Francisco Cordero, Tamara Del Valle, Astrid Morales

USOS DE LA OPTIMIZACIÓN DE INGENIEROS EN FORMACIÓN: EL ROL DE LA INGENIERÍA MECATRÓNICA Y DE LA OBRA DE LAGRANGE[1]

Uses of the optimization of engineers in training: the role of mechatronic engineering and the work of Lagrange

RESUMEN

La enseñanza de la optimización habitualmente se ha convertido en un proceso mecánico y desprovisto de argumentaciones: en general son ignorados sus usos en situaciones específicas de otras disciplinas, tales como la ingeniería. Con la *Teoría Socioepistemológica*, hacemos una investigación empírica donde se problematiza la epistemología de usos para valorar la justificación funcional que demandan otros dominios de conocimiento. Analizamos aspectos de la obra *Mecánica Analítica* de Lagrange y del trabajo de ingenieros mecatrónicos. Se definió a ingenieros en formación como la comunidad de estudio, y se sustenta la emergencia de una situación específica de selección así como sus usos y significados de la optimización. La metodología consistió en la técnica de análisis documental y en entrevistas semiestructuradas. Se encontró que las *situaciones de selección* generan significaciones y argumentaciones de optimización.

PALABRAS CLAVE:

- *Ingeniería*
- *Resignificación*
- *Optimización*
- *Situación de selección*
- *discurso Matemático Escolar*

ABSTRACT

The teaching of optimization, has usually become a mechanical process and devoid of arguments: in general their uses are ignored in specific situations of other disciplines, such as engineering. With the *Socio - Epistemological Theory*, we make an empirical investigation, where the epistemology of uses is problematized to value the functional justification demanded by other domains of knowledge. We analyze aspects of the Lagrange *Analytical Mechanics* work and the work of mechatronic engineers. Engineers in training were defined as the study community and the emergence of a specific selection situation is supported as its uses and meanings of optimization. The methodology consisted in the technique of documentary analysis and semi-structured interviews. It was found that *selection situations* generate optimization meanings and arguments.

KEYWORDS:

- *Engineering*
- *Resignify*
- *Optimization*
- *Selection situation*
- *School Mathematics discourse*

[1] Este artículo reporta la investigación doctoral, no publicada.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2019) *22* (2): 185-212.
Recepción: Noviembre 16, 2017 / Aceptación: Junio 30, 2019. DOI: 10.12802/relime.19.2223

RESUMO

O ensino da otimização, geralmente se torna um processo mecânico e desprovido de argumentos: em geral, seus usos são ignorados em situações específicas de outras disciplinas, como a engenharia. Com a *Teoria Sócio - epistemológica*, fazemos uma investigação empírica, onde a epistemologia dos usos é problematizada para avaliar a justificativa funcional exigida por outros domínios do conhecimento. Analisamos aspectos do trabalho de *Mecânica Analítica* de Lagrange e o trabalho de engenheiros mecatrônicos. Engenheiros em formação foram definidos como a comunidade de estudo e o surgimento de uma situação de seleção específica é sustentado como seus usos e significados da otimização da comunidade. A metodologia consistiu na técnica de análise documental e entrevistas semiestruturadas. Verificou-se que as *situações de seleção* geram significados e argumentos de otimização.

PALAVRAS CHAVE:

- *Engenharia*
- *Ressignificação*
- *Otimização*
- *Situação de seleção*
- *discurso de Matemática escolar*

RÉSUMÉ

L'enseignement de l'optimisation est généralement devenu un processus mécanique et dépourvu d'arguments: en général, leurs utilisations sont ignorées dans des situations spécifiques relevant d'autres disciplines, telles que l'ingénierie. Avec la *théorie socio - épistémologique*, nous réalisons une enquête empirique dans laquelle l'épistémologie des utilisations est problématisée pour évaluer la justification fonctionnelle exigée par d'autres domaines de la connaissance. Nous analysons des aspects du travail de Lagrange en *Mécanique Analytique* et des ingénieurs en mécatronique. Les ingénieurs en formation ont été définis comme la communauté d'étude et l'apparition d'une situation de sélection spécifique est prise en charge, de même que ses utilisations et son sens de l'optimisation. La méthodologie consistait en la technique de l'analyse documentaire et des entretiens semi-structurés. Il a été constaté que les *situations de sélection* génèrent des significations et des arguments d'optimisation.

MOTS CLÉS:

- *Ingénierie*
- *Resignification*
- *Optimisation*
- *Situation de sélection*
- *discours en mathématiques scolaires*

1. Introducción

En general, la optimización en la matemática escolar es explicada de la siguiente manera: existen problemas del mundo real que son no lineales y de gran dimensión; para resolver esa clase de problemas se requiere encontrar soluciones óptimas, lo cual deriva en generar herramientas para utilizar a modo de caja negra algoritmos específicos. Se enfoca la atención en el desarrollo de algoritmos de optimización, y los aspectos relevantes del método son la implementación y ejecución de distintas técnicas para la resolución de problemas de programación matemática. Tal vez por eso las investigaciones del campo sugieren instrumentos tales como la tecnología y estudian los procesos cognitivos que intervienen para mejorar las habilidades y las competencias en los estudiantes. Se trata de que aprendan el método, desde el método mismo. Sin embargo, no se formula un cuestionamiento sobre aquello que hace que suceda el método, es decir: cuál es *el entorno de relaciones recíprocas entre el conocimiento matemático y la realidad del que aprende.*

1.1. *Antecedentes*

La optimización es parte de una de las ramas de la matemática llamada Investigación de Operaciones, que consiste en la aplicación y formulación de métodos matemáticos para realizar procesos de toma de decisión. Sin embargo, en su enseñanza, en algunos cursos de matemáticas, los procesos mecánicos se han desprovisto de argumentaciones: los métodos carecen de significados de la matemática en otros dominios de conocimiento tales como la ingeniería.

En el campo disciplinar de la matemática educativa hay investigaciones al respecto, las cuales ocupan diferentes perspectivas: cada una expresa sus objetivos para la matemática, la realidad y la educación. Por ejemplo, Reaño y Malaspina (2011) reportan la poca atención dedicada al tema Programación Lineal en la etapa escolar de estudiantes universitarios, lo cual les provoca dificultades al resolver problemas contextualizados en esa área: les falta coordinación de los diferentes registros de representación y no logran obtener conclusiones al interrelacionar su intuición optimizadora con el lenguaje formal. Por su parte, Malaspina y Font (2010), con la finalidad de romper con el carácter mecanicista de la enseñanza de la optimización, hacen un estudio basado en la intuición como vector constituido por tres componentes: idealización, generalización y argumentación. Con ese vector los estudiantes logran hacer conexiones entre la intuición y la mecanización: por un lado, la intuición hace valorar algunas proposiciones de solución al problema y, por otro, la intuición juega un papel importante en el uso del razonamiento.

Camacho y López (2014) desarrollan una propuesta mediante movilidad de registros de representación para facilitar la comprensión en el manejo de variables básicas de solución de un problema de programación lineal. Y, por su parte, Hollebrands y Okumus (2017) reportan dificultades que futuros profesores experimentaron al razonar sobre la ubicación de los puntos óptimos para encontrar la distancia mínima de un punto a otro en un cubo y en prismas rectangulares. Sin embargo, encontraron sentido a las distancias óptimas y produjeron conjeturas después de arrastrar objetos y realizar mediciones, comparando y contrastando las longitudes de diferentes trayectorias al utilizar las herramientas de Cabri 3D para identificar distancias óptimas. Pero también, hay investigaciones donde la optimización es el contexto para que estudiantes den sentido a las funciones en entornos distintos. Se proponen espacios de trabajo funcionales inspirados en espacios de trabajo geométricos para analizar situaciones en el aula basada en un problema de optimización geométrica, el cual pone en juego un espacio de geometría dinámica, un espacio de medida y un espacio de álgebra (Tran Kiem y Lagrange, 2016).

Los resultados de estas investigaciones justifican la importancia de la enseñanza a través de contextos y problemas reales de los métodos de optimización para estudiar luego los procesos cognitivos de los estudiantes centrados en los objetos matemáticos que intervienen en las propuestas de investigación, pero no así los usos de la optimización en otros dominios de conocimiento; es decir, la funcionalidad[2] del conocimiento matemático no es el referente en la discusión, ni en la problemática educativa.

Entonces, el objetivo de nuestra investigación es formular una epistemología de usos para valorar la justificación funcional que demandan otros dominios de conocimiento. En particular ofrecemos un escenario de ingenieros en formación donde emergen usos de la optimización a través de *una situación de selección*; la cual expresa el entorno del conocimiento matemático y la realidad del que aprende[3].

