El contexto y el significado de los objetos matemáticos

Meaning and context of the mathematical objects

Ramiro Ávila Godoy, Silvia Elena Ibarra Olmos,
Agustín Grijalva Monteverde

RESUMEN

El propósito de este artículo es mostrar el trabajo de investigación que, con la colaboración de varios compañeros, hemos venido realizando en los últimos años. El problema central que hemos estado investigando es relativo al papel que el contexto juega en el proceso de construcción de los significados de los objetos matemáticos, tanto en la etapa del origen y desarrollo del objeto como en la de su aprendizaje en una institución educativa, en cuyo caso, nuestro interés es establecer la relación entre el contexto de la enseñanza y los significados que los estudiantes asignan a los objetos matemáticos. El marco teórico que hemos utilizado para realizar estas investigaciones está constituido por premisas tomadas, fundamentalmente de dos marcos teóricos referenciales, uno es el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática, del Dr. Juan D. Godino y colaboradores y el otro es la Teoría de la Enseñanza Problémica de Mirza I. Majmutov.

PALABRAS CLAVE:

- *Contexto*
- *Significado*
- *Enseñanza*
- *Epistemología*
- *Ontosemiótica*

ABSTRACT

The purpose of this article is to show the research work, with the collaboration of several partners, we have been doing during the past years. The main problem that we have been researching it is about the performance of the context involved in the construction of the mathematical objects meaning process, even at the beginning and development of the object though in its learning on an educational institution, in which case, our interest is to establish a relationship between the teaching context and the meanings that the students assign to mathematical objects. The theoretical framework that we have been using upon this researches it is conformed by premises taken basically from two theoretical framework, the first one is the Ontosemiotic Approach of the Mathematical Cognition, developed by Professor Juan D. Godino and collaborators; the other one is Mirza I. Majmutov's Problematic Teaching.

KEY WORDS:

- *Context*
- *Meaning*
- *Teaching*
- *Epistemology*
- *Ontosemiotic*

Relime (2010) 13 (4-II): 337-354. Recepción: Mayo 26, 2009 / Aceptación: Marzo 25, 2010.

RESUMO

O objetivo deste artigo é mostrar o trabalho de pesquisa que, em colaboração de uma equipe, temos realizado num periodo de alguns anos. O problema central que temos pesquisado é relacionado à relevancia que o contexto tem no proceso de construção dos significados dos objetos matemáticos, mesmo na etapa de origem y desenvolvimento quanto na etapa do aprendizaje numa instituição educativa. Assim, o nosso interés é estabelecer a relação entre o contexto do ensino e os significados que os estudantes dão aos objetos matemáticos. O marco teórico que temos utilizado para a pesquisa é conformado por premissa vindas, principalmente, de duas teorías referenciais, onde a primeira é o Enfoque Ontosemiótico da Cogniçãao Matemática, apresentada por o Doutor Juan D. Godino e colaboradores, e a segunda é a Teoría do Ensino Problemático de Mirza I. Majmutov.

PALAVRAS CHAVE:

- *Contexto*
- *Significado*
- *Ensino*
- *Epistemología*
- *Ontosemiótica*

RÉSUMÉ

La finalité de cette article est de mettre en évidence le travail d'investigation que nous avons realisé pendant ces derniers annés avec la collaboration de certains collègues. Le sujet principal de notre recherche est la place que le contexte joue dans la construction de la signification des objets mathématiques, dans la phase d'élaboration et de développement de l'objet comme dans son apprentissage dans une institution éducative, dont l'intérêt d'etablir une relation entre le contexte de l'apprentissage et les significations que les élèves assignent aux objets mathématiques. Le cadre théorique que nous avons utilisé pour réaliser ces recherches est constitué de présupposés avec l'élaboration de marques théoriques référentielles, le premier est l'Approche Ontosemiotique de la Cognition Mathématique du Dr. Juan D. Godino et ses collaborateurs, et l'autre est la Théorie de l'Apprentissage Problématique de Mirza I. Majmutov.

MOTS CLÉS:

- *Context*
- *Signification*
- *Apprentissage*
- *Epistemiologie*
- *Ontosemiotique*

1 Introducción

Partimos de que el fin último de las investigaciones en Matemática Educativa es mejorar los resultados de la enseñanza de las Matemáticas, lo cual equivale a decir que el objetivo común de tales investigaciones es aportar elementos que puedan ser utilizados por los profesores en particular o por los sistemas educativos en general, para lograr que los alumnos adquieran un conocimiento más sólido de la matemática, que se vea reflejado en un uso más eficaz de los conceptos y métodos de la disciplina, en el análisis, interpretación y resolución de un cierto universo de problemas.

