El porcentaje: lugar de encuentro de las razones, fracciones y decimales en las matemáticas escolares

Percentage: an encounter between ratios, fractions and decimals in school mathematics

Tatiana Mendoza, David Block

RESUMEN

Se analiza el uso que estudiantes de secundaria hacen de las razones, las fracciones y los decimales para resolver situaciones de porcentaje. Se destaca la necesidad de buscar formas en las que los estudiantes podrían acceder a una mayor articulación entre dichas nociones y, en particular, se pone de manifiesto la importancia de la noción de razón en la comprensión del porcentaje.

PALABRAS CLAVE:

- *Porcentaje*
- *Razón*
- *Números racionales*
- *Escuela secundaria*

ABSTRACT

We analyze the use of ratios, fractions and decimals by middle school students when solving percentage situations. We highlight the need to search for ways in which middle school students could approach a wider articulation between these notions. In particular, we point out the importance of working with the notion of ratio, on which percentage relies.

KEY WORDS:

- *Percentage*
- *Ratio*
- *Rational numbers*
- *Middle school*

RESUMO

Analisa-se o uso que os estudantes do ensino médio fazem das razões, das frações e dos decimais para resolver situações de porcentagem. Se destaca a necessidade de buscar formas com as quais os estudantes poderiam articular melhor essas noções e em particular, se manifesta a importância da noção de razão para a compreensão da porcentagem.

PALAVRAS CHAVE:

- *Porcentagem*
- *Razão*
- *Números racionais*
- *Escola de segundo grau*

RÉSUMÉ

L'analyse porte sur l'usage que les étudiants du collège font des rapports, des fractions et des décimaux pour résoudre les situations de pourcentage. On dégage la nécessité d'une plus grande articulation entre ces notions-là et, surtout, l'importance d'appréhender le pourcentage en tant que rapport.

MOTS CLÉS:

- *Pourcentage*
- *Rapport*
- *Nombres rationnels*
- *Collège*

Relime (2010) 13 (4-I): 177-190. Recepción: Marzo 31, 2009 / Aceptación: Marzo 25, 2010.

El porcentaje es una noción matemática de frecuente uso social que, sin embargo, es difícil de comprender y de usar para muchas personas (Lembke & Reys, 1994), lo cual puede atribuirse al menos a dos factores. Por un lado, su complejidad conceptual: se trata de una noción multifacética vinculada con algunas de las nociones más complejas de la aritmética básica, las de razón, fracción y operador multiplicativo decimal, de las cuales hereda las problemáticas didácticas. Por otro lado, existe una fuente importante de dificultades relativas a la enseñanza, no solamente del porcentaje sino, sobre todo, de las nociones vinculadas a éste.

En este artículo presentamos una caracterización de los conocimientos que los alumnos manifiestan tener sobre esta noción[1], en un momento de su escolarización, primer y segundo grados de secundaria, en el que, según los programas de la educación básica, prácticamente ha culminado la enseñanza de este tema[2]. Nos proponemos aportar elementos de respuesta para las siguientes preguntas: ¿Qué definiciones del porcentaje movilizan los alumnos para abordar problemas sobre esta noción? ¿Qué dificultades ponen de manifiesto y en qué medida éstas se relacionan con otras nociones implicadas? Más específicamente, ¿en qué medida logran conceptualizarlo como una razón y no como una cantidad absoluta?

En un primer apartado presentamos la problemática conceptual que el porcentaje hereda de sus vínculos con las nociones de razón, fracción y operador decimal. Más adelante analizamos las resoluciones de problemas de porcentaje producidas por los estudiantes, discutiendo la manera en que la problemática conceptual se manifiesta en dichas resoluciones.

1 Problemática conceptual del porcentaje

El porcentaje se usa en dos grandes tipos de situación:

a) Cuando interesa fijar o describir una relación proporcional entre dos conjuntos de cantidades. Por ejemplo, cuando en una tienda se ofrecen todos los productos al 50% de descuento.
b) Cuando se quiere hacer accesible una relación entre dos cantidades a través de una escala. Por ejemplo, "el 23.6% de la población mexicana es rural".

[1] Los resultados provienen de un estudio sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de porcentaje en la escuela secundaria (Mendoza, 2007).