1.2. *Problemática de la investigación*

Para los fines de la educación consideramos que la realidad es subjetiva y está ligada a las sensaciones de la humanidad, esto favorece el sentido funcional del conocimiento, cuyos usos y resignificaciones suceden en el quehacer disciplinar y en la vida (Cordero, Gómez, Silva - Crocci y Soto, 2015). Sin embargo, eso que se llama "realidad" habrá que restringirlo para tipificarlo; es decir, construir el marco de referencia que exprese los usos rutinarios. De esta manera enfocamos la atención a los usos del conocimiento matemático en los cotidianos del disciplinario, del trabajador y de la gente (Mendoza, Cordero, Solís y Gómez,

2 Matemática funcional es un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y le transforma su realidad. Todo ello en oposición al conocimiento utilitario (Cordero y Flores, 2007).

3 Cabe mencionar que la problemática está orientada al uso de la optimización, el cual se identifica en la selección y construcción de un modelo de aproximación lineal. Es por ello que la situación utilizada no se centra en identificar un máximo o un mínimo, como suele presentarse en un escenario escolar, sino en las significaciones, procedimientos y argumentaciones que emergen en la comunidad de estudio al ser ejecutada la situación.

2018). Hay otros enfoques de investigaciones similares de enorme relevancia, las cuales, para responder a esas realidades de las comunidades, identifican las prácticas sociales que norman el conocimiento matemático. Por ejemplo, se ha estudiado la emergencia del *desarrollo del pensamiento variacional* en comunidades de médicos y de estudiantes de educación media, en sus prácticas profesionales (cardiología - situación no determinista) y escolares (curos de cálculo - situación determinista), respectivamente (Cantoral, Moreno - Durazo y Caballero - Pérez, 2018). Las investigaciones se realizan con la perspectiva del Programa Socioepistemológico Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) (Cantoral, 2013). Esta es la problemática general que abordamos en esta investigación.

En particular, en este artículo la especificidad de la problemática de investigación consiste en haber identificado elementos que constituyen un entorno de significaciones y usos de la optimización que emergen en una comunidad de ingenieros en formación. Esos elementos fueron la funcionalidad, la transversalidad y la situación específica lo que conllevó una epistemología de usos de la optimización; la cual confronta las técnicas algorítmicas habituales de la matemática escolar para la resolución de problemas de optimización, y contribuye a la conformación del marco de referencia planteado en la problemática general.

2. Marco teórico

Conocer el *entorno de relaciones recíprocas entre el conocimiento matemático y la realidad del que aprende* es una tesis fundamental para favorecer los aprendizajes de los significados de la matemática.

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013) considera cuatro principios que sirven de fundamento a ese objetivo: el normativo de la práctica social, el de racionalidad contextualizada, el de relativismo epistemológico y el de significación progresiva (resignificación). Estos principios delinean una perspectiva teórica basada en la experiencia empírica de las comunidades que explica el enigma de la construcción social del conocimiento matemático y la difusión institucional. Un constructo medular es la práctica social, que se define como un sistema complejo de procesos de dimensión social en el que se problematiza el saber matemático considerando los saberes sabio, técnico y popular para sintetizarlos en la sabiduría humana.

Dentro del Marco de la Sociepistemología, el objetivo de nuestro programa de investigación (sección 1.3) consiste en revelar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento matemático de la gente:

en la escuela, en el trabajo o la profesión y en sus realidad a través de dos líneas de trabajo simultáneas, la Resignificación del Conocimiento Matemático y su Impacto Educativo. En la primera se problematizan las categorías de conocimiento matemático que suceden en las comunidades entre diferentes dominios de conocimiento que entran en juego: el discurso matemático escolar, el campo disciplinar y el cotidiano de la comunidad. En la segunda se conforman los multifactores y estadios que coadyuvan a conformar programas de acompañamiento permanentes entre el profesorado de matemáticas (Cordero, 2016b).

La Teoría Socioepistemológica promueve la descentración de los objetos matemáticos y prioriza la forma en que la gente usa la matemática desde su cotidiano en una situación específica. En otras palabras, se recupera el carácter social de la matemática que ha sido soslayado y el foco de atención se dirige hacia las prácticas que norman la construcción social del conocimiento matemático, CSCM (Cantoral, Reyes - Gasperini y Montiel, 2015; Cordero et al., 2015) y que se manifiestan a través de su uso. A continuación, se delimitará el programa general para los fines de esta investigación sobre los usos de la optimización.

2.1. *Marco de referencia*

El marco de referencia (MR) es una estructura de relaciones que deberá reconocer la funcionalidad del conocimiento matemático de las comunidades en cuestión. Estas relaciones estarán compuestas por la transversalidad y la pluralidad del conocimiento matemático (los dominios multidisciplinares de conocimiento) en situaciones específicas propias de las comunidades. Así, en una dialéctica entre la matemática y la realidad, ambos conocimientos se mezclan o se convierten en una sola cosa, se transforman en una unidad de saberes, de conocimientos en uso de la gente. La transformación descentraliza al objeto y los usos son resignificados entre situaciones y entre escenarios: *el académico - escolar; la profesión - trabajo*; *y el cotidiano - ciudad* (Cordero, 2016b). Para los fines de esta investigación, la estructura estará compuesta por una situación específica (*situación de selección*) que conlleva la descentración del objeto en acciones de resignificar los usos (epistemología de usos) en una comunidad de ingenieros en formación.

2.2. *Uso del conocimiento matemático*

Los usos del conocimiento matemático U(CM) son las funciones orgánicas de las situaciones (funcionamientos), que se manifiestan por las “tareas” que componen la situación, y la forma del uso será la clase de esas “tareas”. Las tareas pueden ser actividades, acciones, ejecuciones y alternancias de dominios propias del organismo de la situación (Cordero y Flores, 2007).

2.3. *Resignificaciones*

Cuando la alternancia de tareas sucede, se genera una nueva función orgánica que debate con las formas de los usos. Este "acto de uso" es la resignificación de usos del conocimiento matemático (Res(U(CM)) (Cordero y Flores, 2007). Las Res(U(CM) suceden en situaciones específicas (*Se*). Las *Se* son parte de ese entorno (relaciones recíprocas) en cada uno de los escenarios. Y cada Se_i se conforma por elementos secuenciales que construyen lo matemático: significación, procedimiento e instrumento, que derivan la argumentación de la situación (Arg (CM)). Arg(CM)_i es una Res(U(CM))_i construida en la Se_i (Cordero, 2016a).

2.4. *Categoría del Conocimiento Matemático*

La Res(U(CM)) corresponde a una epistemología de usos que en el contexto de la matemática escolar es inusual; es una matemática en forma de procesos permanentes (usos y significados) que emergen en la comunidades en contraparte de objetos terminales (conceptos y definiciones) que no necesariamente emergen en los sujetos (Cordero, Mena-Lorca y Huincahue, 2017). Con esta orientación, a la Res(U(CM)) se le denomina Categoría del Conocimiento Matemático (ζ(CM)), en ese sentido categoría significa un tipo de conocimiento matemático distinto al centrado en el objeto matemático y que favorece la descentración del objeto (Mendoza y Cordero, 2018).

2.5. *Matemática funcional*

En términos genéricos, la matemática que se va construyendo con las resignificaciones que realizan las comunidades, se le llama matemática funcional (Mendoza y Cordero, 2018; Cordero, 2016a), que, llanamente, es un conocimiento útil de las personas en situaciones de la vida mundana, del trabajo y la profesión (Arendt, 2005). Ese conocimiento útil está compuesto de usos y significados, los cuales son resignificados en el tránsito de las situaciones por las comunidades.

2.6. *Transversalidad*

Las transversalidades (T_i) son las resignificaciones de los usos del conocimiento entre escenarios o dominios de conocimiento (D_i) (por ejemplo entre la escuela y el trabajo; o entre la matemática y la ingeniería). Las transversalidades suceden en momentos (Mo_i), los cuales son fases en el proceso situacional (Mendoza y Cordero, 2018).

Con este Marco teórico se estudian los usos y las resignificaciones de la optimización cuando son problematizadas en el entorno de las relaciones recíprocas entre los escenarios. Para tal fin se plantea la hipótesis de usos y se definen los escenarios.

Hipótesis. Optimizar es proponer un comportamiento ideal o estable en una situación específica. La propuesta misma pasa por un *proceso de selección* normado por la situación: *patrones de adaptación, distinción de cualidades,* y *lo estable*. La relación de estos tres elementos genera la argumentación de lo óptimo.