Por otra parte, asumimos que para poder mejorar la enseñanza, es necesario entender de mejor manera los procesos de estudio a través de los cuales las personas aprenden, en especial los que se generan en las aulas escolares en donde se lleva a cabo el proceso de interacción entre profesor y estudiantes. Respecto a estos procesos, son muchas las interrogantes que requieren ser contestadas, todas ellas relacionadas con el querer saber ¿qué es lo que ocurre en las aulas y por qué? En nuestro caso, son dos las interrogantes que han guiado las investigaciones que hemos realizado en los últimos años, ambas se refieren al papel del contexto en los procesos de construcción de los significados de los objetos matemáticos ya que, por una parte, estamos interesados en indagar la relación existente entre el contexto de la enseñanza y los significados que los estudiantes asignan a los objetos matemáticos y, por otra, en investigar el papel que tiene el contexto en la etapa del surgimiento y evolución de dichos objetos.

Cuando se habla de la enseñanza de las Matemáticas en contexto se está haciendo referencia a su enseñanza a través de situaciones problémicas tomadas del campo de sus aplicaciones, aunque el término *contexto* de la enseñanza, también se emplea para referirse a situaciones problémicas tomadas de la matemática misma, este es el caso cuando se habla del contexto algebraico o del contexto geométrico, entre otros.

El uso que nosotros damos al término *contexto* es más general pues no sólo consideramos las situaciones problémicas, objeto de estudio, sino la manera de representarlas (el lenguaje que se usa), los argumentos que se utilizan y, en general, el conjunto de circunstancias en el que se lleva a cabo el proceso de estudio, entre las que incluimos al sujeto cognoscente y su sistema conceptual antecedente.

En términos teóricos, investigar la relación entre contexto y significado tiene sentido al asumir una concepción pragmática (operacional) del significado, que implica concebir a los objetos matemáticos como herramientas conceptuales que surgen y se desarrollan a través de su uso; en contraposición con la concepción realista del mismo que se asume en el platonismo, cuya implicación, en la enseñanza, en el caso extremo, es considerar que dada la existencia *real* del objeto matemático, para conocerlo es necesario y suficiente describirlo, caracterizarlo, enunciar y probar sus propiedades, etc. El problema de sus aplicaciones y usos es una acción a posteriori, que no puede modificar el significado del objeto, dada su preexistencia.

Nuestra concepción pragmática del significado forma parte del marco teórico que utilizamos en nuestras investigaciones y que hemos conformado asumiendo, fundamentalmente, las premisas de dos marcos teóricos referenciales, uno es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino, 2002); el otro es la Teoría de la Enseñanza Problémica (Majmutov, 1983).

En este artículo mostraremos el trabajo de investigación que hemos venido realizando en Matemática Educativa. Para ello, procederemos a presentar, primero, las premisas fundamentales de nuestro marco teórico, luego un breve resumen de algunas de las investigaciones realizadas que ilustren lo que hemos venido haciendo y, finalmente, algunos resultados obtenidos en nuestras investigaciones y que presentamos como conclusiones.

❷ Premisas fundamentales de nuestro marco teórico

Siguiendo las ideas de Godino (1996; 2000) declaramos, en primer término, que:

- Asumimos que uno de los propósitos fundamentales de las investigaciones en Matemática Educativa es indagar el significado que los estudiantes asignan a los objetos matemáticos; así como explicar la manera en que dichos significados se forman y evolucionan como resultado de la enseñanza.
- Percibimos a la matemática, al menos de las siguientes tres maneras: como una actividad de resolución de problemas, como un lenguaje simbólico y como un sistema conceptual lógicamente organizado; y que concebimos cada una de las tres maneras, como aspectos constituyentes de la misma.
- Concebimos el aprendizaje de las matemáticas como el proceso mediante el cual se desarrollan las habilidades necesarias para realizar un conjunto de prácticas actuativas (de lectura y producción de textos) y discursivas (de reflexión y comunicación de las prácticas actuativas) útiles para analizar, interpretar y resolver un cierto tipo de problemas reconocidos como problemas de matemáticas, por un interlocutor experto, así como para comunicar soluciones y describir y argumentar métodos y procedimientos.

Nuestras concepciones de la matemática y de su aprendizaje justifican a su vez nuestra concepción pragmática de los significados de los objetos matemáticos, lo mismo que nuestra concepción sobre su origen y desarrollo, pues asumimos que esto sucede cuando los estudiantes están analizando y resolviendo situaciones problémicas, que se caracterizan por originar *conflictos cognitivos*.

En el proceso de análisis y resolución de una situación problémica, el sujeto realiza una serie de actividades cognitivas de muy diversa índole, algunas de las cuales son ostensibles (observables), tales como: *hacer un diagrama, efectuar una operación, comunicar una idea*; otras son acciones interiorizadas no ostensibles, tales como: *hacer comparaciones, analogías, deducciones, conjeturas, generalizaciones*, entre otras.

Estas actividades realizadas al estar analizando y tratando de resolver una situación problémica dan lugar al enriquecimiento del significado de los objetos matemáticos puestos en juego y, como consecuencia, a su evolución y, muchas veces, al surgimiento de nuevos objetos derivados de los previamente construidos.

2.1. *Algunas precisiones de los términos empleados al formular las premisas de nuestro marco teórico referencial*

En concordancia con Majmutov (1983) y Godino y Batanero (1994), entenderemos por:

Situación problémica: Al estado inicial del pensamiento que se origina o se crea en una persona que pretende realizar una tarea o responder una pregunta para lo cual, dicha persona no está preparada, pero siente que puede y debe hacerlo.

