La enseñanza de los diferenciales en las escuelas de ingeniería desde un enfoque socioepistemológico

Teaching differentials at engineering schools from the socio-epistemological

Ricardo Pulido Ríos

RESUMEN

El contenido de este artículo gira sobre la problemática de la enseñanza-aprendizaje de la física y las matemáticas en ambientes donde ambas disciplinas confluyen curricularmente, como es el caso de las carreras de ingeniería. Ubicándonos en los diferenciales y apoyándonos en la socioepistemológía, sostenemos que una educación que privilegia la enseñanza de objetos impide apropiarse de un estilo de trabajo en la física-matemática que se ha revelado fecundo para la construcción de conocimiento en ambas disciplinas. Afirmamos además, que este enfoque ofrece una inmejorable perspectiva de investigación educativa para la búsqueda de respuestas viables a los problemas de articulación de la enseñanza de la física y las matemáticas.

PALABRAS CLAVE:

- *Física*
- *Enseñanza articulada*
- *Ingeniería*
- *Diferenciales*
- *Socioepistemología*

ABSTRACT

The content of this paper discusses the physics and mathematics teaching-learning problematic in situations where both disciplines meet in the curricular program as it happens at engineering majors. Focusing on differentials and supported by social epistemology, we affirm that an education which privileges teaching of objects does not permit that a working style on physics-mathematics can be learned by the students; that style has reveled fruitful for the construction of both disciplines. Also, this paper states that social-epistemology is an invaluable perspective of research for searching viable responses to the problems with articulation between physics and mathematics teaching.

KEY WORDS:

- *Physics*
- *Articulated teaching*
- *Engineering*
- *Differentials*
- *Socio-epistemology*

RESUMO

O conteúdo deste artigo trata sobre a problemática do ensino e aprendizado da Física e a Matemática em ambientes onde ambas as disciplinas integram o curriculo, como é o caso das carreiras de engenharia. Situando-nos nos diferenciais e com base na socio-epistemológía, sustentamos que uma educção que privilegia o ensino de objetos, impeça tratar de um estilo de trabalho, na física-matemática, o qual tem-se revelado fecundo

PALAVRAS CHAVE:

- *Fisica*
- *Ensino articulada*
- *Engenharia*
- *Diferenciais*
- *Socioepistemología*

Relime (2010) 13 (4-I): 85-97. Recepción: Abril 30, 2009 / Aceptación: Agosto 11, 2010.

para a construção de conhecimento, em ambas as disciplinas. Afirmamos além disso, que este enfoque oferece uma vasta perspectiva de pesquisa educativa, para a procura de respostas viáveis para os problemas de preparação do ensino da Física e da Matemática.

RÉSUMÉ

Le contenu de cet article aborde la problématique de l'enseignement-apprentissage de la physique et des mathématiques dans des domaines où les deux disciplines confluent en termes de programmes d'étude, cela étant le cas pour les filières d'ingénierie. Si l'on considère les différentielles et que l'on s'appuie sur la socio-épistémologie, nous soutenons qu'une éducation qui privilégie l'enseignement d'objets constitue un obstacle à l'appropriation d'un style de travail en physique-mathématiques qui s'est révélée riche dans la construction des connaissances de ces deux disciplines. En outre, nous affirmons que cette analyse offre une remarquable perspective en matière de recherche éducative et permettra de formuler des réponses viables aux problèmes soulevés par les rapports qu'entretiennent la physique et les mathématiques dans leur enseignement.

MOTS CLÉS:

- *Physique*
- *Enseignement articulé*
- *Ingénierie*
- *Différentielles*
- *Socio-épistémologie*

1 Introducción

Si nos circunscribimos a los ambientes donde conviven la enseñanza de la Física y de las Matemáticas y pensamos solamente en esta última disciplina, bien se conocen una serie de dificultades relacionados con su enseñanza y aprendizaje; una buena ilustración de estas dificultades se puede encontrar en el estudio realizado por Artigue (2003), donde se menciona que las investigaciones en Matemática Educativa han descubierto un panorama preocupante al respecto; se subraya que en el énfasis a lo formal y riguroso de la enseñanza del Cálculo radica una fuente muy importante de las dificultades observadas con el aprendizaje en los estudiantes. Menciona además que tal enseñanza ha derivado en una práctica algorítmica por parte de los profesores, ante la incapacidad de lograr un aprendizaje real de la propuesta curricular con tales características.