[2] En México la proporcionalidad se enseña explícitamente a partir de cuarto grado de primaria y hasta el primero de secundaria (12-14 años), aunque algunos aspectos se empiezan a enseñar desde los primeros grados y continúan hasta tercero de secundaria, menos intensamente.

En ambos casos, el porcentaje es una razón[3], es decir, una relación multiplicativa entre dos cantidades o conjuntos de cantidades. Una manera de expresar esta razón es mediante dos números: 20% es 20 de cada 100. La adquisición de la noción de razón –y por consiguiente del porcentaje-definida de esta forma, conlleva un paso difícil e importante en el estudio de la aritmética en el nivel básico: el que va del trabajo con medidas (la mesa mide de largo 3 metros) al trabajo con relaciones entre medidas (por cada dos vasos de jugo se pusieron tres de naranjada), el cual requiere coordinar dos variables. En un primer momento, los niños tienden a centrarse en una sola variable, dejando de lado la idea de relación. Por ejemplo, Noelting (1980a, 1980b) encontró que para comparar el sabor a naranja en distintas naranjadas, (5 vasos de agua, 2 vasos de jugo) vs. (7 vasos de agua, 3 vasos de jugo), los niños a edades tempranas tendían a responder que la segunda sabe más a naranja pues tiene más jugo, o bien que la primera pues tiene menos agua.

Como toda razón, el porcentaje puede ser interpretado como una fracción: 20% es "20/100 de". Esto permite una comprensión más profunda del porcentaje, al hacer explícito el hecho de que cada elemento de uno de los dos conjuntos representa una misma parte del elemento que le corresponde en el otro conjunto. Sin embargo, varios estudios han mostrado que es difícil acceder al uso de la fracción como expresión de una razón sin un trabajo previo con relaciones entre medidas (Brousseau, 1981; Block, 2001). Freudenthal (1983) plantea que "uno debe dudar de que las fracciones puedan enseñarse intuitivamente, si falta intuición de la razón (expresada con dos medidas)" (p. 181).

El autor ha destacado además que la noción de razón, entendida como una relación entre dos números del tipo "*a* es a *b*" que genera una serie de relaciones equivalentes, encuentra su sentido antes de ser cuantificada con un número:

> El significado de la razón aparece cuando se habla de la igualdad (y la desigualdad) de razones, sin conocer su tamaño, cuando se dice, con sentido, "*a* es a *b* como *c* es a *d*", sin anticipar que "*a* es a *b*" puede reducirse a un número o a un valor de magnitud *a/b* (Freudenthal, 1983, p. 180).

Así, en una comparación de relaciones, la fracción puede no ser la manera más accesible de dar cuenta del significado de la razón.

Por otro lado, Block (2001, 2006) mostró que, frente a tareas de razones, los niños recurren al uso de relaciones entre dos medidas antes de disponer de las fracciones y que, entonces, "las razones de números enteros funcionarían como la forma implícita, germinal, de las fracciones" (Block, 2001, p.484). Sólo que precisamente este rasgo, su funcionamiento implícito y germinal, hace que se vuelva poco visible desde la enseñanza, y que no se le reconozca como objeto de estudio.

3 En este texto nos referiremos siempre a la razón geométrica entre cantidades.

Cabe aclarar que el uso de la fracción como una razón es sólo uno de varios significados que la primera puede cobrar. Kieren (1988) es uno de los autores que han puesto de manifiesto dicha polisemia, al identificar las siguientes interpretaciones —que él llama subconstructos— posibles de la fracción: medida, cociente, razón y operador multiplicativo. Si bien estas definiciones son matemáticamente equivalentes, el tránsito en términos cognitivos de una a otra es considerablemente complejo. Cuando el porcentaje se expresa con una fracción, el sentido de fracción en juego es el de razón[4]. Este significado de la fracción, a diferencia del de medida, suele abordarse débilmente en la escuela primaria (Block, 2001). Así, el tratamiento del porcentaje mediante el uso de fracciones supone una construcción en la concepción de número, el cual pasa de ser expresión de medidas a ser expresión de relaciones entre medidas[5].