Escenarios. Obra matemática de Lagrange, ingeniería mecatrónica e ingenieros en formación (ver Figura 1).

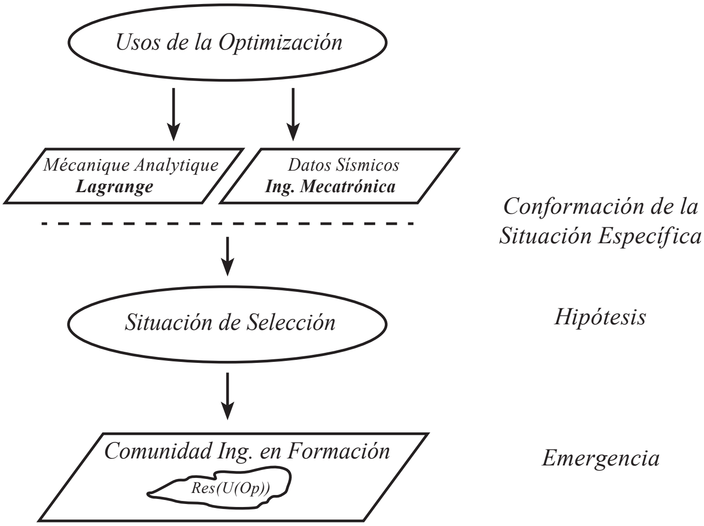


Figura 1. Corpus del Marco Teórico - Metodológico

Con este Marco Teórico revelamos los usos del conocimiento matemático que emergen en las comunidades. En particular revelamos los usos de la optimización en la mecánica analítica de Lagrange, en los datos sísmicos de la ingenieros mecatrónicos y en los ingenieros en formación. Los constructos señalados anteriormente ayudan a establecer los usos de la optimización en situaciones específicas y en diferentes escenarios (la obra matemática, la ingeniería mecatrónica y la matemática escolar). Con los funcionamientos de los usos (buscar lo estable o el comportamiento ideal) y la forma de los usos (equilibrios y reducción de tiempos de análisis) se generan las resignificaciones lo que hace que la *situación de selección* sea transversal entre los escenarios, no así el método de optimización que oferece la matemática escolar.

3. Aspectos metodológicos

3.1. *Definición de la comunidad de estudio*

Se realizaron inmersiones con comunidades de ingenieros para identificar las condiciones y escenarios ad hoc para recolectar datos sobre los usos y resignificaciones del conocimiento matemático. La selección de las comunidades consistió en la disponibilidad de sus miembros para ser video - grabados y entrevistados en los escenarios del trabajo profesional. Se seleccionó a una comunidad de ingenieros mecatrónicos. Con métodos etnográficos (Guber, 2001) y estudio de caso, se caracterizó su quehacer disciplinar; la cual consistió en identificar las situaciones rutinarias donde usan el conocimiento matemático y las problematizaciones de su saber matemático. El análisis de estas caracterizaciones se realizó a través de los constructos definidos en el Marco teórico (sección 2) y con la técnica de análisis documental[4] (Rojas, 2011) y entrevistas semi - estructuradas. Para problematizar el saber matemático se analizó la resignificación del uso de la optimización en el escenario de la obra matemática, la *Mécanique Analytique* de Lagrange y en el escenario de la ingeniería mecatrónica, interpretación de datos sísmicos. Por un lado, con la técnica de análisis documental, y por otro, con la técnica de entrevista semi - estructurada se identificaron patrones y relaciones entre ellos alusivos a la *selección de un comportamiento ideal*; organizados a través de un *instrumento* (*lo estable*) acompañado de sus *significaciones (patrones de adaptación)* y *procedimientos (distinción de cualidades*, $\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0$) y con la unidad de análisis compuesta por los constructos, *uso, resignificación* y *transversalidad*, se conformó la situación de selección (resignificación de usos de la optimización). Los usos y resignificaciones de la optimización se distinguieron por sus funcionamientos y formas en la *Mécanique Analytique* de Lagrange (ecuaciones de equilibrio y problemas de estática expresados por ecuaciones matemáticas) y en la interpretación de datos sísmicos de la ingeniería mecatrónica (algoritmo genético y reducir los tiempos de análisis de los datos sísmicos). La transversalidad de los usos de la optimización suceden entre los escenarios, la matemática y la ingeniería mecatrónica.

El método consistió en revelar los usos que subyacen en los escenarios. Se asume una estructura situacional compuesta por un instrumento que conlleva significaciones y procedimientos que en conjunto derivan argumentaciones (resignificaciones). Estos elementos subyacen en el uso del conocimiento

[4] En esta investigación se interpretó a la técnica de análisis documental como un proceso de “inferencia” donde la información es estudiada, interpretada y sintetizada minuciosamente para dar lugar a una formulación que subyace al documento original (ver sección 4.1).

matemático en las profesiones y en las obras matemáticas, en este caso en la ingeniería mecatrónica y en la *Mécanique Analytique* de Lagrange. En ese sentido el análisis documental y la entrevista semiestructurada ayudan a encontrar relaciones y patrones que conforman aspectos de los cuatro elementos. En este caso lo estable de un comportamiento o el comportamiento ideal es el instrumento sobre el cual suceden significaciones de patrones de comportamiento que buscan adaptarse a lo estable o al ideal, en el contexto de la situación. Las significaciones derivan procedimientos que distinguen cualidades para seleccionar lo optimo del comportamiento (ver sección 4.1.). Estos elementos articulados cristalizan la situación de selección, la cual es la referencia para establecer el uso, la resignificación y transversalidad de la optimización (ver sección 4.2.).

Posteriormente, se tomó como base a la situación de selección para diseñar actividades y analizar su emergencia en una comunidad de ingenieros en formación con distintas ingenierías y semestres. Concluimos que la emergencia de los usos de la optimización se confronta con la matemática escolar habitual de la optimización: implementación y ejecución de distintas técnicas algorítmicas para resolución de problemas de programación matemática.

4. Análisis y discusión

4.1. *Los usos de la optimización en dos escenarios*

4.1.1. *Ingeniería mecatrónica. Un escenario profesional*

Seleccionar los mejores métodos y tecnologías para diseñar y desarrollar de forma integral un producto o proceso, haciéndolo más compacto, de menor costo, con valor agregado en su funcionalidad, calidad y desempeño, es la función de la ingeniería mecatrónica. Por ejemplo, la interpretación sísmica consiste en obtener información geológica significativa a partir de datos sísmicos. Orozco, Ortiz, Urrutia, Martín, Rodríguez y Villaseñor (2013) dicen que a menudo esos procesos son tediosos, consumen mucho tiempo y son muy subjetivos. Lo anterior se debe a la cantidad de información recibida por los habituales mecanismos de recolección de datos sísmicos y la subjetiva lectura e interpretación de las imágenes que provienen de sensores de sonidos (ver Figura 2); el sensor recoge la señal recibida (entrada), precede a una función de transferencia y genera una señal de salida, la cual se representa a través de imágenes.

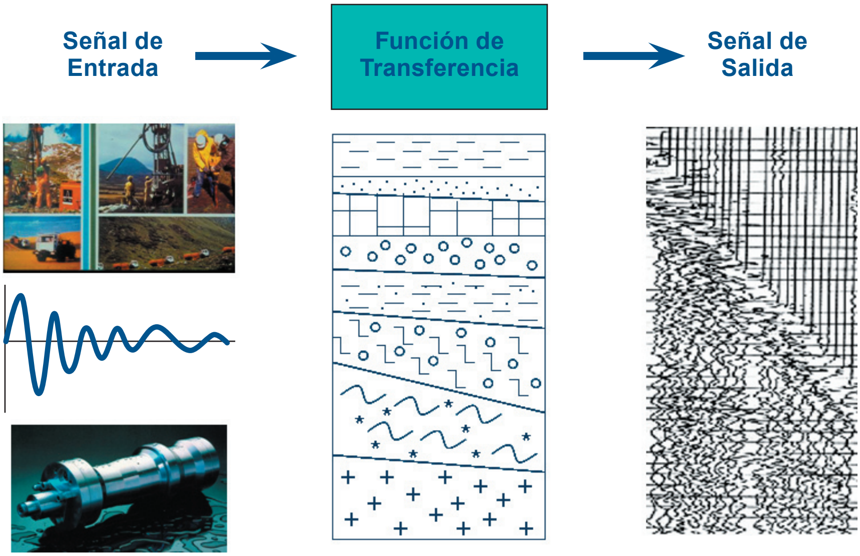


Figura 2. Procesos de información sísmicos

Cada imagen de datos sísmicos extraída debe ser procesada por un sistema llamado Escala de Grises. Cuando se tiene un objetivo de exploración, la cantidad de imágenes que podrían ser interpretadas en el cubo de datos sísmicos (ver Figura 3) es de 1 000 a 2 000, cuya lectura tomaría unos 125 años a los intérpretes. Esto implica que solo pueden interpretarse algunas de las imágenes, provocando mayor subjetividad de los resultados que arroje el intérprete.

