

Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales

Teaching and learning modelling: The case of differential equations

Ruth Rodríguez

RESUMEN

Este artículo trata de la didáctica de la modelación matemática en los cursos de Física y Matemáticas. En 2002, un nuevo currículo para el bachillerato en Francia enfatizó la relevancia de las Matemáticas como una herramienta para modelar en otras ciencias. Se presentan la descripción del proceso de modelación, el análisis de los manuales comúnmente usados en estos cursos, y la implementación de una situación experimental con tareas no habituales, lo cual permitió la identificación de la influencia de las *praxeologías* en los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Asimismo, este análisis revela la transposición del “proceso de modelación” practicado por los expertos y el que es adaptado finalmente a la escuela; también se discute la vinculación de algunas dificultades presentes al abordar la situación con la transposición del proceso de modelación.

PALABRAS CLAVE:

- *Modelación*
- *Matemáticas*
- *Física*
- *Ecuación diferencial*
- *Praxeología*

ABSTRACT

This paper proposes a study which deals with the learning and teaching of mathematical modeling in physics and mathematics courses. It was oriented specifically for the senior high school students in France. In 2002, the new syllabi for the Physics and Mathematics courses emphasized the role of mathematics as a tool for modeling in other sciences. Firstly, a description of the modeling process was established for this work. Secondly, the textbooks commonly used in the Physics and Mathematics courses were analyzed. These analyses revealed the transposition process of the “modeling process” practiced by the experts into a different process adapted for school. The setting up of an experimental situation including some unusual tasks (out of the scope of the common didactic contract) for senior high school students allowed the identification of the influence of the existing “praxeologies” in these classes when students were subjected to problem-solving situations. Some of the difficulties linked to the setting up of this transposition process were analyzed and are presented in the study.

KEY WORDS:

- *Modeling*
- *Mathematics*
- *Physics*
- *Differential equation*
- *Praxeology*



RESUMO

Este artigo trata da didática da modelação matemática nos cursos de Física e Matemática. Em 2002, um novo currículo para o bacharelado na França enfatizou a relevância da Matemática como uma ferramenta para modelar em outras ciências. Se apresentam a descrição do processo de modelação, a análise dos manuais comumente usados nestes cursos, e a implementação de uma situação experimental com tarefas não habituais, o qual permitiu a identificação da influência das praxeologias nos processos de aprendizado dos estudantes. Também, esta análise revela a transposição do “processo de modelação” praticado pelos especialistas e o que é adaptado finalmente à escola; também se discute a vinculação de algumas dificuldades presentes ao abordar a situação com a transposição do processo de modelação.

PALAVRAS CHAVE:

- *Modelação*
- *Matemática*
- *Física*
- *Equação diferencial*
- *Praxeologia*

RÉSUMÉ

Cette recherche porte sur la didactique de la « démarche de modélisation » en classes de Physique et de Mathématiques en Terminale S au lycée, en France. Les nouveaux programmes mis en place en 2002 pour ces deux classes mettent en relief le rôle des objets mathématiques en tant qu’outil de modélisation pour d’autres sciences. L’analyse des manuels habituellement utilisés en classes de Physique et de Mathématiques, a permis de caractériser la démarche de modélisation censée être enseignée à ce niveau scolaire. Ces analyses permettent de mettre en évidence la transposition de l’objet « démarche de modélisation » de référence vers une démarche plus scolaire (celle des élèves). La mise en place d’une situation expérimentale conçue avec des tâches inhabituelles (hors contrat) pour les élèves de la classe de Terminale S a permis d’identifier l’influence exercées par les praxéologies existantes dans ces classes sur les démarches des élèves. Des difficultés liées à la mise en place de cette démarche transposée sont mises en relief dans le présent travail.

MOTS CLÉS:

- *Modélisation*
- *Mathématiques*
- *Physique*
- *Equation différentielle*
- *Praxeologie*

1 Introducción

Hoy en día, la sociedad tiene nuevas expectativas sobre las habilidades a ser desarrolladas en los jóvenes estudiantes. En particular, algunos estudios internacionales establecen la importancia del desarrollo de

habilidades individuales para modelar y solucionar problemas en contextos de la vida real (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, 2007).

Por un lado se cuenta con la existencia de un programa internacional que desde el año 2000 evalúa (cada tres años) el desempeño en Matemáticas de los estudiantes de 15 años de edad en diversos países (PISA en sus siglas en inglés). Este estudio enfatiza determinadas habilidades que debieran ser adquiridas por los jóvenes durante su instrucción. En particular, “PISA usa (y evalúa) el concepto de cultura matemática para referirse a la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar efectivamente la formulación, solución e interpretación de problemas en una variedad de situaciones que involucran conceptos cuantitativos, espaciales, probabilísticos o matemáticos” (OCDE, 2007, p. 51).

Por otro lado, los programas curriculares de diversas instituciones educativas y en distintos niveles han incluido de manera explícita el uso de las Matemáticas en otras disciplinas científicas. Por ejemplo, desde el 2002, los nuevos programas de estudio de preparatoria para las clases de Física y Matemáticas en Francia enfatizan la utilidad de las Matemáticas como una herramienta para modelar en otras ciencias. Estos programas establecen a la modelación matemática como un proceso importante a ser llevado al sistema de enseñanza si se pretende que el alumno desarrolle cierta cultura matemática. Siendo la preparatoria un ciclo terminal en ese país, se sabe que una parte de los estudiantes de este nivel quizá no continúen sus estudios universitarios o quizá no los realicen en un rubro científico, por lo cual esta formación matemática de base es primordial para ellos.