Finalmente, el porcentaje puede representarse a través un "operador decimal": 20% es el factor "por 0.2". Esta expresión, al poner en juego de manera explícita una multiplicación por números no enteros, implica una resignificación de la noción de multiplicación pues ésta, más allá de los naturales, deja de poderse interpretar exclusivamente como suma repetida. En los racionales, la multiplicación no sólo "agranda" sino también puede "achicar", y aún cuando agranda, el crecimiento no sólo es al doble, triple, cuádruple, etc., pues se pueden producir agrandamientos y achicamientos "intermedios": multiplicar por 9/4 genera una ampliación mayor al doble y menor al triple (Balbuena & Block, 1991). Este cambio de sentido no es menor. Si bien ha sido objeto de varias investigaciones en las últimas tres décadas, en la enseñanza probablemente aún no recibe la atención necesaria:

> Pareciera que los alumnos construyen en paralelo dos nociones: la de multiplicación, asociada a los enteros y la expresión "n veces", y otra operación sin nombre, asociada a las fracciones y a la expresión 'n/m de'. El que se diga a los alumnos que 'n/m de' es, por definición, 'n/m por', puede no ser más que una arbitrariedad que no produzca, al menos en el corto plazo, una reconceptualización de la multiplicación. Se estarían designando con el mismo símbolo dos operaciones que, por lo menos durante un tiempo, son diferentes (Balbuena & Block, 1991, pp. 187-188).

La adquisición de la multiplicación por racionales implica, o bien una reconfiguración del sentido que se le había asignado a partir del trabajo

[4] U operador multiplicativo, como veremos más adelante. La distinción entre significados no siempre es clara.

[5] La complejidad de este tránsito, de medida a razón u operador, no es privativa de las fracciones, pues también ocurre en el estudio de los números, los naturales: es más difícil entender que en una escala "por cinco" es constante, que manipular una medida de 5cm (Block, 2001). No obstante, en el caso de las fracciones la complicación es mayor pues se imbrica con otras dificultades.

con naturales, o una síntesis en un solo concepto de dos significados que se han construido en paralelo.

En síntesis, los trabajos que brevemente hemos comentado muestran que la apropiación de la noción de porcentaje implica transitar de la medida a la relación entre medidas para después cuantificar dicha relación con un solo número, lo que conlleva un cambio de significado en las nociones de fracción y multiplicación. Así, la problemática didáctica del porcentaje se circunscribe a las de las razones, fracciones y decimales.

2 Interpretaciones de los alumnos sobre el porcentaje

Los resultados que mostraremos se obtuvieron mediante tres recursos metodológicos. En un primer acercamiento, la aplicación de un cuestionario a dos grupos de segundo grado de secundaria, uno de 31 alumnos y otro de 28, en la ciudad de México. Después entrevistamos individualmente a siete de los estudiantes que resolvieron el cuestionario, ya fuera porque sus respuestas eran confusas, o porque nos interesaba conocer con más detalle algunos procedimientos. Durante la entrevista se plantearon oralmente preguntas muy similares a las del cuestionario, aclarando que podían resolver como quisieran, o bien se mostraron al estudiante las anotaciones hechas durante la resolución del cuestionario y se le pidió que las explicara. Finalmente, para enriquecer la información sobre los conocimientos de los alumnos, diseñamos y aplicamos una secuencia didáctica, de cuatro sesiones de 50 minutos cada una, con un grupo de una escuela urbana, oficial, que se encontraba finalizando el primer grado de secundaria en el turno vespertino. Empleamos la metodología de la ingeniería didáctica (Artigue, 1995), lo que implicó la realización de un análisis de la problemática didáctica del porcentaje, de las lecciones dedicadas a dicha noción en los libros de texto oficiales correspondientes a las propuestas de los sesenta, setenta y noventa, la primera exploración de conocimientos de estudiantes a partir del cuestionario y entrevistas y, finalmente, el diseño de una secuencia de situaciones, que incluye un análisis a priori de los posibles procedimientos de los estudiantes. Cabe aclarar que mediante la secuencia nos propusimos indagar las resoluciones frente a ciertos problemas específicos para analizar los conocimientos previos puestos en juego por los alumnos. Es decir, utilizamos la ingeniería como otro recurso exploratorio, más que como un dispositivo para provocar aprendizajes[6].

[6] En otros textos discutiremos la manera en que los distintos procedimientos e interpretaciones del porcentaje circularon en la clase durante las cuatro sesiones a partir de las interacciones entre estudiantes y con el maestro, y también la influencia de algunas características de las situaciones didácticas en los procedimientos puestos en juego por los estudiantes.

