Los estudios sobre los procesos de convención matemática: una síntesis metódica sobre la naturaleza de sus resultados

Studies on mathematical agreement processes: a synthesis about the nature of their results

Gustavo Martínez-Sierra

RESUMEN

En el presente artículo se ofrece una síntesis metódica de los resultados de investigación que se han obtenido a través de los estudios sobre los procesos de convención matemática (CM) en Matemática Educativa. En particular se mostrará como el concepto de CM ha sido útil para describir, explicar y predecir tanto procesos de construcción de conocimiento como la existencia de rupturas conceptuales en diversos corpus de conocimiento matemático que provocan la existencia de diversos fenómenos didácticos relacionados con las concepciones de estudiantes y profesores y el funcionamiento escolar del conocimiento. Para lograr lo anterior se procederá, primero, a explicar el desarrollo conceptual del concepto de CM. Posteriormente se procederá a explicar la naturaleza de los resultados obtenidos en las investigaciones particulares llevadas a cabo alrededor del concepto de convención matemática.

PALABRAS CLAVE:

- *Convención matemática*
- *Construcción de conocimiento*
- *Rupturas conceptuales*
- *Socioepistemología*

ABSTRACT

The present article provides a systematic synthesis of research results have been obtained through studies on the processes of mathematical agreement (MA) in Mathematics Education. In particular, show how the concept of MA has been useful to describe, explain and predict both processes of knowledge construction such as the existence of breaks in different conceptual corpus of mathematical knowledge which lead to the existence of various phenomena associated with teaching students the concepts of and teachers and school functioning of knowledge. To achieve this will first explain the conceptual development of the concept of MA. Subsequently proceed to explain the nature of the results of the investigations carried out around the concept of mathematical convention.

KEY WORDS:

- *Mathematical agreement*
- *Knowledge construction*
- *Conceptual breaks*
- *Socioepistemology*

Relime (2010) 13 (4-II): 269-282. Recepción: Mayo 25, 2009 / Aceptación: Julio 13, 2010.

RESUMO

O presente artigo apresenta uma síntese dos resultados da investigação sistemática, foram obtidos através de estudos sobre os processos de matemática convenção (CM), em Educação Matemática. Em particular, mostrar como o conceito de CM tem sido útil para descrever, explicar e predizer ambos os processos de construção do conhecimento, tais como a existência de quebras em diferentes corpus conceitual do conhecimento matemático que levam à existência de diversos fenômenos associados a ensinar os alunos os conceitos de e professores e funcionamento do conhecimento. Para alcançar este objectivo em primeiro lugar, explicar o desenvolvimento conceptual do conceito de CM. Posteriormente proceder para explicar a natureza dos resultados das investigações realizadas em torno do conceito de matemática convenção.

PALAVRAS CHAVE:

- *Conhecimento matemático*
- *Convenção construção*
- *Avanços conceituais*
- *Socioepistemología*

RÉSUMÉ

Le présent article propose une synthèse systématique des résultats de la recherche ont été obtenues par des études sur les processus de la mathématiques accord (MA) dans la didactique des mathématiques. En particulier, montrer comment le concept de MA a été utile pour décrire, expliquer et prédire les processus de construction de connaissances telles que l'existence de pauses dans les différents corpus de concepts mathématiques qui conduisent à l'existence de divers phénomènes liés à l'enseignement aux élèves les concepts de l'école et les enseignants et le fonctionnement de la connaissance. Pour atteindre cet objectif sera tout d'abord d'expliquer le développement conceptuel de la notion de MA. Procède ensuite à expliquer la nature des résultats de l'enquête menée autour de la notion de mathématiques de convention.