Este trabajo tiene un doble propósito: por un lado, estudiar cómo se pone en práctica el proceso de modelación en el sistema escolar y por otro, identificar las dificultades de los estudiantes para modelar un problema de la vida real.

En las secciones siguientes, la metodología utilizada en este trabajo de investigación es presentada así como la discusión de algunos resultados importantes del mismo.

2 “Modelando” la modelación matemática

Se establece primeramente una descripción del proceso de modelación que sirva como referencia para este estudio. Esta descripción se construye principalmente considerando las definiciones del proceso de modelación usadas por Blum y Niss (1991) y Henry (2001). La descripción final del proceso de modelación está representada en la Figura 1 (para más detalles ver Rodríguez, 2007):

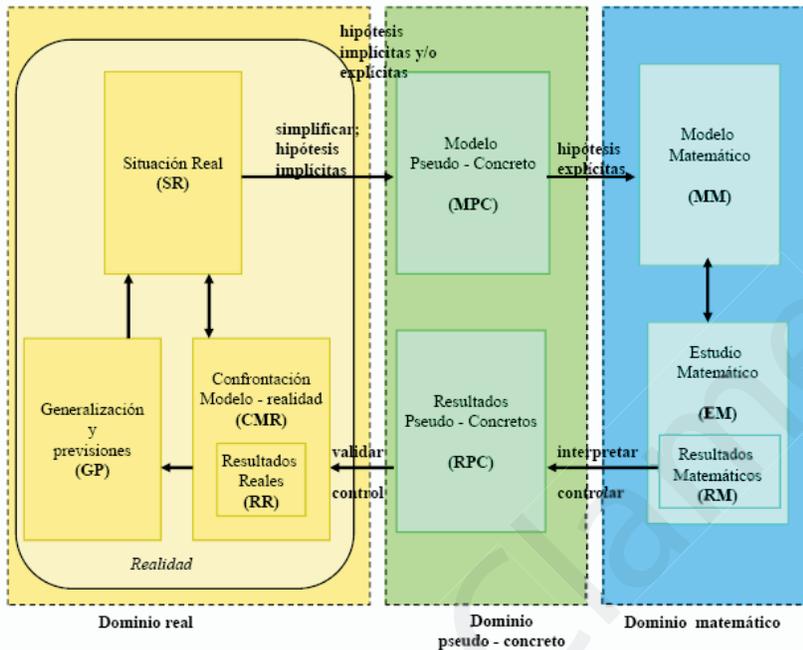


Figura 1. Descripción del proceso del modelación de referencia (Rodríguez, 2007).

Con base en la descripción del proceso de modelación matemática establecida, libros de texto comúnmente usados en clases de Física y de Matemáticas son analizados. Los resultados de estos análisis permiten caracterizar el proceso de modelación propuesto a *ser enseñado* en el último año de bachillerato. Esta primera caracterización es ilustrada en el apartado 3.

2.1. La noción de praxeología

En este estudio se usa la noción de praxeología como un instrumento útil para analizar libros de texto. Esta noción es tomada de la Teoría Antropológica de Chevallard (1999). Esta noción es retomada por otros investigadores, como por ejemplo, Artaud (2007) quien establece que “bajo esta perspectiva, dos aspectos importantes deben ser considerados. El primero alrededor de lo que es enseñado y aprendido y que debe ser modelado en términos de praxeologías matemáticas. El segundo respecto al aprendizaje y enseñanza de actividades y que debe ser modelado en términos de praxeologías didácticas” (p.373). Esta autora precisa que este constructo tiene cuatro componentes:

- un tipo de tareas T al que el alumno es usualmente enfrentado;
- una técnica τ , la cual establece una manera de realizar determinado tipo de tareas;

- c) una tecnología θ para cada técnica, la cual establece el discurso que justifica y la explica;
- d) una teoría Θ que es el discurso que justifica y explica la tecnología.

La pareja (T, τ) conforma el bloque práctico o praxis (el saber hacer) mientras que el conjunto (θ, Θ) conforma el bloque teórico o logos (el saber).

En una primera revisión de los programas de estudio así como de los libros a analizar, la noción de *ecuación diferencial* (ED) se escoge como herramienta para modelar con el propósito de realizar el análisis. Esta noción matemática, la cual es enseñada por primera vez en el último año de preparatoria, constituye una poderosa y útil herramienta para modelar diversos fenómenos de naturaleza extra-matemática.

Gracias al análisis del contenido teórico del capítulo “Ecuaciones Diferenciales” se determinaron y clasificaron los tipos de tareas que comúnmente se solicita realizar al alumno. Un segundo análisis, el de los ejercicios resueltos y propuestos en el libro, permite validar la clasificación anterior. Si un tipo de tarea aparece solamente en el contenido teórico del capítulo sin posteriormente ser solicitada en la parte práctica, ésta se desecha. Una vez conformada nuestra primera lista de tipo de tareas, la identificación de elementos de técnicas, tecnología y teoría es llevada a cabo. Los resultados de estos análisis son mostrados en la sección siguiente.

