Acercamiento a funciones con dos variables

Approach to functions with two variables

José Armando Landa H.

RESUMEN

Discutimos una actividad de un conjunto de actividades diseñadas con el propósito de ayudar a los estudiantes en su primer contacto con la noción de funciones con dos variables. Discutimos cinco estrategias que desarrollaron los alumnos en el entorno del software Derive 6.1 para producir dos movimientos independientes para un punto. La metáfora: "un punto móvil que salta en una dirección y se desliza en otra" ayudó a los estudiantes a producir dicho punto en tres dimensiones. El proceso de producción de los movimientos del punto permite a los estudiantes tener presente la independencia entre las variables independientes, además la covariación entre la variable dependiente con las independientes.

PALABRAS CLAVE:

- *Funciones*
- *Dos variables*
- *Covariación*
- *Trayectoria*
- *Derive 6.1*

ABSTRACT

We discuss one of a set of activities designed with the purpose of helping students in their first contact with the notion of functions with two variables. We discuss five strategies developed by students in the environment of Derive 6.1 in order to produce two independent movements for a point. The metaphor "a moving point that jumps in one direction and slides in other direction" helps students to produce such point on three dimensions. The production process of movements of the point allows students realize independence between the independent variables, moreover covariation among dependent variable with independent variables.

KEY WORDS:

- *Functions*
- *Two variables*
- *Covariation*
- *Trajectory*
- *Derive 6.1*

RESUMO

Nós discutimos uma atividade de um grupo de atividades projetada com o propósito de ajudar os estudantes em seu primeiro contato com a noção de funções com duas variáveis. Nós discutimos cinco estratégias desenvolvidas por estudantes no ambiente de Derive 6.1 para produzir dois movimentos independentes para um ponto. A metáfora «um ponto móvel que pula para dentro de uma direção e ele desliza em outra direção» ajuda os estudantes para produzir tal ponto

PALAVRAS CHAVE:

- *Funções*
- *Duas variáveis*
- *Covariation*
- *Trajetória*
- *Derive 6.1*

Relime (2010) 13 (4-I): 129-145. Recepción: Abril 16, 2009 / Aceptación: Junio 23, 2010.

em três dimensões. O processo de produção dos movimentos do ponto permite os estudantes percebem independência entre as variáveis independentes, também o covariation entre variável dependente com variáveis independentes.

RÉSUMÉ

Nous discutons une activité d'un ensemble d'activités conçues afin d'aider les étudiants dans son premier contact avec la notion de fonctions avec deux variables. Nous discutons cinq stratégies que les élèves ont développées dans l'environnement de Derive 6.1 pour produire deux mouvements indépendants pour un point. La métaphore: "un point mobile qui saute dans une direction et glisse dans une autre" a aidé les étudiants à produire le point en trois dimensions. Le procès de production de mouvements du point permet aux étudiants se rendre compte de l'indépendance entre les variables indépendantes, en plus de la covariation entre la variable dépendent avec les variables indépendantes.

MOTS CLÉS:

- *Fonctions*
- *Deux variables*
- *Covariation*
- *Trajectoire*
- *Derive 6.1*

1 Introducción

En el entorno de papel y lápiz, las características o propiedades de gráficas o superficies de funciones con dos variables, suelen presentarse a los estudiantes como propiedades que se infieren a partir de intersecciones de planos con la superficie a estudiar. Planos paralelos a los planos que definen los ejes de coordenadas, que al hacer la intersección con la superficie $z=f(x,y)=x^2+y^2$, por ejemplo, producen curvas parabólicas que vienen a ser las curvas de contorno de la superficie. Dichas curvas resultan de la interpretación de las soluciones de sistemas de ecuaciones que se obtienen de las expresiones algebraicas de la superficie y de los planos.

La aproximación estática a las gráficas o superficies de funciones con dos variables, pareciera suponer que las superficies en tres dimensiones, los planos con las que se intersectan y las curvas de contorno, son objetos matemáticos u objetos geométricos bien conocidos por los estudiantes.

Los nombres con los que se identifican algunas superficies, como por ejemplo "paraboloide" para la expresión x^2+y^2; "silla de caballo" para x^2-y^2, pareciera hacer énfasis en el carácter de cuerpos geométricos en tres dimensiones, a la manera de esferas o cubos, más que ser una manera de representar geométricamente la relación funcional de dos variables independientes.

Un acercamiento estático, partiendo de expresiones algebraicas inertes, puede no ayudar a hacer sentido de algunas ideas que incluye la noción de función con dos variables, como la covariación entre las variables involucradas, o la consideración que las superficies son una manera de representar la relación funcional de una variable que depende de dos variables independientes.

En sistemas algebraicos computarizados, como el software de matemáticas Derive 6.1, es posible representar superficies en tres dimensiones a partir de expresiones algebraicas. Sin embargo, si la actividad de los estudiantes se reduce a teclear expresiones en dos variables y mirar sobre el monitor las gráficas que produce el software, si bien puede ayudar a aumentar el repertorio de superficies conocidas, el aspecto dinámico de la representación estática puede pasar desapercibido.

Sin embargo, el uso de la tecnología abre nuevas posibilidades para abordar nociones matemáticas. Las representaciones de la computadora ofrecen 'realismo' matemático y suprimen los cálculos tediosos. Propiedades de los sistemas algebraicos computarizados, se pueden aprovechar para aproximarse de una manera "dinámica", en particular, a las gráficas o superficies de funciones con dos variables. Estamos de acuerdo que *"… la idea de función requiere madurar la idea de covariación,…."* (Mariotti, Laborde & Falcade, 2003, p. 238).