MOTS CLÉS:

- *Mathématiques accord*
- *Construction de connaissances*
- *Des percées conceptuelles*
- *Socioépistémologie*

1 Introducción

Partimos de la idea de que uno de los objetivos de la Matemática Educativa, es *construir una explicación sistémica de la construcción del conocimiento en situación histórica, social, cultural e institucional*. Así, consideramos necesario, para la investigación robusta en nuestro campo, tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple (Cantoral *et al*, 2006) al considerar que el estudio análisis y la comprensión de tales fenómenos suponen un cuádruple enfoque, de carácter sociológico-cognitivo-epistemológico-didáctico, que contempla las componentes o dimensiones que consideramos fundamentales para construir una explicación. La *dimensión didáctica* atiende a aquellas circunstancias propias del funcionamiento de los diferentes sistemas didácticos y de enseñanza. La *dimensión cognitiva* se ocupa de las circunstancias que son relativas al funcionamiento y la actividad mental de las personas. La *dimensión epistemológica* se aboca a aquellas circunstancias *que* son propias de la naturaleza y significados del saber matemático. La *dimensión social* atiende a las circunstancias conformadas por las normativas y valoraciones sociales del saber y la manera en como éstas influyen en las demás dimensiones.

Al seno de la perspectiva global anterior en los últimos años hemos desarrollado una línea de investigación que estudia la construcción del conocimiento a través del estudio de los procesos presentes en la construcción de sistemas conceptuales matemáticos a los que hemos llamado *procesos de articulación y convención matemática* (Martínez-Sierra, 2005). En esta línea hemos desarrollado el concepto de convención matemática, que ha sido útil, entre otros aspectos, en la explicación de algunos fenómenos didáctico-cognitivos y en la interpretación de procesos epistemológico-cognitivos. En particular, en el plano epistemológico-cognitivo, hemos dado evidencia de que ciertas piezas de conocimiento, a las que hemos llamado convenciones matemáticas, pueden ser entendidas como producto de un proceso de articulación matemática o proceso de integración de conocimientos. En el mismo sentido, en el plano de lo didáctico-cognitivo, hemos dado cuenta de que algunas de las rupturas conceptuales presentes en la escuela tienen su origen en la dialéctica articulación/desarticulación entre diferentes partes del corpus de la matemática escolar.

Lo aquí escrito tiene por objetivo presentar una síntesis metódica de los resultados de investigación que se han obtenido a través de los estudios sobre los procesos de convención matemática.

2 Semblanza de los estudios sobre los procesos de convención matemática

La consideración de que cada tipo de función produce fenómenos didácticos específicos motivó las primeras investigaciones sobre la epistemología de los exponentes y fue el nicho donde el concepto de convención matemática floreció para dar cuenta de un proceso de construcción de conocimiento.

2.1. *La identificación del proceso*

Nuestras primeras investigaciones fueron hechas con el objetivo de explicar algunos fenómenos didácticos relacionados con diversos tipos de razonamientos de los estudiantes al ser cuestionados sobre igualdades que involucran exponentes no naturales. Así, en el plano epistemológico realizamos una investigación histórica-epistemológica para indagar sobre la naturaleza y las funciones de las reglas *de transformación para los exponentes no naturales* (m, n *números naturales*): $R1)\ a^0 = 1$, $R2)\ a^{-n} = 1/a^n$ y $1/a^n = a^{-n}$, $R3)$ y $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ y $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$.

El estudio histórico-epistemológico de la construcción de significados de los exponentes nos mostró la presencia de una manera de generar significados, presente en las distintas formulaciones a lo largo de la historia de las ideas –entre los siglos XIV y XVIII (Martínez-Sierra, 2003). Se puede resumir que:

> *El significado de los exponentes no naturales es* convenido *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento* matemático *(es decir para la integración sistémica de conocimientos). Es por ello que de manera sintética designamos a esa manera de construir conocimiento con la expresión: convención matemática. Las formas o realizaciones de este mecanismo pueden ser una definición, un axioma, una interpretación, o una restricción, entre otras. La elección de la forma depende de los objetivos teóricos específicos.*

A este proceso, al que llamamos convención matemática, lo caracterizamos a través de una *práctica social* cuya función radica en lograr una integración sistémica de un conjunto de conocimientos; es decir, se trata de un proceso de búsqueda de coherencia en el que trabaja una comunidad a través de la actividad intencional de relacionar diversos conocimientos y articularlos en un todo coherente e interrelacionado. En el caso de los exponentes no naturales y utilizando el lenguaje de nuestros días las reglas de transformación son algo necesario si se quiere que las *leyes de los exponentes*[1] sean verdaderas y no como en los libros de texto cuando intentan demostrar las reglas de transformación. Así, por ejemplo, para construir la igualdad $2^0=1$, se puede proceder a través del producto de un razonamiento parecido al siguiente: si se *quiere* que $2^0 * 2^2 = 2^{0+2} = 2^2$ se *debe convenir* que $2^0 = 1$.

