Una socioepistemología de lo logarítmico

A socioepistemological study about logarithm

Marcela Ferrari Escolá, Rosa María Farfán Márquez

RESUMEN

En este artículo reflexionamos sobre la evolución de argumentos que estudiantes de bachillerato establecieron al participar en un curso diseñado desde un estudio socioepistemológico de la función logarítmica. Partimos así de considerar que la emergencia de lo logarítmico se da desde facilitar cálculos y modelar, prácticas sociales subsidiarias de predecir, siendo caracterizado desde la covariación de dos progresiones una geométrica y la otra aritmética.

PALABRAS CLAVE:

- *Socioepistemología*
- *Prácticas sociales*
- *Covariación logarítmica*

ABSTRACT

In this article we think about the evolution of arguments that students of baccalaureate established on having taken part in a course designed from a study socioepistemological of the logarithmic function. We divide this way of thinking that the emergency of the logarithmic thing is given from facilitating calculations and shaping, social subsidiary practices of predicting, being characterized from the covariación of two progressions the geometric one and another arithmetic.

KEY WORDS:

- *Socioepistemology*
- *Social practice*
- *Logarithmic covariation*

RESUMO

Neste artigo reflexionamos sobre a evolução de argumentos que estudantes de bachillerato estabeleceram ao participar num curso desenhado desde um estudo socioepistemológico da função logarítmica. Partimos assim de considerar que a emergência do logarítmico se dá desde facilitar cálculos e modelar, práticas sociais subsidiarias de predizer, sendo caracterizado desde a covariación de duas progressões uma geométrica e a outra aritmética.

PALAVRAS CHAVE:

- *Socioepistemología*
- *Práticas sociais*
- *Covariação logarítmica*

RÉSUMÉ

Dans cet article nous réfléchissons à l'évolution d'arguments que des étudiants de baccalauréat ont établis après avoir partagé à un cours dessiné depuis une étude socioepistemológico la fonction logarithmique. Nous partons ainsi de considérer que l'urgence du logarithmique se rend depuis faciliter des calculs et depuis modeler, des pratiques sociales subsidiaires de prédire, étant caractérisé depuis le covariación de deux progressions l'une géométrique et l'autre arithmétique.

MOTS CLÉS:

- *Socioépistémologie*
- *Pratiques sociaux*
- *Covariation logarithmique*

Relime (2010) 13 (4-I): 53-68. Recepción: Mayo 25, 2009 / Aceptación: Marzo 25, 2010.

1 Introducción

En nuestra investigación nos interrogamos sobre qué argumentos permitieron a los logaritmos persistir en el desarrollo de la matemática erudita empapada de prácticas sociales y de referencia, así como qué factores han inhibido su apropiación escolar generando otro tipo de prácticas. Desarrollamos entonces cuatro escenarios diferentes pero entrelazados. *Aquel* donde indagamos sobre la dicotomía que se entabla en torno de la noción "función" entre los que abogan por una única respuesta, y los que preferimos estudiar características particulares de cada función, en nuestro caso la función logarítmica. *Aquel* donde analizamos el discurso matemático escolar en las voces de profesores y alumnos así como en textos escolares que presentan a los logaritmos en sus tres argumentos principales: como exponente, como función inversa y como la primitiva, de manera disjunta. *Aquel* donde robustecemos el trabajo epistemológico de Ferrari (2001) estableciendo que *facilitar cálculos* y *modelar*, son las prácticas sociales que propiciaron la conformación de los logaritmos, evidenciándose en las herramientas matemáticas que surgieron, modificando las prácticas y por ende a sí mismas; base de nuestro diseño de aprendizaje. Y por último, *aquel* escenario escolar, donde quince estudiantes de bachillerato aceptan el desafío de acercarse a *lo logarítmico*; invitándolos a transitar por los tres momentos de los logaritmos: éstos como *transformación*, como *modelizadores* y como *objeto teórico,* regido por la covariación logarítmica (Ferrari, 2008).

Desarrollamos entonces esta investigación desde la socioepistemología, aquello que se ocupa específicamente del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y su difusión cultural adopta entonces, una visión sistémica donde se entremezclan las prácticas escolares inherentes a la transmisión del saber, las prácticas de referencia que reflejan el desarrollo de ese saber, las prácticas sociales que hablan de interacciones y herramientas así como las prácticas discursivas que evidencian la significación y consensos adoptados todo lo cual nos anuncia, en definitiva, comunidades que entrelazan sus producciones, donde el tiempo y el lugar, los sujetos y sus interrelaciones, los argumentos y herramientas, los avances y retrocesos, van construyendo el conocimiento.

2 Escenarios de discusión

2.1. *Primer escenario: La comunidad de matemáticos educativos*

La importancia conferida a "función" desde el paradigma euleriano y las dificultades propias de una noción que admite varias concepciones y representaciones, se ve reflejada en el interés por su estudio de investigadores de la más diversa índole (Dubinsky *et al*, 1992; Duval, 2003; Bagni, 2004; Carlson *et al.*, 2007; Falcade *et al.*, 2007; entre muchos otros). Acercamientos que reflexionan globalmente sobre función, en búsqueda de lograr que los estudiantes desarrollen un pensamiento funcional aplicable a distintos modelos; respondiendo al paradigma vigente, el estudio de la construcción de un objeto matemático donde se considera que la apropiación de un universal conlleva al entendimiento de lo particular.