En el entorno de Derive, las superficies de funciones pueden ser aproximadas como objetos conformados por conjuntos de curvas en el espacio. Conjuntos de curvas, que si bien corresponden con las curvas de contorno de la superficie, pueden ser producidos sin la necesidad de planos que al intersectar la superficie, generen dichas curvas. Las curvas de contorno pueden ser inducidas como "*trayectorias de puntos móviles o dinámicos*" (Laborde, 1999, p. 170), en nuestro caso puntos en el espacio tridimensional. Es decir, los puntos móviles pueden ser creados o producidos en el entorno informático, de manera que sus movimientos o desplazamientos sean restringidos a las curvas de contorno.

Uno de los principales aspectos de la versión 6.1 del software Derive para el acercamiento que proponemos, son los deslizadores (slider) que pueden insertarse en las ventanas de graficado. El deslizador es un dispositivo que representa a un número, al cual se le debe asignar un nombre, un valor inicial, un valor final y el incremento de variación. Posteriormente puede usarse el nombre del deslizador a la manera de variable para producir diferentes tipos de objetos, de acuerdo a la sintaxis del programa para cada uno de ellos. Al mover el deslizador cambia el valor del número y los objetos producidos con el nombre asociado al deslizador. Por ejemplo, si t es el nombre de un deslizador con valor mínimo -5, valor máximo 5 y 10 intervalos (lo notaremos en éste escrito como t: -5, -5, 10) la instrucción o comando $[t, 0, 0]$ produce un punto "dinámico" en la ventana de graficado de 3 dimensiones que se desplaza a lo largo del eje X al deslizar t.

Consideramos que la idea de función de dos variables no se reduce a "añadir" una variable independiente más, a la noción de función de una variable. En particular las representaciones gráficas de funciones con dos variables, pueden presentar dificultades a los estudiantes. Por ejemplo considerar a la superficie, no como un objeto geométrico, sino como una representación de la covariación entre una variable dependiente y dos variables independientes puede involucrar una complejidad no estudiada.

A pesar de la cantidad de estudios sobre el concepto de función desarrollados en las últimas décadas (baste mencionar Dubinsky & Harel, 1992; Kieran, 1993), el tópico de funciones con dos variables no parece haber sido abordado con demasiada frecuencia. Su estudio no ha sido abordado tal vez por considerar que se requiere un amplio manejo de la noción de función antes de pasar a la noción de funciones con dos variables, y por lo tanto, quienes llegan a ese nivel ya no deberían tener mayores problemas.

Consideramos no sólo que es un tema que necesita investigarse, sino que hay maneras de abordar las funciones con dos variables con estudiantes de bachillerato de manera interesante.

Por nuestra parte, con el propósito de ayudar a los estudiantes en un primer contacto con la noción de funciones con dos variables, elaboramos una secuencia de actividades para ser trabajada en el entorno de Derive 6.1.

El propósito del estudio, cuando se pide a alumnos de bachillerato producir en el entorno de Derive 6.1 dos movimientos diferentes para un punto en el espacio, fue detectar las dificultades que surgen.

Con este estudio pretendemos generar evidencias que pudieran ayudar a responder a las preguntas:

¿El uso de dos deslizadores para producir dos movimientos de un punto en el espacio, y la metáfora "*un punto que pueda 'saltar' de una parábola a otra y que pueda 'deslizarse' siempre sobre alguna de esas parábolas*", ayudan a inducir la consideración en los estudiantes de la independencia entre dos variables?

¿Al producir puntos dinámicos con el software, de qué manera es abordada la covariación de la variable dependiente con las independientes?

2 Metodología

El tópico de funciones con dos variables usualmente se aborda en escuelas de ingeniería, sin embargo en algunos países como Francia, se incluye en el currículum del último año del nivel medio superior. Se hizo un estudio piloto de la secuencia de actividades con estudiantes del primer año de ingeniería de la Universidad Autónoma Chapingo en el año 2005. Durante una estancia post doctoral, en el año 2006, en la Universidad Joseph Fourier de Grenoble, Francia, se tuvo la oportunidad de implementar dicha secuencia de actividades con estudiantes del Liceo Internacional de Grenoble. En dicha escuela, además de los cursos en francés, los estudiantes llevaban algunos cursos en español o en inglés.

La profesora que aceptó implementar la secuencia de actividades con su grupo, cedió inicialmente dos horas de su curso de matemáticas, pero una vez que conoció el trabajo, cedió 2 sesiones más de dos horas cada una, al darse cuenta que con dos horas de trabajo, difícilmente los estudiantes llegarían a abordar la actividad de nuestro interés o a resolver las últimas actividades donde se pide producir puntos dinámicos sobre superficies.

2.1. *La secuencia de actividades*

La idea central que guío el diseño de la secuencia de 18 actividades, fue la de inducir en los estudiantes la consideración de las gráficas de funciones con dos variables como trayectorias de puntos móviles o dinámicos sobre dichas superficies. Trayectorias que al ser construidas, permitieran reconocer la superficie de referencia. Con base al conocimiento que pudieran tener los estudiantes de funciones de una variable real, el propósito de la secuencia era ayudar a los alumnos a hacer la “transición” hacia funciones de dos variables.