Práctica matemática: A cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) llevada a cabo en la resolución de problemas matemáticos y en la comunicación de soluciones a otras personas a fin de validarlas y generalizarlas a otros contextos y problemas.

Sistema de prácticas personales y Práctica significativa: El conjunto de prácticas que realiza el individuo tratando de resolver un problema matemático. Una práctica específica, personal, se denomina *significativa*, si para ese individuo, esa práctica desempeña una función en la consecución del objetivo de resolver el problema.

Significado personal de un objeto matemático: De los sistemas de prácticas significativas que un individuo utiliza para resolver un cierto tipo de situaciones problémicas o para hablar de ellas, emergen los *objetos matemáticos. Dichos sistemas de prácticas constituyen los significados personales que ese individuo tiene de tales objetos matemáticos.*

Institución, Sistema de prácticas institucionales, Significado institucional y Objeto matemático institucional: Un conjunto de individuos que comparten el uso de un conjunto de prácticas significativas y las utilizan para resolver un cierto tipo de situaciones problémicas constituyen una *institución.* A tal conjunto de prácticas se le denomina *sistema de prácticas institucionales*. Tales sistemas de prácticas constituyen los *significados institucionales* de los objetos matemáticos que emergen de dichos sistemas de prácticas, los cuales se denominan *objetos institucionales*.

2.2. El significado institucional de los objetos matemáticos en el diseño curricular y en la planeación de la enseñanza.

Tanto en el diseño curricular como en la planeación de la enseñanza, lo que se hace es decidir cuáles serán los sistemas de prácticas que se promoverán respecto a un conjunto de objetos matemáticos para que los estudiantes los conozcan y aprendan a utilizarlos para resolver una serie de problemas relativos a un cierto tipo de situaciones problémicas. Estos sistemas de prácticas son los significados institucionales de los objetos matemáticos que habrán de estudiarse y constituyen el sistema de referencia de la enseñanza.

Tomando en cuenta la relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados de los objetos matemáticos, entendidos como sistemas de prácticas, es necesario introducir una tipología básica para referirse a ellos, según su uso. En principio, hemos establecido la existencia de los significados personales y de los significados institucionales de los objetos matemáticos y hemos precisado que en el diseño curricular y en la planeación de la enseñanza se hace referencia a los significados institucionales, a los cuales, según el uso que se les da, se denominan significado: implementado, evaluado, pretendido, referencial y holístico. De la misma manera, al hablar de los significados personales, podemos referirnos al significado: global, declarado y logrado.

❸ Algunas investigaciones realizadas con el propósito de establecer la relación entre contexto y significado de los objetos matemáticos.

Investigar, por una parte, el papel del contexto en el origen y desarrollo de los significados institucionales y, por otra, el papel del contexto de la enseñanza en el proceso a través del cual los estudiantes asignan significado a los objetos matemáticos, ha dado lugar al desarrollo de varios proyectos, de los cuales, a continuación describimos algunos:

3.1. *Obstáculos en la transferencia de algunos conceptos del Cálculo aprendidos en el contexto del movimiento a otros contextos.*

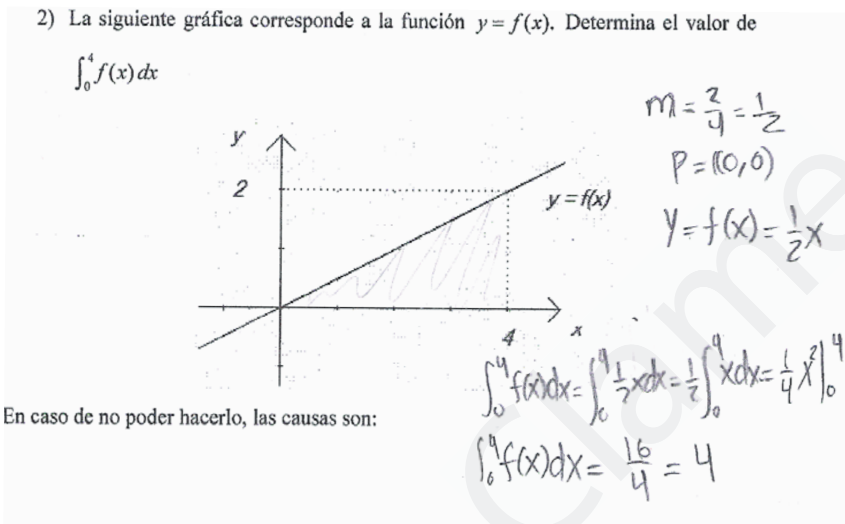
En este proyecto, primero se impartió un curso de Cálculo Diferencial a estudiantes de primer semestre de ingeniería, en el cual, se analizaron situaciones problémicas en el contexto del movimiento que condujeron a interpretar *el valor de la derivada de la función posición de un recorrido*, en cada instante, como el valor de *la rapidez instantánea del móvil*; posteriormente, a esos mismos estudiantes se les pidió que calcularan la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto determinado y no resultó automático que interpretaran que, en este nuevo contexto, la derivada de la función correspondiente a la curva, permitía resolver el problema, es decir, el significado del valor de la derivada de una función, en el contexto geométrico, estaba ausente. De igual forma, al pedirles que, dada la fórmula para calcular el volumen de un cubo, esto es, dada la fórmula $V=x^3$ dijeran qué significaba que la derivada de esta función, cuando $x=1$, fuera igual a 3. De nueva cuenta, fue evidente que el significado de la derivada como razón instantánea de cambio, también estaba ausente.

