Dani seguía convencido de que eran diez días*)

María: Los días ya han pasado y no se pueden contar.

Ana (Profesora): Sí que se puede. A ver, ¿cómo sabemos los días que han pasado después de mi cumpleaños, que fue hace unos días?

Pedro: Pues buscamos ese día en el almanaque y decimos uno, dos tres… (*unos cuantos se levantaron e iban señalando con el dedo hasta llegar a la fecha de hoy*).

Ana (Profesora): Pues esto es igual. A ver, el responsable de hoy, Antonio, dinos tú. Primero tienes que buscar en el cuadro la fecha en que ese gusano hizo el capullo.

Antonio: Tiene que ser de los primeros porque está en la caja marrón.

Ana (Profesora): Muy bien, Antonio, ahora busca ese número en el almanaque y cuenta…

Antonio: Uno, dos tres cuatro… doce, ¡doce días!

Todos los niños aceptaron el procedimiento de Antonio para saber los días que tardó la crisálida en transformarse en mariposa.

TAREAS DIDÁCTICAS	TÉCNICAS DIDÁCTICAS
Adaptar la actividad matemática a un medio que evoluciona en el tiempo (sistema dinámico). Realizar los momentos del primer encuentro, exploratorio y de trabajo de la técnica (OM_3). Regular el medio: Definir y organizar la acción en el medio (nuevas tareas, nuevas reglas, nuevas colecciones, nuevos objetos…) Institucionalizar técnicas. Redefinir el contrato didáctico. Obtener la adhesión de los alumnos a la nueva situación: mantener la devolución.	*Técnicas mesogenéticas:* El sistema, puesto que es dinámico, experimenta una evolución que transforma el medio en un doble sentido: – Transformación de las colecciones (aparece una nueva colección: *crisálidas*). – Emergencia del tiempo como una nueva variable del sistema. Relanzar nuevas cuestiones: la maestra produce un nuevo medio caracterizado por: – Cuestionamientos nuevos (*¿cómo medir el tiempo?*) – Nuevos objetos (tabla de doble entrada como modelo de la evolución temporal del sistema). – Introducción del calendario y banda numérica.

En este episodio, la magnitud a cuantificar (tiempo) es intangible. La introducción en el medio de la tabla junto con el calendario y la banda numérica genera la *visibilidad* de las diferentes cantidades de tiempo y su discretización. De esta forma, la maestra adecua el medio para que el trabajo sobre la magnitud tiempo se pueda realizar a partir de técnicas basadas en el conteo.

La maestra gestiona los ostensivos: tabla de doble entrada, banda numérica, calendario.

Técnicas cronogenéticas:

Cronogenéticamente, la maestra tiene que adaptar el tiempo didáctico a la evolución temporal de un sistema vivo cuyos cambios escapan a su control.

Aceleración cronogenética: La maestra debe cambiar de organización matemática al ritmo impuesto por la metamorfosis.

Para provocar en los niños la emergencia de una estrategia para medir el tiempo, la maestra procede mediante la técnica didáctica de la *resonancia* que consiste en generar la reaparición de una técnica anteriormente utilizada en la clase: así, recupera una técnica ya conocida (conteo sobre el calendario), recoge de la memoria colectiva de la clase hechos vividos (*su cumpleaños*), con el fin de ayudar a los niños a disminuir su incertidumbre, y reanuda su actividad en busca de estrategias apropiadas. Esto concierne a la gestión de la *memoria didáctica* de la clase.

Técnicas topogenéticas:

Movimiento topogenético ascendente: la maestra asume gran parte de la actividad matemática para reducir la incertidumbre de los alumnos ante un nuevo medio o cuestionamiento. Se ubica a gran distancia del *topos* del alumno, ya que ocupa la posición hegemónica que tiene en el grupo e instaura una *diferenciación topogenética extrema*. El *topos* del alumno queda prácticamente limitado a la reproducción de la técnica que señale la maestra. El nuevo contrato didáctico establecido deja de ser adidáctico.

	La maestra, mediante la técnica didáctica de *difusión dialógica*, retoma el procedimiento de un alumno (Antonio) para difundirlo a toda la clase; así, se integra al *medio* como una técnica institucionalizada (con efecto mesogenético). Sin embargo, observamos que la creación de la técnica por parte del alumno es sólo aparente, ya que en realidad la maestra es quien la construye y la presenta a la clase como proveniente de un alumno, con lo cual minimiza artificialmente la distancia topogenética entre ambos.