A grandes rasgos, con las primeras 9 actividades se pretende desarrollar familiaridad con el software. En la actividad 10, se pide producir un punto en tres dimensiones que incluya dos movimientos diferentes. En las siguientes actividades se pide la construcción de conjuntos de curvas y puntos dinámicos que se deslicen sobre ellas y finalmente puntos dinámicos que se deslicen sobre superficies.

En las primeras nueve actividades se plantea producir objetos estáticos o dinámicos en tres dimensiones tales como puntos, segmentos, líneas rectas, planos, curvas parabólicas. Para producir los objetos que se piden en dichas actividades, se requiere usar literales de diferentes maneras.

Se indica usar x, y, z para producir los objetos estáticos, tales como rectas y planos. Algunos de los cuales se plantean como sigue: la producción de la recta $[x, 1, 1]$ se plantea como la manera de *“obtener todos los puntos”* del conjunto de puntos [-5, 1, 1], [-4, 1, 1], …. ,[5, 1, 1]; el plano $[x, y, 1]$ como la manera de *“obtener todas las rectas”* del conjunto de rectas $[x, -5, 1]$, $[x, -4, 1]$, … ,$[x, 5, 1]$; la curva $[x, 0, x^2]$ se pide obtener como *“el patrón de los puntos”*: [-3, 0, 9], [-2, 0, 4], …. ,[3, 0, 9]. Se sugiere usar los nombres t o u para las barras deslizadora o deslizadores que se requieren para producir objetos móviles tales como el punto $[t, 0, 0]$, el segmento $[t, 0, 0; t, 0, 2]$, la recta $[t, y, 1]$, el plano $[x, u, z]$.

En las primeras nueve actividades es necesario usar literales de diferentes maneras para producir los objetos pedidos, sin embargo es en la actividad 10 donde se requiere hacer uso por primera vez de dos deslizadores, para producir el punto que se pide.

El planteamiento de la actividad 10 es el siguiente:

ACTIVIDAD 10

a) *Grafica tres parábolas como se muestra en la figura 1-a*
b) *Grafica un punto que pueda "saltar" de una parábola a otra y que pueda "deslizarse" siempre sobre alguna de esas parábolas (figura 1- b).*

La petición de producir dos movimientos diferentes para un punto en el espacio, tiene el propósito de inducir la necesidad de considerar dos trayectorias diferentes para un punto en el espacio. De esa manera inducir la consideración de la gráfica como "… la trayectoria de un punto móvil" (Laborde 1999, p. 170).

En algunas de las primeras 9 actividades se requiere usar más de una literal para producir los objetos que se piden. Por ejemplo $[x, u, z]$ siendo u un deslizador, produce un plano paralelo a XZ que se desplaza a lo largo del eje Y. A pesar que los deslizadores pueden ser identificados con una literal, es hasta la actividad 10 donde hay que insertar dos de ellos para producir el punto que se pide.

En las actividades siguientes se pide producir curvas como en la figura 4 y los puntos (dinámicos) P, Q, R, S. Posteriormente se pide producir superficies como en la figura 5 y los puntos (dinámicos) P, Q, R, S.

En las siguientes actividades se requiere también hacer uso de dos deslizadores para producir puntos dinámicos sobre conjuntos de curvas y sobre superficies. Sin embargo, el momento crucial del acercamiento que proponemos, es la producción de un punto en el espacio que incluya dos movimientos bien diferenciados. Un movimiento de acuerdo a una trayectoria parabólica y otro movimiento lineal, ortogonal al primero.

Producir con un deslizador un movimiento para un punto en el espacio, puede no implicar demasiada complejidad para los estudiantes que ya han trabajado funciones de una variable en el plano bidimensional. Producir dos movimientos para un punto en el espacio se logra usando dos deslizadores. Los deslizadores pueden jugar el papel de dos variables independientes entre si, y el punto en el espacio el papel de representante de la variable dependiente.

De ahí que nos interese detectar la problemática que pueda surgir ante la necesidad de usar un deslizador a la manera de variable para producir un movimiento para un punto en el espacio, y otro deslizador ajeno, independiente del primero, para producir para el mismo punto otro movimiento independiente del primero.

2.2. *La experimentación*

La implementación de la secuencia de actividades se llevó a cabo como se describe a continuación.

Antes de iniciar la experimentación, se solicitó a la profesora del grupo que formara una pareja de estudiantes "avanzados" en su curso y otra pareja de estudiantes "atrasados". La idea era detectar si sus antecedentes determinaban su desempeño durante las actividades con la computadora.

Se implementó la secuencia de actividades con 22 estudiantes de 17-18 años de edad en el laboratorio de cómputo del Liceo Internacional, los cuales trabajaron en binas frente a una computadora. La profesora de matemáticas del grupo, estuvo presente en las sesiones ayudando en la parte logística y una compañera del laboratorio de investigación de la Universidad Joseph Fourier ayudó en la recopilación de los datos.

