Cálculo promedial. El caso de la media aritmética

Promedial calculus. The average case

Carlos Rondero Guerrero

RESUMEN

En este trabajo se presenta un enfoque acerca de cómo es que la noción de promediación aparece en la construcción de lo que se denomina el cálculo promedial. Se muestran diferentes contextos en los que algún tipo de promedio es usado para la realización de los cálculos correspondientes de áreas, sumas finitas, integrales definidas, valores esperados y otros conceptos de la estadística. El tratamiento gira principalmente en torno de la media aritmética que es el promedio prototípico y del cuál se hace un rescate epistemológico que es el *exceso* y el *defecto* que deviene de las consideraciones de Arquímedes.

PALABRAS CLAVE:

- *Cálculo promedial*
- *Exceso y defecto*
- *Rescate epistemológico*
- *Articulación de saberes*

ABSTRACT

This paper presents an approach on how the promediation notion is shown in the construction of what is termed the promedial calculus. Show different contexts in which some kind of average is used for carrying out the calculations of areas, finite sums, definite integrals, expected values and other concepts of statistics. Treatment revolves mainly around the arithmetic mean is the prototype of the average, and what is a rescue that epistemology is the *excess* and *defect* that stems from considerations of Archimedes.

KEY WORDS:

- *Promedial calculus*
- *Excess and defect*
- *Epistemological rescue*
- *The articulation of knowledge*

RESUMO

Este trabalho apresenta uma abordagem sobre a forma como o noção promediación é mostrada na construção daquilo que se designa o cálculo promedial. Mostrar diferentes contextos em que algum tipo de média é utilizada para a realização dos cálculos de áreas, finito montantes, definida integrais, valores esperados e outros conceitos de estatísticas. Tratamento gira principalmente em torno de metade do que é a média aritmética considerado como o protótipo do média, e que é um salvamento epistemologica del *excesso* e *defeito* e que decorre de considerações de Arquimedes.

PALAVRAS CHAVE:

- *Cálculo promedial*
- *Excesso e defeito*
- *O salvamento epistemologia*
- *A articulação de conhecimentos*

Relime (2010) 13 (4-II): 387-408. Recepción: Junio 3, 2009 / Aceptación: Junio 23, 2010.

RÉSUMÉ

Ce document présente une approche sur la manière dont la notion de promediacion est montré dans la construction de ce que l'on appelle le calcul promedial. Voir les différents contextes dans lesquels une sorte de moyen est utilisé pour effectuer les calculs de aires, sommes finies, les intégrales définies, les valeurs attendues et d'autres concepts de la statistique. Le traitement s'articule essentiellement autour de la moyenne arithmétique considéré comme le prototype de moyenne, et ce qui est une opération de sauvetage épistémologic est *l'excès* et *défaut* qui découle de considérations d'Archimède.

MOTS CLÉS:

- *Calcul promedial*
- *L'excès et défaut*
- *Le sauvetage épistémologic*
- *De l'articulation de la connaissance*

1 Introducción

El Cálculo promedial está sustentado precisamente en la noción de promediación, considerada a su vez como una idea germinal, en el sentido de que de ella se desprenden definiciones, teoremas y teorías, identificadas todas ellas como categorías constructivas del conocimiento matemático (Rondero, 2001a).

Es posible mostrar dentro del corpus del Cálculo la persistente presencia manifiesta del Cálculo promedial, que además aparece a su vez en el corpus estructural de muchas otras áreas de la matemática como es el caso de la probabilidad y la estadística.

Uno de los conceptos de promedio más conocido y usado para la realización de diferentes cálculos, es indudablemente la media aritmética, la cual tiene diferentes acepciones que la didáctica tradicional no remarca ni hace explícitas, como puede ser el caso de ocuparla para calcular áreas de triángulos y trapecios, sumas finitas de enteros positivos e integrales definidas de funciones con exponente entero positivo, valores esperados y varianza de variables aleatorias, entre otros.

En el Cálculo promedial aparecen otros tipos de promedio, no sólo la media aritmética, en tal caso se pueden mencionar dos teoremas del Cálculo, relacionados con el concepto de promedio, como son el Teorema del valor medio para derivadas, que nos dice la forma en que se relacionan la *razón de cambio promedio* de una función continua con la *razón de cambio instantáneo*, bajo condiciones dadas y el Teorema del valor medio para integrales, que propicia una forma de calcular la altura promedio de una función continua en un intervalo dado $[a,b]$, mediante la cual es posible encontrar el área bajo la curva, al multiplicar el tamaño del intervalo por dicha altura promedio. Es de hacerse notar la desarticulación didáctica que se manifiesta en el sentido de que no se hacen explícitas las relaciones conceptuales entre los diferentes tipos de promedio que aparecen en la matemática escolar. Es entonces conveniente el poder realizar una articulación del saber matemático denominado genéricamente como promedio y mostrar de ese modo las bondades de relacionarlo conceptualmente desde la Matemática Elemental hasta la Matemática Avanzada.