TABLA VIII

Descripción y análisis de la *praxis didáctica* de la maestra en el episodio

Ana (Profesora): Cuando ya se murieron todas las mariposas, decidimos hacer murales gráficos de los diferentes estados de nuestra colección.

La maestra eligió cuatro momentos significativos:

- Cuando sólo teníamos gusanos.
- Cuando comenzaron a hacer crisálidas.
- Cuando sólo teníamos crisálidas.
- Cuando sólo teníamos mariposas, incluidas las muertas que guardábamos para mirarlas después en el microscopio.

En su elaboración intervinieron todos los niños, pero no todos a la vez. Es decir, trabajaron la actividad en grupos de seis o siete integrantes, de modo que el mural finalizó cuando todos los niños de la clase habían participado.

Lo más interesante de este trabajo es que, cuando un grupo se iba porque había acabado su tiempo y llegaba otro, el primer objetivo del nuevo equipo era ver en qué estado se encontraba la tarea. Es decir, contaban cuántos elementos estaban ya dibujados, recortados y pegados y cuántos quedaban por hacer, por lo que las tablas donde se anotaron las variaciones de la colección eran imprescindibles. Fueron una auténtica herramienta de trabajo.

TAREAS DIDÁCTICAS	TÉCNICAS DIDÁCTICAS
Realizar los momentos del primer encuentro, exploratorio y de trabajo de la técnica (OM_4) Organizar y regular el medio. Llevar a cabo una nueva devolución del problema a los alumnos. Dotar de una nueva funcionalidad (*razón de ser*) a objetos matemáticos previamente construidos. Institucionalizar la tabla de doble entrada como *modelo* del sistema.	*Técnicas mesogenéticas:* Construir un nuevo medio, relanzar nuevas cuestiones: una vez que ha desaparecido totalmente el sistema, la maestra tiene que construir un nuevo medio para permitir que siga avanzando la actividad matemática de los niños. Las tablas, que hasta ahora han sido herramientas, se convierten en un auténtico *medio* a partir del cual la maestra introduce un nuevo problema: reconstruir el sistema en diferentes estados. Integrar organizaciones matemáticas: la maestra articula entre sí la OM_1, la OM_2, y la OM_3 constituyendo una nueva praxeología, la $OM_{4,}$ que amplía e integra entre sí a las anteriores. Reforzar el proceso de devolución: la maestra formula necesariamente nuevas cuestiones para que los niños aborden la tarea de producir colecciones y trata de asegurar la devolución del problema, aún cuando el sistema ya no existe. Gestión de ostensivos: la maestra debe gestionar el ostensivo tabla junto con los ostensivos banda numérica y almanaque. *Técnicas cronogenéticas:* Organiza la reconstrucción del sistema en sincronía con su evolución real en el tiempo pasado. En contraste con la *aceleración* del tiempo didáctico (*aceleración cronogenética*), que identificamos en el episodio anterior, ahora la maestra ralentiza el tiempo (*ralentización cronogenética*), ofreciendo a los niños grandes espacios para desarrollar la actividad matemática (ahora, la presión de la evolución real del sistema ha desaparecido). Promover la secuenciación y articulación progresiva de OM_1, OM_2, OM_3 y OM_4. Cambiar de momento de estudio.

	Técnicas topogenéticas: Construcción cooperativa de las técnicas: la profesora, posicionada como un alumno más, involucra al grupo en la construcción de nuevas técnicas, trata de ponerlo en posición reflexiva e incluso lo hace partícipe en el reparto de tareas. Posición topogenética dual: por una parte la maestra se identifica con el grupo clase y por otra, asume la responsabilidad no compartida de la selección de los estados del sistema a reconstruir.