Cuando se estudia de conjunto la enseñanza de la Física y de las Matemáticas se evidencian dificultades adicionales que repercuten seriamente en el aprendizaje de la ciencia en general. Freudenthal (1973), dice, por ejemplo: "it is an impossible situation that the mathematician teaches a mathematics that cannot be applied and the physicist applies a mathematics that has not been taught by the mathematician" (p. 553). Con toda seguridad, los diferenciales son un ejemplo de matemáticas que los físicos aplican y que no son enseñadas por los matemáticos; de hecho Artigue (1988) menciona que las dificultades en coordinar la enseñanza de la Física y las Matemáticas en el contexto de un experimento educativo, giraban alrededor de los diferenciales. Pulido (1998) puntualiza el hecho de que un modo de matematizar en la Física, identificado como estilo diferencial, que está basado en consideraciones infinitesimales pertenecientes al cálculo leibniziano y es usado frecuentemente en la definición de conceptos o para construir ecuaciones diferenciales, es ostensiblemente ignorado por la enseñanza actual del Cálculo, y que, de hecho, en esta última se presenta una contrastante alternativa, basada en las Sumas de Riemann y sin consideraciones infinitesimales, que intenta, sin lograrlo, suplir con éxito aquel estilo diferencial; ahí mismo se muestran efectos en el aprendizaje del, por así decirlo, fuego cruzado de ideas provenientes de las dos propuestas escolares.

El contenido de este artículo lo hemos organizado del siguiente modo: primero mostramos un ejemplo donde se despliega el estilo diferencial para obtener la fórmula del flujo de un campo a través de una superficie; enseguida presentamos cuatro definiciones de diferencial vigentes en la Matemática actual. Destacamos el hecho de que esas definiciones capturan de manera aislada ciertas consideraciones ligadas al estilo diferencial. Mostramos como se ha generado nuevo conocimiento físico-matemático partiendo de las ideas subyacentes a aquel estilo. Apoyándonos en el enfoque socioepistemológico, hacemos ver que la didáctica actual, basada en privilegiar la enseñanza de objetos, no está en condiciones de lograr que los estudiantes se apropien, para una formación científica sólida, de esa forma de matematizar en la ciencia. Finalmente, mostramos que ese mismo enfoque de investigación educativa favorece el estudio sobre el problema de la pobre articulación entre la enseñanza de la Física y las Matemáticas en las carreras de ingeniería, y de paso, permite vislumbrar con ella la construcción de propuestas más ricas en significados compartidos y entrelazados.

2 El estilo diferencial, un ejemplo

Veamos el siguiente argumento (que llamaremos el argumento diferencial) con el que se consigue una fórmula del flujo de un campo a través de una superficie.

a) Si $\vec{E}$ es un *campo constante*, *perpendicular* a una *superficie plana* de área S, entonces el flujo F, se calcula así: $F=|\vec{E}|S$ (obviando el signo que toma en cuenta la dirección del flujo).

b) Si $\vec{E}$ es un *campo constante*, PERO no es perpendicular a una *superficie plana* de área S entonces el flujo F, se calcula así: $F=|\vec{E}|S\ cos\ \alpha$

donde α es el ángulo entre los vectores del campo y la Normal a la superficie.

c) Si $\vec{E}$ es un campo NO necesariamente constante, NO necesariamente perpendicular a una superficie NO necesariamente plana, entonces se toma un diferencial de superficie de área dS y se calcula un diferencial de flujo dF. Este se obtiene siguiendo la idea de que *aunque el campo no es constante, en una región infinitamente pequeña puede considerase que sí lo es; además, aunque la superficie no sea plana, tramos infinitamente pequeños de ella pueden considerarse así*. De esta manera, en el ámbito diferencial puede aplicarse lo que se conoce de lo constante y plano (el inciso b) para calcular el diferencial de flujo: $dF = |\vec{E}|\, dS \cos \alpha$.

