

Interpretación de estudiantes de bachillerato sobre la identidad de la variable en expresiones algebraicas

Interpretation of Baccalaureate students on the identity of the variable in algebraic expressions

Andrea Leticia López Pineda

RESUMEN

El trabajo que se expone, corresponde a una de las investigaciones que se están llevando a cabo dentro de una línea más amplia, en la cual convergen algunos planteamientos derivados, por un lado, de las propuestas filosóficas falibilistas, dialógicas en torno a la naturaleza de las matemáticas, y por otro de las vertientes dentro de la educación matemática como son la matemática crítica, la etnomatemática, las matemáticas humanísticas y de una propuesta particular dentro del campo de la educación, denominada poíesis educativa. En esta investigación se indaga particularmente sobre la interpretación por parte de estudiantes de bachillerato, del principio lógico de identidad aplicable a la variable, en expresiones algebraicas, sus dificultades e implicaciones en el trabajo con contenidos matemáticos.

PALABRAS CLAVE:

- *Variable*
- *Principio de identidad*
- *Bachillerato*
- *Pensamiento lógico*

ABSTRACT

The work that follows, is one of the investigations being carried out within a broader line, which some approaches are converging on the one hand, philosophical fallibility of the proposals, on the dialogical nature of mathematics as well as strands within mathematics education like critical mathematics, the ethnomathematics, math and humanities within a particular field of education, called poiesis education. This study looks specifically on the interpretation of high school students, the logical principle of identity in algebraic expressions and their difficulties and implications of working with mathematical content.

KEY WORDS:

- *Variable*
- *A principle of identity*
- *High school*
- *Logical thinking*



RESUMO

O presente trabalho corresponde a uma pesquisa em fase de conclusão, dentro de uma linha mais ampla, na qual convergem algumas abordagens, por um lado, das propostas filosóficas falibilistas, dialógicas sobre a natureza da matemática, e por outro de vertentes da educação matemática como a matemática crítica, a etnomatemática, a matemática humanística e de uma proposta particular no campo na educação denominada poiesis educativa. Nesta pesquisa se questiona, particularmente, a interpretação de estudantes de ensino médio sobre o princípio lógico de identidade aplicado à variável em expressões algébricas, as dificuldades e implicações no trabalho com conteúdos matemáticos.

PALAVRAS CHAVE:

- Variável
- Princípio de identidade
- Ensino médio
- Pensamento lógico

RÉSUMÉ

Le travail qui suit est une des recherches menée au sein d'une gamme élargie, au sein de laquelle convergent quelques uns des fondements, d'une part, des propositions philosophiques falibilistes, dialogiques sur la nature des mathématiques ainsi que des aspects de l'enseignement des mathématiques tels que la mathématique critique, l'ethno-mathématique, les mathématiques humanistes et une orientation particulière des sciences de l'éducation nommée poétique éducative. Cette étude porte tout particulièrement sur l'interprétation des élèves du baccalauréat du principe logique d'identité dans les expressions algébriques, sur leurs difficultés et implication dans les matières à contenu mathématique.

MOTS CLÉS:

- Variable
- Principe d'identité
- Baccalauréat
- Pensée logique

1 Introducción

Las matemáticas constituyen un pilar de las sociedades contemporáneas, la mayor parte de las actividades de los ciudadanos del orbe están circunscritas a un esquema de medición. Lo anterior trae como consecuencia la necesidad por parte de los Estados para formar a sus nuevas generaciones con una base fundamentalmente matemática, a fin de incorporarlas a los avances tecnológicos, científicos y culturales, logrados por la humanidad. La enseñanza de las matemáticas también se dice esencial por su carácter formativo en el pensamiento.

No obstante, los resultados en el aprendizaje de esta materia han sido históricamente desalentadores, a pesar de ello, no se cuestiona ni pone en duda

la necesidad de enseñar matemáticas, en casi todos los ciclos educativos y en casi todas las sociedades.

Una de las intenciones, generalmente aludida, para incluir las matemáticas en el currículo escolar es la formación de un pensamiento lógico, racional. Sin embargo, pareciera ser que en el campo educativo, se desconocen o ignoran otras posibilidades de pensamiento, tanto fundamentado en otras lógicas, como fuera de la misma, por ejemplo un pensamiento holístico, divergente, intuitivo, filial, estético, intuitivo, entre otros posibles.