Usando está caracterización del proceso que construye los significados para los exponentes no negativos y utilizando los resultados de un análisis didáctico se logró interpretar que los estudiantes dan las respuestas “matemáticamente erróneas”, señaladas más arriba. Así, por ejemplo, los muchachos que argumentan

---

[1] Por leyes de los exponentes nos referimos a las igualdades1) $A^nA^m=A^{n+m}$, 2) $A^n/A^m=A^{n-m}$ con $n>m$ y 3) $(A^n)^m = A^{nm}$ con $A > 0$.

que $2^0=0$; contestan eso debido a que utilizan el significado de cero como nada y el significado de los exponentes ya no es multiplicación reiterada y no tienen conciencia de que la razón de ser de la igualdad $2^0=1$ es para que las leyes de los exponentes sean ciertas.

En conclusión, podemos decir que en el principio de nuestras investigaciones se descubrió un proceso específico de construcción social de conocimiento matemático, al que nombramos convención matemática, que permitió la elaboración de una explicación sistémica de algunos fenómenos didácticos relacionados con las concepciones estudiantiles sobre los significados de los exponentes no naturales. Una síntesis de tales investigaciones puede ser consultada en (Martínez-Sierra, 2007b).

2.2. *La extensión del proceso*

Una vez concluidas las primeras investigaciones en relación a los exponentes, nuestros trabajos se enfocaron a un intento sistemático por construir objetos de estudio con la caracterización del proceso de convención matemática. Así emprendimos la tarea de generalizar el concepto de convención matemática como un proceso que, independientemente de los contenidos matemáticos particulares, atribuye significados para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento matemático (es decir para la integración sistémica de conocimientos). Está nueva caracterización puede ser expresada, tal y como se hizo en (Martínez-Sierra, 2005, 2007a), de la siguiente manera:

> Un proceso de convención matemática puede ser entendido como un proceso de búsqueda de consensos al seno de la comunidad que trabaja en dar unidad y coherencia a un conjunto de conocimientos. La producción consensos es posible debido a que en esta comunidad existe la práctica de integración sistémica de los conocimientos; es decir existe la actividad intencional de relacionar diversos conocimientos y articularlos en un todo coherente e interrelacionado. Por su naturaleza esta práctica se encuentra en el plano de la teorización matemática, entendiendo por esto a la elaboración de conceptos interrelacionados que intentan describir, explicar un objeto de estudio, el cuál es, en este caso el sistema de conocimientos aceptados. Este proceso de síntesis conlleva al surgimiento de propiedades emergentes no previstas por los conocimientos anteriores. Las convenciones matemáticas serían una parte de las propiedades emergentes.

Esta caracterización nos permitió emprender algunas investigaciones trabajando con dos hipótesis complementarias:

Hipótesis 1: La naturaleza y significados de algunos contenidos matemáticos, presentes en diversos corpus de conocimiento pueden ser explicados a través del proceso de convención matemática.

Hipótesis 2: El manejo escolar de tales contenidos provoca la existencia de fenómenos didácticos explicables, precisamente, en términos del proceso de convención matemática.

Hipótesis 3: Las cogniciones asociadas a los contenidos explicados a través del proceso de convención matemática están asociados a conflictos cognitivos tanto en estudiantes como profesores.