   Si se identifica por $d\vec{S}$ al vector con dirección normal a la superficie y con magnitud dS, se tiene que $dF = \vec{E} \bullet d\vec{S}$

   Si, ahora, se suman todos estos diferenciales de flujo a lo largo de toda la superficie S se llega a la fórmula: $F = \int_S \vec{E} \bullet d\vec{S}$

Este argumento es un ejemplo de lo que se considera un estilo diferencial de trabajar en la Física, en él subyacen formas de ver y operar los diferenciales que tienen sus raíces en el Cálculo de Leibniz; las partes subrayadas muestran algunas consideraciones que corresponden al estilo diferencial de trabajar. Euler, Fourier y Maxwell son algunos de los que en sus descubrimientos físicos matemáticos adoptaron y adaptaron esta forma de matematizar el conocimiento. Esta manera de argumentar se utiliza actualmente en la Física escolar, pero no es objeto de su enseñanza; en la didáctica actual del Cálculo tampoco lo es, de hecho, la rechaza y le contrapone una manera de proceder con las Sumas de Riemann que conduce a generar fórmulas erróneas (Pulido, 1998). Se entiende entonces el título de Pulido (2004): “Calculus Textbooks in the American Continent: A Guarantee for Not Understanding Physics”.

❸ Los diferenciales como un objeto matemático actual

Para muchos puede resultar extraño que la respuesta a la pregunta ¿qué son los diferenciales? tenga como respuesta: “depende”. Pueden encontrarse definiciones actuales, esencialmente distintas, dependiendo del libro que se consulte e incluso de la región geográfica; con esas definiciones, el diferencial puede ser un incremento, una transformación lineal, un infinitésimo, una uno-forma diferencial o una variable que se va a cero. Es importante mencionar que aunque esencialmente distintas, cada una de ellas captura un rasgo del estilo diferencial, o dicho de otra manera, un modo de percibir cierto rasgo del estilo diferencial. Daremos muestra de que en algunos casos, tener una definición precisa, de acuerdo con el canon matemático actual, de los diferenciales, aunque sólo sea un rasgo de ellos el que se captura, ha animado a algunos a creer que la pobreza de articulación entre la Física y la Matemática escolar puede resolverse cuando a los físicos se les haga ver que sus procedimientos extraños con los diferenciales pueden transparentarse y ser validados a través de definiciones precisas. En lo que sigue presentamos cuatro definiciones actuales de diferencial y haremos los comentarios pertinentes relacionados con cada una. Sólo como referencia agregaremos que Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza (2002) nunca define el diferencial, aunque sí muestra como trabajar con él y que propiedades tiene.

3.1. *El diferencial como un incremento finito*

Si $y=f(x)$, se define el diferencial de la variable independiente x como $dx=\Delta x$ cualquier número real, y $dy=f'(x)dx$. Esta es la definición del CALITECA: Cálculo de los libros de texto de cálculo, según acrónimo utilizado por Pulido (1998) para referirse al contenido de libros de cálculo de autores como Leithold, Stewart, Zill, etc. Ahí mismo se hace una análisis sobre la incoherencia del discurso propuesto por estos libros alrededor de los diferenciales y de la incapacidad para soportar las herramientas matemáticas que la física requiere, sobre todo con el modo diferencial de discurrir que hemos mencionado.

3.2. *El diferencial como una transformación lineal*

Si F es una función de R^n a R y $a \in R^n$ el diferencial de F en a es una transformación lineal $\lambda(a)$ (que depende de a) de tal forma que $\Delta F=\lambda(a)(\Delta x)+o(\Delta x)$, donde ΔF es el incremento de F correspondiente al cambio $a \to a+\Delta x$ y $o(\Delta x)$ es una magnitud que se va a cero cuando Δx se va a cero. Una manera de escribir que $\lambda(a)$ es el diferencial de F en a es la siguiente: $dF=\lambda(a)dx$.