Al inicio de la primera sesión, empleando un proyector, el investigador expuso algunas de las propiedades del software en 15 minutos aproximadamente. Los estudiantes no habían tenido contacto previo con el software ni con la noción de funciones con dos variables. El investigador mostró a los estudiantes la sintaxis requerida para producir algunos objetos en la ventana de graficado de tres dimensiones de Derive 6.1. Mostró cómo producir los puntos estáticos $[1, 1, 1]$ y $[5, 5, 5]$; el segmento que los une: $[1, 1, 1; 5, 5, 5]$. La explicación del comando VECTOR la hizo con el ejemplo VECTOR $(n^2, n, 1, 10, .5)$; mostró la superficie $z=x^2+0$ y las herramientas de la ventana de graficado en tres dimensiones (3D Plot Window). En particular indicó cómo insertar una barra deslizadora (slider bar) que nombró con la letra t y mostró a los estudiantes cómo la superficie correspondiente a la expresión algebraica $z=x^2+t$, se desplazaba a lo largo del eje z, al deslizar t.

Después de la exposición del investigador, se entregaron a los estudiantes las 18 actividades impresas en papel, incluido un resumen de los comandos de Derive que se habían expuesto. Se indicó a los alumnos escribir en las hojas impresas, en los espacios que para tal efecto tenía cada actividad, los comandos o instrucciones que les permitían obtener los objetos pedidos. La finalidad era que hicieran un resumen de su experiencia por un lado, y por otro tener un registro escrito de su avance.

Cuando los estudiantes terminaban con la actividad 9, se les pedía trabajar la actividad 10 en alguna de las tres computadoras portátiles que habíamos llevado al laboratorio de cómputo de la escuela. En dichas computadoras se tenía instalado el software Camtasia, software que permite almacenar en archivos las grabaciones de sonido y la imagen del monitor de la computadora. De esta manera fue grabado el audio y el video durante el trabajo de los estudiantes al abordar la actividad 10.

Además de las notas de campo que se tomaron, a partir de los videos se hicieron transcripciones de los comentarios y expresiones verbales de los estudiantes y se transcribieron la totalidad de comandos que cada pareja de estudiantes introdujo al abordar la actividad. Si bien queda registrado en la ventana de Algebra de Derive 6.1 el conjunto de comandos introducidos, con el video es posible reproducir todas las veces que sea necesario, la actividad de los estudiantes.

Observando y escuchando la actividad de los alumnos en los videos, se obtuvieron los siguientes resultados.

3 Resultados

Ninguna pareja de alumnos logró terminar las primeras nueve actividades en la primera sesión. Sin embargo no surgieron mayores dificultades y, al parecer, lograron familiarizarse bien con la sintaxis y el software en general.

En la segunda sesión, a los estudiantes que habían resuelto más actividades en la sesión anterior, se les indicó trabajar en las computadoras portátiles. De esa manera se pudo grabar el trabajo de 5 parejas de alumnos al abordar la actividad 10. Por falta de equipo no fue posible grabar la actividad de todos los estudiantes.

Cada una de las 5 parejas, resolvió la actividad 10 de manera diferente, si bien se encontraron similitudes y diferencias entre ellas. La manera de abordar la tarea, pone de manifiesto las dificultades que enfrentaron los estudiantes. Las estrategias que desarrollaron les permitió superar dichas dificultades. El proceso pone de manifiesto la complejidad que encierra el primer contacto con la idea de dos variables.

Cabe mencionar que durante una estancia de una semana en Copenhagen, Dinamarca, se implementó esta secuencia de actividades con profesores de primaria que cursaban una maestría en educación. Se pudo observar que las dificultades que surgieron en los profesores y la manera de superarlas fueron similares a la de los estudiantes de bachillerato en Francia. Una vez resuelta dicha actividad, la producción de puntos dinámicos sobre superficies de funciones con dos variables, previa construcción de las curvas de contorno, no presentó mayores dificultades. Esto ayudó a confirmar que el momento crucial del acercamiento surge al inducir la necesidad de producir un punto con dos movimientos diferentes. La descripción detallada de las estrategias de los estudiantes, puede arrojar luz acerca de la problemática que encierra la necesidad de introducir una segunda variable independiente.

3.1. *Estrategias de los estudiantes*

Las consignas de la actividad 10, en la impresión original que se les entregó a los alumnos, fue de la siguiente manera:

ACTIVITÉ 10

a) Représente trois paraboles comment dans la figure 1-a
b) Représente un point mobile P qui peut « sauter » d'une parabole à une autre et qui « glisse » toujours sur une des paraboles (figure 1-b).

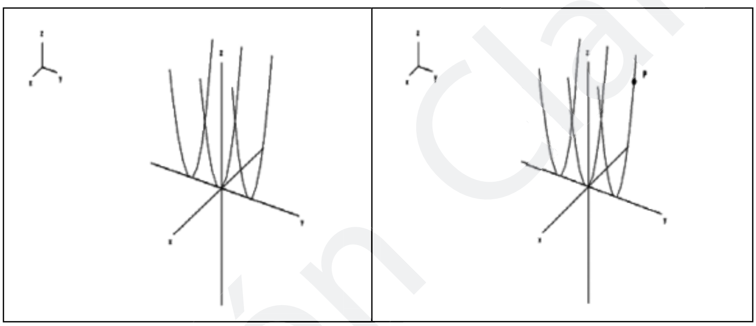

Figura 1-a *Figura 1-b*

Debido a la familiaridad que los estudiantes habían desarrollado con el software con las nueve actividades precedentes, en la primera parte de ésta actividad los alumnos no tuvieron dificultad para producir las parábolas que se muestran en la figura 1-*a*. El hecho que todos hayan producido primero la parábola $[x, 0, x^2]$ (como pudimos observar en los videos), sugiere que fue la referencia principal que tomaron en cuenta para producir las otras parábolas. La mayoría produjo $[x, 1, x^2]$ y $[x, -1, x^2]$, algunos $[x, -2, x^2]$ y $[x, 2, x^2]$ o también $[x, 3, x^2]$ y $[x, -3, x^2]$. Solo una pareja de estudiantes produjo las parábolas $[x, 0, x^2]$, $[x, 1, x^2]$ y $[x, 2, x^2]$.

