La negatividad matemática: antesala histórica de los números enteros

Mathematical negativity: historic background to integers

Aurora Gallardo, Eduardo Basurto

RESUMEN

Las manifestaciones de la negatividad matemática en la historia surgen muchos siglos antes de la emergencia de los enteros. Este hecho contribuyó a la resolución de una gran cantidad de problemas vía el álgebra. En este artículo exponemos tres episodios históricos que exhiben momentos cruciales de la trayectoria hacia la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros.

PALABRAS CLAVE:

- *Negatividad*
- *Historia*
- *Números enteros*
- *Álgebra*

ABSTRACT

Expressions of mathematical negativity appeared in history many centuries before integers emerged. This fact contributed to solve many problems through Algebra. The work described in this article is based on three historical episodes that exhibit crucial moments in the path towards the extent of natural number domain to integers.

KEY WORDS:

- *Negativity*
- *History*
- *Integers*
- *Algebra*

RESUMO

As manifestações da negatividade matemática na história surgem muitos séculos antes do surgimento dos inteiros. Este facto contribuiu na resolução de uma grande quantidade de problemas através da álgebra. Neste artigo expomos três cenários históricos que mostram momentos cruciais da trajectória relativa à ampliação do domínio numérico dos naturais aos inteiros.

PALAVRAS CHAVE:

- *Negatividade*
- *História*
- *Números inteiros*
- *Álgebra*

RÉSUMÉ

Les manifestations de la négativité mathématique tout au long de l'histoire surviennen plusieurs siècles avant l'apparition des nombres entiers relatifs. Ce fait a contribué à la résolution d'une grande quantité de problèmes à travers de l'algèbre. Dans cet article, nous présentons trois épisodes historiques qui font preuve de moments crucials de la trajectoire vers l'élargissement du domaine numérique des nombres naturels aux nombres entiers relatifs.

MOTS CLÉS:

- *Négativité*
- *Histoire*
- *Nombres entiers*
- *Algèbre*

Relime (2010) 13 (4-II): 255-268. Recepción: Abril 27, 2009 / Aceptación: Enero 28, 2010.

"La práctica clandestina del cálculo de los números relativos precede en 1600 años a su comprensión. ¡He aquí una buena lección que la didáctica de las matemáticas no debería olvidar!" (Glaeser, 1981).

Investigaciones como las realizadas por Freudenthal (1985), Bell (1982), Janvier (1985), Fishbein (1987), Vergnaud (1989), Peled (1991), Gallardo (1994), Bruno y Martinón (1997) y Cid (2003), entre otras, han mostrado que los estudiantes manifiestan dificultades importantes relacionadas con la conceptualización de los números negativos en el ámbito aritmético-algebraico.

Parafraseando a Schubring (1998) podemos afirmar que *"Los números negativos no constituyen un concepto aislado en el seno de las matemáticas sino que surgen más allá del concepto de número en el nivel de los fundamentos, convirtiéndose en un desafío para las mismas. Los números negativos pusieron en tela de juicio pilares esenciales de la filosofía de las matemáticas. Las matemáticas eran concebidas como ciencia de las cantidades. Los números negativos obligaban de manera implícita a comprenderlas de otra manera, no empírica ya que en el mundo exterior, ninguna realidad podía asignársele a estos números"*.

En 1867 aparece la obra de Herman Hankel, *"Teoría del sistema de números complejos"*, donde los obstáculos concernientes a estos números son superados. Su libro está consagrado a la exposición formal de la Teoría de los números complejos y no es más que a título de preliminares que resuelve el problema de los números negativos. La revolución realizada por Hankel consiste en abordar el problema desde una perspectiva completamente distinta. *No se trata ya de desenterrar de la naturaleza ejemplos prácticos que expliquen los números negativos. Estos números no son ya descubiertos sino inventados, imaginados, es decir, son constructos formales.* Conociendo las propiedades aditivas de R y la multiplicación de R^+, Hankel propone prolongar la multiplicación de R^+ respetando *un principio de permanencia:* la estructura buscada debe ser algebraicamente consistente.