En el caso del argumento diferencial, tomar un diferencial de superficie involucra fijar una región infinitamente pequeña alrededor de un punto, luego, en la expresión del diferencial de flujo $dF=\vec{E}\bullet d\vec{S}$, el vector $\vec{E}$ se puede asumirse que depende de ese punto, y la transformación lineal se tiene cuando se varían los $d\vec{S}$ que son multiplicados (en sentido extenso del producto punto) por el vector fijo $\vec{E}$.

En general la toma del elemento diferencial involucra constantificaciones (dejar constantes ciertas variables) que dan lugar a transformaciones lineales.

Con relación a esta definición y al estudio de conjunto de la enseñanza de la Física y las Matemáticas, Martínez-Torregrosa, López-Gay, y Gras-Martí, (2006) afirma: “One may recognize in these conclusions a clear reconciliation between physical sense and rigor when one uses differential calculus in physics” (p. 459). Es extraño observar tal entusiasmo cuando un grupo interdisciplinario francés, en el intento por crear matemáticas para la Física donde los procedimientos con diferenciales fueran legitimados, utilizando esa definición, además de un procedimiento llamado “acotamiento con paso al límite” mediante el cual se obtenían derivadas, afirman en sus conclusiones generales (el subrayado es nuestro):

> [...] Nos proponemos producir, en particular:
>
> [...] - un análisis más fino de los criterios susceptibles de legitimar con mínimo costo el empleo de los diferenciales en diversas categorías de problemas físicos, esto con el fin de facilitar toda tentativa que busque sensibilizar a los estudiantes sobre este punto. *Nosotros mismos nos hemos dado cuenta muy tarde de la dificultad, y a veces imposibilidad, que se tiene frecuentemente al utilizar el procedimiento de acotamiento con paso al límite. Sobre esta cuestión de legitimidad, tan poco favorecida, hay que tratar de bajar su “costo” (sin por ello caer en la algoritmia pura) si no queremos exponernos al fracaso total. Hacemos ahora de esto una tarea prioritaria* (GRECO, 1989, p.28).

3.3. *El diferencial como un infinitésimo.*

Tal vez el rasgo del estilo diferencial que ha sido mayormente cuestionado con un sentido limitado y anacrónico de lo que se considera una verdad matemática, es el hecho de aceptar que cierto tipo de magnitudes pueden simplemente eliminarse cuando son sumadas con otras de diferente especie. En el caso del argumento diferencial esta consideración está presente cuando, en el inciso c, se dice: “Este (diferencial de Flujo) se obtiene siguiendo la idea de que aunque el campo no es constante, en una región infinitamente pequeña puede considerase que sí lo es”. En un diferencial de superficie, el campo $\vec{E}$ puede cambiar, pero sólo un $d\vec{E}$; podría decirse entonces que el campo no pudiera ser más que $\vec{E}+d\vec{E}$ en ese diferencial, que al ser multiplicado (producto punto) por el vector normal, se obtendría $\vec{E}\bullet d\vec{S}$ más un diferencial de orden dos que puede ser eliminado por la regla del cálculo de Leibniz que así lo establece. Para fines prácticos, podría decirse que $\vec{E}+d\vec{E}=\vec{E}$.

Por supuesto, el afirmar que $x+dx=x$ puede resultar chocante a ojos de nuestras mentes entrenadas a ver que para dx no hay otra posibilidad más que ser cero; por eso, cuando surgió el Análisis no Estándar, donde se dio cabida, matemáticamente hablando, a la posibilidad de tener "números" con esa característica, abrió un camino alterno de mirar la producción matemática clásica y obtener nuevo conocimiento:

> In short, nonstandard analysis provides us with an enlarged view of the mathematical landscape. It represents landscape. It represents yet another stage in the emergence of new number systems, which is a significant theme in mathematical history.
>
> Its rich conceptual framework will be built on to reveal new systems and new understandings, so its development will itself influence the course of that history (Golblatt, 1998, p. viii).