Consideramos irrelevantes las estimaciones que los estudiantes hicieron de las intersecciones de las parábolas de la figura 1-*a* con el eje Y, por lo que consideraremos en este escrito que todos produjeron las parábolas $[x, 0, x^2]$, $[x, -1, x^2]$ y $[x, 1, x^2]$. Esta consideración no modifica las estrategias que desarrollaron los estudiantes para resolver la tarea siguiente, la cual es el foco de nuestra atención.

Los estudiantes produjeron de diferentes maneras el punto (que llamaremos P) que "salta" de una parábola a otra y que se "desliza" siempre sobre alguna de esas parábolas. En las actividades precedentes los alumnos habían usado un deslizador con diferentes nombres pero no habían usado dos o más deslizadores simultáneamente. A pesar que la actividad no indica usar deslizadores, la reacción de los estudiantes fue tratar de producir el punto P por medio de un deslizador.

Discutimos a continuación las estrategias de las cinco parejas de estudiantes. Dos de ellas usaron lo que llamaremos estrategias tipo I: produjeron primero tres puntos móviles que se deslizan sobre sendas parábolas. Otras dos estrategias (las llamaremos estrategias tipo II) produjeron primeramente un punto que "salta" por las parábolas. Mostraremos que en ambos tipos de estrategias, una vez que se obtuvo un punto que se mueve en una dirección, este se convirtió en el apoyo principal para obtener el movimiento en otra dirección.

Estrategias tipo I: Una vez que los estudiantes produjeron las parábolas $[x, 0, x^2]$, $[x, -1, x^2]$, $[x, 1, x^2]$, insertaron el deslizador que llamaremos t, con valor mínimo -5 valor máximo 5 y 20 intervalos (lo indicamos aquí como t: -5, 5, 20).

Una pareja de alumnos produjo el punto A (figura 2) con el comando $[t, 0, t^2]$ y al deslizar t el punto A se desliza sobre la parábola $[x, 0, x^2]$. Posteriormente crearon los puntos B: $[t, 1, t^2]$ y C: $[t, -1, t^2]$ (figura 2) los cuales se deslizan sobre $[x, 1, x^2]$ y $[x, -1, x^2]$, respectivamente, cuando se desliza t o se cambia su valor (los consideraremos sinónimos). Otra pareja de estudiantes produjo primero los tres puntos, uno sobre cada parábola por lo que al mover el deslizador se puede ver el movimiento de los tres puntos sobre sendas parábolas.

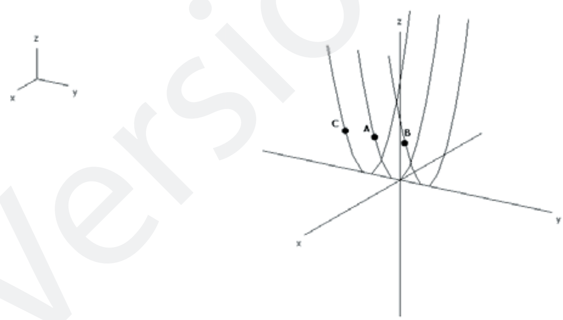

Figura 2

El que tres puntos diferentes A, B, C se muevan simultáneamente al deslizar la barra, pareció ser lo que indujo en los estudiantes la idea que, para obtener un solo punto con dos movimientos, los tres puntos deberían tener algo en común. En el video se puede observar que los estudiantes señalan con el puntero del ratón las intersecciones de las parábolas con el eje Y, o señalan la segunda coordenada del último punto producido (por ejemplo el número -1 en $[t, -1, t^2]$). El audio de la grabación permite escuchar que discuten entre ellos cómo cambiar ese valor. Una pareja introdujo $[t, \{-1, 0, 1\}, t^2]$ y posteriormente $[t, y, t^2]$ (en el último caso obtuvieron una recta móvil) lo que pone en evidencia que buscaban una manera de sustituir los números -1, 0, 1 en la segunda coordenada de esos puntos, por "algo" que incluyera los tres valores.

En las discusiones de los estudiantes se escuchan expresiones del tipo: "necesitamos cambiar esos valores" o "necesitamos una variable para -1, 0, 1". Uno de los estudiantes preguntó al investigador: "¿se puede insertar otro deslizador?", en un tono que parecía solicitar autorización para hacerlo.

Ambas parejas parecían no tener duda que el deslizador que habían llamado t les permitiría solamente deslizar sus puntos sobre las parábolas, es decir, en una sola dirección. Se les escucha decir con insistencia que "….además el punto debe saltar de una parábola a otra". Que el punto "deba saltar" parece ser la restricción que les sugirió insertar otro deslizador.

Los estudiantes insertaron una nuevo deslizador (lo llamaremos u) y aprovechando que el último comando introducido permanecía visible (digamos $[t, -1, t^2]$), reemplazaron la segunda coordenada por u, con lo que obtuvieron el punto de coordenadas $[t, u, t^2]$. En adelante nos referiremos a éste punto como P.