Tanto en el cuestionario y entrevistas como en la secuencia didáctica intentamos conocer las respuestas de los alumnos ante problemas básicos sobre el porcentaje, considerando cierta diversidad. Elegimos contextos familiares (compra y venta de mercancías, siembras de terrenos, diseño de una bandera), los porcentajes se aplicaban unas veces a cantidades numéricas y otras a cantidades de superficie, se variaba la incógnita en la relación $p\%$ de $a=b$ (se puede pedir encontrar la cantidad final, o bien la tasa, o bien la cantidad inicial).

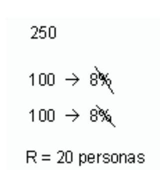
A continuación analizamos los conocimientos de los alumnos. Los hemos organizado en tres grupos a partir de las definiciones del porcentaje que, implícita o explícitamente, movilizan en las resoluciones: primero se presentan producciones que implican una puesta en juego del porcentaje como una razón expresada mediante una relación entre dos números o mediante una fracción, después se describe un caso en el que se manifiesta una tensión entre una interpretación del porcentaje como medida y como razón y, finalmente, mostramos un momento en el que el uso del porcentaje se reduce a la realización de operaciones numéricas muy desvinculadas del sentido de dicha noción.

Cabe hacer antes una aclaración: intentaremos mostrar la diversidad de definiciones y problemáticas que fueron identificadas en las resoluciones de los alumnos, las cuales ejemplificaremos cada vez mediante al menos un caso. El estudio no pretende mostrar tendencias generales, sino identificar formas específicas de poner en juego el porcentaje.

2.1. *Interpretaciones que implican la puesta en juego de una relación entre medidas*

2.1.1. *El porcentaje como razón expresada con dos números*

En el cuestionario, frente a la pregunta "Si vas a una tienda, ¿Qué preferirías, que te dieran el 25% de descuento o que te descontaran $100 del total de tus compras?", Waldo elige la primera opción, pues en un descuento del 25% en precios de mercancías "te quitan 25 (…) (pesos) por cada 100 de lo que debes pagar". Es decir, apela explícitamente a la definición del porcentaje como razón expresada mediante dos cantidades. Después moviliza esta definición para aplicar porcentajes: "En una empresa hay 250 trabajadores. El 8% son ingenieros ¿Cuántos ingenieros hay en la empresa?"



La eliminación gráfica del signo “%” sugiere que Waldo ha traducido el porcentaje “8%” en una relación entre cantidades: 8 de cada 100. Después, al parecer utiliza la relación intermedia «de 50 se toman 4» para después sumar:

	100	8	
÷ 2	100	8	÷ 2
+	50	4	+
	250	20	

Llama la atención que sólo dos alumnos, en la aplicación del cuestionario, recurren a esta interpretación del porcentaje, a pesar de que, como mencionamos anteriormente, se ha demostrado que la expresión de las razones mediante dos cantidades es más accesible que su expresión mediante una fracción o un decimal. Cabe preguntarse si las dificultades que mostraremos más adelante respecto a estos últimos se explican en parte por la ausencia de un trabajo previo con relaciones entre medidas enteras.

2.1.2. *El porcentaje como fracción: una buena expresión de la razón, pero con escaso repertorio*

Algunos alumnos vinculan a ciertos porcentajes como el 50%, 25%, 20% y 10% con la mitad, cuarta parte, quinta parte y décima parte, respectivamente, de la cantidad inicial. El uso de las fracciones se da en distintos tipos de tareas pero está restringido a fracciones unitarias y en algunos casos a fracciones del tipo $1/2^n$. Veamos el caso de Alan y Jonathan, quienes resuelven el siguiente problema, planteado durante la secuencia de clases experimentales:

Se quiere pintar el 50% de rojo, 25% de azul, 20% de verde y 5% de amarillo en tres banderas, una grande de 800 m^2, una mediana de 400 m^2 y una pequeña de 300 m^2.

Alan y Jonathan recurren a la fracción cuando se trata del 50% y 25%, y a una estimación en el caso del 20%:

Alan: Ésta. La (bandera) grande, este… la mitad de ochocientos, cuatrocientos, es la mitad de la bandera (…) El azul es… la mitad, de, la mitad de la mitad, bueno, la cuarta parte, doscientos (…) Y el amarillo)[7]… es… (Silencio).
Observadora: ¿Cuánto te salió?
Alan: Ciento cincuenta (…) Bueno, ¡calculé!