3 Primeros resultados: el análisis de los libros

3.1. *La clase de Matemáticas*

El análisis de tres libros de texto comúnmente usados en clase de matemáticas permite la identificación de los tipos de tareas siguientes:

- T_{ED} : establecer una ecuación diferencial que modela una situación real en términos pseudo-concretos,
- T_{SG} : encontrar una solución general de la ED,
- T_{SP} : encontrar una solución particular usando una condición inicial y
- T_{RP} : responder una pregunta, formulada en términos pseudo-concretos, en base a los resultados matemáticos obtenidos.

En la siguiente figura se ubican los tipos de tarea identificados en esta clase respecto a nuestra descripción de modelación de referencia:

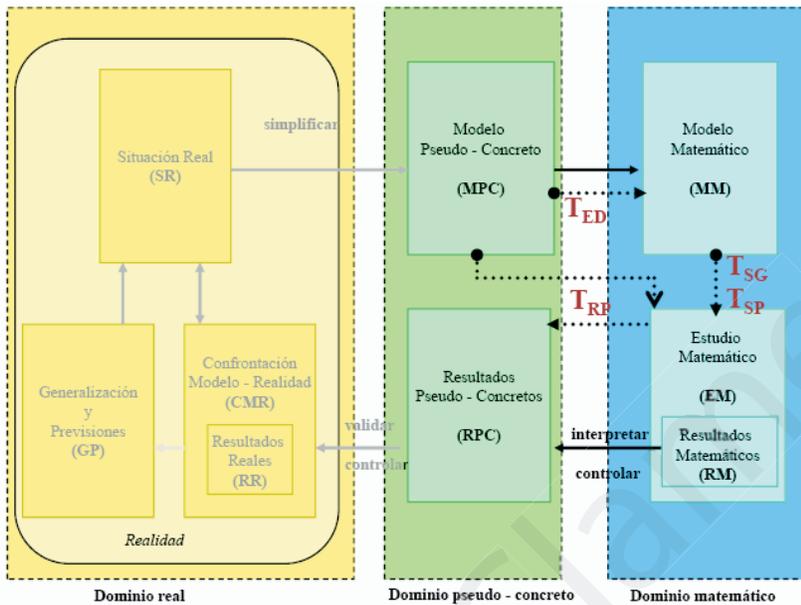


Figura 2. Tipos de tarea existentes en clase de Matemáticas.

Se observa que la mayor parte del tiempo, los problemas propuestos a los alumnos están presentados en términos pseudo-concretos e incluso cuasi-matemáticos (por ejemplo, variables designadas explícitamente). El tipo de tarea T_{ED} es la menos solicitada a los estudiantes ya que los ejercicios proporcionan la mayoría de las veces el modelo. En algunas ocasiones, T_{ED} se reduce a “justificar” que un modelo (dado en el enunciado) es efectivamente el correcto. También se observa que en esta clase, resolver una ecuación diferencial (T_{SG}) significa hacer uso de un teorema (anteriormente demostrado por el profesor en clase) para poder proponer una solución general a la ED. Este análisis evidencia que la escritura del modelo matemático, la cual es una etapa importante del proceso de modelación, es un tipo de tarea poco solicitado en clase de matemáticas. Con base en los resultados anteriores, se decide entonces extender el dominio del estudio a la clase de Física.

3.2. La clase de Física

El incluir un dominio físico en nuestra descripción de modelación conlleva a considerar dos etapas adicionales en el proceso (ver figura 3).

La etapa, denominada Modelo Físico, se refiere en este caso a proponer una configuración de un circuito eléctrico que representa algún dispositivo

físico en particular. La etapa de Resultados Físicos, que está relacionada con el tratamiento del modelo para obtener (posterior al tratamiento matemático) algunos resultados en términos físicos que sirvan de base para formular finalmente los resultados en términos pseudo-concretos (cotidianos).

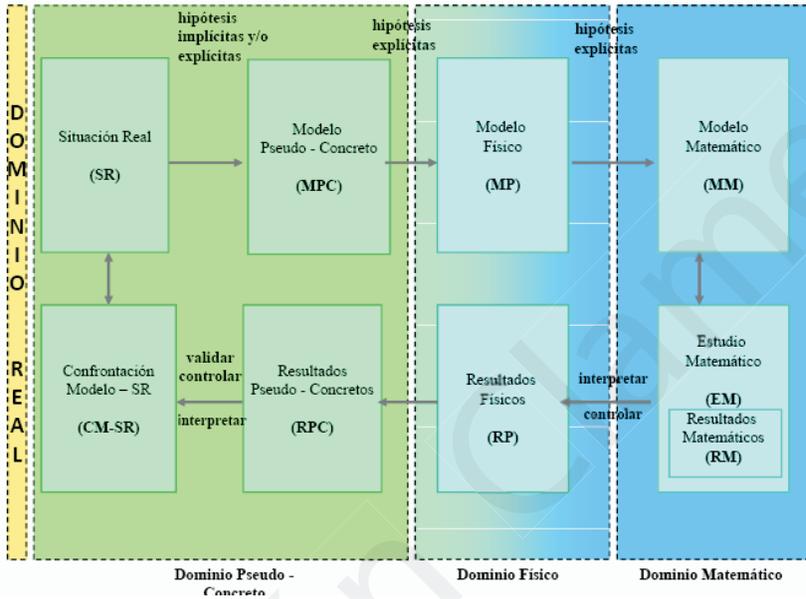


Figura 3. Descripción gráfica del proceso de Modelación en clase de Física.