3.2. *El contexto de la enseñanza y el significado que los estudiantes asignan al objeto matemático: integral de una función*

En esta investigación, el propósito fue indagar los significados de la integral de una función real de variable real que utilizan estudiantes y profesores de cálculo al resolver problemas relacionados con dicho objeto y la relación de estos significados con el contexto en que les fueron enseñados. Para ello, procedimos a diseñar una serie de reactivos, asumiendo que las formas más frecuentes con que se presenta, en los cursos y en los textos, la integral de una función, son:

- Como una función primitiva o antiderivada. (Esto sucede cuando pretendemos que $\int f(x)dx$ se interprete como la función $G(x)$ tal que $G'(x)=f(x)$).
- Como el área de la región acotada entre la gráfica de $y=f(x)$ las rectas $x=a$, $x=b$ y el eje de las abscisas, con las precisiones correspondientes a los casos $f(x)\geq 0$ o $f(x)<0$.
- Como una función del límite superior de la integral, al interpretar el signo $\int_a^x f(t)dt$.
- Luego, con los reactivos diseñados elaboramos un cuestionario que aplicamos a más de cuarenta sujetos entre profesores y estudiantes de ingeniería. Los resultados obtenidos indican que el significado más utilizado es el de antiderivada, evaluada en los extremos, como se muestra en los siguientes casos, representativos de diferentes

respuestas a la pregunta sobre el valor de la integral de una función. En todas ellas, independientemente de lo acertado o no de sus respuestas, se pone de manifiesto la significación señalada.



2) La siguiente gráfica corresponde a la función $y=f(x)$. Determina el valor de

$\int_0^4 f(x)\,dx$

$m=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$P=(0,0)$

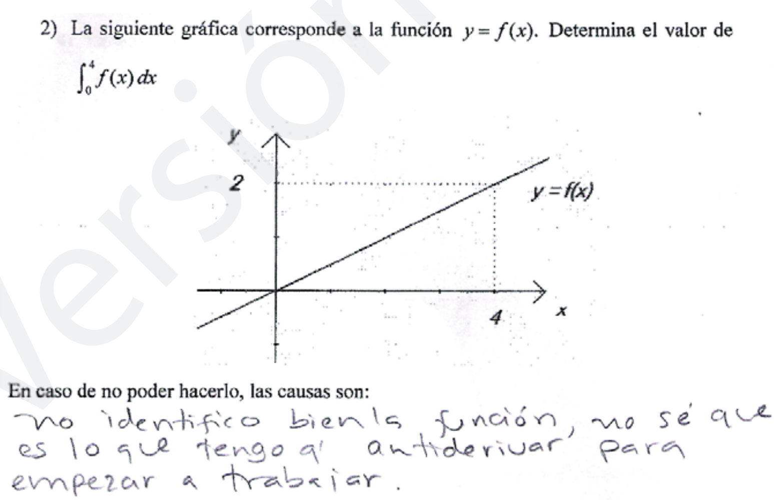
$y=f(x)=\frac{1}{2}x$

$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^4 \frac{1}{2}x dx=\frac{1}{2}\int_0^4 x dx=\frac{1}{4}x^2\Big|_0^4$

$\int_0^4 f(x)dx=\frac{16}{4}=4$

En caso de no poder hacerlo, las causas son:

Figura 1.



2) La siguiente gráfica corresponde a la función $y=f(x)$. Determina el valor de

$\int_0^4 f(x)\,dx$

En caso de no poder hacerlo, las causas son:

no identifico bien la función, no sé que es lo que tengo q' antiderivar para empezar a trabajar.

Figura 2.

En el siguiente caso, se indicaba que el área sombreada tenía el valor $\frac{1}{4}$ y se solicitaba el valor correspondiente de la integral. La respuesta consistió en "inventar" una expresión analítica de la función para poder antiderivar.