El carácter de las matemáticas revisadas en las instituciones educativas, está cimentada en una lógica aristotélica, y es eminentemente axiomática, a pesar de que varios autores, entre ellos, Courant y Robbins (1979) y Kline (2000), han reconocido abiertamente que la creación matemática obedece no tanto a la lógica contenida en ella, sino a otras condiciones como la intuición, el reconocimiento de la belleza en este campo o al arte mismo que la constituye.

Dentro la Filosofía de las Matemáticas, se ha cuestionado el carácter absolutista, descriptivista, monológico, atribuido a los objetos matemáticos, proponiéndose otras perspectivas -falibilista, no descriptivistas, dialógicas-. De igual manera, en estudios pertenecientes a la etnomatemática se han encontrado versiones matemáticas que parecen desconocer los principios fundamentales en las matemáticas actuales, un ejemplo lo encontramos en el caso de la cultura navajo en torno al principio de identidad (Bishop, 1999).

Por otro lado, los trabajos pertenecientes a la corriente de las matemáticas críticas (Skovsmose y Nielsen, 1996 y Gates, 2004), han puesto en evidencia el papel que parece haber tenido la educación de las matemáticas en la marginación y segregación social.

Lo anterior nos lleva a reconocer a las matemáticas, como un producto cultural, situado histórica y socialmente, por tanto falible y en continuo cambio, y nos lleva también a formular la interrogante sobre si la educación matemática puede constituirse como una herramienta de orientación del pensamiento a fin de favorecer, por un lado de construcción de la sociedad contemporánea y por otro lado de una posible discriminación y segregación social.

Considerando igualmente que se pretende formar estudiantes pensantes, lógicos, racionales a través de la enseñanza de la matemática, cabe preguntarse por qué debiera procurarse un pensamiento con ese carácter.

En vista de los planteamientos anteriores, algunas de las interrogantes generadas para nuestra línea de investigación fueron las siguientes¹: determinar si el carácter predominantemente axiomático de la matemática puede ser un

¹ Otros trabajos dentro de ésta línea que se encuentran en proceso, incluyen, por ejemplo, indagaciones sobre si la enseñanza de la geometría euclidiana afecta la comprensión del espacio físico; o como interviene la interacción social en el trabajo con tecnología computacional, entre otros.

obstáculo para su aprendizaje; indagar si la enseñanza de las matemáticas cumple uno de sus objetivos referidos a direccionar la forma de pensar a un pensamiento lógico, racional, excluyendo otros y; si la pretensión de orientar dicho pensamiento sería, por un lado, un elemento de rechazo por parte de los estudiantes al trabajo en esta área del saber y por otro lado, tratar de identificar las implicaciones en esta orientación de las formas de pensar en los estudiantes.

De manera particular en este trabajo, se pretende investigar cómo uno de los principios lógicos aristotélicos, específicamente el principio de identidad ($A=A$), es asumido, por parte de los estudiantes de bachillerato en una institución pública del estado de Querétaro, para interpretar y manipular expresiones algebraicas.

Este principio tiende a establecerse como ley universal del pensar, ley que define cómo hay que pensar, tal modo es por antonomasia, lógico, racional, forma de pensar que se ha vuelto canon en la sociedad contemporánea, constituyéndose igualmente, como uno de los fundamentos en el quehacer matemático.

En el presente trabajo se abordan específicamente interrogantes sobre las posibles interpretaciones que realizan los estudiantes sobre el principio de identidad, indagamos si asumen una interpretación canónica o presentan interpretaciones diversas, esto último permitiría, en primer lugar, vislumbrar una posible fuente de dificultad para acercarse a los contenidos matemáticos y en segundo lugar, impulsaría una posible vertiente de investigación sobre sus posibles alcances en la formación del pensamiento.

② Implicaciones de la filosofía y psicología en educación matemática

Los discursos en torno a la naturaleza de las entidades matemáticas, así como de los programas de investigación en educación matemática, ponen de manifiesto la existencia de diversas posturas, algunas de ellas denominadas posmodernas, falibilistas, dialógicas y no descriptivistas, las cuales asumen que el saber matemático está caracterizado por su contextualización cultural e histórica y, por ende, consideran que dicho saber es falible, convencional y situado, estas propuestas surgen como respuesta a posturas absolutistas, modernas y descriptivistas (Ernest, 1994, 1996 y 2004, Moslehian, 2003, 2004, Sierpiska y Lerman, 1996, Alemán, 2001, Tymoczko, 1994). En las primeras, los principios lógicos son susceptibles de cuestionamiento. De ahí que los programas de investigación en educación matemática puedan coincidir con algunas de ellas en su formulación teórica al exponer la forma en la que se genera el saber matemático en los estudiantes.