En este mismo libro se da la siguiente definición de infinitésimo:

> A nonzero number is defined to be infinitely small, or infinitesimal, if $|\varepsilon|<\frac{1}{n}$ for all n=1,2,3, ….(Golblatt, 1998, p. 3).

Es interesante observar las altas expectativas que para el conocimiento matemático derivó la construcción de esta teoría; tomemos por ejemplo la opinión de Gödel que recoge Robinson (1996): "There are good reasons to believe that nonstandard analysis, in some version or other, will be the analysis of the future" (p. xvi).

Se dice incluso que esta teoría ha reivindicado las ideas de Leibniz (Robinson, 1996) o bien se dice que con el análisis no estándar se tiene "una reconstrucción racional de la desacreditada teoría infinitesimal…" (Lakatos, 1978, p. 68). Pero Bos (1974) sostiene que el cálculo de Leibniz no necesita ese tipo de reivindicaciones, con criterios de validez no acordes a las épocas correspondientes; además que los infinitésimos tienen serias discrepancias con los diferenciales de Leibniz, siendo una de ellas la existencia de diferenciales de orden superior en el cálculo de Leibniz y por tanto la consideración de distintos ordenes de infinitud, cosa que no existe el análisis no estándar.

En cuanto a la enseñanza del Cálculo, y pienso que para bien, el desarrollo y aceptación de esta teoría ha permitido mirar con benevolencia algunas formas de obtener resultados del Cálculo leibniziano, anteriormente inadmisibles; por ejemplo, Dunham (2009) después de presentar en el terreno de este cálculo una prueba, muy simple por cierto, de la regla de L´Hôpital, afirma que los matemáticos actuales pueden presentar objeciones a este argumento y afirma:

> We should note, however, that demonstrations like Euler´s resting upon infinitesimals can be recast within the context of hyperreal numbers.

> In the process, some of the mysterious goings-on surrounding infinitely small quantities turn out to be not quite so mysterious. (p. 19)

3.4. *El diferencial como una forma diferencial*

Ligadas a ideas como las de trabajo, flujo, carga eléctrica total, están las integrales de línea, superficie (como la integral que aparece en nuestro argumento diferencial) y de volumen; bajo el signo de la integral están expresiones con diferenciales. Grosso Modo, la teoría de las formas diferenciales extiende el tratamiento de los diferenciales que aparecen en la teoría clásica del cálculo de varias variables: “Exterior differential forms arise when concepts such as the work of a field along a path and the flux of a fluid through a surface are generalized to higher dimensions”. (Arnold, 1989, p. 163). En el mismo libro, después de decir que el ejemplo más simple de una forma diferencial es el diferencial de una función, da la siguiente definición:

> A differential form of degree 1 (or a 1-form) on a manifold M is a smooth map
> ω: $TM \to R$
> of the tangent bundle of M to the line, linear on each tangent space TM_x. (p. 175).

Salvo ligeras modificaciones, esta definición coincide con la segunda definición de diferencial donde se establece como una transformación lineal; pero se independiza de esta visión cuando habla de las k-formas diferenciales, que le permiten tratar con diferenciales de orden superior como los de superficie y de volumen:

> A differential k-form $\omega^k|_x$ at a point x of a manifold M is an exterior k-form of the tangent space TM_x to M at x, i.e., a k-linear skew-symmetric function of k-vectors $\xi_1,\ldots,\xi_k$ tangent to M at x. (p. 176).

Las superficies son ejemplos de variedades (M) de dimensión 2. Es importante señalar lo significativo que ha resultado para la Física esta teoría:

> Hamiltonian mechanics cannot be understood without differential forms. The information we need about differential forms involves exterior multiplication, exterior differentiation, integration, and Stokes´ formula” (Arnold, 1989, p. 163).