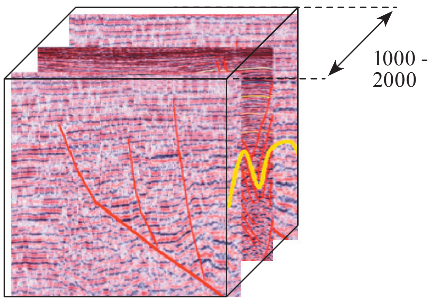


Figura 3. Cubo de datos sísmicos procesados

Problema que se resuelve. Los ingenieros mecatrónicos pretenden proporcionar a los intérpretes una herramienta computacional para reducir los tiempos de análisis de los datos sísmicos en la búsqueda de estructuras geológicas. Ayudan a los intérpretes sísmicos a detectar diapiros de sal[5] (Orozco et al., 2013).

El grupo de mecatrónicos entrevistados señaló que es posible que al aumentar visualmente (numéricamente con filtros o combinaciones) la estructura interna de la imagen de los cuerpos de sal otras áreas de interés puedan aparecer mejoradas facilitando su interpretación. Así es como proponen un nuevo método para mejorar la interpretación de datos sísmicos utilizando un algoritmo genético para optimizar un núcleo que, cuando convoluciona[6] con la imagen sísmica, parece mejorar las características internas de los organismos de sal. De esta manera, buscan reducir tiempos, costos y riesgos en el proceso de exploración e incrementar la productividad de los geocientíficos. Los algoritmos genéticos son un enfoque computacional de inspiración biológica para la optimización a través de una búsqueda simultánea en diferentes áreas del espacio de función de costos, el cual ha demostrado su utilidad como técnica de inversión o de optimización en varias áreas, incluyendo las geociencias. Frente a lo anterior, Orozco et al. (2013) proponen desarrollar un algoritmo genético (GA) como una herramienta de optimización para encontrar el núcleo que minimiza la diferencia entre la imagen filtrada y una imagen deseada. Esta última es construida manualmente para destacar las características de particular interés (Orozco et al., 2013, p. 2).

Los algoritmos genéticos emulan el proceso de evolución natural y se basan en dos premisas: la supervivencia del más fuerte y la mejora de nuevos individuos a través de la reproducción sexual. En un primer momento, una población inicial que abarca uniformemente el espacio de búsqueda se genera de forma aleatoria y cada individuo (o cromosoma) se representa como un conjunto de elementos, comúnmente conocidos como genes. La población inicial es evaluada con la función de costo para descartar aquellos individuos que no están tan bien adaptados como el resto de ellos. Los organismos autorizados para sobrevivir se emparejan y se reproducen a través de una operación de cruce, dando a luz una nueva generación. También se evalúa la nueva generación, permitiendo solo la sobrevivencia de los individuos más aptos. De esta manera, el algoritmo genético se detiene cuando se alcanza un determinado número de generaciones o cuando se ha alcanzado un cierto umbral de la función de costo.

[5] Los diapiros de sal son estructuras geológicas intrusivas, formadas por masas de evaporitas (sales, anhidrita y yeso) que ascienden por las capas sedimentarias de la corteza terrestre, atravesándolas y deformándolas. Existe un gran interés por construir herramientas computacionales para ayudar a los intérpretes sísmicos a detectar diapiros de sal, ya que los objetivos de exploración petrolera pueden estar ubicados cerca o debajo de los cuerpos de sal (Orozco et al., 2013).

[6] Dado de que se trabaja en pixeles, la convolución es, obviamente, una suma finita (no una integral) y, naturalmente, en forma matricial.

Regresando a nuestra materia. Tenemos un problema real en una práctica profesional donde se propone desarrollar un algoritmo genético como una herramienta de optimización para encontrar el núcleo que minimiza la diferencia entre la imagen filtrada y una imagen deseada. Para los fines de la investigación queremos destacar lo siguiente:

- Antes de seleccionar el filtro núcleo, fue necesario adaptar la imagen original aplicándole diferentes filtros –que buscan la evolución de la imagen original– hasta llegar a minimizar la diferencia entre las imágenes filtradas y la imagen deseada. Luego de la adaptación, se realiza la selección de la imagen convolucionada, la que posee el filtro que generó una imagen con menos diferencias a la imagen deseada.
- Después de adaptar la imagen original (convolucionada), fue necesario distinguir las cualidades de las imágenes convolucionadas, respecto de la deseada, para saber cuáles descartar y cuáles no. La selección de la imagen que posee una menor diferencia con la deseada dependerá exclusivamente de las cualidades que distinguen de la imagen convolucionada.

4.1.2. *La Obra matemática. Los multiplicadores de Joseph-Louis Lagrange*

La intención de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) en su obra *Mécanique Analytique,* publicada en 1788, fue expresar los problemas de estática mediante ecuaciones matemáticas. Para eso hizo lo siguiente:

Lagrange define las ecuaciones de condición:[7]

Sean $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, etc., las diferentes ecuaciones de condición dadas por la naturaleza del sistema, las cantidades L, M, N, etc. Son las funciones finitas de las variables x, y, z, x', y', z', etc.; diferenciando esas ecuaciones, se tendrán las siguientes ecuaciones:

> "$dL = 0$, $dM = 0$, $dN = 0$, …, les quelles donneront la relation qui doit avoir lieu entre les différentielles des mémes variables. En général, nous représenterons par $dL = 0$, $dM = 0$, $dN = 0$, …, les équations de condition entre ces différentielles, soit que ces équations" (Lagrange, 1788/1963, p.69).[8]

---

[7] Las ecuaciones de condición de Lagrange actualmente corresponden a las condiciones laterales expresadas por las funciones $f(x)$ y $g(x)=0$ con $\nabla g(x)\neq 0$ para generar la expresión $\nabla f(x)-\lambda\nabla g(x)=0$.

[8] "$dl = 0$, $dM = 0$, $dN = 0$, ..., las cuales darán la relación que debe tener lugar entre las diferenciales de las mismas variables. En general, representaremos por $dl = 0$, $dM = 0$, $dN = 0$, ..., las ecuaciones de condición entre estas diferenciales, sean cuales sean estas ecuaciones".

Las ecuaciones, $dL = 0$, $dM = 0$, $dN = 0$, etc., darán la relación entre las demás diferenciales de las mismas variables. Así, las ecuaciones de condición serán representadas entre estas diferenciales $dL = 0$, $dM = 0$, $dN = 0$, etc., ya sean diferenciales exactas o no exactas, pero deben ser lineales.

Sin embargo, Lagrange formula esas ecuaciones solo para eliminar un número semejante de diferenciales en la fórmula general del equilibrio. Los coeficientes de las diferenciales restantes se igualan cada uno a cero por la teoría de la eliminación de las ecuaciones lineales. Se tendrán los mismos resultados si se añade a la fórmula las diferentes ecuaciones de condición $dL = 0$, $dM = 0$, $dN=0$, etc., multiplicadas cada una por un coeficiente indeterminado. Enseguida se iguala a cero la suma de todos los términos que se encuentran multiplicados por una misma diferencial, lo que dará el mismo número de ecuaciones que de diferenciales. Al final, se eliminan de esas últimas ecuaciones los coeficientes indeterminados, por los que se multiplicó las ecuaciones de condición. Esta regla permite encontrar las condiciones de equilibrio de cualquier sistema propuesto; "De lá résulte donc cette régle extrémement simple pour trouver les conditions de l'équilibre d'un systéme quelconque proposé" (Lagrange, 1788 / 1963, p. 70).[9]

Se tomará la suma de los "momentos" de todas las potencias –referidas a fuerza– que deben estar en equilibrio, y a esta se le añadirá las diferentes funciones diferenciales que han de hacerse cero por las condiciones del problema después de haber multiplicado cada una de esas funciones por un coeficiente indeterminado. Se debe igualar todo a cero y se tendrá así una ecuación diferencial que se tratará como una ecuación ordinaria de máximos y mínimos (Lagrange, 1867), de la cual desprenderá tantas ecuaciones particulares finitas como variables. Estas ecuaciones se librarán de los coeficientes indeterminados por eliminación y se proporcionará todas las ecuaciones necesarias para el equilibrio.