Por otra parte podemos afirmar que el principio lógico de identidad, como elemento fundamental en el desarrollo del quehacer matemático y por tanto esencial para su comprensión, tiene una amplia trayectoria histórica. Los orígenes del principio de identidad pueden encontrarse de acuerdo a Heidegger (1990) en los escritos de Parménides, siguiendo una trayectoria, de gran impulso, tanto para la filosofía como para la historia de las ideas y por consiguiente para la definición del pensar occidental. Por la naturaleza de este trabajo, no ahondaremos en la genealogía de dicho principio², sólo quisiéramos apuntar que a partir de su instauración como principio con Aristóteles, y su impacto en el trabajo de su discípulo Euclides, específicamente manifestado en los *Elementos*, ha dejado una clara orientación del modo de proceder en matemáticas, principios que no sólo no se cuestionaron por siglos, sino que se siguieron fundamentando con grandes y fuertes propuestas filosóficas, ello permitió la conformación de un discurso alrededor de este principio el cual lo tornó incuestionable, recientemente, algunos pensadores abrieron interrogantes en torno a éste (Heidegger, 1964, Deleuze, 1983, entre otros). En la travesía discursiva, histórica, acerca de este principio, los significados, sentidos y alcances han sido muy variados, generando un sinfín de acepciones respecto al mismo. Lo paradójico en esa trayectoria, es reconocer que dicho principio de identidad es lo menos idéntico a sí mismo.

Cabe señalar que las propuestas de Heidegger (1964) develan la emergencia de la matemática como el área del saber por excelencia, cuyo sustento lo constituye el principio de identidad, así mismo, va mostrando cómo la matemática ha venido conformando una realidad específica. Su conocimiento y dominio proporcionan el fundamento de toda ciencia denominada “moderna”, la cual viene orientando la visión de mundo y con ella, de verdad. De esta perspectiva de ciencia también, forman parte actualmente las “ciencias de la educación”, que son finalmente las que guían el carácter de la educación a nivel global.

Aún cuando pensadores y filósofos contemporáneos asumen la dificultad para establecer verdades absolutas, ya que la producción humana es histórica, y por tanto cualquier ley, principio o teoría debe ser considerada en su relatividad cultural, en la práctica educativa generalmente se pretenden enseñar como verdades últimas los saberes matemáticos. En estos escenarios generalmente no se cuestiona su veracidad ni se asume su relatividad en cuanto a su participación en la concepción del mundo.

Sobre todas las “verdades” enseñadas en las aulas, las matemáticas son las más incuestionables, pero cabe aclarar que se trata de “las matemáticas escolares”. Entre éstas últimas y las matemáticas generadas por la actividad de los matemáticos existen diferencias importantes.

² Un genealogía del principio de identidad queda expuesta en López, A., (2008) Cuando $A = A$ es imposible en Zapata, *La educación para pensars-se (pp.105-125) México. Fundap.*

Las matemáticas que se enseñan, de manera general y tradicional, se restringen a unas matemáticas de carácter instrumental, y no siempre se clarifican su pertinencia en los diferentes campos del saber ni su estructura conceptual.

En el concierto de perspectivas para explicar la construcción de conocimiento en general y de manera particular el conocimiento matemático, surge la propuesta psicogenética piagetiana, de gran influencia en los ámbitos educativos contemporáneos, y particularmente en México. Esta perspectiva da por sentado que el intelecto humano evoluciona recorriendo una vía regia que conduce a un pensamiento lógico, hipotético deductivo. Este último representaría la culminación del desarrollo del intelecto. A este discurso subyace una postura metafísica en dos sentidos, en el primero al señalar la existencia de una “naturaleza humana” -de carácter racional, universal-, y en el segundo, al considerar una línea de desarrollo humano particular, lo que implica una metáfora evolutiva (Zapata, 2003a).