Las consideraciones anteriores muestran que las concepciones filosóficas subyacentes a las controversias de los números negativos se encuentran a nivel de los fundamentos de las matemáticas y por ende, influyen de manera esencial en el proceso de enseñanza aprendizaje de los números enteros.

Gallardo (1994) realizó una investigación histórica sobre los antecedentes de los números enteros en el contexto de las ecuaciones algebraicas. La trayectoria se inicia en la edad antigua y termina en la segunda mitad del siglo XIX cuando la controversia sobre los números negativos se resuelve en forma definitiva en el ámbito matemático. Fue indispensable una revisión bibliográfica a través de siglos, porque la problemática de los negativos no se encuentra ubicada localmente en una determinada etapa. Paralelamente a este estudio histórico, y basándose en las categorías del análisis halladas en los textos antiguos, se realizó un análisis empírico con estudiantes de 12 y 13 años de edad donde se identificaron las condiciones bajo las cuales la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros, es alcanzada por alumnos ubicados en la transición de la aritmética al álgebra, Gallardo (2002). Este análisis empírico no ha concluido y se encuentra en proceso de elaboración cubriendo el contenido curricular del nivel medio superior (estudiantes de 15 a 18 años de edad), Basurto (2008).

En el presente artículo nos limitaremos a exponer nuestro estudio en el ámbito histórico. La etapa empírica se reportará en otra publicación una vez terminada.

Haremos algunas precisiones respecto al tratamiento histórico que exponemos aquí. Es diferente una lectura de textos del pasado, situados desde la historia o desde las matemáticas que desde la matemática educativa. Desde esta última se mira distinto porque se busca otra cosa. La intencionalidad no es la misma. Los textos de los autores elegidos manifiestan hitos fundamentales en el análisis de las dificultades de los alumnos actuales en el estudio de los negativos.

Hecha esta advertencia metodológica, expondremos los episodios denominados:

I. Nacimiento de la Negatividad Matemática.
II. Aparición de las Soluciones Negativas.
III. Surgimiento de la Negatividad Algebraico – Geométrica.

En nuestra investigación retomamos la categoría de la *"negatividad"* acuñada por Lizcano (1993) quien hace referencia a los antecedentes históricos de los números negativos aclarando que estos no pueden considerarse aún como enteros. Este autor aclara que el término negatividad es necesario mantenerlo voluntariamente impreciso para que pueda ampliar paulatinamente su campo de referencia y sean aceptadas sus diversas construcciones en las distintas culturas.

Lizcano manifiesta que: *"en la construcción de los conceptos matemáticos a partir de los diferentes imaginarios, el lenguaje juega un papel mediador fundamental y complejo. El lenguaje matemático no constituye un universo lingüístico separado, sino que brota del lenguaje ordinario (…) una genealogía de la negatividad a través de su construcción textual parece, no solo pertinente sino casi ineludible (…) dejar hablar a los propios textos, a las propias prácticas, tanto en lo que dicen como en lo que no dicen (…)"*.

Compartimos la posición de Lizcano sobre el énfasis dado al lenguaje ordinario. En los episodios históricos elegidos hemos sido lo más respetuosos y fieles posibles a los lenguajes originales de los autores, pues este hecho forma parte de la necesidad teórica – metodológica de nuestra investigación.

1 Nacimiento de la negatividad matemática.

Es importante señalar que en los siguientes párrafos primero se hará una descripción conservando en la medida de lo posible el lenguaje original ocupado en los problemas de la época y después se traducirá al lenguaje matemático actual para lograr mayor claridad.

Fiu Zhang – Shuanshu (El libro de los nueve capítulos del arte de las matemáticas)

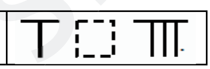
Expresan unidades, centenas y decenas de millar.