Por otro lado, si analizamos reportes de investigación sobre logaritmos observamos que pueden ser encasillados en dos vertientes desvinculadas: aquella con gran acento en *lo cognitivo* buscando desarrollar un razonamiento logarítmico desde el objeto matemático ya aceptado en el ámbito escolar (Weber, 2002, Berezovski y Zazkis, 2006; Abrate y Pochulu, 2007); y aquella con gran acento en *lo histórico* reduciéndose a comprender las ideas matemáticas en las que se desarrollaron los logaritmos sin ninguna intención de impactar en la educación (Burn, 2001; Le Goff, 1989; Mazzotti, 2001, etc.).

Desde nuestra investigación entonces, cuestionamos estas dicotomías y nos adherimos a la idea de que es vital reconocer la naturaleza de cada función para abordarla; alejándonos así de la búsqueda de un único mecanismo para desarrollar un pensamiento funcional, donde estudios socioepistemológicos son una fuente rica de argumentos para rediseñar el discurso matemático escolar imperante. Retomamos entonces, la hipótesis epistemológica establecida: *lo logarítmico emerge al percibir la covariación entre dos patrones de crecimiento diferentes, uno regido por la multiplicación y otro por la adición*, cercana a la definición primigenia de *logaritmo* alejado del ambiente escolar, y que nos incentivara a analizar ciertas investigaciones sobre covariación. Hallamos así, en Carlson, *et al.* (2002) una interesante síntesis de investigaciones al respecto aunque seguimos las ideas de Confrey y Smith (1995) al considerar que, en la aproximación covariacional, una función es comprendida como la yuxtaposición de dos secuencias, cada una de las cuales es generada independientemente a través de modelar datos (Ferrari y Farfán, 2008).

2.2. *Segundo escenario: El discurso matemático escolar*

Desde nuestra perspectiva, el discurso matemático escolar involucra textos escolares así como a profesores y alumnos, generadores de ciertas prácticas escolares, que nos permiten caracterizar herramientas logarítmicas utilizadas en aulas mexicanas de nivel medio superior y superior. Para ello, realizamos un análisis de textos organizando la discusión desde: (a) *lenguaje algebraico* donde los acercamientos estudiados fundan su argumentación en "función" y, en general, es la definición la que inicia la presentación de los logaritmos; (b) *lenguaje gráfico*, donde observamos que lo ostensivo prevalece y donde una gráfica de la curva logarítmica emana de tres argumentos: de una *tabla numérica* que requiere la expresión analítica; de la *simetría* respecto a $y=x$; y del *área* bajo la curva; siendo, en la mayoría, argumentos finales; y (c) *uso* de los logaritmos que en libros de Álgebra y Cálculo juega un papel secundario cayendo, en general, en ejercicios análogos a los ya resueltos.

Por otro lado, generamos tres grupos de discusión con profesores[1] donde observamos que coinciden con su poco acercamiento a los logaritmos y de los cuales no guardan buenos recuerdos; permitiéndonos apreciar la frecuente ausencia de espacios para discutirlos con los estudiantes debido, bajo su perspectiva, a la densidad de conceptos que deben impartir en cursos de álgebra. Se observa además que, en general, repiten los argumentos que sus maestros utilizaron recordando la falta de conexión con la realidad, o la cantidad de ejercicios que tenían que resolver, sin distanciar demasiado esas tareas a sus propios alumnos.

En los estudiantes en cambio, se observa el arraigo a nociones que escolarmente se han trabajado con mayor intensidad. Una herramienta muy utilizada es la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, evidenciando que no se ha desarrollado un argumento funcional, quedando así en un acercamiento operatorio. Esto se reafirma al mirar las operaciones matemáticas que invocan ante algunas expresiones algebraicas, o al graficar pues prevalece la idea de que se requiere de una tabla para esbozar una función, resabio de los acercamientos propuestos en la mayoría de los textos utilizados en clase, así como la simetría geométrica para funciones inversas, siendo extendida en la mayoría de los alumnos al recíproco. Pareciera así, que la inercia escolar respecto a los argumentos presentes impacta en la introducción de los logaritmos en el lenguaje matemático que deben desarrollar los jóvenes. Se denota un arraigo a reproducir literalmente sentencias escolares o ausencia de una visión crítica que evidencian un pensamiento funcional alejado de la posibilidad de reconocer funciones desde sus particularidades, mismas que anuncian su naturaleza.

2.3. *Tercer escenario: Un acercamiento epistemológico*

Luego de reflexionar sobre el desarrollo de herramientas que surgieron de la primera definición de los logaritmos (Napier, 1619), en un mundo muy especial y desarrollado, donde las necesidades de generar mejores artefactos para facilitar cálculos se perciben aterrizadas en la navegación, o en la economía (Ferrari, 2001); observamos que en otras épocas y lugares, esta necesidad se percibe en la búsqueda de respuestas para fenómenos naturales como inundaciones

[1] 15 profesores estudiantes de maestría en Matemática Educativa en la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo; 8 estudiantes de la maestría en la Universidad Autónoma de Chiapas y 47 participantes de un taller impartido en la Universidad Autónoma de Nayarit.

o conquistas tal como en los babilónicos mediante las tablas para registro y cálculos así como en los egipcios donde multiplican duplicando y vinculando valores en dos columnas para evitar una suma reiterada; o en los incas, que generan el quipu y la yupana entre música y cantos, así como en la china, donde la proporcionalidad directa e inversa y el uso de progresiones así como calcular mediante el ábaco fueron argumentos centrales; cobrando sentido lo importante de lo situacional en la construcción del conocimiento.

