¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal?

How are Linear Algebra concepts learned?

Asuman Oktaç, María Trigueros

RESUMEN

En este trabajo se presentan los resultados de un proyecto de largo alcance en México cuyo propósito consiste en profundizar en la forma en que los estudiantes universitarios aprenden el álgebra lineal. Para ello se definen como metas del proyecto proporcionar un análisis teórico de las construcciones involucradas en los distintos conceptos de álgebra lineal utilizando la teoría APOE; validar dicho análisis para cada concepto mediante investigación empírica enfocando la atención en los distintos conceptos que la componen y en las relaciones entre ellos y, con base en los resultados obtenidos, hacer sugerencias didácticas que contribuyan a una enseñanza fundamentada en la investigación. En particular se presentan en este estudio los resultados obtenidos para los conceptos de espacio vectorial, transformación lineal, base y sistemas de ecuaciones lineales.

PALABRAS CLAVE:

- *Álgebra Lineal*
- *Teoría APOE*
- *Construcciones mentales*

ABSTRACT

This paper presents the results obtained so far in a long term project developed in Mexico with the purpose of studying in depth students' constructions when they study Linear Algebra at the university level. The goals of the project consist in developing theoretical analyses about the constructions involved in the learning of the different Linear Algebra concepts using APOS theory; validating those analysis by means of empirical research focusing on specific concepts and relationships between them; and making didactic suggestions that can contribute to the teaching of this subject. In particular we present in this study the results obtained for the following concepts: vector space, linear transformation, basis and systems of linear equations.

KEY WORDS:

- *Linear Algebra*
- *APOS theory*
- *Mental constructions*

RESUMO

Neste trabalho se apresentam os resultados de um projeto de longa duração no México cujo propósito consiste em aprofundar na forma em que os estudantes universitários aprendem a álgebra linear. Para tanto se definem como metas do projeto proporcionar uma análise teórica das construções envolvidas

PALAVRAS CHAVE:

- *Álgebra linear*
- *Teoria APOE*
- *Construções mentais*

Relime (2010) 13 (4-II): 373-385. Recepción: Mayo 26, 2009 / Aceptación: Noviembre 9, 2009.

nos distintos conceitos de álgebra linear utilizando a Teoria APOE; validar referida análise para cada conceito mediante pesquisa empírica focando a atenção nos distintos conceitos que a compõe e nas relações entre eles e, com base nos resultados obtidos, fazer sugestões didáticas que contribuam a um ensino fundamentado na pesquisa. Em particular se apresentam neste estudo os resultados obtidos para os conceitos de espaço vetorial, transformação linear, base e sistemas de equações lineares.

RÉSUMÉ

On présente dans cet article les résultats d'un projet de long terme développé au Mexique. Le propos du projet consiste en approfondir sur les constructions des connaissances liées à l'Algèbre Linéaire par les étudiants universitaires. Pour accomplir cet objectif, les buts particuliers du projet consistent en développer un analyse théorique des différents concepts de l'Algèbre Linéaire en termes de la théorie APOS; valider l'analyse par moyen de la recherche empirique centrée sur les différents concepts de l'Algèbre Linéaire et ses relations et, utiliser les résultats obtenus pour proposer des suggestions didactiques pour les enseigner. En particulier on présente ici les résultats obtenus pour les concepts d'espace vectoriel, transformation linéaire, base et systèmes linéaires d'équations.

MOTS CLÉS:
- *Algèbre Linéaire*
- *Théorie APOS*
- *Constructions mentales*

1 Introducción

El álgebra lineal es una rama de las Matemáticas que se considera importante prácticamente en todas las profesiones por sus posibilidades de aplicación a la solución de muy diversos problemas. Es por ello que las escuelas de Administración, Economía, Ciencias Sociales, Ingeniería, Física, de Biología y, por supuesto las de Actuaría, Estadística y Matemáticas, de todas las universidades contienen en sus programas al menos un curso de esta disciplina.

La enseñanza del álgebra lineal y, sobre todo, las dificultades de los estudiantes cuando intentan aprender los conceptos abstractos de esta disciplina han recibido la atención de varios investigadores. Existen numerosos trabajos de investigación que tratan los distintos aspectos de su enseñanza y aprendizaje (Sierpinska, 2000; Sierpinska et al., 2002; Dorier et al., 1997). La naturaleza epistemológica del álgebra lineal, los problemas con diseños didácticos y el uso de diferentes tipos de lenguajes son algunas de las fuentes de obstáculos que se identifican en estas investigaciones.