La propuesta psicogenética en sus fundamentos entrelaza de manera admirable la psicología del desarrollo, la matemática y la lógica, no obstante, cada una de estas tres áreas de explicación representa el fundamento de las otras. Más aún, los postulados de donde se parte para dicha conjunción parecen quedar sustentados en una visión moderna (Skovsmose y Nielsen, 1996).

En esta perspectiva, se afirma que la asunción del principio de identidad generalizado se lograría en la etapa de las operaciones formales (Piaget, *et. al.*, 1985). Por tal motivo, un joven, en este nivel de desarrollo, asumiría de manera obvia la identidad. Sin embargo, cabe preguntarse, ¿qué tan evidente y asequible es en realidad el principio de identidad para los jóvenes estudiantes de bachillerato, quienes se encuentran precisamente, según esta propuesta teórica, en la etapa de asimilación del lenguaje formal de la matemática?

Para responder dicha interrogante, nos planteamos por un lado, determinar si en matemáticas, el principio de identidad ($A=A$), puede ser evidente y asequible para los estudiantes de bachillerato, y si éstos interpretan tal principio de manera unívoca y canónica o conlleva otras posibles interpretaciones. Por otro lado, proponemos explorar si estas interpretaciones tienen relación con su desempeño en la materia.

3 Situación de indagación

Considerando que las matemáticas son, como sostiene Heidegger (1964), una manera de pensar el mundo, y no pueden ser consideradas como la única manera de pensar, y por tanto, pueden entenderse como un fenómeno social,

como construcciones culturales y por ende falibles, cabe suponer que en los espacios educativos se abrirían diversas posibilidades de interpretación.

Para aproximarnos a las posibles interpretaciones de los jóvenes acerca de la identidad de la variable en expresiones algebraicas llevamos a cabo una serie de indagaciones tanto a través de 2 cuestionarios (A y B), como de entrevistas (E_1 y E_2) de corte clínico.

Trabajamos con 154 estudiantes de bachillerato, considerando que estos jóvenes han tenido ya una experiencia mínima de tres años con el Álgebra, y dando por supuesto, de acuerdo a una perspectiva psicogenética, que se encontrarían en una etapa formal del pensamiento, indagamos si los jóvenes tendrían la posibilidad de interpretar canónicamente el principio de identidad de la literal en expresiones algebraicas. Los estudiantes participantes pertenecen a dos instituciones públicas de la ciudad de Querétaro.

Desarrollamos el trabajo en tres momentos. El primero consistió en una entrevista (E_1) a 15 estudiantes, cuya finalidad fue acercarse a la manera en que interpretan el principio de identidad en objetos concretos, así como en su representación aritmética o algebraica. En un segundo momento examinamos a través de un cuestionario (A), la interpretación que dan los jóvenes a este principio cuando se les pide relacionar figuras geométricas con expresiones algebraicas y deducir expresiones algebraicas a partir de datos relacionados con figuras geométricas (40 jóvenes). Finalmente en el tercer momento exploramos las posibilidades de reconocimiento del principio de identidad ($x=x$), aplicado a la literal en una expresión algebraica. Esto es, si el joven podría reconocer que una literal es la misma, independientemente del número de veces que aparece en dicha expresión o si se encuentre acompañada de cualquier otro elemento -coeficiente, exponente o signo-. Para ello se aplicó el cuestionario B a 89 estudiantes y se entrevistó a 10 jóvenes.

A continuación presentamos las características de los instrumentos y las respuestas, resultados y en su caso, algunas de las argumentaciones dadas por los estudiantes.

3.1. *Entrevista sobre el principio de identidad en objetos físicos y simbólicos* (E_1)

Para la realización de las entrevistas formulamos una serie de preguntas guías. En las entrevistas, a partir de las respuestas dadas por los estudiantes ampliamos el interrogatorio para aclarar la intención o el carácter de su respuesta.

Algunas de las preguntas para la primera entrevista (E_1) fueron las siguientes:

Antes de iniciar el interrogatorio se establece un diálogo preliminar, para favorecer la relación y se anotan los datos generales.

1. *¿Tú crees que estas dos hojitas son iguales?... (Se le muestran al estudiante dos hojas de ficus muy semejantes)*

¿Por qué?

Esta pregunta intentó acercarse a la interpretación de la igualdad o semejanza y de preámbulo a la identidad.