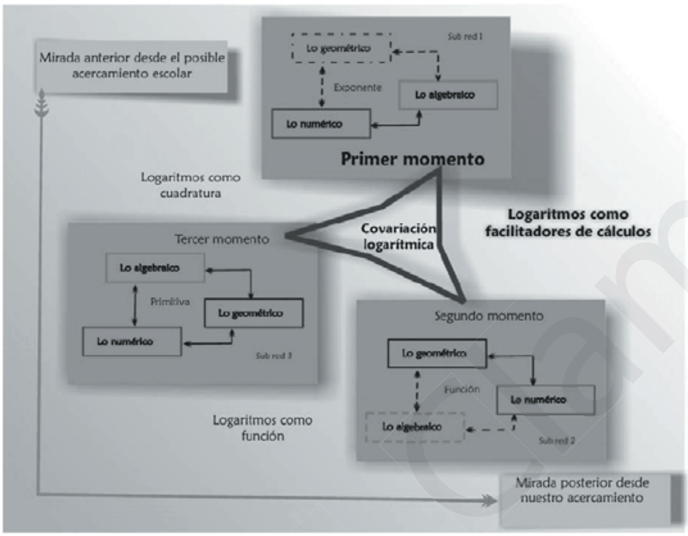
Así, pese a la rapidez de la mirada que hemos realizado en un mundo imposible de abarcar, logramos entrever cómo *lo logarítmico* se va desarrollando a la mano de establecer formas de escribir matemáticamente, de mecanizar procesos laboriosos como el de multiplicar, de ordenar en columnas la relación entre ciertos valores, de reconocer ciertos crecimientos aunque no se haya percibido la covariación logarítmica que desde nuestra perspectiva está presente.

Por otro lado, rastreamos elementos desarrollados por la necesidad de describir ciertos fenómenos de la naturaleza como el movimiento (Bradwardine, 1328; Newton, 1686; Huygens, 1690); así como por aquellos argumentos intramatemáticos como el área bajo una hipérbola equilátera o una curva cuya subtangente sea constante, argumentos que se han entremezclado desde la antigüedad, confluyendo a lo que hoy llamamos *curva*, y más particularmente función (Euler, 1748 & 1770), muy ligado a modelar. Para ambos no es extraño basar sus explicaciones en la covariación de progresiones, ya sean aritméticas o geométricas; eje de nuestra discusión hacia lo logarítmico (Ferrari & Farfán, 2008).

Hablamos así, de dos prácticas: *facilitar cálculos* y por ende de la generación de herramientas de distinta índole; y *modelar*, donde estudiamos diversas aproximaciones, mismas que han desaparecido del discurso matemático escolar ante el rigor de la matemática y la necesidad de sintetizar ideas o economizar construcciones; elementos que nos interesa reflejar en nuestros diseños en búsqueda de que emerja l*o logarítmico*. Se requiere entonces, que los logaritmos sean usados, formulados y teorizados para construirse y existir (Ferrari, 2008).

2.4. *Cuarto escenario: Una experiencia con estudiantes*

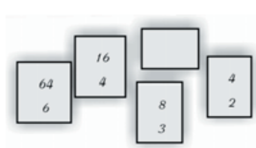
En nuestra búsqueda de evidenciar que la construcción de lo logarítmico descansaba en nuestra hipótesis epistemológica, invitamos a quince estudiantes de sexto semestre de bachillerato a participar en un curso diseñado desde los tres momentos de los logaritmos. Trabajamos dos sesiones por semana, de hora y media, videograbadas, donde los estudiantes formaron pequeños grupos y debían entregar su reporte de clase, así como organizar sus conclusiones en cada cierre de momento para lograr un consenso del grupo. Los desafiamos entonces a trabajar con las actividades creadas respetando las ideas originales de los logaritmos, donde nos interesaba observar las herramientas y argumentos que emergieran así como su evolución y redes de significados y modelos que se fueran consolidando.



Esquema 1. Tres momentos de los logaritmos

2.4.1. *Primer momento: Facilitar cálculos*

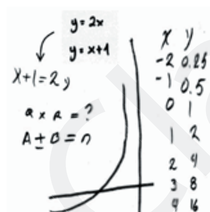
En esta etapa, nos apoyamos en la práctica social de *facilitar cálculos* generando un ambiente numérico donde la multiplicación y la suma sean abstraídas como las herramientas necesarias para generar una nueva, la regla de multiplicar sumando (escolarmente llamada propiedad de los logaritmos), para luego generalizarla involucrando a los logaritmos desde el uso de la calculadora y la extensión de ciertos patrones de crecimiento.