Expresan decenas y unidades de millar.

Desde épocas remotas, 480 a.n.e, en China se realizaron cálculos utilizando palillos rectos del mismo tamaño. Estos numerales concretos *los números barra* los colocaban sobre una superficie plana (el tablero de cálculo). Se empleaba el sistema decimal y los dígitos eran de dos tipos, según se ilustra en la siguiente tabla.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Expresan unidades, centenas y decenas de millar.									
Expresan decenas y unidades de millar.									

Ejemplo,

608	

El espacio vacío de 608, es consistente con el cero del sistema posicional.

El tablero de cálculo les permitió un amplio uso de la aritmética. El libro Fiu Zhang Suanshu, (Lay – Yong, L. 1987), es una compilación del conocimiento matemático de la época donde se tratan diversos temas destinados a agrimensores, ingenieros, astrónomos, recaudadores de impuestos, etcétera.

El capítulo ocho, titulado *"Fang Cheng"*, destaca la negatividad en el contexto de resolución de problemas. Dos contribuciones importantes son el método *Fang Cheng* o cálculo por tabulación para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales; la segunda son las reglas de números positivos y negativos, *Zheng Fu Shu*.

Liu Hui, (263 a.n.e) comentarista del texto, describe el término *Fang Cheng* como un arreglo que distribuye en columnas una colección de símbolos numéricos que facilita realizar las operaciones. El número de columnas lo determina el problema. El arreglo se ordena de derecha a izquierda y de arriba a abajo. Las columnas presentan dos secciones, la superior expresada con los números[1] a_{ij}, $i, j = 1,2,\ldots,n$ representan cosas, mientras que la inferior, llamada el *Shi*, expresada con los números b_i representa costos.

El arreglo es el siguiente:

Sección superior	a_{n1}	a_{21}	a_{11}	Cosa 1
	a_{n2}	a_{22}	a_{12}	Cosa 2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	a_{nn}	a_{2n}	a_{1n}	Cosa n
Sección inferior	b_n	b_2	b_1	**Shi**

El proceso se efectúa sobre el tablero de cálculo *usando los números barra*. En cada columna el espacio entre a_{ij} y b_i tiene la función implícita del signo igual.

En el proceso de resolución consistente en la eliminación sucesiva de números por medio de sustracciones entre los elementos de las columnas, hay casos donde se presenta la negatividad. Utilizaron el término *Fu* para indicar un resultado negativo en una sustracción y el término *Zheng* para una diferencia positiva. Los conceptos de *Zheng y Fu* evolucionaron de ideas como pérdida, y ganancia. El resultado nulo se indicaba con el término *Wu.*

Lui Hui comenta que el método de resolución consiste en sustraer repetidamente los números de una columna de los números de otra columna a fin de cancelar el número de la posición superior. Esta forma de sustracción mutua no afecta el cálculo de los números restantes porque al restar una columna a otra, también se sustraen los *Shi's* correspondientes.

El propósito de realizar sustracciones entre los números de las columnas es tener ceros en las posiciones superiores a una diagonal del arreglo numérico. La búsqueda de eliminaciones se hace para determinar el *Shi* que corresponde sólo a una cosa.

Para la adición y sustracción de números *Zheng, Fu, Wu* que ocupan las correspondientes posiciones en diferentes columnas, hay dos reglas. La regla de sustracción dice:

---

1 Utilizamos el lenguaje actual para describir el método chino.

"Cuando los nombres son el mismo, efectuar la sustracción, cuando los nombres son diferentes efectuar la suma".

Un número *Zheng* emparejado con *Wu* se hace *Fu* y un número *Fu* emparejado con *Wu* se hace *Zheng*.

Y la regla de la adición prescribe:

"Cuando los nombres son diferentes efectuar la sustracción; cuando los nombres son el mismo, efectuar la suma".