El capítulo “Circuito Resistencia-Capacitor (RC)” de tres manuales de la clase de Física es analizado. El análisis se realiza análogamente al de los libros de Matemáticas. Algunos tipos de tareas identificados son:

- T_{CE} : representar un diagrama de un circuito eléctrico (en este caso, un circuito RC),
- T_{ED} : establecer una ecuación diferencial que modela el voltaje en el capacitor $U_c(t)$ presente en el circuito,
- T_{SP} : encontrar una solución particular de la ED,
- T_C : determinar la corriente eléctrica $i(t)$ en el circuito usando la función de voltaje en el capacitor $U_c(t)$.

En la siguiente figura, se ubican los tipos de tareas previamente identificados en esta clase:

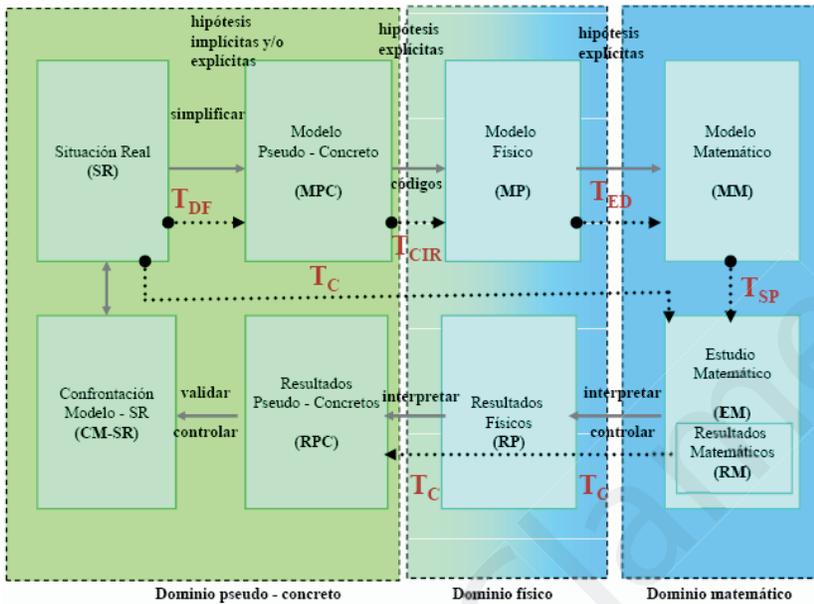


Figura 4. Tipos de tarea existentes en clase de Física.

Existe un tipo de tarea T_{DF} el cual aparece solo en dos ocasiones en los libros analizados y consiste en establecer un diagrama a partir de la fotografía de un dispositivo físico. El tipo de tarea T_{CIR} es poco solicitado y el tipo de tarea T_{ED} aparece con mayor frecuencia que en clase de matemáticas aunque se guía al alumno para establecer la ED. La tarea TSP consiste en verificar que una función, proporcionada en el enunciado del ejercicio, es solución de la ecuación diferencial; además se debe precisar el valor de los parámetros presentes en la solución con ayuda de una condición inicial (dada explícitamente en el enunciado). El precisar la corriente (T_C) en el circuito también es una tarea solicitada con frecuencia a los alumnos en los ejercicios y que ésta supone el transitar entre el dominio pseudo-concreto, físico y matemático.

3.3. Resultados de los análisis de libros de texto

Los análisis anteriores revelan la transposición didáctica existente del proceso de modelación en este nivel escolar de acuerdo a lo ya establecido por Chevallard (1991) respecto a la distancia que existe entre el saber sabio (de los expertos) y el saber escolar (aquel que es finalmente llevado al ámbito de la escuela). En nuestro caso se observa una distancia importante entre aquello que se supone debe ser enseñado (saber institucional de programas de estudio) y el saber a enseñar o enseñado (aquel que es finalmente llevado a la práctica por el maestro en clase).

En general se observa que:

- A) El tránsito entre la Situación Real hacia el Modelo Pseudo-Concreto es muy poco veces dejado al alumno así como el establecer un modelo físico poco solicitado al estudiante.
- B) El establecimiento de la ED tiene lugar más ampliamente en clase de Física que de Matemáticas aunque se guía al estudiante en el proceso.
- C) En ambas clases existen pocos ejercicios para confrontar al estudiante a la transición entre las etapas de modelación Resultados Pseudo-Concretos hacia la Confrontación Modelo-Realidad.

Henry (2001) establece que esta última transición así como Situación Real hacia el Modelo Pseudo Concreto son importantes a ser consideradas desde un punto de vista didáctico si realmente se pretende enseñar la modelación. Con base en los resultados de los análisis realizados, se realiza el diseño de una situación experimental con el objetivo de enfrentar a los alumnos a las transiciones de las etapas de la modelación normalmente ausentes en el ámbito escolar.

4 Descripción de la situación experimental

El segundo objetivo de este trabajo es identificar las dificultades de los estudiantes para modelar una situación de la vida real. Se toma como base para el diseño de las actividades el tipo de tareas y se contempla el incluir algunas de ellas que no sean comúnmente exigidas (fuera del contrato didáctico). El diseño de esta situación presenta tres características importantes:

- A) enfrentar a los estudiantes a la transición entre las etapas Situación Real + Modelo Pseudo-Concreto hacia la construcción del Modelo Físico. El análisis realizado con anterioridad revela la ausencia de este tipo de tareas en los libros de texto.
- B) enfrentar a los estudiantes a la transición entre las etapas Modelo Físico hacia el Modelo Matemático. En esta ocasión, no se guía a los estudiantes para la escritura del Modelo Matemático.
- C) enfrentar a los estudiantes a la transición entre las etapas Resultados Pseudo-Concreto hacia la Confrontación Modelo-Realidad, esta transición está ausente en las dos clases estudiadas.