Esquema 2. Fichas logarítmica en base 2

En la *Primera sesión*, se les entrega a los estudiantes cinco fichas que forman una progresión geométrica de base 2 en la parte superior y una progresión aritmética en la parte inferior así como una ficha en blanco con la consigna de descubrir la que falta en el juego y construir diez más. En el Equipo 4, por ejemplo, se comenta: *tenemos que identificar las secuencias que llevan las fichas al ordenarlas…* comenzando a aceptar así la idea de que dos patrones van trabajando juntos, antesala de la covariación. Sin embargo, acepta la posibilidad de que 0//0 pertenezca al juego y comienza a construir fichas hacia la izquierda incorporando también al juego fichas como -2//-1. Luego de varios intentos, deciden recorrer la fila de fichas hacia la izquierda dividiendo entre dos y restando uno usando la calculadora para verificarlas. Abstraen entonces que se trata de 2^n, generando así, un modelo algebraico para el juego, y donde las reglas de multiplicar sumando y dividir restando encuentran un respaldo más robusto; en tanto que el Equipo 3 concluye que la ficha general es $2m//n+1$ confirmando que no ha afianzado una reflexión covariacional pues mira los patrones de cada línea de valores separadamente sin percibir la íntima relación que existe entre ellos.

Equipo 4



Equipo 1

Esquema 3. Covariación logarítmica

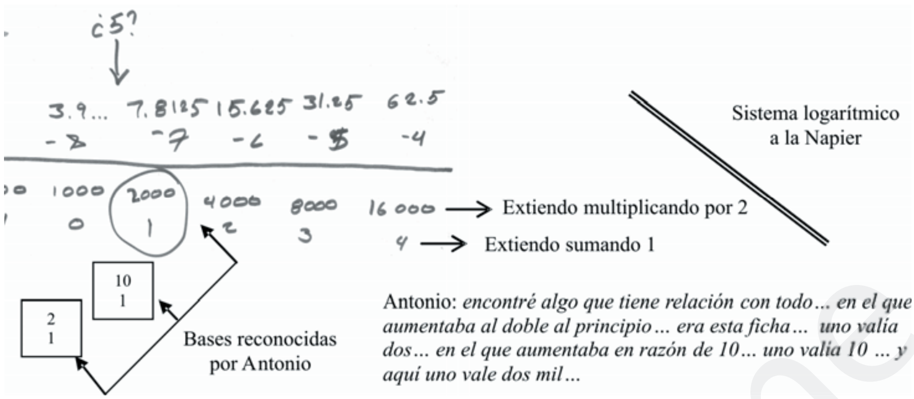
El Equipo 1 acepta la ficha 1//0 como parte del juego y describe los patrones de crecimiento desde las operaciones básicas involucradas: "*aumenta al doble*" que algebraicamente escriben como $y=2x$ y "*aumenta en una unidad*" denotándola como $y=x+1$. Descubre también, que con una ficha al lado de otra se puede sumar los valores de abajo y ver que la ficha correspondiente se logra multiplicando los números de arriba; sorprendiéndonos además, al generar una red de modelos en su búsqueda de la ficha general.

Se percibe entonces, un acercamiento a la covariación logarítmica que va más allá de poder escribir una fórmula, involucra la posibilidad de movilizar argumentos como la regla de multiplicar sumando, o dividir restando, de aceptar la existencia de un exponente, de no ser sólo un juego de números discreto y muy arreglado para que las cosas funcionen.

En la *Segunda sesión* se les entrega las fichas en base 10. La primera explicación de cómo construirlas se basó en la cantidad de ceros que marca el número inferior de cada ficha, sin embargo el Equipo 1 establece que: *el número superior aumenta diez veces su valor y el inferior será un número a la vez* apoyándose en la idea de variaciones y construyendo dos fichas clave para este tipo de juegos, la 1//0 convención que asegura la posibilidad de facilitar cálculos, y la $10//1$ que anuncia la base a diferencia del Equipo 4, que vuelve a incorporar la ficha $0//0$ como parte del juego sin lograr transferir las conclusiones de la sesión anterior.

Se les introduce entonces, en un ambiente numérico diferente con el uso de la calculadora, pues deben utilizar la ficha $a//\log(a)$ para construir otras donde a fuera un número natural y mostraran que la regla de multiplicar sumando sigue funcionando. El Equipo 3, busca reescribir los logaritmos mediante "x *menos algo*" idea lineal, en tanto que el Equipo 1 extiende ordenadamente en su mesa las fichas de los dos juegos refugiándose en el ámbito numérico, utilizando la calculadora, y en el algebraico intentando interpretar la relación entre la notación exponencial y la logarítmica, red de modelos que no logra armar. Se escucha a Antonio decir: *mmm… es que aquí el logaritmo es de diez… pero acá no* (indicando las fichas en base 2)… *mmmm… entonces ¿qué tiene que pasar para que sea un logaritmo?...* idea con la que termina la sesión luego de haber considerado que: *El logaritmo lo que hace es que un número grande lo haga pequeño y un número pequeño lo haga grande*. Se explicita así en esta sesión que el argumento eje de los juegos son los logaritmos, idea en la que trabajan los estudiantes observándose su inseguridad al utilizarlos.