2 La teoría APOE y el álgebra lineal

En 1997 Dubinsky publicó un artículo donde advertía que las dificultades que tienen los estudiantes con los conceptos de álgebra lineal no pueden y no deben evitarse concentrándose en los aspectos computacionales de esta materia y eludiendo la abstracción. Esta advertencia venía como una crítica hacia la tendencia en Estados Unidos de rediseñar los cursos introductorios de álgebra lineal, dejando fuera los temas que no tienen que ver con las matrices o las ecuaciones lineales. Dubinsky sostenía que la abstracción y el formalismo son la esencia de las matemáticas y por tanto, se debe encontrar maneras de facilitar a los estudiantes experiencias agradables cuando los encuentran y durante su iniciación a la disciplina.

Dubinsky (1997) afirma que un acercamiento a la enseñanza basado en investigación sobre las construcciones mentales que pueden desarrollar los estudiantes para aprender los conceptos matemáticos, puede ser muy eficaz en esta dirección:

> …[A]ntes de que se consideren estrategias pedagógicas, los conceptos particulares que causan dificultades en álgebra lineal necesitan analizarse epistemológicamente. Con esto quiero decir que se necesita investigación para determinar las construcciones mentales específicas que un estudiante puede hacer, para comprender estos conceptos. Posteriormente es necesario desarrollar estrategias pedagógicas que permitan conducir a los estudiantes a hacer estas construcciones y a usarlas para resolver problemas. (p. 89)

La teoría APOE fue adaptada por Dubinsky (1991) de la teoría piagetiana, como un acercamiento que explica la construcción del conocimiento matemático avanzado. La metodología de investigación ligada a este marco teórico consta de tres componentes: análisis teórico, diseño y aplicación de estrategias de enseñanza, y análisis de datos. El análisis teórico corresponde a la realización de un modelo viable de la construcción de algún concepto matemático en términos de construcciones mentales (Acciones-Procesos-Objetos-Esquemas); a este modelo se le conoce como *descomposición genética*.

Según la teoría APOE una *acción* es una transformación de objetos que el individuo puede realizar paso a paso, obedeciendo a estímulos externos. Cuando el individuo reflexiona sobre estas acciones las puede *interiorizar* y éstas se convierten en *procesos*, en el sentido de que las mismas transformaciones pueden realizarse en la mente del individuo, sin necesidad de estímulos externos. Cuando hay necesidad de aplicar acciones sobre los procesos, éstos se *encapsulan* para dar lugar a *objetos*. Para conocer más sobre este marco, referimos el lector a Dubinsky (1991) y Asiala et al. (1996).

Con base en estas consideraciones, RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), un grupo que se dedica a hacer investigación usando la teoría APOE, preparó materiales de enseñanza (Weller et al., 2002) para un curso de álgebra lineal introductorio, donde cada uno de los conceptos estudiados se analizó previamente mediante una descomposición genética. Estas descomposiciones genéticas preliminares fueron muy útiles en el diseño de actividades, sin embargo son un tanto esquemáticas y era necesario refinarlas y realizar estudios de investigación para profundizar sobre el aprendizaje de los conceptos de álgebra lineal.

3 Nuestro proyecto

Dada la importancia que reviste el estudio del aprendizaje del álgebra lineal, consideramos pertinente iniciar un proyecto de largo alcance en México con el fin de profundizar en la forma en que los estudiantes aprenden esta disciplina, enfocando la atención en los distintos conceptos que la componen y en las relaciones entre ellos. Los objetivos del proyecto son proporcionar un análisis teórico de las construcciones involucradas en los distintos conceptos de álgebra lineal, validar dicho análisis mediante investigación empírica, y hacer sugerencias didácticas tomando en cuenta los resultados de la investigación teórica y empírica. Hasta ahora hemos estudiado los conceptos de espacio vectorial (Trigueros y Oktaç, 2005; Oktaç et al., 2006; Parraguez & Oktaç, 2010), transformación lineal (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010), base (Kú et al., 2008), y sistemas de ecuaciones lineales (Trigueros et al., 2007). Están en progreso investigaciones que se centran en otros temas como matrices, conjuntos generadores y espacios generados. En este artículo pretendemos dar a conocer este proyecto y sus resultados.