Por otra parte, los usos sociales del promedio son amplios, como método de medición intermedia, valor representativo de otros, referencia obligada como un índice indicador de fácil manejo, entre otros. Cabe señalar que tales usos sociales le dan pertinencia al concepto mismo de promedio, pero adicionalmente propician su desarrollo en múltiples áreas del conocimiento, economía, ingeniería, física y química, además de la propia matemática. Los usos y las prácticas sociales impulsan y crean condiciones que a su vez propician la construcción social del conocimiento, sin el cual muchos saberes quedarían inertes.

La perspectiva teórica de este trabajo tiene dos vertientes principales, el rescate epistemológico y la articulación de los saberes matemáticos. En la primera se intenta después de realizar, a un cierto nivel de profundidad, un análisis epistemológico del saber referido, en este caso el promedio, mediante el cual se haga evidente su potencial constructor de conocimiento matemático, rescatarlo precisamente para llevarlo a la didáctica actual. En la segunda vertiente, se trata de resaltar el modo en que los saberes matemáticos se articulan, buscando hacer explícitas las relaciones conceptuales entre los mismos, dado que ello puede propiciar en quienes aprenden el enriquecimiento cognitivo al develarse las múltiples formas que adopta el mismo saber dentro de las diferentes áreas o asignaturas en que está divida la matemática para su aprendizaje escolar.

2 La media aritmética

Un primer rescate de carácter epistemológico que se ha hecho del promedio, es el que se refiere a la equiparación del *exceso* y el *defecto.* Arquímedes usó en muchos de sus trabajos el principio de la balanza para el descubrimiento de propiedades geométricas, su sustento epistemológico es el de equilibrio mecánico entre figuras geométricas, como lo hizo al calcular el área de un sector parabólico. Este equilibrio entre el exceso y el defecto, se puede considerar a su vez como el sustento de la media aritmética.

Por supuesto es posible hacer la identificación del método del *exceso-defecto*, para dos valores reales positivos a y b, con $a < b$, para lo cual procedemos de la siguiente forma, el *exceso* de a respecto a un valor intermedio $\overline{x}$, con $a < \overline{x} < b$, que tiene la característica conceptual de ser el que *equipara*, es $\overline{x} - a$, mientras que el *defecto* de b respecto a $\overline{x}$, es $\overline{x} - b$, en forma tal que al equipararse se tiene, considerando que $\overline{x} - a$, es un valor positivo, mientras que $\overline{x} - b$, es negativo

$$\overline{x} - a + \overline{x} - b = 0$$

de donde,

$$2\overline{x} = a + b$$

o sea,

$$\overline{x} = \frac{a+b}{2}$$

Desde un punto de vista conceptual, es mucho más enriquecedor para un estudiante, partir de considerar el *exceso* y el *defecto* de los valores *a* y *b*, en lugar definirse la media aritmética de dos valores, como usualmente se hace en la didáctica. Ello posibilita una especie de imposición conceptual, de la cual un estudiante difícilmente se puede sustraer, pero al mismo tiempo se convierte en un obstáculo didáctico que le imposibilita el darle otros significados institucionales y personales a la misma.

En (Ramos & Font, 2008) se señala respecto a los significados institucionales de los objetos matemáticos el de tipo *Referencial, que concierne al sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido; que se determina mediante un estudio histórico-epistemológico para mostrar la diversidad de contextos de su uso.* Precisamente uno de los propósitos de este trabajo reside en mostrar cómo pueden ser ampliados los significados institucionales del Cálculo promedial, particularmente en referencia al objeto matemático de la media aritmética como una de tantas formas de promedio, a través de las aportaciones del estudio epistemológico, lo que se irá mostrando en el desarrollo del mismo.

2.1. *La media aritmética de n valores*

Siguiendo con el tratamiento anteriormente discutido, podemos pasar al caso de *n* valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, bajo la consideración general de que la suma de los *excesos* y los *defectos* debe ser nula, respecto precisamente al valor de la media aritmética $\overline{x}$, es decir,

$$\overline{x} - x_1 + \overline{x} - x_2 + \overline{x} - x_3 + \Lambda + \overline{x} - x_n = 0$$

de donde,

$$\overline{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

Es posible trabajar con estas dos representaciones para la media aritmética,

i) La comparación de dos tipos de totales, $\bar{x} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$

ii) La acumulación de cantidades relativas, $\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x_k}{n}$

cada una de las cuales tiene su correspondiente interpretación aunque ambas se complementan en su resignificación.