La dificultad para determinar la fracción que corresponde a la aplicación del 20% se refleja en la puesta en común:

[7] Cambia “verde” por “amarillo”.

Maestro: (…) ¿Por qué ciento cincuenta?
Alan: Porque ¿dividimos la mitad de la mitad?
(…)
Alan: Dividimos la mitad a la cuarta parte.

Alan y Jonathan utilizan con éxito la fracción siempre que se trata del 50% y 25%, así que es probable que, más que proporcionar una explicación sobre algo que está claro, Alan, de manera implícita, plantea su necesidad de buscar la fracción que designa al 20%. ¿Por qué no logran, ni alumnos ni maestro, hacer explícita la dificultad en juego, esto es, que lo que se busca determinar es la parte que representa 20 de 100? En diversos estudios sobre el aprendizaje de las fracciones se ha reportado la misma dificultad: los alumnos –y también adultos no alfabetizados- parecen apropiarse de las fracciones cuyo denominador es una potencia de 2 (½, ¼, etc.), pero muestran dificultades fuera de este dominio. (Ávila, 2006; Dávila, 1992; Piaget, 1960, en Block & González, 2005). Lo anterior nos permite suponer que, para los alumnos de nuestro estudio que recurren a la fracción, hay una diferencia sustancial entre identificar la fracción equivalente al 25% o al 50% e identificar la que es equivalente a 20%. En el primer caso, ellos pueden ir dividiendo los porcentajes entre dos hasta llegar al 25% o al 50%”[8]. En cambio, la resolución del segundo caso implica preguntarse *“¿Entre cuánto tengo que dividir?”* o bien, *“¿Qué parte de 100 es 20?”*. Es decir, a pesar de que 1/5, es una fracción unitaria, tan sencilla y conocida por los estudiantes como ¼, obtenerla les implica un procedimiento y una dificultad distintos (preguntarse cuántas veces 20 es 100).

Es probable que la persistencia en secundaria de la tendencia a dividir en mitades sea también efecto de la enseñanza, de la falta de experiencias didácticas en tareas de reparto.

Cabe aclarar que, a pesar de las limitaciones que muestran los alumnos en el uso de las fracciones, éstas son una expresión del porcentaje como razón que ellos logran utilizar explícitamente. Mostraremos un ejemplo en el siguiente apartado.

2.2. *Entre la medida y la relación entre medidas: una tensión entre dos interpretaciones contradictorias*

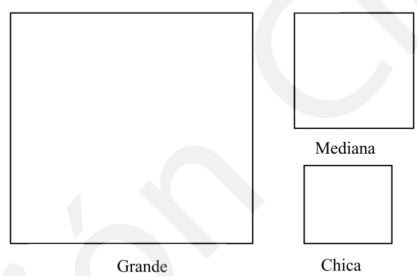
En varios alumnos parecen convivir, sin que necesariamente entren en conflicto, concepciones contradictorias del porcentaje: por un lado, están las

[8] Dávila (1992) muestra que si bien los alumnos tienen éxito en los repartos entre 2 ó 4, ellos no lo prevén, no son conscientes de que los cortes sucesivos por mitades los llevan a realizar repartos equitativos y exhaustivos. Para tener éxito en otros repartos, en cambio, es necesario poder hacer una anticipación y no solamente aprovechar el efecto de la acción.

acepciones correctas de esta noción como razón, es decir, como una relación entre un número y 100, como una parte del entero, y como operador decimal, y por otro lado, la interpretación errónea del porcentaje como cantidad absoluta, es decir, como una medida. Veamos una situación en la que esta contradicción se exacerba y se manifiesta con toda claridad.

Después de un problema en el que se aplican cuatro porcentajes a la superficie de una bandera, que es la mediana de tres, (50% se pinta de rojo, 25% de azul, 20% de verde y 5% de amarillo), se pide a los alumnos que resuelvan el siguiente[9]:

> La bandera grande y la pequeña tienen la misma forma que la mediana, pero son de otro tamaño.
>
> a) ¿Qué porcentaje de la superficie de la bandera grande se tiene que pintar de rojo?______ ¿Y de azul? ___________ ¿De verde? _________ _____ ¿De amarillo? __________
>
> b) Marca en las tres banderas la parte que se debe pintar de cada color.