Debido a que los estudiantes usaron el deslizador u: -5, 5, 20, de manera similar a las actividades precedentes, provocó la necesidad de interpretar los movimientos de P. Incluso sucedió que una pareja produjo el punto P, lo suprimió y reiniciaron todo el proceso. La otra pareja deslizó solamente una de las barras y no parecían entender porqué no se movía el punto como ellos lo hubieran esperado. Por éste motivo los alumnos se vieron obligados a enfocar su atención en los valores de u. Este proceso dialéctico llevó a los estudiantes a cambiar los valores máximo, mínimo e intervalos de u hasta obtener el movimiento del punto P con los valores u: -1, 1, 2.

Estrategias tipo II. De manera similar a las estrategias tipo I, una pareja de estudiantes produjo las parábolas $[x, 0, x^2]$, $[x, -1, x^2]$, $[x, 1, x^2]$, e insertó el deslizador t: -5, 5, 20. Estos estudiantes reemplazaron el número 1 de la parábola $[x, 1, x^2]$ por t (i.e. no reescribieron todo, sino que suprimieron el número 1 y lo sustituyeron por t) lo cual produjo la parábola móvil $[x, t, x^2]$. Posteriormente produjeron el punto $[1, t, 1]$ sobre esa parábola móvil. Otra pareja produjo primero el punto $[-2, t, 4]$ y luego la parábola móvil $[x, t, x^2]$. Estos últimos suprimieron todas las parábolas que habían producido para ver mejor el movimiento de $[x, t, x^2]$. Ambas parejas cambiaron el valor inicial y final de t así como los intervalos hasta lograr que la parábola móvil se localizara en las posiciones indicadas en la figura 1-a con los valores de t: -1, 1, 2.

De manera similar a los estudiantes que desarrollaron la estrategia tipo I, parecía que no les provocaba confusión que su punto se moviera en una sola dirección, que el punto "saltara con la parábola" (expresión de los propios estudiantes) y que sin embargo no se deslizara sobre ella. El movimiento simultáneo del punto y la parábola, parecía sugerirles que eran ellos mismos los que debían de incluir de alguna manera el otro movimiento al punto para que, además de "saltar con la parábola" se pudiera deslizar sobre ella. Esto explica que insertaran otro deslizador u: -5, 5, 20 para obtener el otro movimiento. Suprimieron el punto (o no) y produjeron el punto $[u, t, u^2]$. Al deslizar alternadamente las barras, los alumnos verificaron la conjetura que habían considerado: dos deslizadores para dos movimientos diferentes del punto $[u, t, u^2]$.

Una estrategia "directa" fue desarrollada sólo por una pareja de estudiantes, la pareja de estudiantes "atrasados". Un alumno y una alumna que con el audio nos dimos cuenta que entre ellos se comunicaban en inglés. Antes de introducir cualquier comando, se les oye decir sin mayor discusión: "how to do? with two sliders!". Conjetura que ponen de inmediato a prueba, ya que insertaron primeramente los dos deslizadores t: -5, 5, 20; u: -5, 5, 20 y produjeron el punto $[t, u, t^2]$. De manera similar a las otras parejas de alumnos, una vez que produjeron el punto, la dificultad fue determinar los valores de u.

Considerando que éste es el momento crucial del acercamiento que proponemos a superficies de funciones con dos variables, regresaremos a él posteriormente.

3.2. *Actividades complementarias*

Mostramos a manera de ejemplo, algunas de las actividades de complemento a la actividad 10. Se pidió producir el conjunto de curvas dado en la figura 3 con el comando "VECTOR". Este comando se había empleado en actividades precedentes como una manera abreviada de producir conjuntos de objetos. Los estudiantes produjeron el conjunto de parábolas $[x, -5, x^2-5]$; $[x, -4, x^2-4]$; $[x, -3, x^2-3]$…$[x, 5, x^2+5]$, con el comando: VECTOR($[x, a, x^2+a]$, a, -5, 5,1) donde a toma el papel de los números -5, -4….5, en el conjunto de parábolas. De manera similar produjeron el conjunto de rectas $[-5, y, 25+y]$; $[-4, y, 16+y]$; $[-3, y, 9+y]$; $[-2, y, 4+y]$…. $[5, y, 25+y]$ con el comando VECTOR($[b, y, b^2+y]$

Una vez producidas el conjunto de rectas y parábolas, la producción del punto P: $[t, u, t^2+u]$ que "saltaba" entre las parábolas y que se podía "deslizar" sobre ellas, no presentaba dificultades. Los puntos móviles Q, R, S (figura 3), si bien requerían reflexionar cómo producirlos, confirmó que la dificultad de considerar dos deslizadores había sido superada. Solamente las coordenadas de Q: $[t, u, 0]$ involucraban ambas variables mientras que R: $[0, u, 0]$ y S: $[t, 0, 0]$

sólo una. Una vez producidos, los puntos Q, R, S y los segmentos respectivos, servían como apoyo visual de las coordenadas de P.