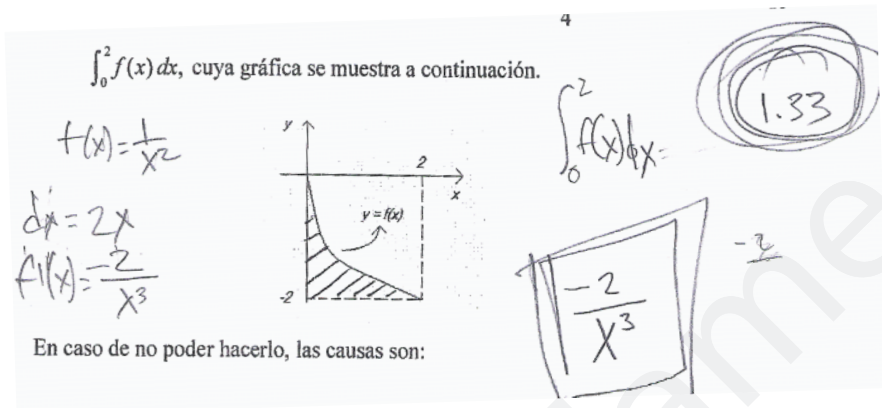


Figura 3.

Asimismo, de entre aquellos que asociaron la integral con un área, algunos lo hicieron poniendo de manifiesto que su significado de "área bajo la curva" pareciera corresponderse con prácticas exclusivas de funciones positivas y, consecuentemente, buscaron en otros casos, hacer una interpretación de conformidad con su significado, como se muestra en los dos ejemplos siguientes.

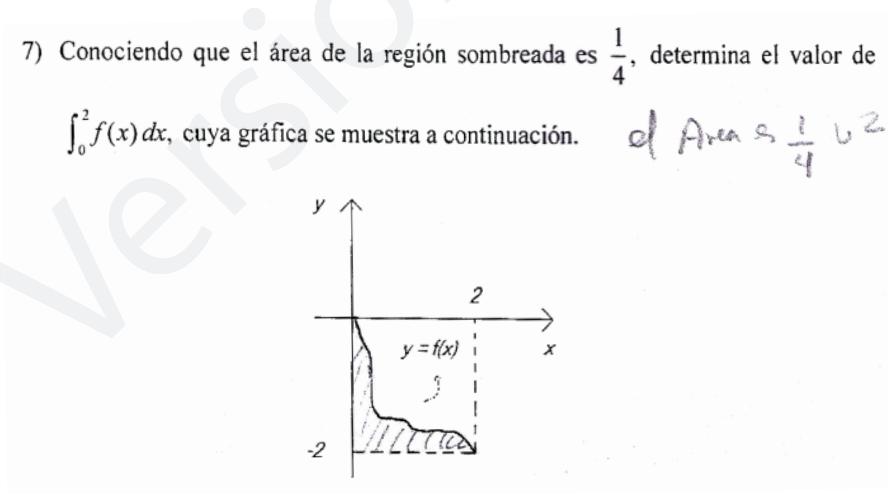


Figura 4.

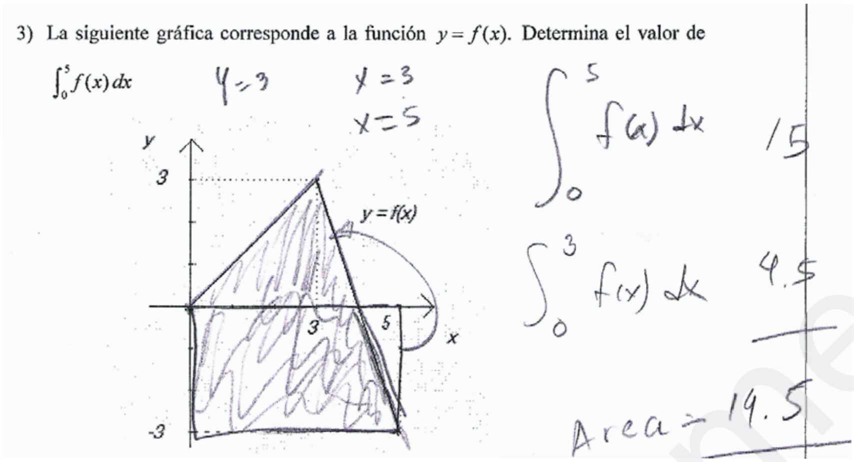


Figura 5.

3.3. *El significado institucional del álgebra enseñada a estudiantes de ingeniería en una universidad pública mexicana. El proceso a través del cual se determinó.*

Habiéndose establecido un nuevo modelo curricular en una universidad pública del norte del país, en el que se plantearon una serie de cambios en las estrategias de formación de egresados, particularmente de los egresados de ingeniería, y más específicamente, en su formación matemática, aprovechamos el hecho para realizar esta investigación, cuyos propósitos fueron:

a) Caracterizar el significado institucional (referencial, pretendido e implementado) del álgebra a enseñar a estudiantes de ingeniería.
b) Analizar el proceso de cambio que sufren dichos significados (sistemas de prácticas) al pasar de una institución a otra.
c) Determinar las relaciones e interacciones entre ellos.