❸ Los estudios sobre los procesos de convención matemática

Apoyados en las hipótesis antes señaladas, emprendimos una serie de investigaciones que por la naturaleza de sus resultados pueden ser englobados en tres rubros:

- Investigaciones de corte epistemológico, son aquellas que dan evidencias de haber localizado un concepto, contenido o tema matemático cuya epistemología está estrechamente relacionada con el proceso de convención matemática.
- Investigaciones sobre fenómenos didácticos, son aquellos que identifican, describen y explican fenómenos didácticos bajo la idea de que las convenciones matemáticas en situación escolar son portadoras de rupturas conceptuales en el plano didáctico-cognitivo.
- Investigaciones sobre puestas en escena, son aquellos que diseñan, ponen en escena y analizan el desarrollo de secuencias de actividades con estudiantes y que utilizan el proceso de convención matemática como metáfora de aprendizaje para el diseño de las secuencias.

3.1. *Investigaciones de corte epistemológico*

Los números complejos

La primera formulación de lo que hoy entendemos como números complejos o imaginarios la encontramos en relación a los números de la forma $A+B\sqrt{-N}$ (siendo N un número natural). En la historia de las ideas este último tipo de números fueron *aceptados* en un dominio algebraico; porque ellos aparecieron como útiles en la solución de ecuaciones de tercer grado $y^3+py+q=0$. Nuestra interpretación es que *se convino* la existencia de la raíz cuadrada de números negativos, junto a su operatividad, para *articular* una fórmula algebraica:

$$y=\sqrt[3]{\left(-q/2+\sqrt{\left(p^3/27+q^2/4\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(-q/2-\sqrt{\left(p^3/27+q^2/4\right)}\right)},$$

con el hecho de que una ecuación cúbica siempre tiene al menos una raíz real. Es decir, la existencia del número complejo puede admitirse a tanto elemento unificador entre el grado de la ecuación y sus soluciones. A tal proceso lo relacionamos con el proceso de convención matemática; ya que se puede reformular el proceso de razonamiento anterior de la siguiente manera: Para que la fórmula para las raíces de la ecuación de tercer grado funcione *debemos convenir* la existencia de números de la forma $A+B\sqrt{-N}$ (siendo N un número natural) junto con cierta operatividad (Antonio y Martínez-Sierra, 2005, 2009; Martínez-Sierra y Antonio, 2009).

El producto vectorial

El análisis histórico-epistemológico que desarrollamos en (Poirier, 2007; Martínez-Sierra y Poirier, 2008) nos permite dar cuenta de tres etapas que históricamente corresponden a una epistemología del producto vectorial: 1) Hamilton y los cuaterniones, 2) La defensa y crítica del cálculo de cuaterniones, y 3) Del cuaternión al análisis vectorial moderno. Con respecto a la primera etapa podemos concluir que la invención de los cuaterniones, atribuido a Hamilton, son el antecedente directo del producto vectorial; siendo éstos, en primera instancia, el intento por dotar a los vectores (o puntos) en el espacio de tres dimensiones de estructura multiplicativa. La segunda etapa, es caracterizada por la existencia de un debate entre la pertinencia de los cuaterniones como parte del sistema simbólico para representar los modelos matemáticos de tipo vectorial. Finalmente, la tercera etapa, se percibe la adaptación plena de la noción de producto vectorial admitiendo la pertinencia de aceptar dos tipos de producto: el escalar y el vectorial. Es a partir de análisis de esta tercer etapa en donde se desprende que *el producto vectorial puede ser interpretado como concepto organizador,* en el sentido de que el producto vectorial, junto con el Análisis Vectorial, tiene por objetivo el dotar de economía al sistema simbólico cartesiano y el de favorecer una percepción geométrica de los modelos matemáticos.

Las funciones trigómetricas

En (Martínez-Sierra, 2007c, 2008a, 2008a, 2009) hemos reportado nuestras investigaciones, tomado como foco de atención el identificar los procesos de articulación y convención matemática presentes de la articulación de las Funciones Trigonométricas (FT) al corpus del análisis euleriano. Al respecto hemos podido interpretar que la articulación de las funciones trigonométricas al análisis euleriano fue posible a través de la "analitización" de las *cantidades que nacen del círculo* a través de las relaciones siguientes:

(A) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

(B) $\sin(y+z) = \sin y \cos z + \cos y \sin z$

(C) $\cos(y+z) = \cos y \cos z - \sin y \sin z$

En particular fue notorio observar que el concepto de radián está ausente en la obra euleriana y que Euler no menciona porqué, por ejemplo, $\cos\pi = -1$. La información que tenemos hasta ahora sólo nos permite conjeturar que quizá Euler utilizó la fórmula del seno de la suma de dos arcos:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \ \& \ \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

para *construir la convención* $\cos\pi = -1$. Un posible razonamiento es el siguiente (nótese el parecido con lo dicho en relación a los exponentes):

> Partamos del supuesto que queremos asignarle un significado al símbolo $\cos\pi$. ¿Qué significado tomará? Si tomamos a la fórmula
>
> $$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$
>
> como conocimiento base, que deseamos preservar, debería cumplirse que
>
> $$\cos\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} \times \cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} \times \sin\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$$

3.2. *Investigaciones sobre fenómenos didácticos*

La raíz cuadrada

En nuestros trabajos (Colín, 2006; Juárez, 2007) hemos mostrado las concepciones que estudiantes de nivel básico hasta nivel superior tienen acerca de la operación raíz cuadrada, evidenciando las rupturas conceptuales que este operador presenta en el tránsito del contexto aritmético al algebraico y del algebraico al funcional. Las ruptura conceptuales se dan básicamente por dos razones: 1) La práctica escolar de considerar, en el plano algebraico, que radicación es la operación inversa de la potenciación y 2) a la ambigüedad del operador raíz (cuadrada en particular) al poder ser considerada como operador multivalente.

Las funciones trigómetricas

En (Martínez-Tecolapa, 2008; Méndez, 2008; Méndez, Maldonado y Martínez-Sierra, 2007; Martínez-Sierra, 2007b, 2007c, 2008a 2008b) hemos estudiado diferentes aspectos de la construcción escolar de las funciones trigonométricas. El análisis de los libros nos permitió localizar algunas rupturas conceptuales asociadas a los conceptos que hemos considerado como articuladores: 1) La definición de los ángulos negativos y mayores a 360º se realiza sin la presencia de argumentos que justifiquen su existencia, 2) No se hace explícito los motivos por los que repentinamente aparece un sistema de medición de ángulos como son los radianes y 3) La *destematización* (es decir el *no* considerarlos como objeto de estudio desde el punto de vista conceptual) del tránsito de los radianes a los números reales como argumento de las funciones trigonométricas. Una explicación de tales rupturas surge de la consideración que dentro de la estructura del discurso matemático escolar existen diferentes prácticas sociales, tales como: 1) aquella que considera la medición del ángulo a través de grados es considerado como “natural” y en consecuencia es la unidad de medida elegida dentro de la actividad matemática escolar, 2) aquella que considera que los nuevos conceptos y los viejos conceptos conforman un continuo; para así definir los ángulos negativos con base en la orientación del reloj de manecillas. En contraste, desde nuestro enfoque, la medida de los ángulos con radianes y los ángulos negativos son conceptos que articulan, en el sentido matemático, la medición de los ángulos con grados y las FT como funciones de variable real. Así, la contradicción entre el significado matemático y el significado construido por el discurso matemático escolar es la fuente de las rupturas conceptuales.

3.3. *Investigaciones sobre puestas en escena*

El haber localizado conceptos y contenidos matemáticos cuya epistemología está estrechamente relacionada con el proceso de convención matemática nos ha permitido construir hipótesis de construcción de conocimiento que han servido para diseñar secuencias de actividades didácticas. En cada una de esas investigaciones se ha diseñado y analizado la puesta en escena de secuencias de actividades, metodológicamente basadas en la Ingeniería Didáctica; al tomar los pasos metodológicos que propone: 1) Análisis preliminar, 2) diseño de las actividades, 3) análisis a priori, 4) puesta en escena, 5) análisis a posteriori y 6) validación interna.