Lagrange (1788 / 1963) expone que "L'équation différentielle dont il s'agit sera donc de cette forme, $Pdp + Qdq + Rdr + \cdots + \lambda dL + \mu dM + \nu dN + \cdots = 0$" (p. 70). Esta ecuación diferencial, en la cual λ, μ, ν, etc., son cantidades indeterminadas, es a la que Lagrange llama ecuación general de equilibrio.

Correspondiente para cada coordenada de cada cuerpo del sistema, con una x, esta ecuación se llevaría a una de la forma:

$$P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} + R\frac{\partial r}{\partial x} + \ldots + \lambda\frac{\partial L}{\partial x} + \mu\frac{\partial M}{\partial x} + \nu\frac{\partial N}{\partial x} + \ldots = 0$$

de tal suerte que el número de esas ecuaciones sea igual al número de todas las coordenadas del cuerpo. Lagrange le llama ecuación principal del equilibrio.

9 "De allí sigue, por tanto, esta regla muy fácil para encontrar las condiciones de equilibrio de un sistema propuesto cualquiera".

Lagrange concluye que cada ecuación de condición es equivalente a una o varias fuerzas aplicadas al sistema, siguiendo las direcciones dadas, o en general, tendientes a hacer variar los valores de las funciones dadas; de suerte que el estado de equilibrio del sistema será el mismo, ya sea que se emplee la consideración de esas fuerzas o que se tenga en cuenta a las ecuaciones de condición. Recíprocamente, dichas fuerzas pueden dar lugar a ecuaciones de condición resultantes de la naturaleza del sistema dado y, haciendo uso de esas fuerzas, sería posible considerar los cuerpos como enteramente libres y sin ninguna restricción. Esta sería una razón metafísica del por qué la introducción de los términos λdL, μdM, $v dN$, …, en la ecuación general del equilibrio, garantiza que esta ecuación pueda ser tratada como si todos los cuerpos estuvieran enteramente libres: en esto consiste el espíritu del método. Las fuerzas en cuestión dan lugar a las resistencias que los cuerpos deberían de sufrir en virtud de su relación mutua, o de la parte de los obstáculos que, por la naturaleza del sistema, podrían oponerse a su movimiento, las cuales deben ser iguales y directamente opuestas a las presiones ejercidas por los cuerpos (Lagrange, 1788/1963, p. 73).

En el planteamiento anterior de Lagrange subyacen elementos que dan sentido a la hipótesis formulada en la sección anterior: *optimizar es proponer un comportamiento ideal o estable en una situación específica*. La propuesta misma pasa por un proceso de selección normado por la situación: patrones de adaptación, distinción de cualidades, y lo estable. La relación de estos tres elementos genera la argumentación de lo óptimo.

Lagrange quiere conformar la ecuación de equilibrio para tratar los problemas de estática; para tal fin desarrolla el siguiente proceso:

- Antes de seleccionar la ecuación de condición que permite generar la relación mutua (ecuación del equilibrio), determina la diferencial de las ecuaciones que representan la fuerza de los cuerpos ($Pdp; Qdq; Rdr$...) y de las ecuaciones que representan la resistencia ($\lambda dL; \mu dM; v dN$...). En este contexto, el rol de los diferenciales de las ecuaciones, se infiere, es la adaptación a una misma naturaleza: al calcular el diferencial, Lagrange está *adaptando* un patrón para que expresen las pequeñas variaciones y así buscar una relación mutua entre dos ecuaciones que expresen lo mismo (en este caso el patrón que importa es la fuerza que ejerce y no el tipo de ecuación); y, por consiguiente, poder resolver la ecuación del equilibrio.
- Luego de haber adaptado las ecuaciones de condición y de la fuerza de los cuerpos (calculándoles la diferencial), Lagrange distingue las cualidades de las ecuaciones de condición, ya que se les debe multiplicar un coeficiente indeterminado (λ, μ *y* v) para generar una resistencia que soporte la fuerza de los cuerpos, logrando una relación mutua entre ellas.

– Se buscan comportamientos con tendencia a las de la fuerza de los cuerpos (*Pdp; Qdq; Rdr...*): se seleccionan multiplicadores (λ, μ, v...) para que las ecuaciones de condición (*dL; dM; dN...)* tiendan a las fuerzas de los cuerpos, y así dichas fuerzas y las respectivas resistencias tengan una relación mutua, conformando la ecuación del equilibrio (ver Figura 4).

Tiende a

$$\underbrace{Pdp + Qdq + Rdr + \cdots + \lambda dL + \mu dM + vdN + \cdots}_{\text{Relación mutua que permite conformar la ecuación}} = 0$$

Figura 4. Búsqueda de tendencias

4.1.3. *Epílogo según los escenarios: las resignificaciones de la optimización*

La argumentación de la optimización ofrece resignificaciones de un comportamiento de "datos o información" en diferentes escenarios donde lo ideal o lo estable (el instrumento), en un contexto de la mecánica clásica se significa a través de una ecuación de equilibrio, lo que deriva el procedimiento "multiplicar un coeficiente indeterminado (λ, μ *y* v) para generar una resistencia" y en un contexto de la geociencia se significa por una imagen propuesta que deriva el procedimiento "distinguir de la imagen convolucionada".

Las Resignificaciones suceden porque con la alternancia de tareas, por un lado, de la mecánica analítica y, por otro, de la mecatrónica, se genera una nueva función orgánica (lo ideal o lo estable) que debate con las formas expresadas con la distinción de cualidades: coeficientes indeterminados y convoluciones. Estas significaciones de usos suceden en las situaciones específicas correspondientes: reducir los tiempos de análisis de los datos sísmicos y conformar la ecuación de equilibrio para tratar los problemas de estática.

La hipótesis adquiere plausibilidad. Los métodos de optimización en la matemática escolar se centralizan en *objetos terminales* (conceptos y definiciones) sin significados y, por el contario, los escenarios analizados se centralizan en *procesos permanentes* (conocimiento en uso) con significados.

4.2. *La emergencia de las resignificaciones de la optimización en ingenieros en formación*

La resignificación de los usos de la optimización es una relación del MR que genera una categoría de conocimiento matemático para descentraliza al objeto matemático. La epistemología es organizada en la *situación de selección* (ver Tabla I).

TABLA I
Epistemología del uso de la optimización

Construcción de lo matemático	*Situación de Selección*
Significación	Patrones de adaptación
Procedimiento	Distinción de cualidades
Instrumento	Lo estable
Argumentación / Resignificación	*Optimización*

4.2.1. *Actividades*

El diseño. La resignificación de los usos: el ideal o lo estable

La situación consta de dos actividades que componen dos momentos de transversalidad. En este caso, se busca la resignificación a partir de la formulación de una función ideal que caracterice lo estable (ver figura 5).

En la actividad 1 se pide seleccionar explícitamente entre las opciones que allí aparecen; lo estable está en la búsqueda del menor margen de error entre los datos de la tabla y las funciones que representan esos datos. Para lograrlo, será necesario adaptar los datos de la tabla (expresados por puntos aislados) o de las funciones (líneas rectas, continuas) que simbolizan un comportamiento de variación uniforme de llenado, y distinguir las cualidades de cada función para seleccionar la que mejor represente los datos de la tabla.

ACTIVIDAD 1

Con un flujo constante de agua se llena un recipiente de forma desconocida. Al completar la capacidad del recipiente se obtiene la siguiente información:

Tiempo de llenado (*segundos*)	*Altura del volumen que lleva el agua dentro de la botella en milímetros* (*mm*)
0	30
5	132
15	256
30	447
45	606

¿Qué función representa de mejor manera el llenado del recipiente?

a) $f(s) = 15s + 73{,}5$
b) $f(s) = 13{,}4s + 35$
c) $f(s) = 14{,}03s + 30$
d) $f(s) = 14{,}03s + 73{,}5$

Describe el procedimiento que te permite realizar tu elección.

ACTIVIDAD 2

Con un flujo constante de agua se llena un recipiente que posee una forma desconocida. La información arrojada al llenarse el recipiente se muestra en la siguiente tabla:

Tiempo de llenado (*segundos*)	*Altura del volumen que lleva el agua dentro del recipiente* (*mm*)
1	15
3	40
6	47
8	85
9	88
...	...
40	

Si nos conviene interpretar el llenado del recipiente como un comportamiento de variación uniforme, entonces:

¿Cuál es ese comportamiento?

Si a los 40 segundos de llenado el recipiente rebasa su capacidad máxima, ¿Cuál es la altura del recipiente?