Existen al menos otras dos formas representadas por,

iii) La suma total es igual a *n* veces la media, $\sum_{k=1}^{n} x_k = n\bar{x}$

iv) La suma nula de las diferencias $\sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} (\bar{x} - x_k) = 0$

Todas las anteriores se pueden considerar como representaciones semióticas de un mismo objeto matemático, en este caso la media aritmética, no sólo cumplen la función de *comunicación*, sino además con las *funciones primordiales de tratamiento de la información y de objetivación o toma de consciencia* (Duval, 2004a).

2.2. *La media aritmética ponderada*

Precisamente en la búsqueda de significados, la media aritmética toma otra dimensión cuando aparece la llamada media aritmética ponderada, en donde a cada valor x_k, se le asocia su correspondiente ponderación p_k. Esto es, cada valor se multiplica por su respectiva ponderación, la suma queda expresada como,

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \, p_k$$

donde la suma de todas sus ponderaciones es, $N = \sum_{k=1}^{n} p_k$.

La media ponderada es, $\overline{x_p} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k p_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k p_k}{N}$

De tal manera que el proceso es muy similar, en el caso de la media simple se puede considerar que cada valor tiene asignado un mismo peso o ponderación que es 1, o sea que la suma correspondiente es:

$$x_1\,1+x_2\,1+\ldots+x_n\,1=\sum_{i=1}^{n} x_i\,1$$

donde la suma de ponderaciones es igual a n, esto es, $n=\sum_{k=1}^{n}1$. Luego la media aritmética queda expresada como,

$$\bar{x}=\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

De donde se desprende que la media aritmética simple la podemos llevar al caso de la media aritmética ponderada, al hacer una comparación entre sus dos totales respectivos, en el que cada cantidad x_i tiene asociado un peso o ponderación igual a 1 en la media simple, o p_k para la media ponderada.

Se pueden desprender algunas propiedades las cuales se siguen cumpliendo, como la antes referida a la suma de las diferencias nula,

$$\sum_{i=1}^{n} d_i=\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)=0,$$

sólo que ahora toma la forma siguiente para n cantidades:

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{x_p}\,p_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\,pi=0\ ,$$

o bien, se puede expresar en términos de diferencias ponderadas como:

$$\sum_{i=1}^{n} D_i=\sum_{i=1}^{n}(\overline{x_p}-\mathrm{x_i})\,p_i=0$$

lo cual es una variante del resultado anterior en el que la suma de los *excesos* y *defectos* se anula.

Si ahora consideramos que el total de las ponderaciones es igual a un valor $N=\sum_{k=1}^{n}m_k$, se tendrá que $\sum_{k=1}^{n}\mathrm{x_k}\,m_k=N\,M$. Esto es, $\sum_{k=1}^{n}x_x\,m_k=M\sum_{k=1}^{n}m_k$

Otra representación para la media aritmética ponderada es:

$$M=\sum_{k=1}^{n}x_k\left(\frac{m_k}{N}\right).$$

Nótese que en esta representación, se puede considerar que la ponderación es de la forma $\frac{m_k}{N}$, lo que se puede identificar como ponderación relativa, ya que se expresa como la razón entre la ponderación de la cantidad dada entre la ponderación total.

Estas son las únicas propiedades que mantienen cierta semejanza respecto a las ya mencionadas para la media aritmética simple, sin embargo, es de considerarse la resignificación adicional que conlleva la media ponderada, dado que hay una asignación que pondera o da peso a cada valor que interviene en la misma. Aquí se muestra la actividad cognitiva de *"tratamiento"* ya que se presenta cuando la transformación produce otra representación en un mismo registro, en este caso el numérico.

2.3. *La media aritmética en el cálculo de áreas*

Es posible considerar que la media aritmética tiene la característica de ser un tipo de promedio precisamente por ser aquel valor que representa al conjunto de valores dados originalmente. Pero al mismo tiempo es el valor que equilibra, en el sentido de *equiparar los excesos y los defectos*, siendo esta cualidad la que permite crear al proceso de cálculo.

Precisamente tal característica va más allá de lo numérico, instalándose en lo geométrico, como es el caso del cálculo de áreas de figuras regulares como el triángulo y el trapecio.

En este caso se muestra, como dice Duval (2004a) una propiedad fundamental de las representaciones semióticas: *su transformabilidad en otras representaciones que conservan ya sea todo el contenido de la representación inicial, o bien sólo una parte de ese contenido.* Aunque vale aclarar que en este caso se presenta la *"conversión"* ya que la transformación produce una representación de un registro -el numérico- a otro registro distinto, el geométrico.

Veamos en primer lugar el caso del triángulo de base b y altura h, al ocupar el argumento del *exceso* y el *defecto*, aparece necesariamente la media aritmética, en forma tal que una resignificación para el área del triángulo puede ser construida de forma tal que,

$$A = b\left(\frac{h}{2}\right)$$

y se interpreta como el área de un rectángulo de base b y altura $h/2$

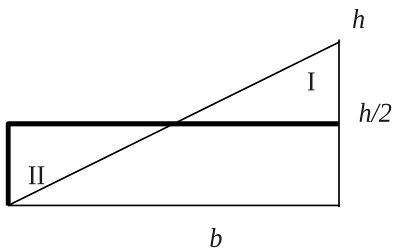

Figura 1.