Exponente cero

En (Antonio, 2006; Antonio y Martínez-Sierra, 2005) se indaga sobre qué alternativas pueden ser factibles para construir el significado de los exponentes no naturales. En particular nos planteamos el objetivo de diseñar una secuencia de actividades para la construcción de $2^0=1$ como convención matemática por parte de estudiantes de secundaria, que es el nivel educativo en donde se ve por primera vez a esta igualdad en México. Para esto consideramos que es necesario romper con los obstáculos (concepción o conocimiento que se suponen deben ser modificados para construir otro conocimiento) que tienen los estudiantes al calcular la potencia cero: la concepción del cero como nada y la multiplicación reiterada. Así, con nuestro diseño se pretende que el estudiante construya la convención matemática $2^0=1$, a través del producto de un razonamiento parecido al siguiente: si se *quiere* que se *debe convenir* que $2^0 * 2^2 = 2^{0+2} = 2^2\ 2^0 = 1$.

La estrategia básica de la secuencia de actividades consiste en pedir a los estudiantes que calculen de dos formas diferentes productos:

- Multiplicar con el valor de cada una de las potencias.
- Sumar los exponentes y calcular el valor de la potencia.

$$2^3 * 2^2 = \begin{cases} \circ\, 2^3 * 2^2 = 8 * 4 = 32 \\ \bullet\, 2^3 * 2^2 = 2^5 = 32 \end{cases}$$

Debido a que nuestro análisis preliminar nos permite esperar que los estudiantes contesten que $2^0 = 0$ o que $2^0 = 2$, se confronta este conocimiento con la ley del producto de exponentes calculando expresiones de las dos maneras como se mencionó antes. Si su respuesta de 2^0 es 1, observará que llega al mismo resultado resolviendo de las dos maneras, en caso contrario tendrá que convenir cuanto tiene que valer 2^0 para obtener el mismo resultado. Es aquí donde el alumno podría darse cuenta del carácter convencional del porque $2^0=1$. En nuestra puesta en escena reportada en (Antonio, 2006), en donde trabajaron de manera independiente dos equipos de tres estudiantes, notamos que se construyó conocimiento: El equipo A convino que 2^0 tenía que ser igual a 1 y el equipo B convino que 2^0 tenía que ser igual a 2.

Exponente fraccionario

Con relación a los exponentes fraccionarios se diseñó una secuencia de actividades (Lorenzo, 2008) con el objetivo de que los estudiantes construyan la expresión algebraica

$$\sqrt[n]{x} = (x)^{\frac{1}{n}}$$

con $x > 0$ y $n \in N$, a través del proceso de convención matemática. Esto empleando las ideas de John Wallis sobre las razones características de las curvas de las formas

$$y = x^n \text{ y } y = \sqrt[n]{x}$$

(Martínez-Sierra, 2005). Con base en el análisis que realizamos, consideramos que sí es factible que los estudiantes construyan la expresión

$$\sqrt[n]{x} = (x)^{\frac{1}{n}}$$

como convención matemática, ya que hubo algunos (33.3%) de los estudiantes que si encontraron la razón característica de la función

$$y = \sqrt[n]{x} \text{ que es } n/(n+1).$$

Los números complejos

En (Antonio, 2008; Antonio y Martínez-Sierra, 2009) se investigó sobre qué alternativas pueden ser factibles para la construcción escolar del significado de los números complejos. Al respecto, como ya se señaló, a partir de un análisis histórico-epistemológico interpretamos que *el significado del número complejo, en un plano algebraico, puede ser interpretado como elemento unificador entre el grado de la ecuación y sus soluciones*.

Para contrastar empíricamente la hipótesis anterior se procedió metodológicamente de la siguiente manera: 1) se diseñó secuencia de actividades, en donde se *traspuso* (en sentido de Chevallard, 1997) tal hipótesis constructiva a polinomios de la forma $x^n - 1 = 0$, 2) se experimentó la secuencia con 10 estudiantes del nivel medio superior mexicano (15 a 18 años) y 3) se analizó la producción de los estudiantes.

En los resultados de la puesta en escena se evidencia de que a pesar que los estudiantes insistían en que "*las raíces cuadradas de números negativos no existen*", nuestra secuencia los indujo a operar con ellos para encontrar las raíces de algunos polinomios propuestos en las actividades y así, *aceptar* la raíz de números negativos de manera operativa. Consideramos que nuestra secuencia de actividades da indicios de que es posible construir el significado del número complejo y su operatividad a través del proceso de convención matemática.