Para hacer viable la investigación, seleccionamos un contenido que fuese representativo del álgebra que estudian los estudiantes de ingeniería: *los sistemas de ecuaciones lineales* y procedimos, primero, a caracterizar el significado institucional de referencia, plasmado en los programas de estudio de la disciplina y en los textos recomendados como bibliografía básica para el desarrollo del curso, luego, a caracterizar el significado pretendido, que fue determinado por el colegiado de profesores responsables de la impartición de los cursos y, finalmente, a caracterizar el significado implementado a través de la observación directa de las clases impartidas por tres profesores, complementada con una entrevista a cada uno de ellos. Luego, mediante las nociones de trayectoria y configuración epistémica (que describen la manera en que son organizados los objetos matemáticos en la planeación) y docente (que se refiere a las acciones que el profesor realiza en el aula cuando pone en escena las trayectorias/configuraciones epistémicas previamente planeadas), analizamos y contrastamos cada uno de los tipos de significado para, finalmente, establecer las conclusiones.

En los apartados que siguen, describimos sucintamente los resultados obtenidos en cada una de las fases de la investigación.

El significado referencial

El significado referencial de los sistemas de ecuaciones lineales plasmado en el programa de estudio y en los libros de texto básicos, está constituido por un sistema de prácticas operativas y discursivas centradas en un empleo utilitario: conocer qué son los SEL, cómo se pueden resolver y en qué tipos de problemas de la ingeniería pueden utilizarse.

El significado pretendido

Teniendo como base el significado referencial, el colegiado de profesores, responsables de la impartición de los cursos de Álgebra a los estudiantes de ingeniería, determinó el significado pretendido, a través de un proceso de análisis e interpretación de lo establecido en el programa de estudio y en los textos. En resumen, en dicho significado se estableció: lo que el estudiante de ingeniería hará y dirá sobre los SEL, surgirá a partir del tratamiento de situaciones derivadas de su campo de estudio, en las cuales se promoverá la interrelación de diferentes lenguajes, la aparición de los conceptos típicos, el dominio de un algoritmo para resolver los SEL. Sin declararse explícitamente, se le asignó un papel importante a las argumentaciones, quedando las propiedades (teoremas y sus demostraciones), sin un papel protagónico. Se recomendó utilizar como recursos de apoyo, la calculadora y la computadora.

El significado implementado

Lo caracterizamos a partir de observar (auxiliándonos con videograbación y notas de campo) lo realizado en el aula, por tres profesores (A, B y C), seleccionados de entre los integrantes del grupo colegiado; y entrevistarlos para complementar la información obtenida en las observaciones (Ibarra, Ávila, 2009). Los tres maestros, casos prototípicos en la institución seleccionada, mostraron, mediante el ejercicio de su labor docente, las variantes que pueden ser introducidas en el trabajo didáctico, considerando las circunstancias en las cuales éste se desarrolla. Si bien los tres construyeron su discurso mediante diferentes situaciones problémicas tomadas de entre las que previamente había conformado el colegiado, las configuraciones epistémicas y didácticas que tejieron alrededor de ellas, fueron cualitativamente diferentes.

El profesor A utilizó los problemas como un medio a partir del cual puede y debe construirse el conocimiento algebraico, al cual concibe como un entramado de lenguajes, conceptos, argumentos, procedimientos y propiedades en acto; el profesor B implementó una serie de prácticas operativas y discursivas alrededor del conocimiento algebraico en juego, declarando que su objetivo es lograr que los alumnos aprendan a manejar un algoritmo y a reconocer aquellas situaciones en las que lo podrían usar. De lo observado, concluimos que, para este profesor, enseñar álgebra significa enseñar procedimientos, identificando las problemáticas susceptibles de resolverse con ellos. Por su parte, el profesor C, a través del enfoque que le dio a los temas, dejó entrever su concepción del álgebra como herramienta de modelación.

3.4. *El papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos. El caso de la integral de una función*

Este es un proyecto en el que nos propusimos indagar el papel del contexto en la etapa del surgimiento de los objetos matemáticos, en la asignación de los primeros significados y en el proceso de evolución de éstos. Nuestra hipótesis, de nueva cuenta, fue asumir que también en el caso del surgimiento de los objetos matemáticos, el significado original, lo mismo que los subsecuentes asignados en el proceso de evolución, son determinados por el contexto, entendido éste, en el sentido que hemos expuesto al principio, que incluye el papel determinante de las prácticas previamente desarrolladas por un sujeto (persona o institución). Específicamente, siguiendo los planteamientos de Godino et al. (2002), sobre los objetos matemáticos primarios (situaciones problémicas, lenguaje, procedimientos, propiedades, argumentaciones y conceptos), mostramos cómo estos elementos desempeñan un papel fundamental en el surgimiento de nuevos objetos matemáticos.

Para poner a prueba nuestra hipótesis, tomamos un solo objeto matemático, la integral, e investigamos las circunstancias que dieron origen a su surgimiento en la obra de Leibniz, la significación que éste le asignó; luego lo investigamos en la obra de Euler, después en la de Lagrange, y, finalmente, en la de Cauchy y Riemann; siempre bajo la misma hipótesis.