Como en lo expuesto anteriormente, no teníamos otro propósito que el de entender la forma de negatividad propia de estos nombres dentro del singular contexto cultural que les presta sentido, optamos por mantener los términos chinos.

Ahora bien, para ilustrar un problema del capítulo 8 resuelto con el método *Fang Cheng*, utilizaremos la escritura actual. El enunciado es:

Al vender dos vacas y cinco cabras para comprar trece cerdos hay un excedente de mil unidades de dinero. El monto obtenido de la venta de tres vacas y tres cerdos alcanza exactamente para comprar nueve cabras. Al vender seis cabras y ocho cerdos y comprar cinco vacas hay un déficit de 600. ¿Cuál es el precio de los animales?

Forma tabular china correspondiente al enunciado del problema:

- 5	3	2
6	-9	5
8	3	-13
-600	0	1000

Sistema de ecuaciones correspondiente al enunciado:

$$2x + 5y = 13z + 1000$$

$$3x + 3z = 9y$$

$$6y + 8z = 5x - 600$$

Aplicando el método Fang Cheng, el proceso finaliza cuando se obtiene:

0	0	2
0	-33	5
48	45	-13
14400	-3000	1000

$$48z = 14400$$

$$-33y + 45z = -3000$$

$$2x + 5y - 13z = 1000$$

Que conduce a las soluciones positivas:

$$x = 1200,\ y = 5000,\ z = 300$$

En el texto Chino ninguno de los problemas conduce a soluciones negativas. Lo crucial en este texto, es la emergencia de la negatividad vinculada a un método de naturaleza algebraica. Los números negativos surgen como resultados intermedios en el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones lineales que modela el problema planteado.

El método Fang-Cheng no surgió en Occidente sino hasta el siglo XIX. Puede encontrarse actualmente en nuestros libros de texto bajo el nombre de "método de triangulación". Esta nomenclatura debe su origen al hecho de que después de realizado el proceso de eliminación, los números no nulos que permanecen forman un triángulo en el arreglo matricial.

Es importante señalar que el sistema de numerales concretos chinos, los números barra, se incorporaron en la literatura de investigación en educación matemática como un modelo de enseñanza de los números enteros. Fue denominado "modelo de equilibrio" por Janvier (1983) y su uso se extendió ampliamente desde entonces. Sin embargo, en las matemáticas occidentales los genuinos números barra han perdido su génesis algebraica ya que surgen en la enseñanza desprendidos del método Fang-Cheng y desubicados en el ámbito aritmético de la currícula escolar.

Debemos recuperar la memoria histórica de esta negatividad y devolverles su sentido algebraico. En Hernández y Gallardo (2007) el método Fang-Cheng al ser enseñando a alumnos del presente, posibilita la adición de números signados, el reconocimiento de la sustracción en todos los casos, aunque persiste el rechazo hacia las soluciones negativa y nula de las ecuaciones.

2 Aparición de las soluciones negativas

2.1. *Triparty en la Science des nombres*

En el Apéndice de su obra Marre (1881), Nicolas Chuquet (1484) expone nueve problemas con soluciones negativas que no eran aceptadas en su época. Chuquet enuncia las operaciones fundamentales para números simples y compuestos (estos últimos contienen expresiones irracionales). En la tercera parte de su obra dedicada al álgebra, extiende la operatividad a las ecuaciones. Introduce un lenguaje sincopado avanzado donde la generalidad de su notación apunta a la simbolización del álgebra. Abandona cualquier referente geométrico asociado a la idea de radical y de potencia.

Se presenta a continuación la interpretación de la solución negativa en un problema de compra y venta de mercancía.

Un comerciante compró 15 piezas de ropa por la suma de 160 escudos. Algunas las pagó a 11 escudos cada una y las restantes a 13 escudos la pieza. Determinar cuántas prendas compró de cada clase.