Cuando, en la puesta en común, el maestro pregunta qué porcentaje se pinta de azul, varios responden "¡el veinticinco!" "¡igual todo!"[10], pero Romina plantea una idea distinta que provoca la división de la clase en dos grandes grupos:

> Romina: Yo digo que es el cincuenta (…) Si es el veinticinco por ciento de la mediana, sería el cincuenta por ciento de la grande.

[9] En la secuencia que diseñamos ex profeso, primero aplicaron los cuatro porcentajes a la superficie de la bandera mediana, después resolvieron el problema que aquí se plantea, en el que debían determinar los porcentajes de cada color en las dos banderas restantes que conservan la forma, y finalmente resolvieron el problema del apartado anterior, en el que aplican los cuatro porcentajes a $800m^2$ y $300m^2$, que son las áreas de las banderas pequeña y grande.

[10] Quieren decir que todos los porcentajes de la bandera mediana se conservan en la grande.

Desde el punto de vista de Romina, si crece el tamaño necesariamente debe crecer el porcentaje. Aparece aquí una manifestación de esta noción concebida como cantidad absoluta[11]. Guillermo y Josué intentan objetar el planteamiento de Romina, recurriendo al hecho de que la suma de las partes de la bandera debe dar la medida del total:

> Guillermo: Entonces, a ver, que ponga las otras cantidades, supuestamente del por ciento y va a ser más.

Ellos hacen notar que si se asigna al área azul el 50%, se deben asignar a la roja, verde y amarilla el 100%, 40% y 10%, respectivamente, lo que no es posible:

Guillermo: Pero ya se pasaría del cien por ciento.
(…)
Josué: Se pasaría del porcentaje que debe de ser.
Guillermo: Ya serían doscientos por ciento (…) Y tendría que ser el cien por ciento como los demás, de diferente… tamaño.
(…)
Josué: Siempre va a ser lo mismo, aunque sea más grande o más chico.

La validación que proponen Guillermo y Josué es por reducción al absurdo: el total será más del 100%, es decir, del porcentaje "que debe de ser". No obstante, ellos esgrimen un argumento que no necesariamente es compartido: a los ojos de Romina, la explicación de Guillermo y Josué no rebate su respuesta, pues ella no asume como punto de partida que el 100% designa al total:

Maestro: Déjenme decirles cuál es el problema que hay ahorita, tú dices que el cien por ciento es todo, sin importar cuál es el tamaño, y tus compañeras dicen que si el tamaño aumenta, el total ya no es cien por ciento, va a ser más.
Romina: (…) El doble, sí.
Maestro: ¿Toda la bandera (chica) sería el cincuenta por ciento, toda la bandera (mediana) sería el cien por ciento, y toda la bandera (grande) sería el doscientos por ciento?
Alumnos: ¡Noooooo! ¡Sííííí!

Ya no se trata entonces de discernir si a la parte de azul se le asigna el 50% o el 25%, sino de determinar si el total corresponde o no al 100% para, a partir de ahí, poder regular. Sin embargo, puesto que esta disyuntiva está detrás del desacuerdo inicial, no es vista con claridad. Así lo muestran Guillermo y Josué, quienes, sin darse cuenta, utilizan como argumento precisamente lo que tienen que probar.

---

[11] Es interesante que la alumna aumente el porcentaje al doble cuando aún no sabe que la bandera grande mide 800 metros cuadrados. Así, el razonamiento no parece ser del tipo "a doble tamaño le corresponde doble porcentaje", es más probable que la idea de duplicar solamente responda a la necesidad de amplificar.

Es difícil resolver este desacuerdo porque tanto la respuesta de Josué y Guillermo como la de Romina tienen coherencia interna: la diferencia entre ambas está en que apelan implícitamente a distintas acepciones del porcentaje (razón y medida), contradictoria una respecto de la otra.