La recta tangente

En (Canul, 2009) se explora el paso de la concepción euclidiana a la concepción leibniziana en el caso de la recta tangente a las curvas. El interés de realizar este trabajo surgió por el hecho de que diferentes investigaciones han mostrado la presencia de fenómenos didácticos relacionados con que los estudiantes (e incluso profesores), presentan inconsistencias al trazar la recta tangente a cualquier curva, ya que utilizan la definición euclidiana (global) de recta tangente, sin percatarse de que ésta es insuficiente. Estas dos significaciones las hemos identificado como componente de una ruptura conceptual entre la Geometría y el Cálculo.

Llevar a cabo la situación didáctica propuesta, mostró que la mayoría de los estudiantes interiorizaron el conflicto cognitivo generado por el uso de la concepción euclidiana de tangencia, al trazar tangentes a cualquier curva. Las alternativas propuestas por los estudiantes para la superación del conflicto cognitivo, conllevó a la institucionalización de una convención matemática, producto de la búsqueda de consensos realizada en las fases de formulación y validación, que posibilitó en la mayoría de los estudiantes, transitar de la concepción euclidiana de tangencia a la concepción leibniziana.

❹ Conclusiones

En el presente artículo se ha ofrecido una síntesis metódica de los resultados de investigación que se han obtenido a través de los estudios sobre los procesos de convención matemática (CM) en Matemática Educativa. En particular se mostró como el concepto de CM ha sido útil para describir, explicar y predecir tanto procesos de construcción de conocimiento como la existencia de rupturas conceptuales en diversos corpus de conocimiento matemáticos que provocan la existencia de diversos fenómenos didácticos relacionados con las concepciones de estudiantes y profesores y el funcionamiento escolar del conocimiento. La caracterización del proceso de CM nos ha permitido, además, el diseño de secuencias de actividades con estudiantes y cuyos análisis a posteriori nos han permitido construir evidencias de la potencialidad de utilizar la metáfora CM para la construcción de conceptos e ideas matemáticas.

El tipo de investigaciones resumidas aquí muestra la diversidad y la potencialidad de hacer investigaciones desde la perspectiva de los procesos de convención matemática. En particular consideramos que es posible seguir con el trabajo de esta línea de investigación centrando la atención en los procesos que permiten elaborar sistemas conceptuales o teorías específicas. La idea central es simple: cuando un grupo de personas se dan a la tarea de construir *corpus* de conocimientos se van a encontrar con la dificultad, que consideramos inherente a esta tarea, de lograr que el corpus sea en algún grado y medida consistente y evitar las que hemos llamado rupturas conceptuales. En el mismo sentido, al estudiar la construcción escolar de las matemáticas, es posible continuar con las investigaciones de la problemática existente entre la articulación entre los diferentes contenidos escolares y niveles escolares y considerar esta problemática como fuente potencial de fenómenos didácticos.

Agradecimientos

La escritura de este artículo es posible gracias al patrocinio del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología a través del proyecto clave 91144 y del Instituto Politécnico Nacional a través del los proyectos: SIP20080424 y SIP20090697.

Referencias bibliográficas

Antonio, R. (2006). *Una construcción de la potencia cero como convención matemática en un contexto aritmético-algebraico. Un estudio en nivel secundaria*. (Tesis inédita de licenciatura). Universidad Autónoma de Guerrero-Facultad de Matemáticas. México.

Antonio, R. (2008). *Una construcción del significado del número complejo y su operatividad a través del proceso de convención matemática.* (Tesis inédita de Maestría). Universidad Autónoma de Guerrero-Maestría en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas. México.

Antonio, R. y Martínez-Sierra, G. (2005). Una alternativa para la construcción de aritmética-algebraica para la construcción de las convenciones matemáticas de los exponentes. En J. Lezama, M. Sánchez y G. Molina (Eds.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* (pp. 445-450). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. ISBN: 970-9971-00-X.