Las preguntas de investigación que guían este proyecto son:

> ¿Qué construcciones mentales son necesarias para que los estudiantes universitarios construyan los conceptos del álgebra lineal? ¿Cuáles son los principales obstáculos que enfrentan?

Por cuestiones de espacio aquí presentamos algunos análisis teóricos brevemente, y mencionamos algunos de los resultados más importantes. Referimos el lector a los trabajos mencionados para conocer más acerca del proyecto y de sus diferentes componentes.

4 Resultados particulares

4.1. *Construcción del concepto de espacio vectorial*

El concepto de espacio vectorial resulta muy difícil para los alumnos debido primordialmente a que es un concepto de naturaleza abstracta, con un estatus epistemológico diferente al de la mayoría de los conceptos que se enseñan en la universidad y que implica necesariamente la formalización de conceptos que han aprendido anteriormente (Dorier, 1995a; Dorier, 1995b; Dorier y Sierpinska, 2001; Maracci, 2005; Fischer, 2005). En nuestro proyecto hemos enfocado el concepto de espacio vectorial como un elemento básico para la construcción de otros conceptos del álgebra lineal.

Para entender la construcción del concepto desarrollamos una descomposición genética preliminar (Trigueros y Oktaç, 2005) de acuerdo a la cual, la construcción del esquema para el espacio vectorial requiere la coordinación de cuatro esquemas: el de axioma, el de operación binaria, el de función y el de conjunto. El resultado de realizar acciones sobre elementos de un conjunto específico y de acuerdo a operaciones binarias definidas previamente, permite al estudiante interiorizar los distintos axiomas que definen a dicho espacio vectorial concreto. Al generalizar estas acciones a múltiples espacios concretos, éstas pueden ser interiorizadas y posteriormente encapsuladas en un objeto que podemos llamar "espacio vectorial" que tiene una estructura dada justamente por las propiedades que lo definen.

Para probar las construcciones descritas en esta descomposición se diseñó una entrevista semiestructurada que se llevó a cabo con seis estudiantes de ingeniería que habían cursado la materia de álgebra lineal siguiendo la didáctica establecida en el marco de la teoría APOE, elegidos por la maestra del curso de acuerdo a su rendimiento en el mismo, dos de nivel bajo, dos de nivel medio y dos de nivel alto (Vargas, 2007).

En esta experiencia se encontró que los alumnos entrevistados construyeron el concepto de espacio vectorial como una concepción acción, pero que no lograron una concepción proceso. Como ejemplo mostramos la respuesta de un alumno a una de las preguntas que resultaron más difíciles de la entrevista: ¿Es R un espacio vectorial sobre Q (con las operaciones usuales)? Una respuesta típica para argumentar que R no es un espacio vectorial sobre Q fue: *"porque, si tomo cualquiera dos números reales, su suma no necesariamente resulta un número racional"*. Esta respuesta muestra que los alumnos confunden los elementos del conjunto R con los del conjunto Q, pues operan con los elementos de R y verifican que el resultado se encuentre en Q. Se observa así algo que ocurrió con frecuencia en las entrevistas: aun cuando el alumno conocía las propiedades que un espacio vectorial concreto debe cumplir, confundía los elementos de los conjuntos que lo definen, evidenciando una concepción acción respecto al concepto de espacio vectorial y al concepto de operación binaria definida en un conjunto.

En este trabajo se encontró que los alumnos eran capaces de relacionar las propiedades indicadas en los axiomas con el concepto de espacio vectorial, pero en general estos alumnos mostraron una concepción acción de algunos de los axiomas y no fueron capaces de coordinar los procesos en un solo proceso de verificación. La falta de coordinación entre los esquemas de axioma, conjunto y operaciones binarias con el de espacio vectorial mostró que su esquema de espacio vectorial se encuentra en un nivel Intra-operacional de evolución. Aun cuando los distintos alumnos mostraban evidencia de algunas de las construcciones de la descomposición genética, no mostraron evidencia de haber coordinado estas construcciones.

Estos resultados muestran claramente la dificultad en la construcción del esquema de espacio vectorial, pero, a diferencia de otros trabajos, indican posibles causas concretas de esas dificultades que pueden ser abordadas para que los alumnos aprendan el concepto a mayor profundidad.