Este rectángulo tiene la misma área del triángulo original porque los triángulos por exceso I y por defecto II, son efectivamente iguales, lo cual se puede demostrar geométricamente. Otra interpretación se refiere al hecho de que $h/2$ es la altura promedio, considerando los valores 0 y h. Aparece nuevamente el constructo teórico dado por Arquímedes del *"exceso y el defecto"*, de manera que cuando se equiparan, siempre aparece un valor promedial, en este caso la altura promedio.

2.3.1. *El área del trapecio*

Para el caso del trapecio de base b y alturas h_1 y h_2, el área se puede calcular por la expresión,

$$A = b\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)$$

Una forma de interpretar al área del trapecio es considerar como equivalente al área de un rectángulo con base b y altura

$$\frac{h_1 + h_2}{2},$$

aunque ahora ésta es la altura promedio entre las dos alturas que intervienen en el trapecio.

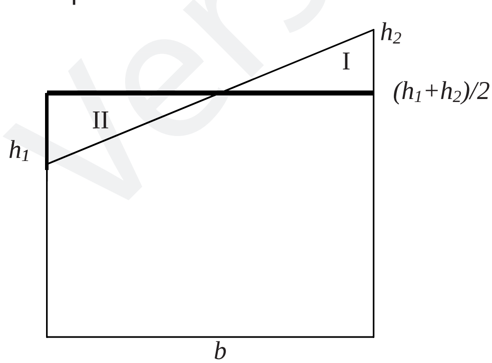

Figura 2.

Nuevamente los triángulos I y II, son iguales pues equiparan *el exceso y el defecto* por el hecho mismo de ser

$$\frac{h_1 + h_2}{2},$$

el promedio de las alturas. Esto es,

$$A = b\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)$$

Es de resaltarse que el tránsito entre la representación numérica y la geométrica, así como en otras que se tratarán adelante, aparece como un *invariante epistemológico el exceso y el defecto,* que particularmente en la forma de promedio de la media aritmética, además de ser un único valor, es a su vez el *valor que equilibra,* en el caso numérico a todos los valores que aparecen y en el caso del área de triángulos y trapecios a las alturas que intervienen, para poder así encontrar la altura del rectángulo de área equivalente.

2.3.2. *Áreas de triángulos y trapecios referidos a un sistema cartesiano*

Cada vez la idea germinal del *exceso* y del *defecto* va desplegando su potencial constructor de conocimiento, es entonces posible mostrar cómo se puede realizar el cálculo de áreas de triángulos y trapecios pero ahora vistas como áreas bajo la curva de funciones elementales dadas.

En el caso de un triángulo rectángulo, éste se genera a través de la función $y = f(x) = x$, considerando el área bajo la recta entre 0 y un valor dado a, que es el tamaño de la base, esto es,

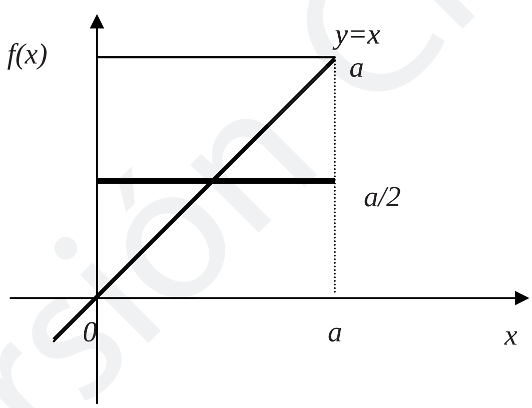

Figura 3.

En la figura anterior se muestra que el triángulo rectángulo e isósceles de base y altura iguales al valor a, tiene un área que es base por altura sobre dos, o sea, $A = a\,(a/2)$, equivalente al área de un rectángulo de base a y altura $(a/2)$, que podemos considerarla como una altura promedio, argumento que ahora es mostrado con un significado y que posteriormente se usará en el cálculo de integrales definidas.

También se puede interpretar el área del triángulo descrito como equivalente a la mitad del cuadrado de área a^2, esto es, $A = a^2/2$, el cual resulta ser un argumento básico para la integral definida,

$$\int_0^a x\,dx = \frac{1}{2}a^2$$

Ahora con la misma función $y = f(x) = x$, se puede generar un trapecio si en lugar de recorrer de 0 a a, se recorre de a a b, con $a < b$,

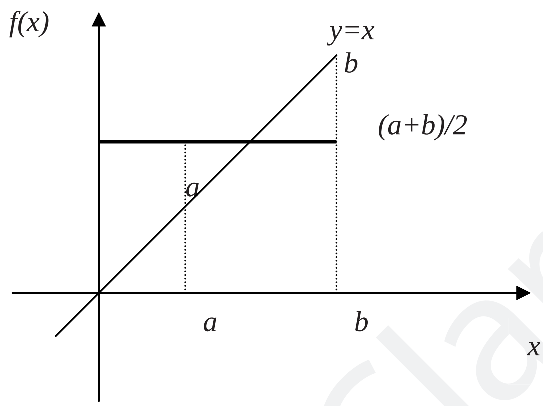

Figura 4.