En la situación experimental se pide a los estudiantes a modelar el funcionamiento de un desfibrilador cardíaco. Este dispositivo electrónico funciona aplicando un choque eléctrico a un ser humano para restaurar el ritmo de su corazón. Una breve descripción sobre el funcionamiento de este dispositivo es

incluida en el texto introductorio de la actividad, esta descripción es formulada en términos pseudo-concretos y físicos (eléctricos).

Posterior a un texto introductorio de la actividad, se les presenta a los estudiantes la pregunta clave ¿Cuál es la probabilidad de sobrevivir de un hombre que presenta un problema cardíaco en plena calle y el cual es asistido con ayuda de un desfibrilador cardíaco? A través de cinco incisos se le guía al alumno a ir respondiendo gradualmente a esta pregunta.

A continuación, se presenta los enunciados de las cinco preguntas que conforman la situación experimental.

4.1. Instrucción de la Pregunta A

Se desea modelar el desfibrilador con ayuda de un circuito eléctrico (similar a aquellos estudiados en clase). Dibuje un circuito eléctrico y realice el diagrama justificando su elección.

Una respuesta posible (y correcta) a esta pregunta es el diagrama de un circuito RC como el mostrado en la Figura 5, en el cual la resistencia R representa al cuerpo del paciente mientras que el capacitor C representa al dispositivo desfibrilador.



Figura 5. Respuesta posible a la pregunta A.

La presencia de la imagen, la cual ejemplifica el uso del aparato, puede influir en las respuestas dadas por los estudiantes. Este inciso corresponde al tipo de tarea T_{CE} (representar un diagrama de circuito), la cual está presente en clase de física.

4.2. Instrucción de la Pregunta B

Establecer un modelo (ED) para la evolución del voltaje en el desfibrilador. Justifique las leyes empleadas para el establecimiento del modelo.

Se espera que el alumno establezca la ley de Kirchoff para la suma de voltajes ($U_C + U_R = E(t)$), dado que se estudiará la descarga del capacitor sobre la resistencia el voltaje del generador debe ser considerado cero y posteriormente con el uso de la ley de Ohm ($U_R = R \cdot i(t)$) se llega a que una respuesta posible (y correcta) para esta pregunta es la siguiente ED

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC}U_C = 0$$

donde U_C representa el voltaje en el capacitor. Este inciso corresponde al tipo de tarea T_{ED} (establecer una ED) la cual está presente en ambas clases.

4.3. Instrucción de la Pregunta C

Verificar que $Ae^{-t/RC}$ es solución de la ED. Determinar el valor de la constante A usando una condición inicial.

La condición inicial necesaria para responder a esta pregunta es dada implícitamente en la actividad. El estudiante debe considerar que $U_C(0) = E$ donde E representa el voltaje del capacitor en el tiempo $t=0$. Este inciso está relacionado con el tipo de tarea T_{SP} identificado en ambas clases aunque en los ejercicios analizados la condición inicial está incluida explícitamente en el enunciado.

4.4. Instrucción de la Pregunta D

Se sabe que solo el 4% de la corriente eléctrica es recibida por el paciente. Se necesita precisar el valor máximo de la corriente recibida por el corazón del paciente.

Para responder a este inciso, los estudiantes deben establecer que

$$i(t) = \frac{U_C(t)}{R}$$

usando la expresión $U_C(t)$ encontrada en el inciso anterior. Este inciso está relacionado con el tipo de tarea T_C (determinar la corriente eléctrica $i(t)$) que aparece solamente en clase de Física.

4.5. Instrucción de la Pregunta E

Comparar el resultado del inciso D con los datos de la tabla proporcionada. Con base en esta comparación, determinar si el paciente tiene posibilidades de sobrevivir.

Se proporciona una tabla junto con la actividad donde el estudiante tiene la información sobre el tipo de reacción que presenta el cuerpo humano al recibir corriente eléctrica.

Tomando de base esta información, se puede finalmente determinar del éxito del proceso de resucitación sobre el paciente. Este último inciso está relacionado con el tipo de tareas T_{RP} (formular en términos pseudo-concretos los resultados obtenidos). Este inciso permite el confrontar los resultados del modelo con la realidad.