La información analizada, a la luz de las premisas de nuestro marco teórico, dan evidencia de la validez de nuestra hipótesis: los significados de los objetos matemáticos, en particular de la integral, están determinados por el contexto en el que surgen y se desarrollan, contexto del que un elemento especialmente importante, son los sistemas de prácticas matemáticas previamente desarrollados por el sujeto (individuo o institución), que son determinantes en la interpretación de las situaciones problémicas, objeto de estudio, y en el diseño de las estrategias con que se abordan y resuelven, atribuyendo diferentes propiedades a los objetos en juego y siguiendo procedimientos diversos.

La extensión de este artículo no permite presentar todas las evidencias que tenemos a favor de nuestra hipótesis, razón por la cual nos restringiremos a mostrar sólo algunas. Únicamente presentaremos la primera parte del estudio epistemológico que realizamos sobre la forma en que Leibniz creó el cálculo diferencial e integral.

El cálculo de Leibniz

El punto de partida de Leibniz fue el tratamiento de las diferencias en arreglos numéricos finitos, en los que se percató de que, si tomaba las diferencias de una sucesión finita cualquiera

$$A, B, C, D, E$$

entonces, la suma de las diferencias arroja como resultado la diferencia del último y el primer término:

$$(B-A)+(C-B)+(D-C)+(E-D)=E-A$$

esta propiedad la utilizó para obtener algunos resultados ya conocidos, entre otros, el de la suma de los primeros n números impares, que representa la suma de las diferencias de los primeros n números naturales al cuadrado.

$$1,3,5,7,\ldots,2n-1$$

pues $i^2-(i-1)^2=i^2-(i^1-2i+1)=2i-1$. De aquí que

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2-0=n^2$$

Posteriormente, extendió este resultado al caso de las sucesiones numéricas infinitas cuyos términos "decrecen sin límite", aplicando a dichas sumas, las mismas propiedades de las sumas finitas.

Considerando lo que denominó "triángulo armónico" (por analogía con el triángulo de Pascal), puede observarse que las diagonales (de izquierda a derecha), a partir de la segunda, se forman con las diferencias de los términos consecutivos de la anterior.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & \\
 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7}
\end{array}
$$

Con los términos de las diagonales y asumiendo la existencia, en cada caso, de un término último, al cual denominó ω, calculó algunas sumas infinitas como las que se señalan a continuación,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+etc.=1$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{105}+etc.=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}+\frac{1}{140}+\frac{1}{280}+etc.=\frac{1}{3}$$

Luego, multiplicando por un cierto número, cada una de las series indicadas, obtuvo algunas otras como las siguientes:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+etc.=2$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+etc.=\frac{3}{2}$$

Al realizar estas operaciones, Leibniz hizo, con base en lo que él denominó "principio de continuidad", extrapolaciones al caso de las sumas infinitas, asumiendo como válidas algunas propiedades de las sumas finitas. Entre ellas está la que observó en las primeras sumas que mostramos, que la suma de todos los términos de una sucesión finita, era igual a la diferencia del primer término con el último, al extrapolarla a las sucesiones infinitas, estableció que la suma de los términos de una diagonal es igual al primer término de la diagonal precedente, extrapolación consistente en asumir que, de la misma manera que se opera con los términos de una sucesión finita, puede operarse con los términos de las sucesiones infinitas que contienen términos "infinitamente pequeños", de tal suerte que, si a es un número finito, entonces $a - \omega = a$, donde ω es un término *infinitamente pequeño*.

En este análisis de las sumas obtenidas con el triángulo armónico, Leibniz desarrolló un sistema de prácticas alrededor de las segundas diferencias, terceras diferencias, etc. y, en contrapartida, de segundas sumas, terceras sumas y así sucesivamente. Asimismo asumió que los términos de una suma infinita podían multiplicarse, uno a uno, por un número y que el resultado era la suma original multiplicada por el factor considerado.

Así pues, de los sistemas de prácticas efectivos en la resolución de situaciones referentes al tratamiento de diferencias y de sumas de sucesiones numéricas finitas, al abordar nuevas situaciones problémicas, en este caso las de las sucesiones numéricas infinitas, emergen nuevas significaciones para las operaciones involucradas, nuevos lenguajes y, en general, nuevos objetos matemáticos.

La idea que señalamos queda, quizá, más claramente de manifiesto, al considerar el paso más trascendente que dio Leibniz cuando, buscando resolver un importante problema de su época: la cuadratura de las curvas, aplicó sus sistemas de prácticas a objetos de naturaleza geométrica.

Leibniz partió de considerar la siguiente figura:

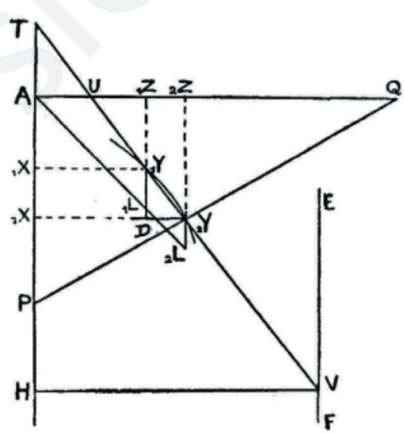


Figura 6.