Los resultados de estas investigaciones hicieron necesario mirar el proceso de construcción del esquema de espacio vectorial desde más cerca, prestando especial atención en las partes problemáticas como la relación que existe entre el campo y el espacio vectorial, y la evolución del esquema que se observa a partir de las conexiones establecidas entre el concepto de espacio vectorial y otros conceptos del álgebra lineal. Otro aspecto muy importante que se decidió estudiar fue la coordinación entre los procesos relacionados con cada una de las operaciones definidas sobre un espacio vectorial.

Partiendo de una descomposición muy detallada (Parraguez y Oktaç, 2010; Parraguez, 2009) hemos realizado entrevistas con 10 estudiantes de la carrera de matemáticas. Uno de los resultados originales de este trabajo es que los estudiantes presentaban muchas dificultades para coordinar los procesos determinados por cada una de las operaciones definidas sobre un espacio vectorial. En el análisis teórico habíamos previsto que esta coordinación toma lugar a través de las leyes distributivas que involucran a ambas operaciones. Generalmente en la enseñanza no se hace hincapié en esta coordinación y aun los buenos estudiantes pueden no darse cuenta de la manera con que están ligadas estas operaciones. En este trabajo también se hace una caracterización de los niveles de esquema Intra, Inter y Trans (Piaget y García, 1989) relacionados con el concepto de espacio vectorial y a través de entrevistas se presentan evidencias para mostrar qué tipo de conexiones se logran entre diferentes conceptos del álgebra lineal. Una observación interesante de esta investigación es la no linealidad del aprendizaje. Por ejemplo en los estudiantes pudimos encontrar elementos de la construcción objeto sin evidencia de algunas construcciones previas: las propiedades del espacio vectorial como procesos y coordinación entre los axiomas.

4.2. *Construcción del concepto de transformación lineal*

Weller et al. (2002) definen la transformación lineal de la siguiente manera:

> Sean U y V espacios vectoriales con escalares en K. Una función $T: U \to V$ es una transformación lineal si:
>
> i. $T(u+v) = T(u)+T(v)$ para $\mathrm{u.\ v} \in \mathrm{U}$ y
>
> ii. $T(cu) = cT(u)$ para $\mathrm{u} \in \mathrm{U}$ y $\mathrm{c} \in \mathrm{K}$

Según Dubinsky (1997) las transformaciones lineales se pueden considerar como procesos que transforman los objetos (tales como vectores, espacios y subespacios) del álgebra lineal. Menciona que aunque estos objetos estáticos se pueden visualizar (al menos en los espacios de dimensión igual o menor a 3), visualizar un proceso dinámico en este sentido es imposible y requiere razonar sobre los fenómenos estáticos haciendo construcciones mentales (Piaget, 1966, citado en Dubinsky, 1997).

En nuestro trabajo sobre este concepto hemos considerado dos descomposiciones genéticas como caminos viables para su construcción: una que asume la construcción del concepto transformación (general) para luego construir el concepto de transformación lineal como un caso específico, y otra donde el esquema de función asimila al objeto de espacio vectorial, para que el individuo pueda considerar la definición de cierto tipo de funciones entre espacios vectoriales. Como en los cursos casi nunca se estudia el concepto de transformación general, sería difícil encontrar evidencias del primer camino, y de hecho en nuestra investigación no hemos encontrado estudiantes que lo siguieran.

Ahora concentrándonos en la segunda descomposición genética, podemos decir que un individuo puede empezar la construcción del concepto de transformación lineal realizando acciones que consisten en averiguar las dos condiciones de linealidad, tomando vectores particulares, dada una transformación lineal específica mediante una fórmula.

Reflexionar sobre estas acciones puede dar lugar a dos procesos que corresponden a cada una de las propiedades de linealidad, donde el individuo puede pensar en el cumplimiento de las condiciones para todos los vectores de un espacio vectorial, de manera general. En la construcción de estos procesos juega un papel muy importante la cuantificación. Luego estos dos procesos se coordinan para construir un nuevo proceso que podemos llamar de *linealidad*. La coordinación sucede a través del conector lógico "$\wedge$" donde ambas propiedades tienen que estar presentes para pensar en la linealidad. Cabe aclarar que lo que es matemáticamente obvio puede no serlo cognitivamente y efectivamente hemos encontrado estudiantes que no habían coordinado estos procesos en uno solo. La idea de esta coordinación también está presente en el lenguaje matemático cuando ambas propiedades se combinan para expresarse así: $T(cu+v) = cT(u) + T(v)$ para $u, v \in U$ y $c \in K$.