2. *¿tú crees que esta hoja (se señala una de las hojas) es igual con esta hoja? (se señala la misma hoja,- es decir consigo misma-).*

¿Por qué?

La pregunta anterior indagó la asunción de la identidad con respecto al objeto.

Se emplearon diversos objetos; naturales, artificiales y simbólicos (aritméticos y algebraicos).

En esta entrevista se observó la dificultad por parte de los estudiantes, para aseverar de manera categórica un señalamiento de igualdad entre los objetos mostrados, también encontramos que existe una gran dificultad para reconocer y abordar la pregunta referida a la identidad, como se muestra a continuación:

Entrevistador: ¿Este lápiz es igual a sí mismo?

Estudiante A: Como que es igual a sí mismo... yo digo que por que pues... no tiene fachas, pero, es complicada esta pregunta pero...

Entrevistador: ...tu que piensas ¿es igual a sí mismo?

Estudiante A: pues debe de ser...¿no?... si no de lo contrario no sería un lápiz...

Podemos afirmar que, a los jóvenes no les resulta tan natural hacer aseveraciones contundentes acerca de la igualdad e identidad de los objetos. Tal pareciera que atienden a múltiples perspectivas a la vez, ya que son capaces de reconocer que son iguales bajo ciertas condiciones y también diferentes en otras. De la misma manera, en lo referente a la igualdad entre dos objetos, es visible que dicha igualdad tendría que tener un punto de referencia, al no tenerla, las respuestas se vuelven imprecisas.

Resulta importante señalar que la lógica de los jóvenes no obedece a un si o no, a un cierto o falso, sino que pueden pensar de múltiples maneras, y en función de diversas condiciones, pueden aceptar de manera provisional cualquiera de ellas pero nunca de manera definitiva, lo que puede llevar a múltiples interpretaciones cuando se intenta trasladar la identidad al contenido matemático.

Cabría la pregunta acerca de si la dificultad para reconocer la identidad estaría dada por su relación con los objetos concretos. Ello tal vez pudiera explicarse por la dificultad que representa mezclar los dos ámbitos: el real y el matemático. Para dar respuesta a dicha interrogante la siguiente indagación estuvo referida en un contexto matemático pero todavía con una relación cercana a la experiencia de los jóvenes como es el campo de la geometría.

3.2. Cuestionario sobre la representación simbólica de figuras geométricas (A)

Este cuestionario tuvo la intención de indagar las interpretaciones que realizan los jóvenes sobre el principio de identidad en la relación entre expresiones aritméticas y algebraicas con figuras geométricas. Estuvo compuesto por 4 ítems en los que se le presentaba una figura geométrica y se le solicitaba elegir aquella o aquellas expresiones que la pudiera representar, como se muestra a continuación:

“A continuación se presenta una serie de figuras y a su derecha un conjunto de expresiones, tacha el inciso o incisos que correspondan a la figura, puedes marcar una o más opciones. Proporciona la justificación”.

Figura 2



- a) $1 = 1$
- b) 1
- c) $x = x$
- d) $x = y$
- e) Otra (escribela) _____

Por qué?

Se presentaron igualmente: en la figura 1 una línea, en la figura 3 dos círculos y por último en la figura 4 un cuadrado y un rectángulo.

En las respuestas dadas a este cuestionario encontramos que:

- Para la mayor parte de los estudiantes las expresiones $1 = 1$ y $x = x$, se refieren fundamentalmente a la igualdad entre dos objetos o elementos, es decir no tienen sentido cuando se trata de un solo

elemento, sólo un 5% de los jóvenes asumen para estas expresiones, una representación de identidad. Incluso, para el caso del triángulo, las respuestas que marcaron como $1 = 1$ y $x = x$, se referían a “un lado igual a otro lado”, como se señala en los siguientes ejemplos:

<i>Estudiante</i>	<i>Respuestas ante el triángulo</i>	<i>Justificación</i>
<i>Yanelit</i>	$1 = 1$ y $x = x$	Todos los lados son iguales
<i>Denice</i>	$x = x$	Porque un lado es igual a los otros lados y así me imagino la representación de que un lado = lado, $x = x$

- Las posibilidades de interpretación por parte de los estudiantes son muy amplias y en algunos casos muestran una clara divergencia con las normas canónicas del trabajo escolar en la materia, como lo muestran las respuestas dadas a la representación del cuadrado y del rectángulo:

Sheila: “ $x = y$ ” “Porque aunque tienen las mismas formas no son iguales (porque 1 fue diseñada a un tiempo y el otro a “otro” tiempo...por lo mismo NO son iguales

Karina: “ $x = y$ ” no hay diferencia entre los 2 y son iguales

F.J.: “ $x = y$ ” es similar hablando en figura porque no es igual.