3.2.2. *Descripción y análisis del logos didáctico de Ana (profesora)*

En este apartado trataremos de describir y analizar la componente tecnológico/teórica *—logos didáctico—* que sustenta la *praxis didáctica* de Ana. Para realizar este análisis utilizaremos el modelo teórico que presentamos en la sección 2 de este trabajo. La base empírica del estudio está constituida por la crónica hecha por la propia maestra y, principalmente, por las reflexiones que escribió al fin de las secuencias vividas en clase, donde trató de justificar su proceder didáctico. Este análisis descendente del *logos didáctico* de Ana nos permitirá aproximarnos a los niveles +3, +2, +1 (el nivel 0, correspondiente a la situación didáctica vivida en clase, ya fue estudiado en la sección anterior).

La maestra, al comienzo de sus reflexiones, señala explícitamente sus concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje en general, y de las matemáticas en particular.

> Que sea la propia situación vivida la que provoque que los niños y niñas necesiten la matemática nos parece más que importante, porque facilita un enfoque didáctico alejado del empirismo que tradicionalmente ha estado instalado en la escuela. Nuestros niños y niñas han ido construyendo sus saberes matemáticos para responder a necesidades vitales y utilizándolos para resolver problemas muy importantes para ellos.
>
> (…)
>
> Debemos huir del empirismo que relaciona error con fracaso. Debemos atender no sólo a los resultados, sino sobre todo a los procesos, a las estrategias que los niños y niñas han sido capaces de poner en juego.
>
> (…)

> Es muy importante que resuelvan los conflictos en grupo, que se escuchen unos a otros, que razonen en voz alta sus respuestas, que compartan estrategias. Sólo así se producirá la mediación y validación entre iguales tan importantes en el enfoque constructivista.

Identificamos a la *maestra-noosferiana*: Ana, en posición +3, hace explícitas dos tecnologías didácticas basadas en dos modelos de aprendizaje diferentes y opuestos: el *empirista* y el *constructivista* (que presenta como óptimo). Además, muestra abiertamente la necesidad de construir con sentido el conocimiento matemático. Tras estas tecnologías didácticas que justifican su *praxis didáctica* podemos identificar el aprendizaje por *adaptación al medio*, bajo el marco teórico de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) —formulada por Brousseau (1998)—, la significación del proceso de *devolución* en la actividad matemática de los niños y la responsabilidad de la maestra en la generación de conflictos sociocognitivos entre los alumnos.

Es importante señalar que Ana determina explícitamente cuál debe ser la posición de la maestra en la regulación del contrato didáctico: identifica con precisión el *topos* del profesor y el *topos* de los alumnos para hacer vivir en el aula una verdadera situación a-didáctica.

> Es fundamental que la maestra parta de una "profunda ignorancia" ante los niños. Cuanto menos sabe la maestra, más capaces los hacemos a ellos para resolver situaciones problemáticas.

Estas decisiones y exigencias didácticas revelan que Ana controla su acción didáctica a partir de la TSD y la usa como componente esencial de su *logos didáctico*. También muestran su preferencia hacia el modelo de aprendizaje constructivista, muy valorado en la actualidad por la noosfera para la Educación Infantil, que evidentemente condiciona su comportamiento y sus decisiones didácticas.

Si descendemos de nivel de análisis, el nivel +2 nos muestra por qué Ana, a fin de que los niños construyan con sentido los conocimientos matemáticos relativos al dominio de los primeros conocimientos numéricos (en adelante, PCN), proyecta el estudio del sistema *Gusanos de seda* en su evolución temporal y quiere generar toda una serie de situaciones a-didácticas en torno a él.

> Aprovechando que las mariposas ocupaban nuestro quehacer en clase durante estos días, se nos ocurrió llevar gusanos de seda para criarlos, y, en principio, ver "en directo" el ciclo de reproducción de la mariposa. Pero lo que comenzó siendo un tema "de ciencias" acabó ofreciéndonos un marco más que idóneo para trabajar el número, la numeración y la aritmética, a partir de los problemas que la crianza

> de los gusanos nos ofrecía, desde cómo gestionar el alimento hasta cómo llevar el control de los cambios ocurridos en la colección.
>
> (…)
>
> La cardinación y la numeración han de tener un porqué, una razón precisa, una funcionalidad, tales como conservar los gusanos de seda, poder relatar adecuadamente sus cambios, comparar el número de gusanos con el número de hojas, repartir cantidades, ahorrarnos trabajo en la gestión del alimento de nuestros gusanos, disponer de información precisa sobre todo lo acaecido.