En cuanto que la teoría de las formas diferenciales generalizan los conceptos del análisis vectorial, es natural que la teoría de la electricidad y el magnetismo pueda describirse en términos de las formas diferenciales; pero esta descripción no es con el afán de hacerlo en forma más elegante; Ongay (1996) en su “electromagnetismo y formas diferenciales” dice al respecto: “En otras palabras, lo que si veremos es que esta reinterpretación da una visión no sólo más elegante, sino más clara y profunda de la estructura (electromagnética), en especial de la estructura geométrica de este excepcional modelo" (p. 3).

4 La socioepistemología y la enseñanza del cálculo en las escuelas de ingeniería

Si nos propusiéramos hacer que el estudiante de ingeniería se apropiara del estilo diferencial, difícilmente podría lograrlo si se le "enseñaran" de conjunto estas definiciones; más aún, si, como en la educación tradicional, las definiciones aparecen al principio de la enseñanza, como si se tuviera apuro en mostrar o exhibir el objeto de referencia. Cuando se apremian las definiciones de conceptos y en la enseñanza no se perciben ideas relacionadas a algún interés de su carrera o no se abordan problemáticas donde tales definiciones revelen la importancia de su juego, sobreviene el desaprecio y desinterés por las Matemáticas. No se puede sostener el ánimo de aprender matemáticas basándose simplemente en lo intelectualmente maravilloso que pudiera parecer el edificio ya construido de la ciencia Matemática.

Por el contrario, si el interés fuera que el estudiante comprendiera, por ejemplo, la teoría de las formas diferenciales, es razonable pensar que, trabajando en situaciones problemáticas donde el estilo diferencial revele su importancia, ayudaría sobremanera a darle sentido al nuevo aprendizaje, una razón de ser. Hablamos de coherencia cognitiva.

Precisamente, con el fin de diseñar situaciones didácticas que den sentido y significado al saber matemático escolar, diversas investigaciones se enmarcan en la Socioepistemología cuyo énfasis reside en el interés de modelar el papel de la *práctica social* en la producción del conocimiento (Salinas y Alanís, 2009). Por el contrario, coincidimos con la crítica que se hace en Cantoral, Farfán, Lezama, y Martínez-Sierra (2006) sobre los enfoques centrados en objetos que "buscan explicar el proceso mediante el cual se llega a la construcción del objeto y minimizan el papel que desempeña la triada: "herramientas, contextos y prácticas"…"; además creemos en lo que se afirma, ahí mismo, de que con el enfoque socioepistemológico se "producirá un deslizamiento de orden mayor hacia explicaciones sistémicas, holísticas, complejas y transdisciplinarias, en virtud de que la acción cognitiva no busca la apropiación de objetos a través de sus partes, sino que asume que éstos no existen objetiva y previamente" (p. 85).

En general, creo que no es fácil la construcción de alternativas para la enseñanza del cálculo que tomen en cuenta la articulación con la física, y tal vez una razón de que así sea, la podemos encontrar en la siguiente consideración:

> Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap.
>
> In the middle of the twentieth century it was attempted to divide physics and mathematics. The consequences turned out to be catastrophic. Whole generations of mathematicians grew up without knowing half of their science and, of course, in total ignorance of any other sciences (Arnold, 1997).

Ahora bien, la perspectiva del enfoque socioepistemológico, donde se identifican como prácticas el *medir*, *predecir*, *modelar* y *convenir*, apunta a la creación de actividades necesariamente transdisciplinarias alrededor de la enseñanza del cálculo y que atiendan el problema de articulación con la física. Dichas actividades pensadas y abordadas en relación a esas prácticas. El estilo diferencial, revela una estrategia: la toma del elemento diferencial, que en el contexto de la ingeniería atiende a una práctica: la de *medir* una magnitud con referencia a otra vía la construcción de una ecuación diferencial que las relacione, por ejemplo.

Me gustaría terminar este artículo analizando, precisamente, la reflexión que hace Gastón Bachelard del estilo diferencial desplegado por Fourier para conseguir la ecuación diferencial del calor; esta reflexión es un canto a ese estilo de proceder; después de todo habla un poeta de la ciencia. Se aprecia algo más que física, matemáticas o ecuaciones diferenciales, es una idea generadora de conocimiento que difícilmente pudiera ser atendida por una enseñanza tradicional, pero encajaría perfectamente en una que tenga en mente los rasgos señalados relacionados con la Socioepistemología.