Cuando hay necesidad de realizar acciones sobre el proceso construido, entonces éste se encapsula para dar lugar al objeto de transformación lineal. Por ejemplo para poder componer dos transformaciones lineales se necesita tener una concepción objeto.

Veamos un ejemplo de las concepciones de los estudiantes que participaron en nuestra investigación. Un estudiante con concepción objeto presentaba, por ejemplo capacidad para realizar acciones sobre objetos específicos (transformaciones lineales en nuestro caso) al determinar que dadas dos transformaciones lineales $T_1 : U \rightarrow V$ y $T_2 : U \rightarrow W$ es posible determinar nuevas transformaciones lineales $T : U \rightarrow V \times W$ de la forma $T(u) = (T1(u), T2(u))$ para todo u en U.

Observaciones importantes que hemos hecho en este trabajo son: que los procedimientos de los estudiantes, en relación con problemas que tiene que ver con la averiguación de linealidad, se centran en verificar dos propiedades, sin comprender el papel que juega el concepto de función y espacio vectorial allí y "Esto hace que sólo se limiten a la mecanización de un algoritmo que oculta el verdadero significado del concepto" (Roa, 2008); hicimos hincapié en la necesidad de construir de manera previa los elementos necesarios para abordar un nuevo concepto matemático y la necesidad de abordarlos desde su naturaleza abstracta (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010); y consideramos que es de suma importancia diseñar actividades y situaciones matemáticas novedosas para motivar la reflexión por parte de los estudiantes así como para poder obtener información respecto a sus procesos cognitivos.

Por otro lado confirmamos la importancia de la construcción de conceptos previos suficientemente fuertes, en particular del concepto de función y de la cuantificación, pues construcciones débiles de ellos pueden causar serias dificultades en el aprendizaje de las transformaciones lineales.

4.3. *Construcción del concepto de base*

Un concepto particularmente difícil del álgebra lineal es el de base de un espacio vectorial; sin embargo, la investigación en educación matemática le ha dedicado poca atención (Chargoy, 2006; Da Silva y Lins, 2002).

Basados en la hipótesis de que el aprendizaje de este concepto debe comenzar por la posibilidad de establecer las relaciones adecuadas entre conceptos, dado que la noción de base constituye, por una parte, un elemento fundamental de la estructura de un espacio vectorial y, por otra, guarda una relación primordial con otros conceptos del álgebra lineal decidimos investigar ¿Qué construcciones han desarrollado los estudiantes universitarios acerca del concepto de base de un espacio vectorial después de haber cursado la materia de Álgebra Lineal?

Para responder a esta pregunta se diseñó una descomposición genética de este concepto y se observó durante un semestre un curso de álgebra lineal para Ingeniería cuya enseñanza estuvo guiada por la metodología de enseñanza de la teoría APOE y se diseñó una entrevista con base en el objetivo de la investigación, tomando en consideración la descomposición genética y los resultados de la observación de clase.

El análisis que se realizó mostró, en términos generales, que los alumnos entrevistados no llegaron a interiorizar el concepto de base de un espacio vectorial. De los 6 estudiantes que se entrevistaron, 4 mostraron evidencia de estar en camino a la interiorización de dicho concepto y dos mostraron una concepción acción. Se observó que aun cuando estos estudiantes intentan articular las propiedades del concepto de base, no son capaces de verificar cuándo un conjunto es base de un espacio vectorial, ni de coordinar, ni los elementos involucrados en la construcción descrita en la descomposición genética ni los elementos conceptuales involucrados en su construcción (espacio vectorial, subespacios, conjunto generador e independencia lineal).

Por otra parte, dos estudiantes mostraron algunas evidencias de interiorización de las acciones necesarias para construir el concepto de base: por ejemplo una concepción proceso de independencia lineal, dado que podían decidir si un conjunto es o no linealmente independiente, empleando diferentes tipos de argumentos e interpretando de manera correcta el resultado de reducción por matrices para decidir la independencia-dependencia lineal de un conjunto de vectores, incluso de aquellos que contienen una variable. Sin embargo, estos alumnos mostraron dificultades para identificar la pertenencia de los vectores al espacio vectorial dado y en la construcción del concepto de conjunto generador.