Ana considera que los niños construirán conocimientos numéricos *con sentido*, ya que responderán a problemas y necesidades vitales, reales y auténticas. Toma el sistema *Gusanos de seda* como base idónea para construir toda una familia de situaciones a-didácticas y, de este modo, formar una verdadera *situación fundamental* (Brousseau, 1998) en torno a problemas derivados de *criar, alimentar y cuidar gusanos de seda*.

Hace explícita la necesidad de construir las situaciones a-didácticas en torno a dialécticas de acción, formulación y validación:

> Es necesario que los alumnos actúen, hagan, tomen iniciativas, opinen sobre qué posibles maneras hay de resolver un problema: el aprendizaje matemático se basa en la acción, en la comunicación, en la formulación, en la validación.

Y manifiesta la función del conocimiento matemático como herramienta útil para la *anticipación*:

> Hemos de conducir a nuestros niños y niñas desde la manipulación hacia la anticipación, es decir, no debemos sólo constatar o realizar acciones concretas sobre los objetos, sino que debemos usar la matemática para resolver situaciones en ausencia de los objetos: dibujar tantas mariposas como dice el número *n* del cuadrante sin necesidad de tocarlas, añadir los nuevos capullos a los ya existentes sin necesidad de volver a verlos en las cajas y contarlos otra vez, saber dar cuenta con precisión numérica de todo lo acaecido cuando ya no existen los gusanos, ni las crisálidas, ni las mariposas.

Ana tiene muy en cuenta la necesaria generación de sentido en la construcción de los conocimientos numéricos que realicen los niños:

> Tenemos que conseguir que los niños acudan al empleo del número y de la numeración porque lo necesitan para resolver un conflicto, una situación, un problema.

Asimismo, indica que la maestra debe hacer una adecuada gestión de los conflictos cognitivos:

> Hemos de diseñar situaciones en que las estrategias antiguas ya no les sirvan para que no tengan más remedio que buscar otras, que les plateen un conflicto cognitivo contra lo que ya saben o dominan, como por ejemplo que no es útil volver a contar los capullos ya contados.

El nivel +2 evidencia la significación e influencia que tiene el nivel +3 en la configuración de la acción didáctica de esta maestra. Podríamos postular que Ana llevaría a cabo un proyecto de enseñanza de similares características con cualquier otro conocimiento matemático de este nivel educativo.

Si consideramos que la acción didáctica de la maestra está descrita por un par (OM, OD), confirmamos que Ana ha realizado un verdadero trabajo de transposición didáctica con el fin de elaborar una OD que haga vivir la OM correspondiente a los PCN. Ha organizado sus sesiones concretas de clase a partir del sistema *Gusanos de seda*, teniendo en cuenta su concepción del aprendizaje matemático (nivel +3) y sus conocimientos sobre la *situación fundamental* en torno a los PCN (nivel +2).

Si descendemos hasta el nivel +1, encontramos a Ana frente a la necesidad de construir su *proyecto didáctico local*. Lo inicia a partir de una cuestión generatriz (Q_G) que permitirá a los niños establecer un primer encuentro con la organización matemática OM_1. Al formular esta cuestión, Ana trata de acondicionar un "medio" que provoque en los niños un aprendizaje matemático por adaptación (TSD), organizando toda una serie de tareas matemáticas descritas en OM_1, OM_2, OM_3 y OM_4, así como en los episodios 1, 2 y 3, que presentamos anteriormente.

Este conjunto de tareas muestra que Ana, en el nivel +1, pone en relación y hace funcionar los conocimientos matemáticos y didácticos que tiene a su disposición para organizar cada una de las situaciones a-didácticas de la *situación fundamental* prevista en el nivel +2. Además, con el fin de provocar una adecuada actividad matemática en los niños, introduce restricciones sobre el sistema; es decir, gestiona adecuadamente las variables didácticas de cada situación, tratando de que los alumnos las vivan con la máxima *a-didacticidad* posible.