Alee: “ $x = y$ ” porque si estuviera expresada en valores el valor o la expresión sería la misma.

Brenda: “ $x = y$ ” una es igual a la otra

- Lo más notable en las respuestas dadas a este cuestionario, fue la diversidad en la interpretación a expresiones como “ $x = x$ ”, “ $x = y$ ” y “ $x \neq y$ ”, así como la falta de diferenciación entre estas expresiones, ya que algunos estudiantes las señalan como expresión de dos objetos o elementos iguales en un aspecto, pero diferentes en otro; o como la expresión de dos objetos diferentes, para el caso de “ $x = x$ ”, y “ $x = y$ ”, o de iguales en el caso de “ $x \neq y$ ”.

3.3. Cuestionario referido a la identidad de la literal en expresiones algebraicas (B)

Este cuestionario estuvo integrado por 10 reactivos, a través de ellos se intentó indagar, por un lado, si podrían identificar el papel de la variable en la expresión y en segundo lugar, si reconocían la identidad de la variable, esto es que la variable tuviera el mismo valor dentro de la expresión, un ejemplo del tipo reactivos empleados se presenta a continuación:

Para cada una de las siguientes expresiones indica cuántos valores puede tomar cada letra

1. $3 + a + a = a + 10$ _____
2. $x = x$ _____

Se aplicó a 89 estudiantes de los tres niveles de bachillerato. Se encontró que alrededor de la tercera parte de los estudiantes señalan que la variable tendría más de un valor en expresiones en donde la literal se presentaba en varias ocasiones. Los resultados se muestran en el siguiente cuadro (No. 1)

CUADRO 1
Reconocimiento de la identidad de la variable en expresiones algebraicas

SEMESTRE	RECONOCIMIENTO DE LA IDENTIDAD			
	SI	NO	INDETERMINADO	TOTAL
1ER SEMESTRE	32.35 %	35.29 %	32.35 %	
N	11	12	11	34
3ER SEMESTRE	33.33 %	23.33 %	43.33 %	
N	10	7	13	30
5°. SEMESTRE	12.00 %	48.00 %	40.00 %	
N	3	12	10	25
TOTAL				
PORCENTAJE	26.97 %	34.83 %	38.20 %	
N	24	31	34	89

Observamos que un número muy significativo de estudiantes no reconocen la identidad de la variable en una expresión, y resulta todavía más notable el que los estudiantes de quinto semestre tengan el mayor porcentaje de omisión del mismo.

Al hacer el análisis estadístico con la prueba chi cuadrada, en relación a las diferencias entre grupos, encontramos que no hay una diferencia significativa, con respecto al reconocimiento o no de que la literal tendría el mismo valor dentro de la misma expresión ($\chi^2=5.811$, $p=0.214$, $g.l.=4$). Lo sorprendente es que parece no haber diferencia a lo largo de la educación en este nivel. Es decir, el paso por los diferentes semestres no parecen tener incidencia en el señalamiento de la identidad de la literal.

Con respecto a la relación entre el puntaje del cuestionario con las calificaciones obtenidas durante el semestre, observamos que si hay una correlación significativa cuando se analiza a toda la muestra en su conjunto ($r=0.313$, $p=0.003$, $N=89$). Al determinar la correlación entre el puntaje obtenido en el cuestionario y las calificaciones semestrales para cada semestre, encontramos que fue significativa en los semestres primero y quinto: $r=0.388$, $p=0.023$, $N=34$ y $r=0.458$, $p=0.021$, $N=25$, respectivamente. Sin embargo dicha correlación no fue significativa en el tercer semestre ($r=0.143$, $p=0.541$, $N=30$).

Cabe señalar que una posible explicación de que en el tercer semestre no se encontrara una correlación significativa pudiera ser porque el contenido de la asignatura de matemáticas para este semestre fue el de Geometría, lo que implica un menor manejo de expresiones algebraicas.