Esta investigación permitió constatar que el averiguar si un conjunto de vectores forma una base para un espacio vectorial dado resulta más fácil para los estudiantes que hallar una base para un espacio vectorial dado. De acuerdo con la descomposición genética propuesta esto tiene sentido, ya que averiguar si un conjunto dado es base, requiere comprobar ciertas condiciones, lo cual puede hacerse, utilizando únicamente acciones, por ejemplo, siguiendo un algoritmo, pero hallar una base para un espacio vectorial requiere la coordinación de los procesos involucrados en la comprensión de la independencia lineal y el conjunto generador. La investigación reveló también que resulta muy difícil alcanzar una concepción objeto del concepto de base y que la construcción del concepto base requiere de la posibilidad de trabajar con espacios vectoriales diferentes al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ para posibilitar la construcción de un esquema alrededor de este concepto.

4.4. *Construcción del concepto de solución de sistemas de ecuaciones lineales*

La solución de sistemas de ecuaciones lineales juega un papel muy importante no sólo en el estudio del Álgebra Lineal, sino también en el de otras áreas de las matemáticas que se estudian en la universidad. Hay investigaciones que muestran que los estudiantes tienen dificultades para entender el concepto de solución a un sistema de ecuaciones y con la representación e interpretación de las gráficas de las ecuaciones y de la solución al sistema (Cutz, 2005; Ramírez, et al., 2005); pero, en realidad, se conoce poco acerca de la naturaleza de estas dificultades y su relación con la forma en la que los estudiantes construyen el concepto de solución.

En nuestro proyecto, el estudio de estos problemas se llevó a cabo a través del seguimiento de un curso de álgebra lineal en el que los sistemas de ecuaciones y su solución juegan un papel central en relación con todos los demás conceptos de esta disciplina. En este trabajo se diseñó y se puso a prueba una descomposición genética que modela la posible construcción de estos conceptos y que permitió identificar e interpretar por una parte las posibles dificultades que enfrentan los estudiantes cuando los aprenden y por otra los patrones de razonamiento que utilizan los estudiantes cuando trabajan con problemas relacionados con los sistemas de ecuaciones (Manzanero, 2007).

Los resultados del análisis de las entrevistas permitieron clasificar a los estudiantes en dos grupos. En uno de ellos, tres estudiantes fueron capaces de interpretar las variables que aparecen en las expresiones y mostraron comprensión del significado de la solución de una ecuación como objeto. De entre los estudiantes de este grupo, dos fueron capaces además de generalizar esta noción al conjunto solución de un sistema de ecuaciones mediante la coordinación de los esquemas de solución y de conjunto. Además mostraron que habían construido el proceso de reducción de un sistema para encontrar su solución y que eran capaces de coordinar la representación geométrica del conjunto solución con la algebraica.

Los otros tres estudiantes no mostraron comprensión del significado del concepto de solución o conjunto solución. Mostraron además dificultades para diferenciar el significado de la variable en las distintas expresiones con las que trabajaron y muchas dificultades para aplicar, de forma memorizada, las acciones necesarias para resolver los problemas y para interpretar la relación entre la representación geométrica y algebraica de las ecuaciones y del conjunto solución.

Los resultados de este estudio mostraron con claridad que la construcción de un esquema para la variable que incluye la interpretación y la diferenciación entre sus distintos usos, así como la construcción de la noción de solución de una ecuación como objeto son prerrequisitos indispensables para hacer las construcciones necesarias en la construcción de un esquema para los sistemas de ecuaciones. Los resultados mostraron también que las construcciones predichas por la descomposición genética se pueden construir cuando se sigue un curso basado en la teoría APOE y en un modelo de descomposición genética.

5 Reflexiones

Todos los estudios del proyecto ponen de manifiesto que el aprendizaje del álgebra lineal requiere de un gran esfuerzo, así como la necesidad de llevar a cabo estudios que vayan más allá de la identificación de las dificultades de los estudiantes.

A través de los distintos trabajos del proyecto se puede constatar que el uso de la descomposición genética constituye una herramienta potente para desentrañar las construcciones mentales involucradas en la construcción de los distintos conceptos del álgebra lineal. En todos los estudios se encontró evidencia de las construcciones predichas y ello permitió establecer posibles causas de las dificultades de los alumnos y resultados que no se habían encontrado en investigaciones previas.