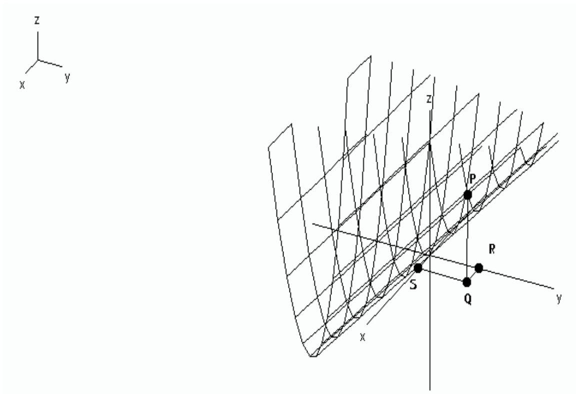

Figura 3

En actividades siguientes, para obtener el punto móvil P sobre una superficie como en la figura 5, se pidió a los estudiantes producir primero las curvas de contorno (figura 4).

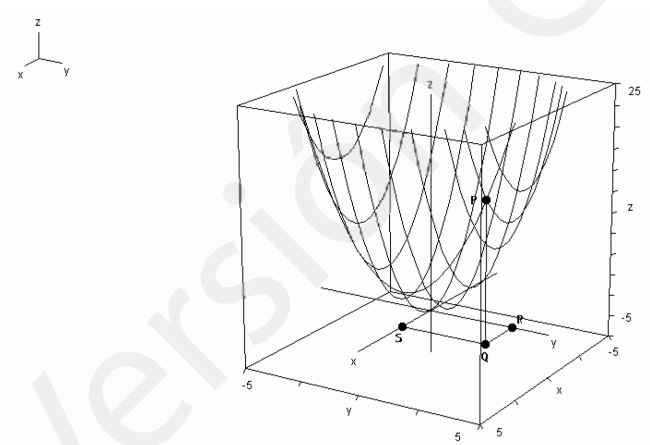

Figura 4

Las curvas fueron producidas con los comandos: VECTOR ($[x, a, x^2+a^2], a, -5, 5$) y VECTOR ($[b, y, b^2+y^2]$, b, -5, 5) en un primer momento y luego los puntos P: $[t, u, t^2+u^2]$, Q: $[t, u, 0]$, R: $[0, u, 0]$, S: $[t, 0, 0]$. La producción de dichos puntos no presentó mayores problemas, lo que confirma que la dificultad principal del acercamiento había sido superada. Las curvas de contorno y las dos barras deslizantes los ayudaba a producir los puntos móviles.

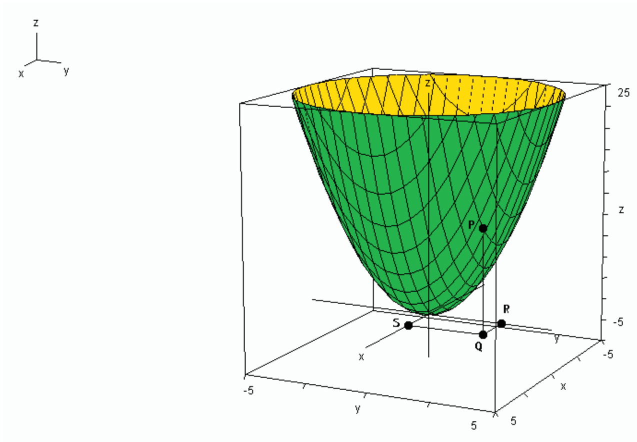

Figura 5

La superficie la produjeron como la manera de obtener "todas" las curvas de contorno, con el comando: $[x, y, x^2+y^2]$. Se indicó además a los alumnos que la notación matemática usual era $f(x,y)= x^2+y^2$ lo cual podían verificar en el entorno de Derive con la instrucción $f(x,y):= x^2+y^2$.

❹ Interpretación

En la actividad 10, todos los estudiantes usaron la letra x para producir las parábolas, casi todos usaron los nombres t y u en las barras deslizantes para producir el punto P con dos movimientos. No hubo mayor confusión con el uso de deslizadores (aunque si con sus valores iniciales y finales) dado que al tener un lugar asignado sobre el monitor de la computadora ayudó a tener presente el nombre del deslizador en las coordenadas del punto (primera, segunda, tercera) a introducir. Debido a los movimientos visualmente perceptibles la relación entre los objetos producidos y los deslizadores empleados (parábola estática o móvil, punto estático o móvil) no fue problema.

Los dos movimientos pedidos para el punto P indujeron la necesidad de usar sendos deslizadores los cuales jugaron el papel de variables independientes. A pesar que los estudiantes no sabían que es posible usar dos (o más) deslizadores en una sola instrucción o comando, los dos movimientos en direcciones diferentes ayudó a los alumnos a darse cuenta que no era posible obtenerlos con un solo deslizador, es decir, con una sola variable independiente.

En las estrategias tipo I, los estudiantes construyeron los movimientos de P por etapas. Por ejemplo, la pareja que primero produjo un punto sobre una parábola (que es diferente del punto pedido), movió el deslizador y posteriormente produjo otros dos puntos que se deslizaban sobre las otras parábolas. La construcción de esos puntos no estaba señalada en la tarea. Puede ser interpretado como el resultado del modo propio de los estudiantes de hacer sentido de la situación planteada. Sin embargo, la construcción de los tres puntos es un "punto muerto" en la búsqueda de solución, en el sentido que implicó para los alumnos tener que revisar su procedimiento.