Los episodios anteriores dejan ver que la identidad entre el total y el 100% puede ser difícil de construir: a la vez que es condición para poder desarrollar procedimientos diversos, es consecuencia de entender cierta idea de razón como intrínseca al porcentaje. Así lo manifiestan Guillermo y Josué, que explicitan dicha razón al plantear que el cincuenta por ciento "*es la mitad de (…) toda la medida que es la bandera (…) porque se supone que, este, las dos (banderas) miden diferente (pero) está pidiendo la misma parte que pintar*. Llama la atención que la conservación del 50% en las dos banderas aparece justificada a partir de una fracción: es posible que la fracción evoque con más fuerza que el porcentaje una relación parte-todo, relación que ellos están tratando de explicitar ante el grupo.

La coexistencia de la interpretación del porcentaje como una medida y como una relación entre dos números o entre dos conjuntos de números se pudo observar en prácticamente toda la diversidad de situaciones planteadas a los estudiantes.

2.3. *Una reducción a reglas operatorias: El porcentaje como operador decimal ¿es una razón?*

Esta definición se refleja en las resoluciones de los alumnos en las que para calcular, por ejemplo, el 50% de 400, multiplican 400 por 0.50. La técnica tiene el atractivo de que es aparentemente sencilla, sin embargo, los estudiantes lo utilizan con cierta fragilidad. Esto se manifiesta al menos en tres formas distintas, que mostraremos a continuación.

El uso frecuente de la técnica proviene de una generalización rápida que permite pasar de la expresión con porcentaje al factor decimal: si 50% = .50, y 25% = .25, entonces $x\%$ = $.x$, y, por lo tanto, por ejemplo, 5% = .5[12]

En una sesión de la secuencia didáctica, al no recordar una manera de aplicar porcentajes, Margarita y Montserrat intentan recuperar el operador decimal a través de una búsqueda incierta. Para calcular 50% de 400m^2, suman los datos, luego los multiplican y, debido a que los resultados que van obteniendo les parecen demasiado grandes -lo que indica que, pese a lo azaroso de la búsqueda, ejercen cierto control-, ven como alternativa dividirlos entre dos, o bien poner en el resultado demasiado grande un punto decimal:

12 Esta información proviene de la secuencia didáctica.

Hacen la multiplicación 400 por 50 y obtienen 20, 000.

(…)

Montserrat: Es… si le ponemos punto acá, ¿no? Punto acá (señala dos lugares después del punto decimal tanto en el 50 como en el resultado), y ya da doscientos.

Así, al parecer, en matemáticas ciertos errores se arreglan con un cambio tan pequeño como inexplicable[13].

Frecuentemente los alumnos hacen un uso no pertinente del operador decimal. Ante la pregunta del cuestionario "Si vas a una tienda, ¿qué preferirías, que te dieran, el 25% de descuento o que te descontaran $100 del total de tus compras?", Andrea multiplica 100 por 0.25. Resoluciones como la de Andrea ponen de manifiesto una dificultad para discernir las condiciones bajo las cuales se puede utilizar el operador decimal. Quienes únicamente disponen de esta técnica, están desarmados para abordar problemas que no se resuelven con ella y buscan la manera de ponerla en juego aunque las respuestas no tengan sentido en el contexto de los problemas.

Así, el operador decimal, a la vez que fue usado frecuentemente, tanto en el cuestionario como en la secuencia didáctica, tendió a ser usado con escaso sentido. Ciertamente constituye una técnica útil cuando se domina, por lo que debe ser enseñada, pero es importante constatar que suele no ser portadora del sentido del porcentaje como razón, lo cual implica, si es la única en valorarse y usarse, un sacrificio nada desdeñable: el del significado.

3 Conclusiones

El análisis que hemos presentado pone de manifiesto una serie de dificultades que enfrentan los alumnos al abordar algunas situaciones de porcentaje. Hemos intentado mostrar que estas dificultades guardan relación con las nociones vinculadas al porcentaje, señaladamente con las de razón, de fracción y de operador multiplicativo decimal. Al respecto nos interesa destacar dos derivaciones para la enseñanza y para estudios futuros.