La información obtenida a partir de estos estudios permitirá, en un futuro cercano, diseñar actividades didácticas que permitan a los alumnos una construcción más sólida del álgebra lineal. Una construcción en la que los conceptos tengan sentido y estén fuertemente articulados unos con otros.

Reconocimiento

Los trabajos presentados en este artículo han sido parcialmente financiados por los proyectos Conacyt 41726S, 60763-H y 62375, y por la Asociación Mexicana de Cultura A.C.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II*, CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

Chargoy, R. M. (2006). *Dificultades asociadas al concepto de base de un espacio vectorial*. Tesis doctoral, Cinvestav-IPN.

Cutz, B. (2005). *Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución*. Tesis de maestría, Cinvestav-IPN.

Da Silva, A., & Lins, R. (2002). An Analysis of the production of meaning for the notion of Basis in Linear Algebra. *Proceedings of the 2nd international conference on the teaching of mathematics at the undergraduate level.* p. 106 (En CD-ROM).

Dorier, J. L. (1995a). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica*, 22 (3), 227-261.

Dorier, J. L.(1995b). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 29 (2), 175-197.

Dorier J. L., Robert, A., Robinet , R., & Rogalski, M. (1997). L'Algèbre Linéaire : L'obstacle du Formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. En J.-L. Dorier (ed.), *L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question*, (pp.105-147). La Pensée Sauvage éditions, Grenoble.

Dorier; L, & Sierpinska; A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. En Derek Holton (Ed.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*. (pp. 255-273). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Países Bajos.

Dubinsky, E. (1997). Some Thoughts on a First Linear Algebra Course. En D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter, A. Watkins, & W. Watkins (eds), *Resources For Teaching Linear Algebra*, (pp.85-106), MAA Notes, 42.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall, (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Fischer, A. (2005). Mental models of the concept of vector space. *Proceedings of the 4th CERME Conference*, San Feliu de Guixols, España, 1830-1833.

Kú, D., Trigueros, M., & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20 (2), 65-89.

Manzanero, L. (2007). *Sistemas de Ecuaciones: una perspectiva desde la teoría APOE*. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN.

Maracci, M. (2005). On some difficulties in vector space theory, *Proceedings of the 4th CERME Conference*, San Feliu de Guixols, España, 1778-1787.

Oktaç, A., Trigueros, M., & Vargas, X. N. (2006). Understanding of vector spaces – a viewpoint from APOS theory. *Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics,* (En CD-ROM) Istanbul, Turkey.

Parraguez, M. & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432, 2112-2124.

Parraguez, M. (2009). *Evolución cognitiva del concepto espacio vectorial*. Tesis de doctorado, Cicata-IPN.

Piaget J. & García R. (1983). Psicogénesis e historia de la ciencia. Editorial: Siglo XXI, México.

Ramírez, C., Oktaç, A., & García, C. (2005). Dificultades que presentan los estudiantes en los modos geométrico y analítico de sistemas de ecuaciones lineales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19, 413-418.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (1), 89-112.

Roa, D. (2008). *Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal*. Tesis de Maestría, CINVESTAV –IPN. México.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students thinking in linear algebra. En J-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A., Nnadozie, A., & Oktaç, A. (2002). A Study of Relationships between theoretical thinking and high achievement in Linear Algebra. Concordia University: Montreal. Disponible en: http://www.annasierpinska.wkrib.com/pdf/Sierpinska-TT-Report.pdf

Trigueros, M., & Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 10, 157-176.

Trigueros, M., Oktaç, A., & Manzanero, L. (2007). Understanding of Systems of Equations in Linear Algebra, *Proceedings of the 5th CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education)*, Larnaca, Chipre, 2359 -2368.

Vargas, X. N. (2007). *El estudio de los espacios vectoriales desde el punto de vista de la teoría APOE*. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I., & Dubinsky, E. (2002). Learning Linear Algebra with ISETL. Disponible en: http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf

Autoras:

Asuman Oktaç.
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.
oktac@cinvestav.mx

María Trigueros.
Instituto Tecnológico Autónomo de México, Departamento de Matemáticas, México.
trigue@itam.mx