Aquí consideró que una figura con un lado curvo, podía concebirla como un polígono de infinitos lados o, como originalmente lo llamó “un polígono infinito-angular”, de tal manera que la curva está formada por segmentos “infinitamente pequeños” o de “longitud inasignable”, a los que llamó diferenciales y representó como ds. En el caso de la figura 6 empleada, al triángulo ${}_1YD_2Y$, lo denominó triángulo característico, formado por tres segmentos diferenciales, uno correspondiente a la ordenada, D_2Y otro a la abscisa, ${}_1YD$, y otro más, ${}_1Y_2Y$, correspondiente a la curva. Este segmento diferencial lo concibió como la unión de dos puntos consecutivos del arco S y formando parte de una recta tangente a la curva.

De la misma manera que procedía con el caso de las series numéricas, Leibniz estableció los procedimientos y las propiedades de los objetos creados con base en los mismos principios, partiendo de la idea fundamental de que $\int ds = s$, esto es, que la longitud del arco es igual a la suma de todos los segmentos diferenciales.

Posteriormente, incluyó en sus análisis, las figuras de “área inasignable”, los cuerpos de “volumen inasignable” y extendió sus ideas a casos de dimensiones mayores, creando un cálculo de diferenciales de diferente orden y sumas de diferente orden también.

Con su concepción de los objetos del cálculo, formuló el Principio Fundamental del Cálculo (Leibniz 1920), de la siguiente manera: “Diferencias y sumas son las inversas una de otra, es decir, la suma de las diferencias de una serie es un término de la serie, y la diferencia de las sumas de una serie es un término de la serie”, lo cual escribe precisamente como lo hicimos líneas arriba, $\int dx = x$ y $d\int x = x$.

Todos estos elementos muestran cómo los sistemas de prácticas previamente construidos por Leibniz se constituyen en elementos contextuales determinantes del desarrollo de sus ideas matemáticas posteriores. Esto es, al abordar situaciones geométricas, que en un sentido limitado podría considerarse como un nuevo contexto, tenemos que la forma de abordarlo incluye los sistemas de prácticas anteriores para el tratamiento de las diferencias y las sumas infinitas.

En términos llanos, cuando hablamos del contexto de una situación problémica, es imprescindible tomar en cuenta en ello, la pregunta ¿quién la está interpretando y tratando de resolverla?

Evidencias, como las obtenidas en el trabajo de Leibniz, encontramos en los trabajos del resto de los autores estudiados que, como dijimos al principio, por falta de espacio no podemos exponer aquí.

4 Conclusiones

Las investigaciones que hemos realizado, tratando de determinar el papel del contexto (concebido en los términos que lo hemos presentado en este artículo), en el proceso de asignación de significados a los objetos matemáticos, de la cual, las aquí presentadas son sólo una parte, nos permiten afirmar que:

- Existe una estrecha relación entre contexto y significado.
- Los significados que los estudiantes asignan a los objetos matemáticos, están determinados por el contexto de la enseñanza, entendido éste como el conjunto de elementos presentes en el proceso de estudio, entre los que están incluidos, entre otros, las situaciones problémicas que lo desencadenan, así como los sistemas de prácticas utilizados por los sujetos participantes en el proceso, al analizar y tratar de resolver dichas situaciones.
- En el proceso de creación de un nuevo objeto matemático, el contexto tiene un papel similar al descrito en la afirmación anterior, es decir, existe una situación problémica por resolverse, que origina un proceso de estudio, en el que participa un sujeto o una comunidad interesada en resolverla, que utiliza para ello, un sistema de prácticas que resulta inadecuado para lograrlo y que, en un cierto momento, da pie al surgimiento de un nuevo sistema de prácticas del que emerge un nuevo objeto matemático cuyo significado inicial es el sistema de prácticas del que emergió.
- Las modificaciones hechas a los sistemas de prácticas matemáticas, para que resulten eficaces para analizar, interpretar y resolver nuevas situaciones problémicas, constituyen, de acuerdo con nuestro marco teórico, la evolución de los significados de los objetos matemáticos puestos en juego.

Referencias bibliograficas

Godino, J.D. y Batanero, C. (1994). *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*. *Recherches en Didactique des Mathématics*, *14* (3), 325-355.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding. En Puig, L.; Gutiérrez, A. (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference,* 2 (pp. 417-424), Universidad de Valencia, España.

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *UNO, 25,* 77-87.

Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématics*, *22* (2.3), 237-284.

Leibniz, G. W. (1920). The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz. Chicago, USA, London, England. The Open Court Publishing Company.

Majmutov, M.I. (1983). La enseñanza Problémica**.** Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Ibarra, S., y Ávila, R. (2009). Un estudio del significado implementado para los sistemas de ecuaciones lineales por profesores de Álgebra en Facultades de Ingeniería. *Actas de la XXII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* 22 (pp. 1555-1564).

Autores:

Ramiro Ávila Godoy.
Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora. México.
ravilag@guass.mat.uson.mx

Silvia Elena Ibarra Olmos.
Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora. México.
sibarra@gauss.mat.uson.mx

Agustín Grijalva Monteverde.
Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora. México.
guty@gauss.mat.uson.mx