Describe el procedimiento que te permite realizar tu elección.

Figura 5. Actividades e ingenieros en formación

En la actividad 2, se solicita identificar la altura del recipiente a partir de los datos de la tabla. Para ello, tendrán que formular lo estable, es decir, un comportamiento ideal que represente ese llenado (en este caso la línea recta, dado que se sugiere un comportamiento de variación uniforme). Para su formulación, se deberán distinguir las cualidades del comportamiento de los puntos y, tales puntos se deberán adaptar en un comportamiento continuo (en este caso, en una línea recta). Una vez seleccionado el comportamiento de los datos de la tabla se podrá proponer una altura aproximada del recipiente.

4.2.2. *Puesta en escena y análisis de resultados*

Se recurrió a estudiantes de ingeniería que, de manera voluntaria, accedieran a las actividades diseñadas. Se aplicaron a tres grupos de ingenieros en formación de diferentes instituciones universitarias mexicanas; dos de ellos con cuatro integrantes y el otro con seis. El rango de semestres cursados por los estudiantes de la muestra fue de uno a siete, y las carreras de ingeniería comprometidas fueron en sistemas automotrices, mecánica, robótica, geofísica, química industrial y biotecnología (ver Tabla II).

TABLA II
Perfiles participantes en la implementación de la situación

Código	*Grupo*	*Carrera que cursa*	*Semestres cursados*
X_1	Grupo 1	Mecánica	1
X_2	Grupo 1	Mecánica	1
X_3	Grupo 1	Mecánica	1
X_4	Grupo 1	Mecánica	1
X_5	Grupo 2	Geofísica	1
X_6	Grupo 2	Sistemas automotrices	1
X_7	Grupo 2	Sistemas automotrices	1
X_8	Grupo 2	Sistemas automotrices	1
X_9	Grupo 3	Química industrial	7
X_{10}	Grupo 3	Química industrial	7
X_{11}	Grupo 3	Química industrial	7
X_{12}	Grupo 3	Biotecnología	3
X_{13}	Grupo 3	Robótica	5
X_{14}	Grupo 3	Robótica	5

En la primera actividad, en la cual debían elegir una de las expresiones algebraicas que represente de mejor manera el comportamiento de los datos de la tabla, nos encontramos con diferentes propuestas de solución. Una de ellas fue identificada como una selección visual del primer punto de la tabla (0,30), para relacionarlo con el coeficiente b en la ecuación $f(s)=as+b$, distinguían como cualidad que el recipiente tenía agua en su interior antes de ser llenado, por eso b debía ser 30. Y para determinar el parámetro a calcularon el promedio de las razones de cambio, el cual fue el patrón que se utilizó para adaptar el comportamiento de las razones de cambio, representado en 14,03 (ver Figura 6).

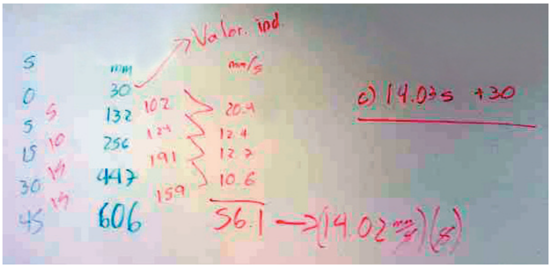


Figura 6. Promedio de las diferencias e identificación del punto de inicio presentado por los participantes X_1 y X_2

Otras propuestas depositaban la atención en la razón de cambio de los datos de la tabla y luego los comparaban con el primer término *as* de cada una de las funciones de la actividad 1, sin prestar interés al coeficiente *b*. Además, se generaron planteamientos donde los futuros ingenieros tabularon las funciones del inciso *a* al inciso *d* para distinguir cualidades antes de seleccionar. Por eso compararon y registraron el porcentaje de error respeto a los datos de la tabla, y, para tomar la solución, consideraron el menor de los porcentajes de error (ver Figura 7).

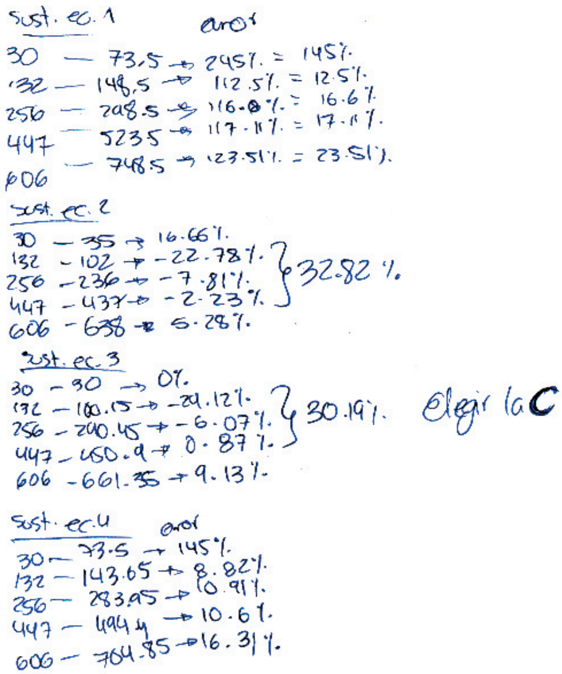


Figura 7. Porcentajes de error, presentado por los participantes X_9, X_{10} y X_{13}

Otros estudiantes de ingeniería compararon las alturas del volumen que lleva el agua dentro de la botella (datos tabulados), en relación con las alturas que arroja cada función de las que se debe seleccionar (ver Figura 8). En la comparación distinguían cualidades para buscar la menor diferencia.

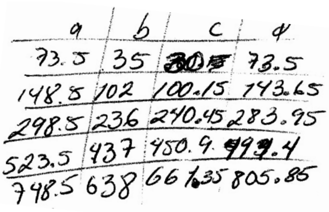


Figura 8. Comparación de las alturas del volumen que lleva el agua en determinado momento, presentado por los participantes X_{11}, X_{12} y X_{14}

De las estrategias narradas anteriormente queremos destacar los elementos que componen la epistemología de la situación de selección; en ese sentido, los procedimientos que realizan los participantes para adaptar los puntos representados en la tabla en un comportamiento lineal, y los procedimientos para adaptar las $f(s)$ en un punto que les permitiera hacer una comparación con los datos de la tabla. La mayoría de los grupos adapta las $f(s)$ en solo un punto que represente la altura que lleva el recipiente en un determinado tiempo. Lo anterior se realiza para poder distinguir las cualidades de cada punto y con ello seleccionar el comportamiento que mejor lo describa, con un notorio interés en hacer tender los datos hacia la línea recta; es decir, lo estable se observa en la búsqueda de un comportamiento lineal.

Con la Actividad (2) los futuros ingenieros se enfrentaron a evidenciar un comportamiento para el tipo de llenado de un recipiente. Para responder a la pregunta ¿Cuál es la altura del recipiente? fue necesario establecer un comportamiento. Entre las propuestas de solución aparece el cálculo de variaciones para luego determinar la razón de cambio y, al igual que en la Actividad 1, calcular un promedio de las razones para seleccionar un coeficiente *a* que represente el comportamiento del llenado del recipiente. Sin embargo, como la tabla no arroja un punto de partida del llenado (su primer punto es en el segundo 1), se debate si contemplar o no líquido en el recipiente antes de comenzar el llenado.

En este procedimiento seleccionan un comportamiento lineal que les permite identificar la altura del recipiente al segundo 40 y su ideal fue la línea recta. Por eso, replantearon los datos de la tabla para adaptarlos a un comportamiento lineal. Para tal fin distinguieron cualidades tales como el punto inicial y algún valor que altere abruptamente el comportamiento, entre otros. Un aspecto importante a destacar es que la selección del comportamiento lineal está totalmente asociada a las decisiones externas que se hayan declarado dado el carácter de la situación (ver Transcripción 1).

> Participantes X_1 y X_2: Este es nuestro problema y quiero saber cómo varía. De acuerdo a esto calculamos las diferencias que hay en cada intervalo. Y en este caso, *t* tiene variación de 2 segundos, después 3, 2 y 1. Y de la altura son 25, 7, 38 y 3. Para qué sirve esto, bueno, para conocer, para sacar una relación de cuánto va a variar de acuerdo a la altura con los segundos. Y aquí ya al hacer la altura entre segundos, va ser igual a 12,5 2.33, 19 y 3, ya esto es como va variando. Esto lo podemos multiplicar por los segundos y nos va a dar este valor, que sumándolo nos va a dar 15.
>
> Entonces para llegar a un promedio y generalizarlo y conocer la altura al segundo 40, necesitamos sacar un promedio y nuestro promedio fue igual de 9.20 que con eso nos va a permitir conocer ya la altura en el segundo 40. Que simplemente sería sustituirlo y la función sería $f(x) = 9.20(s)$, que nos va a dar la altura de 368.3mm.