Antonio, R. y Martínez-Sierra, G. (2009). Una construcción del significado del número complejo y su operatividad. P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* (pp. 1033-1041). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.CLAME.

Canul, E. (2009). *De la concepción euclidiana a la concepción leibniziana: El caso de la tangente en el marco de la convención matemática*. (Tesis inédita de Maestría). Universidad Autónoma de Guerrero-Maestría en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas. México.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. L. Radford & D'Amore, B. (Guess Editors) 27-46.

Colín, M. P. (2006). *De la aritmética al Cálculo: un estudio transversal de la raíz cuadrada.* (Tesis inédita de Maestría). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN (CICATA-IPN), México.

Chevallard, Y., (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Editorial Aique.

Juárez, S. (2007). *La vida escolar de las operaciones raíz cuadrada y elevar al cuadrado*. (Tesis inédita de Maestría). Universidad Autónoma de Guerrero - Maestría en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas. México.

Lorenzo, D. (2008). *Una construcción de los exponentes fraccionarios desde un punto de vista del proceso de convención matemática*. (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Guerrero - Maestría en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas. México.

Martínez-Sierra, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5* (1), 45-78.

Martínez-Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de de su funcionamiento en los exponentes*. (Tesis inédita de doctorado). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. CICATA-IPN. México.

Martínez-Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8* (2), 195-218.

Martínez-Sierra, G. (2007a). Los procesos de Convención Matemática como Generadores de Conocimiento. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 379-401). México DF, México: Diaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. ISBN: 84-7978-803-8.

Martínez-Sierra, G. (2007b). Sobre la naturaleza y significado de los exponentes. En: C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán y C. Navarro (Eds.) *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y visualización en el aula* (pp. 131-173). México: Editorial Díaz de Santos.

Martínez-Sierra, G. (2007c). Los procesos de convención matemática y la inclusión de las funciones trigonométricas en el marco del análisis euleriano. En C. Crespo (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20,* (pp. 602-608). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Martínez-Sierra, G. (2008a). From the analysis of the articulation of the trigonometric functions to the corpus of eulerian analysis to the interpretation of the conceptual breaks present in its scholar structure. *Proceedings of the HPM 2008 conference, History and Pedagogy of Mathematics*.

Martínez-Sierra, G. (2008b). Sobre las rupturas conceptuales en la construcción escolar de las funciones trigonométricas. En C. Crespo y P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21,* (pp. 857-867). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Martínez-Sierra, G. (2009). Los procesos de articulación de sistemas conceptuales presentes en la construcción de las funciones trigonométricas. En G. Buendía y H. Hernández (Eds.). *Matemática Educativa en Chiapas* (pp. 79-104). Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. Universidad Autónoma de Chiapas.

Martínez-Sierra, G. y Antonio, R. (2009). Una construcción del significado del número complejo. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 4* (1), 1-10.

Martínez-Sierra, G. y Poirier, P. (2008). Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial. *Latin American Journal of Physics Education, 2* (2), 122-129.

Martínez-Tecolapa, D. (2008). *Un estudio de la evolución didáctica de las funciones trigonométricas: El caso del concepto de ángulo.* (Tesis inédita de Maestría). Universidad Autónoma de Guerrero-Maestría en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas. México.

Méndez, C. L., Maldonado. E. S. y Martínez-Sierra, G. (2007). Sobre la construcción escolar de la función trigonométrica: la transición grados → radianes → reales. En C. Crespo (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20,* (pp. 573-578). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Méndez, C. (2008). *Sobre la construcción escolar de las Funciones Trigonométricas: La transición grados → radianes → reales en el Nivel Medio Superior.* (Tesis inédita de maestría). Universidad Autónoma de Guerrero-Maestría en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas.

Poirier, P. (2007). *Un acercamiento epistemológico al producto vectorial desde la perspectiva de la convención matemática.* (Tesis inédita de Maestría). *Universidad Autónoma de Chiapas*. Maestría en Matemática Educativa del Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Facultad de Ingeniería. México.

Autor:

Gustavo Martínez-Sierra.
Programa de Matemática Educativa CICATA-IPN, Unidad Legaria, México.
gmartinezsierra@gmail.com