Chuquet utiliza lenguaje sincopado. Denota la incógnita x con el símbolo 1^1 y 2x con 2^1. El signo menos lo representa por $\overline{m}$ y el signo más por $\overline{p}$. En terminología moderna el problema se plantea mediante el sistema de ecuaciones:

$$x_1 + x_2 = 15$$

$$11x_1 + 13x_2 = 160$$

Considerando $x_1 = x$, como la incógnita se tiene $x_2 = 15 - x$. La segunda ecuación se transforma en: $11x + 13\,(15\text{-}x) = 160$, donde $x = 17\ ½$.

Chuquet afirma: "1^1 por 11 escudos" más, "15 menos 1^1, por 13 escudos" es "195 menos 2^1" que corresponde a "160 escudos". Se igualan las partes. 2^1 es el número que divide y 35 el número a dividir. Dividiendo 35 por 2 resultan 17 ½ piezas por el precio de 11 escudos. Al sustraer 17 ½ de 15 quedan menos 2 ½ piezas al precio de 13 escudos cada una.

Después de verificar la ecuación, Chuquet observa que estos problemas son imposibles: es decir, el resultado es negativo. La imposibilidad se debe a que 160/15, igual a 10 2/3, no es un valor entre los precios dados 11 y 13. Propone la interpretación siguiente.

"El comerciante compró 17 ½ piezas a 11 escudos cada una con dinero en efectivo, pagando 192 ½ escudos. También adquirió 2 ½ piezas a 13 escudos cada una para pagar a crédito la cantidad de 32 ½ escudos. De esta forma contrajo una deuda de 32 ½ que, al restarla de 192 ½ se obtiene 160. Chuquet considera que *las 2 ½ piezas adquiridas a crédito deben sustraerse de las 17 ½ piezas compradas, y el comerciante tiene únicamente 15 piezas que, realmente, son de él*". Appendice, n°. XXXV (p.424/fol. 156^v -157^r).

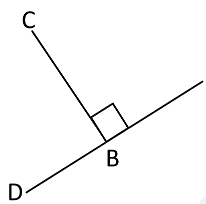
Aunque Chuquet posee un lenguaje sincopado y utiliza el método de sustitución para llevar a cabo el proceso de verificación, este hecho no es suficiente para la admisibilidad teórica de una solución negativa. La interpretación de este valor en el contexto del problema, resulta necesaria.

3 Surgimiento de la negatividad algebraico - geométrica.

3.1. *La Géométrie (Uno de los ensayos en Discours de la Methode)*

Descartes (1954) no utilizó un sistema coordenado como el actual, en el que tienen cabida los números negativos. Al tratar con dos incógnitas, a una de ellas la consideraba un segmento variable sobre una recta fija con un punto de origen, y a partir del extremo variable de ese segmento levantaba otro variable, correspondiente a la segunda incógnita, según una dirección fija distinta a la anterior. Este artificio le permitió dar una interpretación geométrica de las operaciones algebraicas.

Dhombres (2000) luce el estilo cartesiano vía la distancia de un punto a una recta bajo un ángulo dado, considerando que el ángulo es recto. Descartes expresaba la distancia CB como una forma afín: $CB = \alpha x + \beta y + \gamma$, donde α, β y γ son constantes y las coordenadas de C son x y y dentro de un referencial.



Vincula la distancia de una recta a una terna (α, β, γ) con lo que obtiene la correspondencia $(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha x + \beta y + \gamma)$. A este objeto geométrico, representado por un segmento de recta sobre una figura y también por un número, Descartes no le asigna nombre alguno. Habla solamente de trazar una línea recta a partir de condiciones dadas y le hace corresponder una expresión algebraica:

$CH = \dfrac{gzy + fgl - fgx}{zz}$; g, z, f y l son constantes.

Dicha expresión tiene autonomía propia ya que según los valores de x y y, su signo es variable. Los signos de los coeficientes (+ ó -) pueden ser cambiados de todas las maneras imaginables.