En la *Tercera sesión,* se les propone calcular la cantidad de mosquitos que habría en tres días así como el tiempo en el que se tendrían 10,000 mosquitos conociendo el modelo algebraico, lo cual genera un ambiente de discusión y debate. El Equipo 3 inicia su exploración reemplazando las letras en $\mathrm{A}(t) = \mathrm{A}_0 10^{kt}$ manipulando "(t)" como un número más, argumento que varios de sus compañeros utilizan. Ante la preocupación de despejar "k", una estudiante propone *¿será la raíz de exponente?,* evidenciando cierto anclaje a "exponente-raíz". Por otro lado Antonio, se topa con la problemática que hallara Briggs (1620), respecto a que toda covariación de una progresión geométrica y otra aritmética constituye un sistema logarítmico, pero que para "facilitar cálculos" requiere que el $(1, 0)$ esté presente. Antonio construye una tabla regida por la covariación logarítmica ya que va dividiendo por dos la cantidad de mosquitos al ir moviéndose hacia la izquierda y restando una unidad en el tiempo. Lo que busca es un número en la parte superior que le permita multiplicar al 2000 para llegar al 10,000. Sin embargo, abandona esta búsqueda ya que el 5 aparece entre tiempos negativos, se desanima y se concentra en la fórmula dada. Así, ambos equipos se enfrascan en este problema evocando diferentes herramientas uno, la regla de multiplicar sumando netamente aterrizado en el mundo covariacional logarítmico que Antonio abandona pocas veces; otro, la regla de tres en su necesidad de determinar "*lo que tenemos más algo*" donde lo lineal parece ser el mundo del Equipo 3.



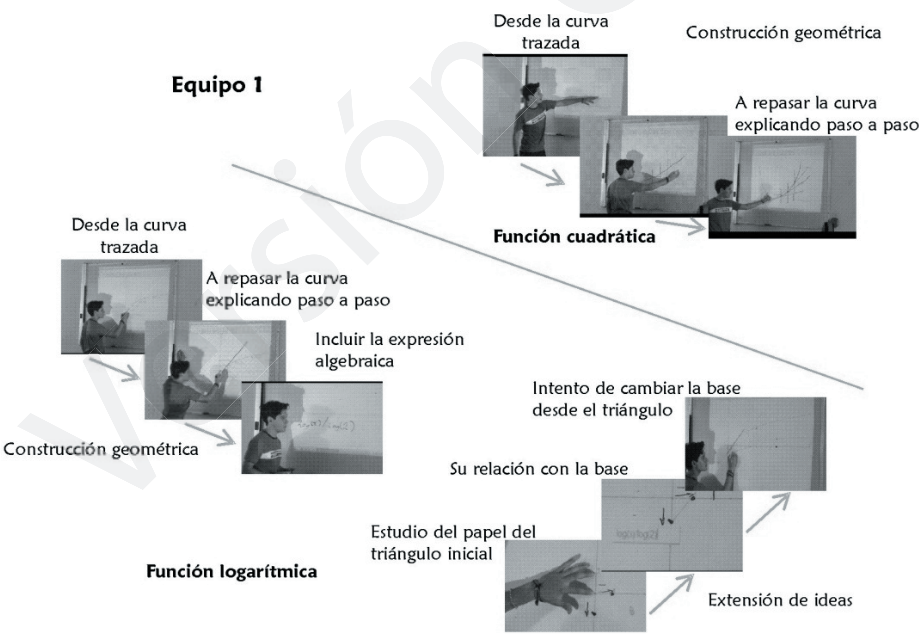
Esquema 4. Síntesis de argumentos de Antonio

En la *Cuarta sesión* se cierra el primer momento delegando a los estudiantes la responsabilidad de lograr consensos con sus compañeros. Se cambia así la dinámica de la clase, donde la argumentación perdería la frescura que se observa en las exploraciones, dando lugar a un discurso más pulido. Todos explican con mayor o menor detalle su visión de las actividades, centrándose en las dos primeras sin incorporar la tercera. Sólo el Equipo 1 se esfuerza por integrar las dos actividades evidenciando las analogías que existían, la importancia de reconocer la base así como la ficha $1//0$, elementos ausentes en la argumentación de los otros equipos, y que consideramos importantes en el acercamiento a la covariación logarítmica. El Equipo 4 incorpora un argumento diferente, la posibilidad de que la "*secuencia no termina*" en tanto que el Equipo 3, cuestiona la "*definición correcta de los logaritmos*", ya que lo trabajado en las actividades le daba elementos sobre los cuales reflexionar pero no les define explícitamente lo que es un logaritmo. Todos los equipos mencionan a los logaritmos como un exponente generando con sus exposiciones la posibilidad de profundizar algunas características de los logaritmos y acercarlas a su institucionalización escolar actual. Vemos así, que el argumento principal emerge, se escucha que los logaritmos permiten facilitar cálculos al manipular dos operaciones íntimamente relacionadas, no separables, al generarlas en un juego especial, determinado, pero modificable al controlar la base y el par $(1, 0)$. Se consensúa también que, cada vez que encontráramos dos progresiones aritméticas como patrones de crecimiento de cierta curva, sabríamos que se trata de una función lineal; en tanto que, si reconocíamos en los patrones una progresión geométrica y otra aritmética, estaríamos hablando de una curva logarítmica.

2.4.2. *Segundo momento: los logaritmos como función*

En este momento nos apoyamos en la práctica social de *modelar*, donde proponemos discutir la función cuadrática y la logarítmica apoyándonos en Agnesi (1748) para que perciban, mediante la construcción geométrica de las curvas, su naturaleza, involucrando a la geometría dinámica como herramienta técnica. Así, partimos de la necesidad de construir una red de modelos, donde lo geométrico, lo numérico y lo algebraico, genere la plataforma que permita hablar de lo logarítmico.