En la siguiente figura se ubican los incisos que conforman la actividad en el esquema de modelación:

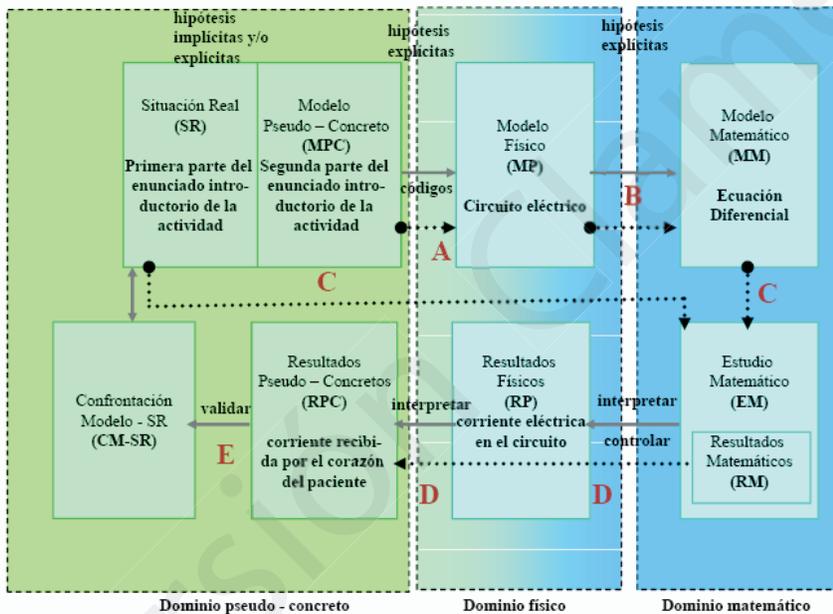


Figura 6. Preguntas de la actividad en el esquema de modelación.

5 Características de la experimentación

La experimentación se lleva a cabo con la participación voluntaria de 25 estudiantes del último año de preparatoria en Francia. La experimentación se realiza posterior a la enseñanza del tema Circuitos Eléctricos. Se solicita a los estudiantes trabajar en pareja la resolución de la situación durante un tiempo aproximado de una hora.

6 Análisis de resultados

El análisis de las producciones de los alumnos se realiza con base en el tipo de tareas usualmente solicitadas en clase. Se desea determinar los tipos de tarea donde se encuentre el mayor número de dificultades de los estudiantes y precisar si existe una técnica en los libros para realizar estas tareas. Se ubica estas dificultades respecto a las transiciones entre las etapas del proceso modelación. Se analizan algunas estrategias utilizadas por los alumnos para resolver la actividad. A continuación, se presenta el análisis de las primeras tres preguntas que conforman la situación experimental.

6.1. Análisis de la Pregunta A

Una regularidad encontrada en las respuestas a esta pregunta es la dificultad de los estudiantes en proponer un diagrama de circuito con todos los elementos del mismo como componentes eléctricos. A este respecto se identifica la aparición de algunas configuraciones denominadas “híbridas” ya que mezclan elementos de naturaleza pseudo-concreta con elementos de naturaleza puramente física (eléctrica). La dificultad de insertar una resistencia como parte del circuito eléctrico para remplazar al paciente aparece en la mayor parte de las respuestas. A pesar de que la palabra “resistencia” aparece en el texto de la actividad, esta palabra no hace referencia específica a la “resistencia” física. Este hecho puede ser observado en la figura 7:

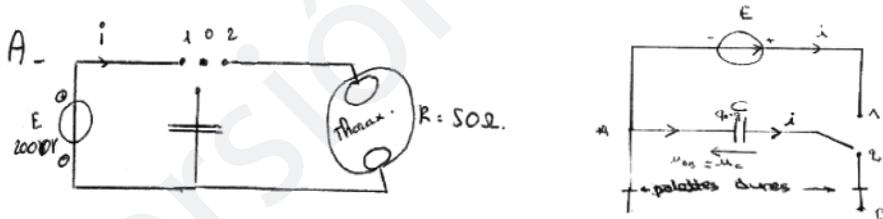


Figura 7. Ejemplos de configuraciones “híbridas”.

En la figura 7 (izquierda) el tórax del paciente es representado por un círculo grande y los electrodos por círculos más pequeños. Incluso si la leyenda “ $R = 50 \Omega$ ” se refiere a una resistencia, es notable la dificultad para los estudiantes de usar la representación convencional para ésta (rectángulo). En la figura 7 (derecha), los electrodos son representados por los estudiantes (“palettes dures” en francés) pero ellos no hacen referencia a la posible presencia de una resistencia en el circuito. Al parecer, los estudiantes no conciben al paciente como parte del circuito quizá porque para ellos el paciente,

en tanto ser humano, no tiene naturaleza eléctrica y por lo tanto no conciben el representarlo en términos puramente eléctricos.

Algunos estudiantes proponen un modelo físico como el mostrado en la siguiente figura 8. Se ubica este diagrama en el Dominio Pseudo - Concreto ya que los elementos mostrados no corresponden a representaciones de elementos físicos normalmente presentes en un circuito eléctrico. Esta respuesta cuestiona la comprensión de los estudiantes respecto a la pregunta planteada. Esta dificultad puede ubicarse en la transición Situación Real + Modelo Pseudo - Concreto hacia la escritura del Modelo Físico.

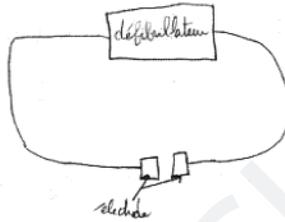


Figura 8. Ejemplo de una configuración pseudo-concreta.

Respecto a las praxeologías previamente observadas en los libros, ninguna técnica es presentada para realizar este tipo de tareas; a pesar que esta transición (Situación Real + Modelo Pseudo - concreto \rightarrow Modelo Físico) parece constituir un paso importante a ser considerado desde el punto de vista de la modelación.