Es importante señalar que "la determinación de un referencial" surge de forma crucial en la *Géométrie de Descartes* (1954). El referencial es elegido ex profeso para evitar la pérdida de generalidad propia de las matemáticas. El referencial forma parte de la resolución del problema planteado y está totalmente implicado en la representación figurada del mismo. Dicta una escritura algebraica que representa lo espacial. Surge así, la asociación de una forma algebraica a una forma geométrica. Estas formas son generales y pertenecen a géneros (elipses, parábolas, etc.).

Afirma Dhombres (2000). "Si la distancia de un punto a una recta, dispone de un signo por obra del propio Descartes, "no es por la obligación formal", sino porque este signo es una referencia de lo espacial, es decir, el signo es intrínseco a las regiones del espacio. El signo indica de qué lado de la recta nos encontramos; o más bien; si el signo cambia, indica que pasamos de un lado de la recta al otro" [...] los números negativos en el contexto de los polinomios de Descartes fueron denominados cantidades falsas y no son para él imposición de naturaleza algebraica; sino son simplemente la estenografía de propiedades de orientación en el espacio."

En el ámbito didáctico, Freudenthal (1985) tomando como punto de partida la *Géométrie de Descartes* (1954) plantea {...} "*Los números negativos se originaron a partir de la necesidad algebraica formal de validar la resolución general de las ecuaciones pero no fue sino hasta la algebrización de la geometría (la geometría analítica) que se vuelven vigentes, esto es, vigentes de contenido*". Agrega {...} *Si las rectas son descritas algebraicamente en su totalidad, si las curvas se describen algebraicamente en cualquier situación, es necesario admitir valores negativos de las variables*"

Damian, E (2009) se basa en Freudenthal (1985) e introduce las operaciones elementales de los enteros como medios de organización de familias de rectas en el plano. Esta propuesta didáctica realizada con un grupo de estudiantes de secundaria, advierte de la necesidad de llevar a cabo enseñanza sobre el tema para lograr un aprendizaje realmente significativo. El investigador afirma que la mayoría de los alumnos pueden justificar las operaciones con enteros vía la descripción algebraica de figuras geométricas y sus relaciones. La sustracción se revela como la operación más difícil.

3.2. *Elements of Algebra*

En su obra de (1797) Euler no sólo da significación a los negativos como cantidades opuestas sino también quiere dotar de sentido a la operación de sustracción. Advierte que "*restar -x es equivalente a sumar x*" porque "*cancelar una deuda es lo mismo que dar un obsequio*". Por lo que respecta a la multiplicación, la trata como operación externa de una deuda por un número positivo. Así, *b (-a) = -ab* ya que "*tres deudas de a escudos constituyen una deuda de 3a escudos*".

Es importante señalar que tanto Chuquet (1484) como Euler (1797) utilizaron un lenguaje vernáculo para dar explicación adicional que justificara la negatividad de sus resultados, con oraciones muy similares a las propuestas en el ámbito didáctico por Bruno y Martinón (1997) y definidas como *"formas semánticas equivalentes"*. Estos autores afirman que dentro del lenguaje natural sea escrito o verbal, existen distintas maneras de expresar la misma situación, es decir, *pagar o abonar una deuda* son equivalentes *a restar o disminuir parte de la deuda*. Estas dos frases son formas semánticas equivalentes, es decir, son formas verbales que tienen el mismo significado. Por ejemplo, los siguientes enunciados son distintas formas de expresar *"Juan tenía tres más que Marcos":*

"Marcos tenía tres menos que Juan"
"Juan tenía menos tres menos que Marcos"
"Marcos tenía menos tres más que Juan"

En el problema de las piezas de Chuquet (1484), exhibido en este artículo, el autor afirma:

> "el comerciante contrajo una deuda 32 ½ que, al restarla de 192 ½ se obtiene 160"

Este texto puede interpretarse como las formas equivalentes: sumar una deuda equivale a restar dicha cantidad.