En este caso, el área del trapecio está dada por el tamaño de la base que es $b-a$, multiplicado por la altura promedio $(a+b)/2$, es decir, $A = (b-a)(a+b)/2$. Nótese que los triángulos que quedan por *exceso* y *defecto* son iguales, de tal manera que el trapecio tiene un área igual al rectángulo de área equivalente.

Al realizar los cálculos equivalentes, se obtiene la integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, la integral correspondiente queda de la forma,

$$\int_a^b x\,dx = (b-a)\frac{(a+b)}{2},$$

Lo que posteriormente se formaliza a través del cálculo de la primitiva y del teorema fundamental del cálculo como,

$$\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}$$

Por supuesto la altura promedio queda expresada como,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{a+b}{2}$$

la que a su vez se puede calcular por medio del teorema del valor medio para integrales, el cual se cumple bajo la hipótesis de que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces se asegura la existencia de un valor $c \in (a,b)$, de manera tal que se satisface,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \overline{f(c)}\,.$$

O equivalentemente, se puede expresar de dos formas diferentes,

$$\overline{f(c)} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b dx}$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\overline{f(c)}$$

Donde evidentemente $\overline{f(c)}$, es el valor promedio de los valores de la función en el intervalo de integración $[a,b]$ y $(b$-$a)$, el tamaño del mismo.Una vez más se puede observar el modo en que actúa el cálculo promedial, en el sentido de mostrar un significado preponderante a la altura promedio de la función en el intervalo correspondiente y a la obtención del área del rectángulo equivalente a la de la figura dada.

A su vez, la misma idea germinal del *exceso* y el *defecto*, en este caso referido a las áreas por encima y por debajo de la altura promedio, se lleva desde el caso elemental del triángulo y trapecio, hasta el área bajo la curva de una función continua en el intervalo de integración $[a,b]$, lo cual se ve reflejado en el significado del Teorema del Valor Medio para integrales.

Esto se muestra en la siguiente secuencia de figuras:

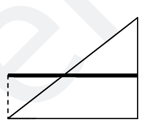

Figura 5.

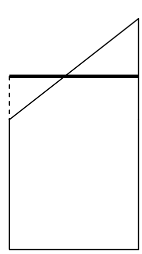

Figura 6.

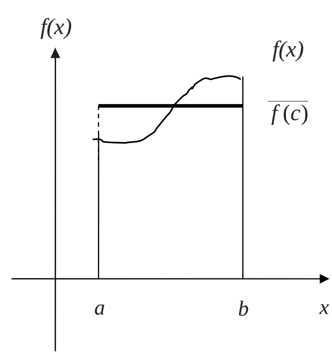

Figura 7.

Cabe destacar la filiación de carácter epistemológico que existe entre parte de lo anteriormente señalado, con la idea de la *"regla del grado medio"*, dada por Galileo y posteriormente trabajada por Oresme y que *facilita la obtención del promedio de una cualidad intensiva que varía con relación a una escala fijada de antemano* (Fernández & Rondero, 2004).

2.4. *La media aritmética en el cálculo de sumas*

Es posible ocupar el promedio para calcular la suma de los n primeros números naturales, esto es,

$$s = 1+2+3+4+\ldots+n.$$

Para tal fin, se calcula la media aritmética de esos mismos valores, esto es,

$$\frac{1+2+3+4+\ldots+n,}{n}$$

dado que el numerador es la suma de n términos de una progresión aritmética, entonces su media aritmética es igual a su vez a la media aritmética de los valores extremos, es decir,

$$\frac{1+2+3+4+\ldots+n}{n} = \frac{n+1}{2}$$

Luego entonces, la suma buscada es,

$$1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Si este mismo resultado se expresa en términos de una sumatoria, se obtiene,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

O en la notación de Bernoulli para este tipo de sumas (Edward, 1979),

$$\int n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

De dónde la media aritmética de estos mismos números se representa como,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$$

Este mismo resultado se ocupa cuando se quiere entrar a calcular la integral definida,

$$\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

cuyo argumento central se da en términos de un promedio, en este caso el de la media aritmética.