6.2. Análisis de la Pregunta B

El establecimiento de la ecuación diferencial para modelar la variación del voltaje en el capacitor del circuito permite identificar dificultades de los estudiantes. Algunos olvidan las leyes de la Física para realizar este proceso (suma de voltajes de Kirchoff, definición de corriente), otros la manera de establecer relaciones entre las magnitudes implicadas. Se observa el uso de leyes o principios físicos enunciados de manera incorrecta.

Se observa con particular atención el establecimiento por algunos estudiantes de la ED para modelar la carga $q(t)$ del capacitor, esto es:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q=0$$

On utilise la loi d'additivité des tensions car on cherche une tension.

$$U_{BA} = U_R$$

$$-q/C = RI$$

$$-q/C = R \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{CR}$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q(t)}{CR}$$

$$Ae^{-\frac{t}{CR}} = Ae^{-\frac{t}{CR}}$$

Figura 9. Respuesta a la tarea B.

Esta forma de proceder no se observa como técnica existente en los manuales analizados; sin embargo parece “natural” para los estudiantes del establecimiento de dicha ED.

Otra dificultad observada es la elección de estudiar la carga o descarga del capacitor sobre la resistencia. El interés es el estudio de la descarga del desfibrilador sobre el paciente, pero un número importante de estudiantes no parece considerar este hecho.

Loi des tensions dans un circuit en série.

$$0 = U_R + U_C$$

$$0 = R \cdot i + U_C \Rightarrow 0 = R \cdot \frac{dq}{dt} + U_C \quad \text{car } i = \frac{dq}{dt}$$

$$\Rightarrow 0 = R \cdot \frac{d(c \cdot U_C)}{dt} + U_C \quad \text{car } q = c \cdot U_C$$

$$\Rightarrow 0 = R \cdot c \cdot \frac{dU_C}{dt} + U_C$$

Figura 10. Respuesta de un equipo para el inciso B.

Por ejemplo, en la producción mostrada por la figura 10, los estudiantes corrigen la primera respuesta a B

$$(E = R \cdot \frac{d(c \cdot U_C)}{dt} + U_C) \text{ por } 0 = R \cdot \frac{d(c \cdot U_C)}{dt} + U_C$$

ya que se dan cuenta (gracias al inciso C) que el valor del voltaje E del generador debe ser cero al momento de realizar la descarga del capacitor sobre la resistencia. Veremos con más detalle esta retroacción de C sobre B en la sección siguiente.

6.3. Análisis de la Pregunta C

En muchos casos, la pregunta C permite validar el modelo inicialmente propuesto en B y esto ayuda a los estudiantes a modificar la ED propuesta. Esta dificultad evidencia la poca o nula relación para los estudiantes entre el fenómeno real estudiado y los modelos físico (circuito eléctrico) y/o matemático (ED) propuestos.

Por ejemplo, algunos estudiantes (ver figura 11) terminan por darse cuenta que el valor del voltaje en el generador (E) debe ser igual a cero justo al momento de verificar que la función dada en C es solución de la ED (establecido previamente por ellos en B).

$$\text{solution: } u_c = A e^{-\frac{t}{RC}} ?$$

$$\frac{du_c}{dt} = A \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{A}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\Rightarrow \text{on remplace:}$$

$$A \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + RC \cdot \left(-\frac{A}{RC}\right) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = E$$

$$A \cdot e^{-\frac{t}{RC}} - RC \cdot \frac{A}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = E$$

$$A \cdot e^{-\frac{t}{RC}} - A \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = E \dots \dots \dots ?$$

problema

$$\rightarrow E = 0 ?$$

Figura 11. Ejemplo de resolución del inciso C.

Posterior a la resolución en B, los alumnos modifican la ED establecida e incluso cuestionan la respuesta dada al inciso A (modificación del diagrama de circuito dado originalmente).

6.4. Síntesis del análisis de las respuestas a la actividad

La realización por los estudiantes de la situación experimental ilustra la importancia de una comprensión inicial adecuada del fenómeno a modelar y del rol del modelo pseudo-concreto concebido por los alumnos para el establecimiento adecuado de los modelos físico y matemático para estudiar el fenómeno real de interés.

Los beneficios (y dificultades) de que los alumnos realicen la transición entre el “mundo de los objetos y eventos” (o dominio real) y el “mundo de los modelos y las teorías” (o dominio físico o matemático) ya ha sido reportada anteriormente en otros trabajos de investigación, en especial por Thibergghien y Vince (2004) en sus investigaciones alrededor de la Didáctica de la Física. En los resultados reportados, se enfatiza principalmente la necesidad de que los alumnos puedan transitar de la situación real a modelar hacia el modelo físico y posteriormente al matemático, lo cual es fundamental si se pretende realmente enseñar el proceso de modelación. Sin embargo, durante la realización del presente estudio, se vislumbran algunas limitaciones de llevar esto a un contexto escolar tradicional.

A continuación se muestran las dificultades observadas con mayor frecuencia en las respuestas de los estudiantes, algunas se sitúan al interior del proceso de modelación (transiciones entre etapas) e incluso respecto a las praxeologías observadas en los libros de texto.