Así mismo Euler (1797), se refiere a la operación de sustracción como:

> "restar menos x es equivalente a sumar x porque cancelar una deuda es lo mismo que dar un obsequio"

Obsérvese que recurre a formas semánticas equivalentes para justificar una operación de enteros.

En un estudio empírico realizado con alumnos de secundaria, Gallardo y Basurto (2009) se basaron en las premisas teóricas de Bruno y Martinón (1997) e identificaron formas semánticas equivalentes en la resolución de problemas.

A continuación se exhibe este hecho vía un diálogo de entrevista videograbada. Se le pide a un estudiante lo siguiente:

Entrevistador:	Inventa un problema que corresponda a la expresión: (-5) – (-2) =
Estudiante [*Anota*]:	Juan debe $5.00 si paga $2.00, ¿cuánto deberá ahora?
Estudiante [*Explica*]:	"Porque si debe $5.00 se está quitando una deuda de $2.00. Ahora ya deberá menos, es decir, se quita lo que debía"
Entrevistador:	¿Por qué?
Estudiante:	"Porque quitar una deuda es lo mismo que pagar"

❹ Reflexión final

Parafraseando a Lizcano (1973) podemos afirmar que en las distintas formas de negatividad surgidas en los textos correspondientes a los tres episodios descritos, el lenguaje juega un papel mediador fundamental y complejo en la construcción de conceptos matemáticos.

En el texto chino se utilizan los nombres *Zheng* y *Fu* para denominar resultados positivos y negativos, respectivamente. La regla de los números *Zheng Fu Shu* vinculada al método *Fang Cheng* permitió la resolución de problemas modelados por sistemas de ecuaciones algebraicas, sin la obligación de introducir símbolos para las incógnitas, ya que la característica espacial de este método, un arreglo rectangular en un tablero de cálculo, volvía innecesario el uso de símbolos para lo desconocido. Este método general lo aplicaron para resolver familias de problemas.

Chuquet introduce un lenguaje sincopado donde la generalidad de su notación es muy cercana a la simbolización del álgebra actual. Resuelve problemas que conducen a soluciones negativas utilizando el método de sustitución algebraica. Sin embargo, tiene que recurrir a "formas semánticas equivalentes" para poder interpretar la negatividad de las soluciones.

En el texto de Descartes el andamiaje geométrico vinculado al lenguaje algebraico le permitió admitir distintas formas de negatividad. Es notorio que Euler, en pleno siglo XVIII y dueño de un lenguaje algebraico muy consolidado, haya necesitado justificar la operación de sustracción vía "formas semánticas equivalentes". Más sorprendente aún es el hecho de validar la multiplicación de cantidades opuestas, apoyándose en un recurso externo: la existencia de deudas.

Podemos afirmar que el lenguaje natural del que brota el lenguaje matemático, le ha permitido "*respirar a la negatividad*" durante siglos hasta que en la segunda mitad del siglo XIX surge el álgebra abstracta, dando cabida a los enteros.

La reflexión anterior nos conduce a fijar nuestra atención en la escritura de todos los tipos de textos matemáticos producidos por los estudiantes, que no han logrado aún la consolidación del lenguaje geométrico - algebraico en la resolución de problemas y ecuaciones. Ello nos permitirá entender las dificultades causadas por la existencia ineludible de la negatividad.

Cabe señalar que el haber analizado textos históricos como cogniciones de sujetos epistémicos, es decir, los autores de estos textos, nos condujo a utilizar esta misma herramienta metodológica para análisis de las producciones cognitivas de estudiantes del presente, apenas esbozadas en este artículo.

Referencias bibliográficas

Basurto, E. (2008). *Funciones polinomiales en estudiantes de bachillerato vía un entorno tecnológico dinámico* (Proyecto de Doctorado). Departamento de Matemática Educativa – CINEVSTAV, México.

Bell, A. (1982). *Looking at children direct numbers.* Mathematics Teaching 100.