Aquí se ha usado implícitamente una propiedad de la media aritmética, la que se refiere a que la suma de n valores es igual a n veces el valor de la media, esto es,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = n\bar{x}.$$

Cuando se hace un tratamiento como el que viene realizando, además de hacer explícitos algunos de los contextos donde la media aritmética funciona como eje de articulación de los saberes matemáticos, se propicia una *Idoneidad epistémica,* como lo mencionan (Godino, Contreras & Font, 2006), *que se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales respecto a los de referencia,* ya que se busca entre otros objetivos el incidir en los significados personales. En el caso de la media aritmética, esa representatividad viene dada por la diversidad de formas que adquiere y sus significados institucionales que son amplios en diferentes ámbitos tanto de la matemática como de otras áreas del conocimiento.

2.5. *La media aritmética en el cálculo de integrales definidas*

Un contexto más donde aparece la media aritmética es el que se refiere al cálculo de integrales definidas para funciones de la forma $y=f(x)=x^k$, con $k=1,2.$

Se puede ocupar este resultado para calcular en forma discreta el área bajo la curva de la función $f(x)=x,$ en el intervalo $[0,1]$, (Rondero, 2001b). Realizando una equipartición del intervalo, x_k: $0/n, 1/n, 2/n, \ldots, n/n,$ como $f(x_k)=k/n,$ se considera la integral definida como la media aritmética de las correspondientes alturas, dadas por los valores de la función, es decir,

$$\int_0^1 xdx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

de manera que si se considera que $n \to \infty$, se obtiene que: $\displaystyle\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$

Este último resultado, muestra desde una perspectiva discreta que efectivamente la media aritmética es un eje articulador de saberes, desde la matemática elemental hasta la matemática avanzada.

Repitiendo el proceso para el caso de la función, $f(x) = x^2$, definida en el intervalo de referencia $[0,1]$, realizando la misma equipartición del intervalo y evaluando

$$f(x_k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2;$$

ahora la integral definida, calculada a través de la media aritmética de los valores de la función dada, se tiene que es:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

De manera que si se toma el límite cuando $n \to \infty$, queda,

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

En los cálculos anteriores se ocupó la media aritmética de los valores de la función que interviene. Igualmente se puede calcular el promedio de las áreas de los rectángulos de base $1/n$ y altura el correspondiente valor de la función en el extremo izquierdo de cada subintervalo. Por supuesto, los resultados de las integrales definidas que se calculan son iguales a los ya obtenidos.

Este mismo método de cálculo promedial se usa para calcular la integral definida de una función de la forma $f(x) = x^k$, con x definida en el intervalo $[0,1]$, obteniéndose el resultado conocido,

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$$

Que a su vez se generaliza cuando para esta misma función, se tiene el intervalo de integración $[a,b]$,

$$\int_a^b x^k dx = \frac{1}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1})$$

Cuyo valor promedio es fácil de ver que corresponde a,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x^k dx = \frac{1}{k+1}(a^k + a^{k-1}b + \cdots + ab^{k-1} + b^k)$$

donde precisamente aparece otro tipo de promedio al que denominamos media potenciada, (Rondero, 2001a),

$$M_k(a,b) = \frac{\sum_{n=0}^{k} a^{k-n}b^n}{k+1}$$

2.6. *La media aritmética en la Estadística*

No es el interés de este trabajo profundizar acerca de cómo es que interviene la media aritmética en la Estadística, más bien de lo que se trata es de mostrar la forma en que ciertos saberes de tipo estadístico se construyen en base a la media aritmética. Algunas de sus propiedades relevantes son, Batanero (2005):

En el aspecto estadístico:

i) La media se sitúa entre los valores extremos,
ii) La suma de las desviaciones es cero,
iii) La media toma en cuenta todos los valores y no sus promedios parciales.

En el aspecto abstracto:

i) La media no tiene por qué coincidir con alguno de los valores que han sido promediados,
ii) La media, puede ser un número que no tenga sentido en el contexto propuesto,
iii) Cuando se calcula la media, si aparece el cero, debe tenerse en cuenta.

En el aspecto de la representatividad:

i) La media es representativa de los valores promediados.

En todas las propiedades anteriores, el hecho relevante que permite hacer una resignificación a la media aritmética es precisamente la consideración de ser el valor que equipara los *excesos* y *defectos*, o sea el valor que *equilibra.*

Existen otras formas de significación del concepto de la media aritmética, que como se ha señalado se desprende de la noción de promediación, uno más de tales significados es el correspondiente a lo *"frecuencial"*, en el cual, se puede ver como la acumulación de frecuencias individuales dadas por, $\frac{x_k}{n}$,

esto es, $$\bar{x} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \cdots + \frac{x_n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n}.$$

Es precisamente a través de este significado como el concepto de la media aritmética se articula con la estadística descriptiva en relación a las frecuencias relativas y la frecuencia acumulada, al trabajarse en términos de frecuencias, como si fuese una media aritmética ponderada, se tiene,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k f_k}{\sum_{k=1}^{n} f_k}$$

siendo $N = \sum_{k=1}^{n} f_k$, el número total de datos.