En suma, Ana ha construido un par (OM, OD) *óptimo*, ya que la OM es una praxeología local relativamente completa (OM_1, OM_2, OM_3 y OM_4). La OD es un proceso de estudio que incluye y se desarrolla a partir de la *razón de ser* de la OM; además, en el diseño de la OD están presentes las diferentes *dimensiones* o *momentos* del proceso de estudio y desempeñan su adecuada función. Más aún, el par (OM, OD) representa un proceso de estudio que permite hacer vivir una verdadera actividad de modelización de un sistema dinámico de variación en la Escuela Infantil, donde los alumnos han construido un conjunto de praxeologías matemáticas de complejidad creciente[11].

4. Conclusiones

El análisis de la praxeología didáctica de Ana, que llevamos a cabo utilizando las herramientas introducidas en el apartado 2, nos ha permitido describir con precisión las acciones que realiza para gestionar el proceso de modelización en el aula, identificando técnicas didácticas específicas. Los resultados son coherentes con las prácticas docentes relacionadas con la modelización ya identificadas en otros estudios (apartado 1), pero consideramos que la investigación descrita aporta nuevos elementos, como son la posibilidad de:

- Describir no sólo las técnicas didácticas (*metodologías*), sino también los *problemas didácticos* a los que la maestra se enfrenta y, ante los cuales, las técnicas didácticas surgen como una posible respuesta.
- Clasificar las técnicas que emplea la profesora en función del *ámbito* sobre el que incide su acción (*topos, medio, cronos*).
- Diferenciar un nuevo tipo de técnicas didácticas: las *cronogenéticas.* Aunque no están ausentes en investigaciones previas, suelen aparecer amalgamadas dentro de la actividad del alumno o de la acción del profesor y nunca aparecen dotadas de entidad propia, lo cual abre la vía para su problematización y estudio.
- Separar las técnicas que el profesor lleva a cabo para estructurar la situación (*mesogenéticas*) de aquellas con las que pretende regular el reparto de responsabilidades durante la actividad de modelización (*topogenéticas*). Si bien ambas están muy relacionadas, el poder identificarlas como diferentes abre también una vía para su problematización y estudio.
- Describir en forma integrada la *praxis* didáctica de Ana y el porqué de esta *praxis* (su *logos* didáctico).

[11] García (2005); García et al. (2006).

Ciertamente, el proceso de estudio dirigido por Ana y las técnicas didácticas que moviliza pueden ser calificados como *activos*, *centrados en los alumnos* y *contextuales.* Sin embargo, nuestro análisis muestra la sutileza con la que la maestra, en determinados momentos, ubica la responsabilidad de la tarea en los alumnos mientra que, en otros momentos, la asume ella. También cómo gestiona el sistema dinámico de los "*Gusanos de seda*" (el *medio*) y los dispositivos que pone al alcance de los estudiantes a fin de ir gestionando y adaptando un medio y una actividad matemática en continua evolución. Por último, también damos cuenta de cómo administra el *tiempo didáctico* con el fin de dotar a sus alumnos del tiempo suficiente para explorar de forma fecunda el sistema, a la vez que controla los objetos matemáticos que desea que emerjan y coordina la actividad matemática con la evolución natural del sistema estudiado.

El artículo manifiesta, asimismo, cómo los procesos de modelización sobre sistemas de variación complejos pueden vivir en la Escuela Infantil para que los alumnos construyan los primeros conocimientos numéricos. Muestra, además, que los procesos de modelización matemática, desde los primeros niveles escolares, se pueden construir como un proceso de integración y ampliación de praxeologías de complejidad creciente, y que es posible llevar a cabo procesos de estudio estructurados por pares (OM, OD) óptimos. Todo esto constituye una aportación significativa, puesto que, como se ha mostrado en el apartado 1 de este trabajo, la literatura de investigación en educación matemática en torno a la modelización rara vez considera etapas educativas tan tempranas.

Por todo ello, consideramos que el marco teórico introducido en este artículo abre una nueva y prometedora dimensión en el estudio y la identificación de metodologías efectivas para la enseñanza de las matemáticas, que en este artículo simplemente empezamos a vislumbrar.

Referencias bibliográficas

Artaud, M. (2007). La TAD comme théorie pour la formation des professeurs. Structures et fonctions. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 241-259). Jaén, España: Universidad de Jaén.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Blum, W.; Galbraith, P.; Henn, H-W & Niss, M (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education*. New York, USA: Springer.