Bruno, A. y Martinón, A. (1997). Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Revista Educación Matemática, 9*(1), 33–46.

Chuquet, N. (1484). *Triparty et applications.* Ms. Bibll. Nationale, Fonds Francaise.

Cid, E. (2003). *La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión*. Seminario Matemático. Universidad de Zaragoza, España.

Damian, E. (2009). *El Plano Cartesiano como organizador fenomenológico en la Adición, Sustracción, Multiplicación y División de Números Enteros.* (Tesis inédita de Maestría). Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV, México.

Descartes, R. (1954). Discours de la méthode plus la dioptrique, les meteores et la géométrie. In Faccimile and translation: D.E Smith & M. L Latham (Eds.). *The grometry of Renne Descartes* (pp. 297-413). New York Dover.

Dhombres, J. (2000). *Descartes y la ciencia en el siglo XVII. La Banalidad del Referencial Cartesiano*. Siglo Veintiuno Editores.

Euler, L. (1979). *Elements of Algebra.* London: Printed for J. Johnson, St. Paul's Church Yard.

Fishbein (1987). Chapter 8: The practically of intuitive meanings, analysis of an example: the negative numbers. *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach* (pp. 97-102). Reidel, Holland.

Freudenthal, H. (1985). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (Pp. 432-433). Reidel Publishing Co. Holanda.

Gallardo, A. (1994), *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas*. (Tesis inédita Doctoral). Departamento de Matemática Educativa, CINEVSTAV. México.

Gallardo, A. (2002). The extension of natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Eduactional Studies in Mathematics, 49* (2), 171-192.

Gallardo, A. y Basurto (2009). Formas Semánticas Equivalentes en problemas del pasado y del presente. *Revista Educación Matemática, 21*(3), 67-95.

Girard, A. (1884). *Inventions nouvelle en l`algebra.* Reimpression par Dr. D. Biernes de Haan, Leinden.

Glaeser, G. (1981). Epistemologie des nombres relatifs. *Recherches en Didàctique des Mathèmatiques*, *2* (3), 303-346.

Hernández A. y Gallardo A. (2007). La numerología y el álgebra chinas en la enseñanza actual de las ecuaciones lineales. *Investigación en Educación Matemática: IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (S.E.I.E.M.) (pp. 181-188).

Janvier, C. (1985). Comparison of models aimed at teaching signed integers. *Proceedings of the Nineth Meeting of the PME* (pp. 135-140). State University of Utrecht, The Netherlands.

Lay-Yong, L. & Se, A. T. (1987). The earliest negative numbers: how they emerged from a solution of simultaneous linear equations. *Archives Internacionales d'Histoire des Sciences* 37 (pp. 222-269).

Lizcano, E. (1993). *Imaginario Colectivo y Creación Matemática.* Universidad Autónoma de Madrid, Gedisa.

Marre, A. (1881). *Appendice au Triparty en la Science des Nombres de Nicolas Chuquet,* 14, 413-460. *Parisien*.

Peled, I. (1991). Levels of knowledge about signed numbers: Effects of age and ability. *In* Furingheti, F. (Ed.), Proceedings *of the Fifteenth Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education,* (3), 145-152.

Schubring, G. (1988). Discussions Epistémologiques sur le Statut des nombres Négatifs et leur Représentation dans les Manuels Allemands et Français de Mathématique entre 1795 et 1845. Actes du premier colloque franco-allemand de didáctique des mathématiques et de l'informatique. Editions La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G (1989). L´obstacle des nombres négatifs et I´ntroduction à I´algèbre. Construction des savoirs. *Colloque International Obstacle Epistémologique et Conflict Socio-Cognifit*, CIRADE, Montreal.

Autores:

Aurora Gallardo.
Cinvestav - IPN, México, D. F. *agallardo@cinvestav.mx*

Eduardo Basurto.
Cinvestav - IPN, México, D. F. *basurtomat@hotmail.com*