Primeramente Bachelard señala como Biot antepone la práctica de medir a la de meramente observar, con relación a las explicaciones del fenómeno de propagación del calor:

> …La intervención del pensamiento matemático en ese problema (el estudio detallado de la propagación térmica en los sólidos) es, en verdad, decisiva. Para convencerse, basta comparar la obra de un físico como Socquet, quien en 1801 publica en un libro todavía íntegramente dedicado a la *física de observación*, con la obra de Biot en la cual la experiencia – llevada a cabo aproximadamente en la misma época-apunta, evidentemente, hacia la medida y el cálculo.
>
> Con Biot (1774-1862), lo calórico pasa netamente al rango de simple expresión y ya nadie se cree con derecho a explicar el fenómeno por la sustancia. A partir de ese momento se razonará siguiendo una variable francamente fenoménica. Se elegirá la temperatura y se intentará describir todo el fenómeno valiéndose de las indicaciones suministradas por termómetros, dispuestos regularmente a lo largo de una barra calentada en un extremo. (Bachelard, 2005, p. 104)

Aunque, siguiendo a Bachelard, Biot obtiene la ecuación diferencial trabajando en el terreno infinitesimal, es con el procedimiento desplegado por Fourier donde podemos apreciar en plenitud el estilo diferencial para completar el trabajo de Biot:

> Por otra parte, es fácil advertir la constitución de la ecuación diferencial de Fourier. Consideramos un pequeño paralelepípedo en el seno del sólido, y hagamos un balance de los intercambios térmicos entre ese volumen elemental y el resto del sólido.
>
> A través de una de las caras del paralelepípedo se observa inmediatamente que el flujo calorífico es proporcional a tres cantidades:
>
> 1] a la superficie de la cara rectangular;
>
> 2] al lapso durante el cual se estudia el fenómeno; suponiendo, por otra parte, que ese fenómeno permanezca constante si ese lapso es muy pequeño;
>
> 3] a la diferencia de temperaturas entre la materia ambiente y el pequeño paralelepípedo estudiado.
>
> Si a continuación se toman paralelepípedos cada vez más pequeños, esa diferencia de temperaturas se convierte en una diferencial y, así, se ha conquistado definitivamente el derecho de establecer la rigurosidad de las proporciones. Todo eso sólo da el flujo que entra por una cara del paralelepípedo. Pero como consideramos un elemento pequeño, el flujo a través de la cara opuesta siempre tiene el mismo sentido, ya que sólo puede variar de una manera continua. Dicho de otro modo, al seguir el flujo a lo largo de su marcha a través del pequeño paralelepípedo, lo volvemos a encontrar a la salida como el flujo que sale. Sin embargo, habrá variado ligeramente, habrá acrecentado su diferencial. Ahora bien, en la expresión del flujo, las cantidades geométricas siguen siendo las mismas; por lo tanto sólo es preciso considerar la diferencial de la diferencial que correspondía a la tercera cantidad antes mencionada; es decir, la diferencial segunda de la temperatura tomada como una función del punto geométrico en que se la examina. Si se resta ahora al flujo que sale el flujo que entra, se obtiene una expresión que ya no contiene sino la derivada segunda de la temperatura. Por supuesto, se deben considerar exactamente del mismo modo los otros dos pares de rectángulos que limitan al paralelepípedo y finalmente se concluye que la ganancia calorífica, con excepción de un factor, es la suma de las tres segundas derivadas de la temperatura calculada a lo largo de tres ejes paralelos a las aristas del paralelepípedo. El factor de proporcionalidad no es sino el coeficiente de conductibilidad. En verdad, se advierte que cuanto más conductor es el cuerpo, mayor es el efecto del movimiento calorífico que acabamos de estudiar.