Bolea, P.; Bosch, M.; García, F. J.; Gascón, J.; Sierra, T. et Ruiz-Higueras, L. (2005). Analyse de la "mesure en CM1" d'après la théorie anthropologique du didactique. En P. Clanché, M-H. Salin et B. Sarrazy (Eds.), *Sur la théorie des situations didactiques. Questions, réponses, ouvertures... Hommage à Guy Brousseau* (pp. 153-166). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education 38* (2), 86-95.

Borromeo-Ferri, R. & Blum, W. (2010). Insights into teachers' unconscious behaviour in modelling contexts. In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modelling students mathematical modelling competencies* (pp. 423-432). New York, USA: Springer.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Universidad.

Brousseau, G. (1995). Didactique des sciences et formation des professeurs. En C. Comiti (Ed.), *Didactique des disciplines scientifiques et formation des enseignants*. Grenoble, France: IUFM Grenoble.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Burkhardt, H. & Pollak, H. (2006). Modelling in mathematics classrooms. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education 38* (2), 178-195.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2002a). Organiser l'etude. 1. Structures & fonctions. En J. L. Dorier, M. Artaud, R. Berthelot et R. Floris (Eds.), *Actes de la 11émé école d'été de Didactique des Mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2002b). Organiser l'étude. Ecologie et régulation. En J. L. Dorier, M. Artaud, R. Berthelot y R. Floris (Eds.), *Actes de la 11émé école d'été de Didactique des Mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 705-746). Jaén, España: Universidad de Jaén.

Chopin, M. P. (2007). Le temps didactique en Théorie Anthropologique du Didactique. Quelques remarques methodologiques á propos des moments d'étude. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 301-318). Jaén, España: Universidad de Jaén.

Diudonné, J. (1978). *Abregé d'histoire des mathématiques*. Paris, France: Hermann.

Doerr, H. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? In W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 69-78). New York, USA: Springer.

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Jaén, España.

García, F. J.; Gascón, J.; Ruiz-Higueras, L. & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education 38* (3), 226-246.

García, F.J. & Ruiz-Higueras, L. (2010). Exploring the use of theoretical frameworks for modelling-oriented instructional design. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2166-2175). Lyon, France: Service des Publications, Institut National de Recherche Pédagogique.

Gaud, D. et Minet, N. (2008). *Méthodologie de la recherche menée par l'équipe de l'IREM de Poitiers*. Consultado en noviembre 15, 2010, de http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/textes-fondateurs.

Guichard, J. P. (2010). *PERs et grandes questions*. Consultado en noviembre 15, 2010, de http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/textes-fondateurs.

Kline, M. (1985). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. Madrid, España: Siglo XXI.

Leiβ, D. & Wiegand, B. (2005). A classification of teacher interventions in mathematics teaching. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education 37* (3), 240-245.

Margolinas, C.; Coulange, L. & Bessot, A. (2005). What can teacher learn in the classroom? *Educational Studies in Mathematics 59* (1-3), 205-234.

Matheron, Y. et Noirfalise, R. (2007). *Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d'AER et de PER*. Consultado en noviembre 15, 2010, de http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/textes-fondateurs.

Rodríguez, E. (2005). *Metacognición, matemáticas y resolución de problemas: una propuesta integradora desde el enfoque antropológico*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Complutense de Madrid, España.

Rouche, N. (1992). *Le sens de la mesure*. Bruselas, Bélgica: Didier-Hatier.

Ruiz, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional.* Tesis de doctorado no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Sensevy, G.; Mercier, A. et Schubauer-Leoni, M. L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la Course à 20. *Recherches en Didactique des Mathématiques 20*, 263-304.

Sensevy, G.; Schubauer-Leoni, M. L.; Mercier, A.; Ligozat, F. & Perrot, G. (2005). An attempt to model the teacher's action in the mathematics class. *Educational Studies in Mathematics 59* (1-3), 153-181.

Sierra, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Complutense de Madrid, España.

Søren, A.; Haines, C.; Højgaard, T. & Niss, M. (2007). Classroom activities and the teacher. In W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 295-308). New York, USA: Springer.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.

Autores:

Luisa Ruiz-Higueras. Universidad de Jaén, España. lruiz@ujaen.es
Francisco Javier García García. Universidad de Jaén, España. fjgarcia@ujaen.es