Se analizó igualmente la relación entre el reconocimiento de la identidad de la literal con el papel de la misma (Trigueros, Ursini y Lozano, 2000), observándose una correlación significativa ($r=0.261$, $P=0.013$, $N=89$). Un dato relevante fue que ninguno de los estudiantes que omitía la identidad de la literal pudo reconocer el papel de la misma. Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes puede operar, y desempeñarse en la asignatura de matemáticas sin tener claro qué papel juega la literal dentro de la expresión, y que como se mencionó en un trabajo anterior (López, 1996), los jóvenes parecen manipular u operar con las expresiones algebraicas solo mecánicamente, sin comprender el significado de dichas manipulaciones.

Presentamos a continuación un ejercicio de interpretación con respecto al cuestionario para mostrar la particularidad de las respuestas de los estudiantes, ahora mediante la realización de una entrevista para ahondar en las argumentaciones de los jóvenes con respecto al principio de identidad de la literal.

3.4. *Entrevista sobre la identidad de la variable en expresiones algebraicas* (E₂)

Para esta segunda entrevista empleamos el cuestionario B con el fin de acercarse a las explicaciones que daban los jóvenes con respecto a dichos reactivos.

En las argumentaciones dadas por los jóvenes, se pone en evidencia la dificultad para reconocer, en algunos casos, el principio de identidad referido a la literal en las expresiones algebraicas.

Otro aspecto de gran relevancia lo encontramos en la expresión $x = y$, ya que como pudimos observar no es una expresión accesible para los estudiantes, en tanto que para algunos puede significar un número igual a sí mismo, o dos números diferentes, ambas afirmaciones quedan fuera de su interpretación canónica. Algo notorio fue que para algunos de los estudiantes el hecho de presentar un signo de igualdad no representa necesariamente que ambos términos sean iguales y terminan por asignar valores arbitrarios que no corresponderían a una igualdad.

4 Conclusiones

A partir de lo expuesto anteriormente, pareciera que a los estudiantes les resulta un tanto confuso hablar de la identidad, es decir de algo que puede ser igual a sí mismo. Una parte considerable de los estudiantes ignora la identidad de la variable, tanto en cuanto mantener un valor único para la literal, como para identificar el rol de la identidad dentro de la expresión. Así mismo, la necesidad mostrada por los jóvenes de señalar que una expresión como $1 = 1$, $x = x$ implicaría dos elementos que fueran iguales, nos lleva a afirmar nuevamente que dicho principio no parece ser muy evidente en una primera aproximación, ello quiere decir que las expresiones $x = x$, ó $1 = 1$, implican para una gran parte de los jóvenes dos elementos y no un elemento igual a sí mismo, como se vio reflejado en varios de los instrumentos. Pareciera que un número considerable de estudiantes omite o no percibe de manera evidente, el principio de identidad, a pesar de ser considerado como un principio fundamental en el trabajo de contenido matemático.

Este trabajo muestra de la dificultad por parte de los estudiantes para interpretar canónicamente el principio de identidad, y pone en evidencia su dificultad para saber: a) cómo debe ser interpretado dicho principio cuando se trata de trabajar con literales dentro de las expresiones algebraicas y b) cuándo tienen que atender al aspecto que cambia y cuándo al que se mantiene estable.

Estos resultados, por tanto, coinciden con una postura posmodernista de las matemáticas, en el sentido de señalar que éstas son creadas en un momento histórico, culturalmente situadas, en las cuales se establecen una serie de principios (axiomas) que son fundamentales para trabajar dentro de esta disciplina, sin embargo estas reglas, si bien son pertinentes para esta área del saber, no parecen responder a la forma en la que los estudiantes piensan comúnmente, a pesar de que posturas cognitivas como el constructivismo lo hagan parecer.

La identidad por consiguiente no puede establecerse de manera absoluta, se habla de identidad en la medida en que se contextualiza en un momento o discurso específico, y depende desde donde se aborde y para qué fines. Cabe señalar que tanto el papel que juega la literal en una expresión como su identidad generalmente no sólo no son enfatizadas, sino que en muchas ocasiones se pasan por alto. Consideramos que de no apreciar el sentido que este principio tiene para ellos (así como el que adviene en la matemática y/o filosofía que lo constituye), se obstaculiza la posibilidad de acceder al saber matemático, en especial cuando se abordan expresiones algebraicas.