La salida a ese "punto muerto" fue la construcción de un punto nuevo con dos deslizadores tomando en cuenta las restricciones de la tarea. El punto $[t, u, t^2]$ incluye la relación cuadrática entre la primera y tercera coordenada por lo que las parábolas $[x, -1, x^2]$, $[x, 0, x^2]$, $[x, 1, x^2]$ definen un primer conjunto de trayectorias que el punto P debe recorrer con su movimiento. La variable u del punto $[t, u, t^2]$ permite "saltar" entre las parábolas siguiendo una trayectoria diferente para cada valor de t, trayectorias que en éste caso no son explícitas.

En las estrategias tipo II, la construcción de una parábola móvil y un punto sobre ella (o viceversa) tampoco está señalada en la tarea. El movimiento de la doble entidad punto-parábola ayudó a la construcción del otro movimiento. Para los estudiantes parece ser claro que el otro movimiento de P debe de ser independiente del movimiento de la entidad punto-parábola.

En la tarea no estaba indicado producir primero un movimiento y luego producir el otro. Fue obra de los estudiantes (excepto una pareja) separar ambos movimientos de P y construir cada movimiento en momentos diferentes. A pesar que la trayectoria del segundo movimiento no es explícita, todos produjeron un punto con movimientos paralelos al eje Y. En las actividades posteriores la segunda trayectoria se hizo explícita visualmente, lo cual sirvió de apoyo para inducir la manera de producir la superficie.

5 Conclusión

Centramos nuestra atención en el primer contacto de los estudiantes con la necesidad de hacer uso de dos deslizadores, a la manera de dos variables independientes, para producir los movimientos de un punto en el espacio. La expresión con que se indicó a los estudiantes producir el punto P: "…debe "saltar" entre las parábolas y poder siempre "deslizarse" en alguna de ellas", sugiere ser una metáfora (Lakoff & Núñez, 2000) adecuada para inducir la consideración de la independencia de los dos movimientos de P, y como consecuencia, la independencia entre las variables implicadas. Consideramos que la idea de dos variables independientes es experimentada en el proceso de construcción de los movimientos del punto P por medio de las barras deslizantes.

Las propiedades del software permitieron a los estudiantes la construcción de los dos movimientos de P en momentos diferentes. Una variable fue considerada en la construcción de un movimiento en un primer momento. Posteriormente este movimiento ayudó a la construcción del otro movimiento. Debido a que no es posible deslizar simultáneamente dos deslizadores, no presentó dificultades a los estudiantes relacionar cada movimiento de P con cada deslizador, lo cual sugiere que induce en los estudiantes la idea de independencia entre las variables, la independencia entre t y u.

Dado que los valores de las coordenadas del punto P no son explícitas, a pesar que los valores de los deslizadores aparezcan sobre el monitor, la idea de covariación, es decir, la relación entre la variación de P con la variación de los deslizadores, es experimentada de manera cualitativa por los estudiantes, en el sentido que al mover los deslizadores el punto P se mueve.

Consideramos que ésta manera de aproximarse a las superficies de funciones con dos variables induce la idea que, la variación de las variables independientes (los deslizadores) produce un movimiento restringido del punto sobre la superficie. Es decir, la variación no simultánea de las variables independientes implica que el movimiento del punto sobre la superficie sigue siempre trayectorias definidas por las curvas de contorno.

La exploración de los alumnos sugiere que consideraban factible, producir los dos movimientos de P con un solo deslizador, quizá debido a su experiencia previa con funciones de una variable. Buscaban una manera de lograrlo pero haciendo uso sólo de un deslizador.

La introducción de un nuevo deslizador, a la manera de una nueva variable independiente, surge como necesidad, como recurso ineludible que permite asignar a P propiedades o atributos que una sola variable está imposibilitada de imprimirle a un punto en el espacio. Esto explica porqué una vez resuelta ésta actividad, no surgen ya mayores dificultades en los estudiantes al pedir producir puntos que se deslicen sobre otras superficies que les sirven de trayectorias.

El uso del software para producir el punto P, a la manera de un lente de aumento, pone al descubierto las dificultades que pueden enfrentar los estudiantes en su primer contacto con la idea de dos variables independientes.

Si bien el acercamiento abarca solamente sumas o productos de funciones $f(x)$ con $g(y)$, es decir, funciones con dos variables del tipo $f(x,y)=f(x)@g(y)$ siendo $@$ el operador $+$ o $*$, el aspecto dinámico pareciera disminuir el carácter de objetos geométricos a las gráficas y hacer énfasis en el aspecto no inerte de las expresiones algebraicas de funciones.

Referencias bibliográficas

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. In *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds). Mathematical Association of America. U.S.A.

Kieran, C. (1993). Functions, Graphing, and Technology: Integrating Research on Learning and Instruction. In *Integrating Research on the Graphical Representation of Function.* In T. Romberg, E. Fennema, & T. Carpenter, (Eds.). Lawrence Erlbaum Associates. Cap. 8. (pp. 189-237).

Laborde, C. (1999). Core Geometrical Knowledge for Using the Modeling Power of Geometry with Cabri-Geometry, *Teaching Mathematics and its Application*, *4* (18), 166-171.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). Where Mathematics Comes From. Basic Books.

Mariotti, M. A., Laborde, C. & Falcade, R. (2003). Function and Graph in DGS Environment. *PME 27*. (3), pp. 237-244.

Autor:

José Armando Landa H.
Universidad Autónoma Chapingo. *armanlanda@hotmail.com*