Transcripción 1. Consideraciones para la selección de un comportamiento lineal de llenado

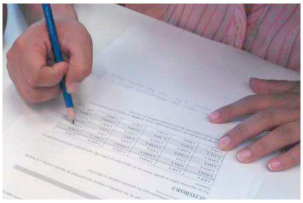
En los momentos de transversalidad de la Actividad 1 a la 2, los ingenieros en formación reconocen que el comportamiento lineal es aquello a lo que deben llegar como solución. Lo estable se manifestó en la recta a la cual tienden todos los puntos del llenado del recipiente.

Podemos notar que en la primera actividad la naturaleza de los datos es diferente a la de lo estable, donde en el primer conjunto de datos son puntos dispersos y en el segundo conjunto es una recta lineal que posee un comportamiento definido por $f(s) = as + b$. En cambio, en la segunda actividad, lo estable es formulado por los ingenieros en formación. De esta manera, están resignificando los usos de la optimización frente a problemas donde se debe seleccionar un comportamiento (ver Tabla III).

TABLA III
Emergencia de la situación de selección de un grupo de ingenieros en formación

Situación de selección	*Seleccionar el comportamiento lineal que mejor describa los datos de llenado de un recipiente*
Patrones de adaptación	Se adapta el comportamiento de llenado de la botella a un comportamiento de variación uniforme
Distinción de cualidades	Se distinguen las características y el comportamiento del llenado de los recipientes
Lo estable	Es la tendencia hacia el comportamiento lineal

En otra de las actividades presentadas a los estudiantes de Ingeniería, se les solicito seleccionar una botella según su capacidad de llenado, para vaciar una cantidad determinada de líquido. Para eso, fue necesario, primero, distinguir cualidades de llenado respecto de la cantidad de líquido que se tiene para vaciar (por ejemplo, puede sobrar liquido del que se necesita verter o puede que la botella no se llene por completo); y luego, establecer la cantidad que se comporta como lo estable, ya que buscan la botella que tiene una capacidad que tienda lo más posible, por sobre, la cantidad de líquido que se tiene que vaciar. De esta manera, se identificaron diferentes maneras de seleccionar una botella a la que requerían verter 1.3489L de agua. Por ejemplo, se observaron casos donde tachaban las botellas con capacidad menor a 1.3489L, ya que asumían que debía entrar todo el líquido en la botella. Otros, por el contrario, marcaban aquellas donde si podían verter la cantidad señalada, es decir, las mayores que 1.3489L, pero solo destacaban las que más se acercaban a la cantidad que debían verter (ver Figura 9).



1.835 L	1.342 L	1.9203 L	1.1243 L	1.4221 L	1.249 L
1.0234 L	1.023 L	1.02302 L	1.92014 L	1.3451 L	1.246 L
1.0253 L	1.74 L	1.532 L	1.028 L	1.95 L	1.436 L
1.934 L	1.7245 L	1.92008 L	1.909 L	1.453 L	1.64214 L
1.4392 L	1.0302 L	1.0263 L	1.9049 L	1.8646 L	1.624 L
1.113 L	1.335 L	1.340 L	1.3452 L	1.92008 L	1.5632 L
1.356 L	1.566 L	1.344 L	1.832 L	1.3028 L	1.4017 L

Figura 9. Comparación de las alturas del volumen que lleva el agua en determinado momento presentado por el participante X_{14}

Otra propuesta de solución, dada la cantidad de valores distribuidos en la tabla, fue adaptar la capacidad de la botella truncándolo a su decimal y buscando las capacidades iguales o superiores a 1.3, pero los superiores los restringían a 1.4. Luego, volvían a revisar las capacidades que habían adaptado a 1.3 y descartaban los que eran inferiores a 1.34, una nueva adaptación, y así hasta determinar la capacidad superior, pero más cercana a 1.3489L (ver Transcripción 2).

> Participante X_{12}: Comparamos que botella rebasa el volumen a vaciar, con una diferencia menor con respecto a las otras. Busqué aquellas que tenían 34 después del punto e identifiqué un 9 después de la cifra, como no lo hubo, pasé al 35.

Transcripción 2. Truncar las botellas para adaptar su capacidad

Con estas marcas podemos observar que los futuros ingenieros están distinguiendo cualidades de las botellas, ya que descartan las que poseen una capacidad que está por debajo de la cantidad de líquido que deben vaciar; le otorgan un distintivo especial a las que se encuentran más cerca y comparan los valores de la tabla buscando las que tienden más a 1.3489L; cantidad que se convierte en lo estable. Entre los registros encontramos comentarios como "es la botella que tiene la capacidad de almacenar el volumen requerido y que está más cerca de valor". Entonces, podemos señalar que la situación de selección está sujeta a la tendencia de lo estable (cantidad que se debe vaciar), reconociendo lo estable se adaptaba dicha cantidad que se debe vaciar para poder realizar las distinciones que permiten descartar y tomar la decisión de cual seleccionar.

4.2.3. *Epílogo. Las transversalidades* T_i

Los usos de la optimización se resignifican en las transversalidades T_i entre los escenarios: la obra matemática de Lagrange, la ingeniería mecatrónica y los ingenieros en formación. Los momentos Mo_i son: la ecuación de equilibrio, la calidad de imagen y el comportamiento estable. Cada momento está señalando una alternancia de dominios que genera una nueva función orgánica: establecer una relación mutua entre las fuerzas de los cuerpos; mejorar las características internas en las imágenes sísmicas; y establecer comportamientos lineales; cada una debaten con las formas de uso respectivamente: coeficientes indeterminados a través de multiplicadores (λ, μ *y* v, etc.); algoritmo genético de la mutación humana para descartar y seleccionar imágenes; y expresiones lineales para lo estable. Los debates consisten en generar nuevas formas y funciones en el contexto de la nueva situación de selección.

Entonces el método convencional de la optimización en la matemática escolar se provee de significados y usos. Es decir, el método consiste en dar las funciones $f(x)$ y $g(x) = 0$ con $\nabla g(x) \neq 0$ para calcular la expresión $\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0$, lo que genera las técnicas algorítmicas para resolución de problemas de optimización: se centraliza en objetos terminales (conceptos y definiciones) sin significados. Sin embargo la situación de selección a través de lo estable o comportamiento ideal (instrumento) se buscan patrones de adaptación $f(x)$ y $g(x) = 0$ con $\nabla g(x) \neq 0$ para distinguir cualidades $\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0$, donde el λ es un parámetro para generar lo estable: se centraliza en procesos permanentes (conocimiento en uso) con significados.

La *situación de selección* (Del Valle, 2015) amplía lo que Cordero ha llamado Socioepistemología del Cálculo: construcción de lo matemático (2008 y 2016a). Ésta se compone de situaciones de *variación - predicción*, *transformación - tendencia*, *aproximación - analiticidad* y *selección - optimización*, según las comunidades y sus escenarios (*académico - escolar*, *profesión - trabajo* y *cotidiano - ciudad*). Actualmente podemos decir que el MR valora la transversalidad de saberes y la pluralidad epistemológica a través de las situaciones mencionadas e incluyendo la de selección (ver Figura 10). El entorno es más robusto, así como las situaciones escolares, cuyo objetivo es emprender aprendizajes de los significados de la matemática.

Las situaciones en conjunto, como Socioepistemología del Cálculo, conforman relaciones transversales y horizontales en un entorno amplio que representa una categoría de conocimiento matemático ζ(CM) descentralizada del objeto. Cada situación escolar derivada de ζ(CM) es un proceso que trastoca y transforma al dME y con esto generar rediseños del dME. La tarea es de gran dimensión, las nuevas investigaciones harán más robusta la ζ(CM), en la medida que se incursione en los escenarios *académico - escolar, profesión - trabajo* y *cotidiano - ciudad,* y en todos los niveles educativos, con la esperanza de contribuir en el cambio educativo de la matemática.

Cada situación compone un marco epistemológico del cálculo, respectivamente, con cada uno de los cuales se pueden resignificar los usos de los objetos matemáticos. Por ejemplo, la Serie de Taylor es resignificada en una situación de Modelación-Movimiento para mejorar el aprendizaje de los significados de las derivadas simultáneas en las gráficas de las funciones (Morales y Cordero, 2014; Morales, Mena, Vera y Rivera, 2012) y la estabilidad es resignificada en situaciones de reproducción de comportamientos (Mendoza y Cordero 2018; Mendoza et al., 2018).