Luego de explorar la función cuadrática y la logarítmica, se percibe una gran diferencia en la red de significados que cada uno de los equipos desarrollara y presentara a sus compañeros en el cierre de esta etapa. Los Equipos 2, 3 y 5, demuestran cierta apatía en el desarrollo de las actividades, sin embargo, logran reflejar la naturaleza de ambas curvas en los argumentos que escogen para describirlas. Priorizan el modelo geométrico, más cercano a repetir las reglas de construcción que a reflexionar los por qué y para qué de cada recta o punto trazado. Lo numérico fue poco explorado, sólo para rellenar una tabla propuesta en la actividad. Lo algebraico pareció lejano a sus intereses pues nunca nombraron las curvas presentes ni presentaron las expresiones algebraicas asociadas a ellas.



Esquema 5. Presentación del Equipo 1

El Equipo 4 percibe características que distinguen a las curvas estudiadas, no las discuten, sólo las aceptan. Descubren que en la cuadrática es más complejo generar puntos para extender la gráfica hacia la derecha en tanto que en la logarítmica, ir a la izquierda se convierte en un problema. Comentan, al explicar el acercamiento al origen, que se debe tomar mitades por donde trazar las verticales y marcar la intersección con las horizontales para construir "*uno de tantos puntos que tiene esta curva*" evidenciando su continuidad. Exploran varias curvas logarítmicas y observan los efectos de la base en la gráfica, tarea que no realiza respecto a los parámetros de la cuadrática, denotando su interés por profundizar su conocimiento sobre logaritmos, algo alejado de lo discutido en sus clases. Lo mismo ocurre con el Equipo 1, percibe que los patrones en juego son los mismos que habían aparecido en la primera sesión del curso, ambiente en el que profundiza sobre el papel que jugaban las fichas $1//0$ y base$//1$, ideas que extrapola hacia este nuevo ambiente que se convierten en puntos de una curva continua. En la discusión que propone respecto al triángulo inicial, no involucra estas dos ideas dando evidencia de que aún se encuentra en la construcción de una red más robusta respecto a los logaritmos, aún estabilizando argumentos. El argumento que genera permite trabajar con los estudiantes sobre puntos importantes que caracterizan a la función logaritmo y cerrar esta etapa proponiéndoles rellenar una tabla de valores con los puntos que este acercamiento produciría e intentar encontrar con ellos la expresión algebraica para que el software de geometría dinámica (SGD) grafique la curva.

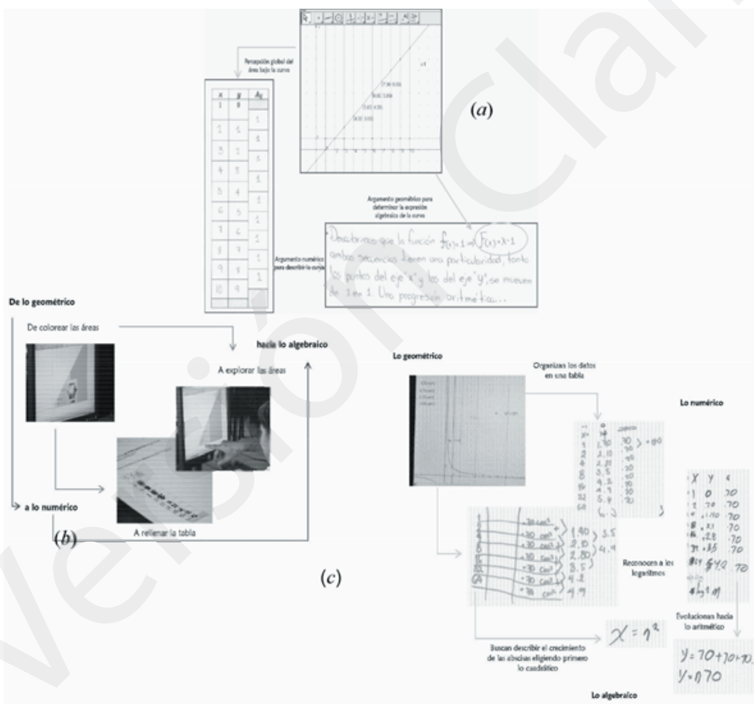
2.4-3. *Tercer momento: los logaritmos como cuadratura*

En esta tercera etapa, se propone hallar las primitivas de: $f(x) = x^n$, con $n = 0, 1$ y -1 para $x \geq 1$ mediante una partición aritmética y otra geométrica. Se les solicita a los estudiantes que completen una tabla más extensa de lo que el uso del SGD les permite construir, llevándolos a explorar las bondades del modelo numérico y la síntesis que proporciona el modelo algebraico y que les permite regresar al SGD para confrontar sus ideas propiciando así, la conformación de una red de modelos.

Involucramos a los estudiantes a describir una función lineal y otra cuadrática desde una visión muy alejada a la escolar. Sin embargo, hallan argumentos adecuados para describirlas pues rápidamente las reconocen y representan de manera gestual, demorando más en establecer su expresión algebraica o generar explicaciones de los patrones de crecimiento con palabras.