La misma se puede entonces rescribir como,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k f_k}{N} = x_1 \frac{f_1}{N} + x_2 \frac{f_2}{N} + x_3 \frac{f_3}{N} + \cdots + x_n \frac{f_n}{N},$$

si cada valor f_k/N, lo asociamos con una frecuencia relativa, $\tilde{f}_k$, se tiene que,

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \tilde{f}_k$$

esta forma de promedio, tendrá repercusión en la estructura de los valores esperados en probabilidad.

El valor esperado

En estadística valor esperado de una variable aleatoria discreta X, está definido como,

$$E[X] = \sum_{x_k} x_k\, p(x_k)$$

donde $p(x_k)$, es la función de densidad de probabilidad para la correspondiente variable aleatoria X, la cual puede tener un número finito de valores o bien ser infinitos numerables, en cuyo caso debe cumplirse que

$$\sum_{x_k} x_k\, p(x_k)\,,$$

sea convergente para asegurar la existencia del valor esperado $E(X)$.

Por supuesto la función de densidad de probabilidad cumple con la condición,

$$\sum_{x_k} p(x_k) = 1$$

siendo, $0 < p(x_k) < 1$.

De la definición misma no se desprende fácilmente que el valor esperado es una forma de promedio, sin embargo, se puede interpretar que cada valor x_k que toma la variable aleatoria es multiplicado por su correspondiente valor de probabilidad $p(x_k)$ que es a su vez una forma de frecuencia relativa $\tilde{f}_k$, y para asociar el promedio con la media aritmética todavía se divide entre la suma de frecuencias relativas, cuyo valor como es sabido es uno, esto es,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \tilde{f}_k}{N} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \tilde{f}_k}{\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 + \cdots + \tilde{f}_n} = \sum_{k=1}^{n} x_k \tilde{f}_k$$

Dado que la suma de las frecuencias relativas,

$$\tilde{f}_k + \tilde{f}_k + \tilde{f}_k + \ldots + \tilde{f}_k = 1$$

De tal manera que al valor esperado también se le llama media de la distribución de probabilidad, es decir,

$$\mu = E[X] = \sum_{x_k} x_k\, p(x_k)$$

La varianza

La varianza de una variable aleatoria discreta X, la cual como es sabido es una medida de dispersión, está también definida en términos del valor esperado pero de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media μ, esto es,

$$V[X] = E[X-\mu]^2 = \sum_{x_k}(x_k-\mu)^2 p(x_k).$$

Donde se cumple la propiedad,

$$V[X] = E[X-\mu]^2 = \sum_{x_k}(x_k{}^2 - 2\mu\, x_k + \mu^2)p(x_k) =$$

$$V[X] = \sum_{x_k} x_k{}^2 p(x_k) - 2\mu \sum_{x_k} x_k\, p(x_k) + \mu^2 \sum_{x_k} p(x_k)$$

Como $\sum_{x_k} p(x_k) = 1$, y el valor esperado es, $\mu = \sum_{x_k} x_k\, p(x_k)$, se tiene que,

$$V[X] = E[X^2] - 2\mu\, E[X] + \mu^2.$$

La cual se puede expresar como,

$$V[X] = E[X^2] - [E[X]]^2 = E[X^2] - \mu^2$$

cuyo significado deviene a su vez de la diferencia entre dos valores esperados o promedios, el de x^2 y el del cuadrado de μ, o sea, $E[X^2]-\mu^2$.

El método de mínimos cuadrados

Un método estadístico donde se muestra el papel relevante del promedio en su conceptualización es el de mínimos cuadrados. Se parte de la consideración de que dada una distribución de puntos, (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3),...(x_n,y_n), se trata de encontrar una recta que mejor se ajuste a la misma. Para ello, se busca que la suma de los cuadrados de las distancias de cada uno de los puntos a la recta de ajuste L, sea un mínimo. En otra palabras se quiere que el promedio de los cuadrados de las distancias $(y-y_i)^2$, sea un mínimo, esto es,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_c)^2}{n}$$

Esta condición es la que asegura el poder obtener la mejor recta de ajuste a la distribución de datos dada.

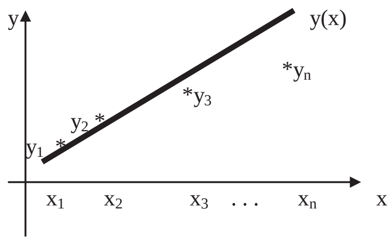

Figura 8.

La idea central que subyace en el método de mínimos cuadrados es de poder encontrar la recta de ajuste, en este caso la recta que mejor se aproxime en promedio a la distribución de puntos dada. Nótese que mientras la distribución de puntos es discreta, la función lineal que se busca es continua de la forma $y=f(x)=ax+b$. Es decir, si podemos dar un procedimiento de cálculo para obtener los parámetros, pendiente de la recta a, y ordenada al origen b, se tiene bien determinada dicha recta de ajuste, lo que posibilita el realizar cálculos que permiten predecir el valor de la variable y.