En primer lugar la débil posibilidad que los estudiantes mostraron tener para ejercer control sobre sus procedimientos, sugiere que la apropiación del porcentaje difícilmente puede lograrse de una manera fecunda si no

[13] Después de todo, esas manipulaciones casi mágicas de algunos objetos matemáticos, como el punto decimal, se enseñan en la escuela. Por ejemplo, para multiplicar decimales se multiplican los enteros y después se corre el punto, para dividir se quita el punto y se ponen ceros, etc.

está fincado en la noción de razón, expresada como una relación entre dos cantidades. El paso de la medida a la razón puede ser más accesible si se parte de la definición del porcentaje como una relación entre dos cantidades "tantos de cada 100". Además, un uso funcional de la fracción, que vaya más allá de ½ y ¼, implica preguntarse explícitamente por la relación entre un número y cien[14] para determinar la fracción que representa a un porcentaje dado. Finalmente, la puesta en juego del operador decimal puede ser más fecunda si se dispone de otros recursos–entre ellos la relación "tantos de cada 100"- que puedan ser movilizados cuando, por ejemplo, se necesite controlar un resultado, o cuando simplemente no se logre recuperar el operador.

En segundo lugar, llama la atención la coexistencia de la interpretación del porcentaje como medida y como razón. Una posibilidad que se abre para una futura exploración es la de trabajar de manera conjunta con una familia de conocimientos que implican la noción de razón-como el porcentaje, la probabilidad, las frecuencias relativas-, concediéndole un lugar especial al análisis de las razones decimales -entre las que se encuentra el porcentaje- dadas las facilidades en los cálculos y su frecuente uso en diversos contextos. Esto podría ayudar a incorporar en el estudio de los números —naturales, fracciones, decimales— la expresión de una relación y diferenciarla de la medida, e implicaría sumergir el estudio del porcentaje en una problemática amplia retomando en secundaria un trabajo sobre nociones que tienden a darse por vistas en la primaria. Tal perspectiva de estudio es congruente con el énfasis puesto desde la investigación, en el estudio las nociones del campo conceptual de las estructuras multiplicativas, de manera integrada (Vergnaud, 1988; Post, Cramer, Harel, Kieren & Lesh, 1998).

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ávila, A. (2006). Prácticas cotidianas y conocimiento sobre las fracciones. Estudio con adultos de escasa o nula escolaridad. *Revista Educación Matemática, 18* (1), 5-35.

Balbuena, H. & Block, D. (1991). ¿Qué significa multiplicar por 7/4? Reflexiones sobre lo que sucedió en una clase de matemáticas para maestros. *Cero en conducta, 6* (25), 21-32.

Block, D. (2001). *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico.* (Tesis de Doctorado). México: DIE-CINVESTAV-IPN.

Block, D. (2006). El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria. En Cantoral, R., Covián, O., Farfán, R., Lezama, L., Romo, A.

[14] En el caso que hemos reportado, es necesario preguntarse qué parte de 20 y 100.

(Eds), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano (*pp. 455–470). México: Díaz de Santos de México, Clame. A. C.

Block, D. & González, N. (2005). La división de una fracción entre un número natural: análisis de una experiencia didáctica. *Educación Matemática, 17* (2), 59-89.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2* (3), 37–127.

Dávila, M. (1992). El reparto y las fracciones. *Educación Matemática, 4* (1), 32–45.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Holanda: Reidel, Dordrecht.

Kieren, T. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: its Intuitive and Formal Development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and operations in the middle grades* 2. New York: Lawrence Erlbaum Associates National Council of Teachers of Mathematics, Hillsdale.

Lembke, L.O. y Reys, B.J. (1994). The development of, and interaction between, intuitive and school-taught ideas about percent. *Journal for Research in Mathematics education, 25* (3), 237-259.

Mendoza, T. (2007). *Estudio didáctico de la noción de porcentaje*. (Tesis inédita de Maestría). México: DIE-CINVESTAV-IPN.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I. Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11* (2), 217-253.

Noelting, G. (1980b). The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept. Part II. Problem-Structure at Successive Stages; Problem-Solving Strategies and the Mechanism of Adaptive Restructuring. *Educational Studies in Mathematics 11* (3), 331-363. doi: 10.1007/BF00697744

Post, T., Cramer, K., Harel, G., Kieren, T. & Lesh, R. (1998). Research on Rational Number, Ratio and Proportionality. *Proceedings of PME-NA XX, 1*(1), 89-93. Raleigh North Carolina. Recovered from http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/98_1.html

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades 2* (pp. 141-161). New York: Lawrence Erlbaum Associates National Council of Teachers of Mathematics, Hillsdale.

Autores:

Tatiana Mendoza.
Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav-IPN, México, D.F.
tataniux47@hotmail.com

David Block.
Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav-IPN, México, D.F.
davidblock54@gmail.com