En las discusiones generales, los estudiantes explicitan los modelos en un intento de fortalecer la red de modelos dirigida por el diseño. Así, se iba desarrollando el discurso del grupo y los consensos que deseábamos lograr a medida que enriquecían su acerbo matemático. El pasaje de una función constante a una lineal y de ésta a una cuadrática encuentra más resistencia en la partición geométrica que en la aritmética. El no reconocimiento de la misma curva al estudiarla con una partición distinta aunque la idea básica fuera idéntica nos anuncia la dificultad de trasladar argumentos de uno a otro mundo, problemáticas que consideramos esencial en la constitución de los logaritmos ya que implica su vinculación simultánea.

Se explora luego, el área bajo $f(x)=x^{-1}$ donde todos inician trazando rectas verticales, con el SGD, utilizando una partición aritmética. Al observar que el trapecio trazado con la herramienta "polígono" dejaba una pequeña región encima de la curva, dudan y buscan la manera de achicarla. En lugar de empequeñecer la partición, mantienen la base imperturbable pero incluyen varios puntos sobre la curva generando un polígono especial. Determinan entonces una tabla de valores, pero no hallan regularidad entre las áreas determinadas pese a varios intentos de descubrir un patrón único de crecimiento.



Esquema 6. Generando primitivas

Ninguno de los equipos atina a cambiar la partición por una progresión geométrica de manera espontánea, sino por pedido explícito de la maestra y se sorprenden al hallar la misma área en los pares de puntos establecidos por la nueva partición. Pese a que reconocen que las ordenadas crecen mediante una progresión aritmética, al utilizar una progresión geométrica en las abscisas, no recuerdan que se trata de algo logarítmico. Es Antonio, del Equipo 1, que con gran entusiasmo comenta que se trata de "*alguna logarítmica*" abocándose sin más a buscarla logrando un buen acercamiento al logaritmo neperiano sin recurrir a límites ni reconociendo la base *e*, sólo utilizando la definición que estableciéramos así como la manipulación de la base de una expresión algebraica aprovechando el SGD. Entreteje así, lo geométrico con lo lineal, la multiplicación reiterada con la suma de una constante, todos argumentos tratados en las distintas actividades que se desarrollaran en el curso.

3 A manera de conclusión

Discutimos en este trabajo que "saber función es necesario y suficiente para conocer cualquier función específica" argumento que sostienen aquellos cuya unidad de análisis se centra en generalidades, en tanto que nosotros partimos de particularidades. En aquellos que no consideran importarte revisar los orígenes de las nociones y las prácticas sociales adosadas a ellas pues el discurso imperante ya ha sido consensuado y generado significados sociales aceptados por una comunidad erudita, en tanto que nosotros partimos de analizar la esencia de su origen y cómo ha llegado a lo escolar.

Nos reconocemos así, en la comunidad de los socioepistemólogos, donde la necesidad de percibir y estudiar las prácticas sociales indisociables de las herramientas generadas en su seno, del uso de estas últimas que propician la evolución de las primeras, de reconocer que la construcción del conocimiento matemático es situado, temporal y culturalmente determinado; son elementos básicos para estudiar un fenómeno producido en un aula de matemáticas. Espacio donde establecemos que los usos y significados sociales desarrollados no son imperturbables, sino renovables, pues lo que permanece es la esencia de discursos establecidos muchas veces fuera de ámbitos escolares y donde es necesario provocar la emergencia de una red de significados propia, construida desde los consensos logrados con sus pares para disminuir luego la distancia con los significados institucionalizados socialmente, donde el papel del profesor resurge.

Creemos haber sensibilizado a los estudiantes hacia la covariación logarítmica donde el trabajo en grupo, la libertad de expresarse en búsqueda de un discurso común, dio frutos. Regresar a los argumentos originales que propiciaron la constitución de los logaritmos, nos permite organizar un discurso institucionalizado a transmitir escolarmente desde otros supuestos que lo resquebrajan y lo rearman desde la covariación logarítmica como eje integrador. Lejos de repetir la historia, sino rescatar esencias, lejos de establecer "el camino" sino sólo proponer uno, lejos de dar soluciones a los estudiantes sino de problematizarlos, lejos de enseñar los logaritmos sino aprender con ellos, es que evidenciamos sus fortalezas y fragilidades.

La elección de las fichas logarítmicas como variable didáctica, en la primera etapa del curso, que implicaba trabajar en dos mundos distintos el de multiplicar y el de sumar interrelacionados, permitió que anclara en ellos el argumento que "*si reconocemos una progresión geométrica y una aritmética entonces estamos hablando de una curva logarítmica*"; esencia de lo logarítmico, no lo discreto que evidencia la sentencia mencionada, sino su naturaleza, el isomorfismo de mundos donde ambas operaciones funcionan, pero que al reconocerlas covariacionalmente nos lleva a definir los logaritmos.

Regresar a la geometría para generar una visión de continuidad en una función que se discutiera inicialmente como algo discreto, de arreglos numéricos especiales y naturales, abrió la posibilidad de generar otros argumentos y fortalecer el acercamiento a lo logarítmico, alejándolos del discurso gráfico tradicional de la escuela. Los introducíamos así, en otro escenario, provocando el uso de una red de modelos: el geométrico como disparador de la discusión, el numérico regresándolos a un ambiente similar de las fichas, y el algebraico que se evidenciara el más frágil y alejado del acervo matemático de estos estudiantes. Los inducíamos también, a que emergiera en sus discusiones y consensos el uso del argumento central de los logaritmos justamente para reconocerlos, para construir nuevos argumentos que los describan, acercándolos a una mirada más integral de esta función. Decidimos además, confrontar funciones polinomiales con trascendentes, escogiendo para esto una función cuadrática y la logarítmica en el segundo momento y una función constante, una función lineal y una función racional en el tercer momento para que del estudio del área bajo las mismas percibieran la naturaleza de cada una y reconocieran sus primitivas.