Así mismo, vislumbramos que en una orientación a través de la “instrucción” hacia formas de pensamiento matemático formalizado, se cancelan algunas formas de pensamiento divergentes a un pensamiento lógico formal. Pensamiento que efectivamente no es único, ni total, -aunque la civilización occidental contemporánea imponga la creencia contraria-.

Lo anterior abre la necesidad de girar la mirada hacia la distancia entre las reglas establecidas por la disciplina, situadas histórica y culturalmente, y por tanto convencionales, con respecto a las interpretaciones que realizan los jóvenes de las mismas.

Una opción que abre posibilidades de diálogo entre estudiantes y maestros lo constituye la poíesis educativa que tiene como principios fundamentales reconocer a la educación como un arte, en el cual están comprometidos tanto estudiantes como maestros en una posición ya no asimétrica de experto a novato, de conocedor a ignorante, sino en una relación simétrica, en la cual el diálogo, la filia y la libertad son elementos centrales tanto para la creación de nuevas obras como para la interpretación y con ello de reactualización de las existentes (Zapata, 2003b).

Pensar es de muchas, de múltiples, de infinitas maneras, tantas como de ser, de vivir, de crear. En los escenarios educativos es primordial admitirlo, reconocerlo, para abrir así una verdadera interlocución entre profesores y estudiantes.

Referencias bibliográficas

- Alemán, A. (2001). *Lógica, matemáticas y realidad*. Madrid: Tecnos.
- Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. México: Paidós
- Courant, R. & Robbins, H. (1979). *¿Qué es la matemática?* 2ª. Reimpresión. Madrid: Aguilar.
- Deleuze, G. (1983). *Les cours de Gilles Deleuze. Cours Vincennes (Trad)*. Ernesto Hernández B. Retrieved from <http://www.webdeleuze.com/php/texte.php?cle=205&groupe=Image+Mouvement+Image+Temps&langue=3>.
- Ernest, P. (1994). The Dialogical Nature of mathematics. En Ernest, P., *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective* (pp 33-48). London: The Falmer Press.
- Ernest, P. (1996). The nature of mathematics and teaching, en *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 9. Retrieved from <http://webdoc.sub.gwdg.de/edoc/e/pome/pome/pome9.htm>.
- Ernest, P. (2004). What is the Philosophy of Mathematics Education? *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 18. Retrieved from http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome18/PhoM_%20for_ICME_04.htm.
- Heidegger, M. (1964). *La pregunta por la cosa*. Buenos Aires: Sur.
- Heidegger, M. (1990). *Identidad y diferencia*. Barcelona: Anthropos.
- Kline, M. (2000). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. México: Siglo XXI.
- López, A. (1996). *Construcción de la noción de variable algebraica en alumnos de nivel medio superior* (Tesis inédita de Maestría). Universidad Autónoma de Querétaro, México.
- Moslehian, M. S. (2003). A Glance at postmodern Pedagogy of Mathematics. En *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 17. Retrieved from <http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome17/contents.htm>.
- Moslehian, M. S. (2004). Posmodern View of Humanistic Mathematics. En *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 18. Retrieved from <http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome18/pdf/moslehian.pdf>.
- Piaget, J., Bang, V. & Sinclair de Zwart, H. (1985). *Epistemología y Psicología de la Identidad*. México: Paidós.
- Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education en Bishop, A. J. *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- Skovsmose, O. y Nielsen, L. (1996). Critical Mathematics Education. En Bishop, A. J. *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- Tymoczko, T. (1994). Structuralism and Pos-modernism in the Philosophy of mathematics. In *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective*. Paul Ernest. The Falmer Press.
- Zapata M., J. (2003a). *Saber Científico y Arte lector en escenarios educativos*. México: FUNDAp-UAQ.
- Zapata M., J. (2003b). *Poésis educativa*. México: FUNDAp-UAQ.
- Zapata M. J., Toral, R., Santos V., J., Souza, M. & López, A. (2008). *La educación para pensar-se (pp.105-125)*. México: FUNDAp.

Autora:

Andrea Leticia López Pineda.

Centro de Investigaciones Psicológicas y Educativas. Facultad de Psicología.
Universidad Autónoma de Querétaro, México.
allopine@hotmail.com

Versión Clame