> Esto no es sino la mitad del problema. Una vez hecho el balance nos preguntamos para qué sirve el calor retenido. Debe elevar la temperatura del paralelepípedo. Pero para elevar en un grado la temperatura de un cuerpo de un gramo, es necesario proveerle una cantidad de calor igual a su coeficiente de calor específico; en resumen, este calor específico es el que mide la capacidad de absorción calorífica del cuerpo. Por lo tanto, se va a introducir la densidad y el calor específico del cuerpo y se va a encontrar, explicitando todos sus términos, la expresión del enriquecimiento calorífico. Finalmente, si se relacionan los dos tiempos de la demostración y si se iguala la ganancia que resulta de los intercambios térmicos exteriores con su capitalización interior, se tendrá inmediatamente la ecuación diferencial de Fourier. De este modo, todos los coeficientes se descomponen y todos sus elementos se proveen y se iluminan de un sentido teórico, de un método de medida. La luz matemática ha venido a posarse sobre todos los detalles de la construcción y como finalmente, se llega a la ecuación diferencial de Biot, que ha recibido la sanción de la experiencia, se puede decir que el método de Fourier ha logrado la construcción matemática completa del fenómeno (Bachelard, 2005, pp. 105-106).

Referencias bibliográficas

Arnold,V.I.(1997).On teaching mathematics. Disponible en http://www.ceremade.dauphine.fr/~msfr/articles/arnold/PRE_anglais.tex

Arnold, V. I. (1989). *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. New York: Springer.

Artigue, M. (1988). Quelques aspects de la transposition didactique de la notion de différentielle. En C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique de mathémetique et de l'informatique*. Francia: La Pensée Sauvage.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario?. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10* (2), 117-134.

Bachelard, G. (2005). *El compromiso racionalista*. México: Siglo XXI.

Bos, H.J.M. (1974). Differentials, higher-order differentials and derivatives in the Leibnizian calculus. *Archive for history of exact sciences, 14* (1), 1-90.

Cantoral, R., Farfán R.M., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Número especial,* 83-102.

Dunham, W. (2009). When Euler Met L´Hôpital. *Mathematics Magazine*, 82 (1), 16-25.

Freudenthal, M. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht-Holland: D Reidel.

Goldblatt, R. (1998). *Lectures on the Hyperreals*, *An Introduction to Nonstandard Analysis*. New York: Springer.

GRECO, Groupe Mathematiques et Physique-Enseignement Superior du Didactique du CNRS. (1989). *Procedures Differentielles Dans les Enseignements de Mathematiques et de Pysique au Nieveau du Premier Cycle Universitaire*. París: IREM, UNIVERSITE PARIS VII.

Lakatos, I. (1978). Cauchy and the continuum: the significance of non-standard analysis for the history and philosophy of mathematics. En J.P. Cleave (Ed.), *Mathematics, Science and Epistemology (pp. 43-60)*. Cambridge Univ. Press, Cambridge/London/New York/ Melbourne.

Martínez Torregrosa, J. López-Gay, R. & Gras-Martí, A. (2006). Mathematics in Physics Education: Scanning Historical Evolution of the Differential to Find a More Appropriate Model for Teaching Differential Calculus in Physics. *Science & Education*, 15, 447-462.

Ongay, F. (1996). *Electromagnetismo y Formas Diferenciales*. Comunicación Interna N^{0}. D-96-02. México: CIMAT.

Pulido, R. (1998). Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar (Tesis inédita de doctorado) Cinvestav-IPN, México.

Pulido, R. (2004). Calculus Textbooks in the American Continent: A Guarantee for Not Understanding Physics. En McDougall, D.E. & Ross, J.A. (Eds.) *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 823-825). Toronto: OISE/UT.

Robinson, A. (1996). Non-standard Analysis. Princeton University Press, US.

Salinas, P. y Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12 (3), 355-382.

Salinas P., Alanís, J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C. y Garza, J. L. (2002). Elementos del Cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza. México: Trillas.

Autor:

Ricardo Pulido Ríos.
Departamento de Matemáticas, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Monterrey.
ricardo.pulido@itesm.mx