Arribábamos así con los estudiantes, al fin de un recorrido por los tres momentos epistemológicamente establecidos en Ferrari (2001) donde los logaritmos como *transformación*, como *modelizadores* y como *objeto teórico* estuvieron presentes regidos por las prácticas sociales de facilitar cálculos y modelar.

Referencias bibliográficas

Abrate, R. & Pochulu, M. (2007). Ideas para la clase de logaritmos. *Revista Iberoamericana de Educación matemática 10*, 77-94.

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana.* Libro Secondo del Calcolo Differenziale (2 tomos). Milano, Italia: Nella Regia Ducal Corte.

Bagni, G. T. (2004). Una Experiencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7* (1), 15-24.

Berezovski, T. & Zazkis, R. (2006). Logarithms: Snapshots from Two Tasks. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehliková. *Proceedings of 30th International Conference for Psychology of Mathematics Education.* (2), 145-152. Praga, Czech República checa.

Bradwardine, T. (1328). *De proportionibus velocitatum in motibus*. Retrivied from: http://www.fondoantiguo.us.es-obras

Briggs, H. (1620). *Arithmetica logarithmica.* [Traducido y comentado por I. Bruce (2004). University of Adelaide, Australia]. Retrieved from: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Miscellaneous/Briggs/index.html

Buendía, G., Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics 58*(2), 299-333.

Burn, R. (2001). Alphonse Antonio de Sarasa and Logaritmos. *Historia Mathematica, 28*, 1-17.

Camacho, A., Sanchez – Luján, I. (2006). The transference of the mathematical language to different semantic fields. *International Journal of Materials & Product Technology 27*(1.2), 1-12.

Cantoral, R., Ferrari, M. (2004). Uno studio socioepistemologico sulla predizione. *La Matematica e la sua Didattica 18*(2), 33-70.

Cantoral, R., Montiel, G. (2001). Funciones: Visualización y pensamiento matemático. México: Prentice Hall / Pearson Educación. 182 págs. ISBN 970 26 0280 7.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Aplying covariational reasoning while modelling dynamic events: A framework and study. *Journal for Research in Mathematics Education 23* (5), 352-378.

Carlson, M. P., Oehrtman, M., & Thompson, P. W. (2007). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understanding of functions. En M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 150-166).

Cen, C., Cordero, F., Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(2), 187-214.

Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (1), 66-86.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992) (Eds.) *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* Mathematical Association of America, Washington, DC, USA: MAA Notes 25.

Duval, R. (2003). Voir en mathemátiques. En E. Filloy (Coord.) *Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación actual* (pp.41-76). México: Fondo de Cultura Económica y Cinvestav-IPN.

Euler, L. (1748). *Introduction a l´analyse infinitésimale.* París, Francia: L'Ecole Polytechnique.

Euler, L. (1770). *Elements of Algebra*. (John Hewlett , Trad.). EEUU: Springer-Verlag.

Falcade, R., Laborde, C. & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics 66*, 317.

Farfán, R., Cantoral, R., Lezama, J., Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. L. Radford & D'Amore, B. (Guess Editors), 27-46.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo* (Tesis inédita de maestría). Cinvestav-IPN. México.

Ferrari, M. (2008). *Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: de multiplicar sumando a una primitiva* (Tesis inédita de Doctorado). Departamento de Matemática Educativa Cinvestav-IPN. México.

Ferrari, M. & Farfán, R. M. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11* (3), 309–354.

Huygens, C. (1690). *Discours de la cause de la pesanteur*. IREM de Dijon (abril-1981).

Le Goff, J. (1989). De la méthode dite d´exhaustion: Gregoire de Saint Vincent (1584-1667). En Irem de Besancon (Ed.), *La démonstration mathématique dans l´Histoire*. Actas du 7mo Éme colloque Inter-Irem Épistemologie et histoire des mathématiques (pp. 197-220).

Mazzotti, M. (2001). Maria Gaetana Agnesi. Mathematics and the Making of the Catholic Enlightenment. *The History of Science Society 92* (pp. 657-683).

Napier, J. (1619). *A description of the admirable table of logarithms.* London: Nicholas Okes (1616). Editie vertaald uit het Latijn door Edward Wright. Retrieved from: http://www.ru.nl/w-en-s/gmfw/bronnen/napier1.html

Newton, I. (1686). Principios matemáticos. (A. Escohotado & M. Saenz, Trad.). Barcelona, España: Altaya.

Weber, K. (2002). Developing students' understanding of exponents and logarithms. En D. Mewborn, P. Sztgjn, D. White, H. Niegel, R. Bryant y R. Nooney (Eds.): *Proceeding of the 24th Annual Meeting, North American Chapter of the International Grupo for the Psychology of Mathematics Education, (1),* 1019–1027). Athens, Georgia. ERIC.

Autores:

Marcela Ferrari Escolá.
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.
marcela_fe@yahoo.com.mx

Rosa María Farfán Márquez.
Cinvestav-IPN, México. *rfarfan@cinvestav.mx*