TABLA I
Dificultades de los alumnos identificadas durante la realización de la situación experimental

<i>Nivel macro (transición entre etapas del proceso de modelación)</i>	<i>Inciso</i>	<i>Nivel micro (praxeologías)</i>	<i>Descripción de la dificultad identificada</i>
Transición SR → MPC → MP	A	No se encontró alguna técnica relacionada con el tipo de tarea T_{CIR} .	1. Los alumnos no sienten la necesidad de incluir una resistencia en el circuito eléctrico para representar el tórax del paciente.
MM	B	*Praxis (T_{ME}, τ_{ME}) * Ninguna técnica es enseñada en clase para realizar este procedimiento. * Evidencia de no relación entre los dominios Físico y Matemático.	2. Los estudiantes olvidan algunas relaciones o leyes físicas o la manera de relacionarlas para poder establecer la ecuación diferencial. En ocasiones, usan de manera incorrecta estas leyes o principios. 2'. Los estudiantes establecen una ED para la carga $q(t)$ del capacitor y no para el voltaje U_c de este elemento del circuito. 2'' Los estudiantes no establecen el valor de E (voltaje en el generador) = 0, que corresponde a una condición inicial importante para establecer la solución particular de la ED. Esto evidencia la incomprensión de la situación real de origen a modelar.
MM → EM	C → B → A	Praxis $(T_{RED}, \tau_{RED/D})$	3. Haber propuesto un valor de E indefinido permite la validación de la respuesta dada en el inciso B e incluso para el inciso A.
EM → SR → EM	C	No existe alguna técnica para realizar este tipo de tarea.	4. Se observa una dificultad importante para establecer la condición inicial en forma física y/o matemática la cual fue dada de manera implícita por el texto introductorio de la situación experimental.
RM → RP → RPC	D	Praxis $(T_{Ia}, \tau_{Ia} / \tau_{Ia'})$ $(T_{Ib}, \tau_{Ib} / \tau_{Ib'})$	5. Los estudiantes no consideran a la corriente eléctrica en el circuito $i(t)$ como función del tiempo.

En ocasiones, la inexistencia de una praxeología (o praxis) para realizar un tipo de tarea puede explicar las dificultades encontradas en los alumnos para resolverla (ejemplo inciso A y C). Otras veces la praxis está dada implícitamente en los libros y aún así el estudiante presenta serias dificultades para realizar el inciso correctamente (ejemplo incisos C y D).

En algunas de estas dificultades podemos constatar que están relacionadas con ciertas transiciones entre etapas que permiten pasar de un dominio a otro. Por ejemplo, el inciso A y una parte del C sugieren que es en realidad en las transiciones entre diferentes dominios que el alumno encuentra una mayor dificultad en realizar determinadas tareas. Por ejemplo, el inciso A pide el tránsito del Dominio Pseudo-Concreto al Dominio Físico y el inciso C exige al alumno a regresar al Dominio Pseudo-Concreto para poder establecer una condición inicial en términos del Dominio Matemático (transitando a través del Dominio Físico).

7 Conclusiones del estudio

La descripción del proceso de modelar propuesta como referencia en este trabajo puede modificarse con base en aspectos observados durante la actividad de los estudiantes. Se sugiere el discutir en la comunidad de Matemática Educativa las diferentes concepciones de modelación existentes y precisar aquella que deba ser llevada al ámbito escolar. Esta descripción de modelación puede variar dependiendo del campo científico donde la situación a modelar específica esté inmersa.

Un hallazgo relevante de este trabajo es el enfatizar la importancia de la construcción del modelo pseudo-concreto adecuado para establecer posteriormente los modelos físico y/o matemático que sean pertinentes la problemática en cuestión. Este estudio encuentra absolutamente necesario que esta transición sea llevada a cabo en ámbito escolar.

La riqueza de la retroalimentación de una tarea sobre otra en la situación experimental para poder desarrollar una solución apropiada a cada pregunta planteada es un resultado que este estudio evidencia. Lo anterior es una característica a tener en cuenta en el diseño de futuras actividades para el aprendizaje de la modelación.

Es recomendable el diseño de actividades que incorporen la mayoría de las etapas del proceso de modelación si realmente se pretende que el alumno desarrolle habilidades en este rubro.

Finalmente, la necesidad de capacitación para los profesores respecto a la enseñanza y aprendizaje de modelación se revela como un aspecto fundamental a ser considerado en un futuro.

Reconocimientos

Deseo agradecer el apoyo recibido por el CONACYT para la realización de mis estudios doctorales y a Colette Laborde por haber aceptado dirigir este trabajo de investigación.

Referencias bibliográficas

- Artaud, M. (2007). Some conditions for modeling to exist in mathematics classrooms. En Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W. y Niss, M. (Eds.), *Modeling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (pp. 371-378). New York: International Commission on Mathematical Instruction ICMI.
- Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1), 37-68.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*, deuxième édition. Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse de pratiques d'enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.
- Henry, M. (2001). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. En Henry, M. (Ed.), *Autour de la modélisation en probabilités* (149-159). Besançon : Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico [OCDE] (2007). *PISA 2006: Science Competencies for Tomorrow's World Executive Summary*, 55. Retrieved from <http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/15/13/39725224.pdf>
- Rodríguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation en Classe de Physique et des Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation en Terminale S.* (Tesis de doctorado). Universidad Joseph Fourier, Grenoble, France.
- Tiberghien, A. y Vince, J. (2004). Études de l'activité des élèves de lycée en situation d'enseignement de la physique. En Pugibet, V. et Gettliffe-Grant, N. (Eds.), *Cahiers du Français Contemporain* 10. ENS Editions.

Autora:

Ruth Rodríguez.

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM).

Campus Monterrey. México.

ruthrdz@itesm.mx

Versión Clame