Se parte de la consideración de que se requiere que sea mínima la suma de los cuadrados de las distancias entre los puntos dados y los puntos calculados, para así poder asegurar que se tiene la mejor recta de ajuste. La condición antes indicada se puede expresar sólo en términos de que la suma siguiente, tome un valor mínimo,

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_c)^2$$

Las ecuaciones correspondientes que permiten calcular de manera elemental, los valores de a y b son:

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad\qquad a\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Resolviendo el sistema, el valor de a que es la pendiente de la recta de regresión queda expresado como,

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Y la ordenada al origen b,

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^{2}}$$

Realizando operaciones algebraicas, estas mismas expresiones se pueden representar en términos de medias aritméticas $\overline{x}$ y $\overline{y}$ de la forma,

$$a = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} - \overline{x}^{2}} \qquad b = \frac{\overline{y} \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} - \overline{x} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2} - n\overline{x}^{2}}$$

En el caso de los datos estén centrados en el origen, se tiene que la media aritmética de los datos dados es nula, esto es, $\overline{x} = 0$, lo cual hace que se simplifiquen los cálculos para encontrar la pendiente a y la ordenada al origen b, que resulta ser a su vez la media aritmética de los valores de y_i,

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2}} \qquad b = \frac{\overline{y} \sum_{i=1}^{n} x_i^{2}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2}} = \overline{y}$$

Es de hacerse notar que en todo el tratamiento del método de mínimos cuadrados, aparece como un argumento recurrente el promedio y que juega diferentes roles en lo que corresponde a la sustentación del mismo método.

En este último contexto trabajado, se ha tratado de mostrar la necesidad de remarcar el valor conceptual del constructo teórico de la media aritmética, siendo este uno de los más relevantes en la Didáctica de la Estadística. Por supuesto, esto no es posible realizar sino se explicita la articulación conceptual de tipo transversal, con algunos de los contextos y representaciones aquí tratados y que corresponden precisamente al Cálculo Promedial.

3 Conclusiones

Es de resaltarse el constructo epistemológico del *exceso* y el *defecto*, el cual como se ha evidenciado tiene un papel protagónico en diferentes escenarios matemáticos.

Se ha mostrado cómo es que el *exceso* y el *defecto* actúa como un *invariante epistemológico*, en el sentido de que se adapta a los diferentes contextos y representaciones donde aparece bien sea como elemento constructor o eje de articulación conceptual.

La media aritmética como prototipo de un concepto de promedio, aparece de manera preponderante cuando se pretenden construir saberes matemáticos. Se ha presentado la forma en que articula conceptos de la matemática elemental con otros de la matemática avanzada.

La noción de promediación, identificada como una idea germinal, resulta ser de gran importancia conceptual y es posible su rescate epistemológico como en parte aquí ha sido evidenciado para la didáctica de la matemática.

En referencia a la articulación de saberes, la media aritmética queda evidenciada como un eje de articulación conceptual, entre los pensamientos numérico, geométrico y algebraico, además del variacional.

El Cálculo Promedial, tiene una fuerte presencia en la matemática y es el referido a las formas en que aparecen los diferentes tipos de promedio. Por supuesto, se requiere explicitarlo en la matemática escolar, aquí se ha presentado el caso relevante de la media aritmética.

Por medio de los diferentes elementos conceptuales aquí mostrados, es posible realizar el diseño de situaciones de aprendizaje tanto para estudiantes, como para la formación didáctica de profesores de matemáticas, particularmente de secundaria y bachillerato.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2005). Significados de probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8* (3), 247-263.

Duval, R. (2004a). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las Matemáticas y de las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Colombia: Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía. Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2004b). *Semiosis y Pensamiento humano*. Colombia: Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía. Grupo de Educación Matemática.

Edward, C. H. (1979). *The historical development of the Calculus*. USA: Springer-Verlag. New York.

Fernández, M. & Rondero, C. (2004). El inicio histórico de la ciencia del movimiento: Implicaciones epistemológicas y didácticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7* (2), 145–156.

Godino, J., Contreras, A. & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basados en el enfoque Ontológico - Semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique de la Mathématiques, 26* (1), 39-88.
Ramos, A. & Font, V.(2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11* (2), 233-265.
Rondero, C. (2001a). *Epistemología y didáctica: Un estudio sobre el papel de las ideas germinales <ponderatio> y <aequilibrium> en la constitución del saber físico matemático.* (Tesis inédita de doctorado). Cinvestav, México.
Rondero, C. (2001b). Cálculo Discreto. En R. Cantoral (Ed.), *Cuaderno Didáctico*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Autor:

Carlos Rondero Guerrero.
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo-México.
rondero@uaeh.edu.mx y *crondero6@hotmail.com*