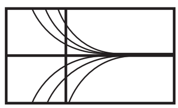
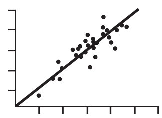
	Situaciones			
Construcción de lo matemático	*Variación*	*Transformación*	*Aproximación*	*Selección*
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Límite Derivación Integración Convergencia	Patrón de adaptación
Procedimientos	Comparación de dos estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha=f'(x)$	Variación de parámetros $y=Af(Bx+C)+D$	Operaciones lógico formales (cociente) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$	Distinción de cualidades $\nabla f(x)-\lambda\nabla g(x)=0$
Instrumentos	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Formas analíticas	Lo estable
Argumentación / Resignificación	Predicción $E0+variación=Ef$	Comportamiento tendencial 	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\cdots$	Optimización 

Figura 10. Socioepistemología del Cálculo y Análisis

5. Conclusiones

5.1. *En particular*

Los usos de la optimización y el discurso Matemático Escolar son dos contextos diferentes que conllevan enfocar la atención a la pregunta ¿por qué el tratamiento escolar no favorece el uso de las matemáticas que se aprenden en la escuela y en la vida?, contrariamente a la pregunta clásica ¿por qué el estudiantado no aprende matemáticas?. Por un lado, en un curso de matemáticas habitual, en el tema de la optimización, se plantea un modelo de variación uniforme que represente un conjunto de puntos dispersos; para tal fin se enseña el método de mínimos cuadrados (pero no se consideran los significados que subyacen al planteamiento y al método). Sin embargo, en la comunidad de ingenieros que participaron en las actividades de esa nube de puntos, *ponen su conocimiento en uso* de manera de generar patrones de adaptación para poder distinguir cualidades, las cuales dependen de la tendencia hacia lo estable (modelo lineal). De este modo, todos los procesos de adaptación y distinción que realice el estudiante en su cotidiano (realidad del que aprende) para seleccionar la recta que se comporte como lo estable, generan los significados de la optimización, o bien, en este caso, los significados del método de mínimos cuadrados. De todas las rectas que modelan el comportamiento de esos puntos, se debe *seleccionar* la que "represente de mejor manera los datos en cuestión". A este hecho, adquiere la forma de *situación de selección* (Del Valle, 2015); la cual subyace a la formulación del método de los mínimos cuadrados (la decisión de elegir una recta u otra puede depender de las variables de condición que afecten el contexto del problema). Por otro, en textos escolares de matemática, libros de cálculo para la educación superior y en los programas de estudio para tercer año medio en Chile (MINEDUC[10], 2001), en los cuales la optimización es vista desde el método de la programación lineal o por el método de los multiplicadores de Lagrange, con esta investigación se ofrecen indicativos de que aquello que subyace a esos métodos es la selección de un comportamiento (Del Valle, 2015). Previo a sus formulaciones, existe una situación que hace que se generen tales métodos. Esta fue nuestra premisa de la investigación, que conllevó a la tesis siguiente: una *situación de selección* específica genera *resignificaciones de optimización* (Del Valle, 2015).

5.2. *En general*

La resignificación de usos del conocimiento matemático es una categoría de conocimiento matemático que expresa el carácter funcional de las comunidades, pero en el ámbito educativo significa un proceso que trastoca y transforma al dME que puede desembocar en el rediseño del dME (Cantoral, 2013). En ese sentido lo

[10] Ministerio de Educación de Chile

institucional hará que la categoría de conocimiento matemático ζ(CM) se desarrolle y permanezca, se acepte como producto material social cuyo aprendizaje debemos favorecer (Cordero, 2016a). En ese sentido el marco de referencia (MR) deberá valorar la transversalidad en situaciones específicas. El conocimiento se transforma en una unidad de saberes que descentralizan al objeto y los usos son resignificados. Entonces, se quiere que con esos MR se diseñen situaciones escolares para que sucedan los aprendizajes de las resignificaciones matemáticas en procesos permanentes (usos y significados) en contraparte de objetos terminales (conceptos y definiciones).

Finalmente podríamos decir que el desarrollo teórico - metodológico que se ha presentado en esta investigación contribuye a la Matemática Educativa. Ofrece constructos ontológicos y epistemológicos que cambian la mirada de la matemática escolar, pone el acento en el conocimiento en uso que conlleva valorar la justificación funcional que demandan otros dominios de conocimiento para expresar el entorno del conocimiento matemático en la realidad del que aprende.

Referencias bibliográficas

Camacho, A. y López, J. (2014). Didáctica de la programación lineal por medio de la movilidad de registros de representación. *RECAI Revista de Estudios en Contaduría, Administración e Informática, 3*(7), 93-117. Disponible en: https://recai.uaemex.mx/article/view/8914

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R., Moreno - Durazo, A. y Caballero - Pérez, M. (2018). Socio - epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. *ZDM Mathematics Education* 50 (1-2), 77-89. doi: 10.1007/s11858-018-0922-8

Cantoral, R., Reyes - Gasperini, D. y Montiel, G. (2015). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(3), 91-116. http://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/149

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México: Díaz de Santos - Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F. (2016a). Modelación, Funcionalidad y Multidisciplinariedad: El Eslabón de la Matemática y el Cotidiano. En Díaz y Arrieta (Eds). *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa*. España: Díaz de Santos.

Cordero, F. (2016b). La función social del docente de matemáticas: pluralidad, transversalidad y reciprocidad. En S. Estrella et al. (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 23-30), ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Recuperado de http://ima.ucv.cl/congreso/xxjnem/

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(1), 7-38.

Cordero, F., Gómez, K., Silva - Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad*. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F., Mena-Lorca, J. y Huincahue, J. (2017). A category of modeling: functional mathematics of other domains of knowledge and the learning of mathematics. Enviado a publicación.
Del Valle, T. (2015). *Los Usos de la Optimización: un Marco de Referencia y la Teoría Socioepistemológica*. (Tesis de Doctorado no publicada), Instituto de Matemáticas, PUCV. Chile.
Farfán, R. (2012). *Sociepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización*. Barcelona, España: Gedisa.
Guber, R. (2001). *La etnografía. Método, Campo y Reflexividad*. Ed. Norma: Bogotá.
Hollebrands, K; & Okumus, S. (2017). Prospective Mathematics Teachers' Processes for Solving Optimization Problems Using Cabri 3D. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 1-27. doi: 10.1007/s40751-017-0033-0
Lagrange, J. (1867). Méthode de Maximis et Minimis. En J. -A. Serret (Ed.), *Œuvres de Lagrange*. Vol. 1. París. Gauthier - Villars.
Lagrange, J. (1788/1963). La Statique: Manière plus simple et plus gènèrale de faire usage de la formule de L'èquilibre, donnèe dans la Section duexième. En J. Bertrand (Ed.), *Mécanique Analytique* (pp. 69-99). Ed. 3. Vol.1. México D.F.: Clásicos de la Ciencia.
Malaspina, U. y Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics, 75*(1), 107-130. doi: 10.1007/s10649-010-9243-8
Ministerio de Educación de Chile (2001). *Programa de estudio tercer año medio matemática: Álgebra y Modelos Analíticos*. Santiago, Chile. Autor
Mendoza, J. y Cordero, F. (2018). La modelación en las comunidades de conocimiento matemático. El uso de las matemáticas en ingenieros biónicos. El caso de la estabilidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *11*(1), 36-61.
Mendoza, J., Cordero, F., Solís, y M. Gómez, K (2018). El Uso del Conocimiento Matemático en las Comunidades de Ingenieros. Del Objeto a la Funcionalidad Matemática. *Bolema, Rio Claro (SP), v. 32, n. 62, p. 1219-1243, dez. 2018*. doi: 10.1590/1980-4415v32n62a23
Morales, A. y Cordero, F. (2014). La Graficación-Modelación y la Serie de Taylor. Una Socioepistemología del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(3), 319-345. doi: 10.12802/relime.13.1733
Morales, A., Mena, J., Vera, F. y Rivera, R. (2012). El Rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 30*(3), 237-256. doi: 10.5565/rev/ec/v30n3.694
Orozco, M., Ortiz, C., Urrutia, J., Martin, R., Rodríguez, A. y Villaseñor, P. (2013). A genetic algorithm for filter design to enhance features in seismic images. *Journal of Geophysics and Engineering, 1*(1), 1-13. doi: 10.1111/1365-2478.12026
Reaño, C. y Malaspina, U. (2011). Introducción a la programación lineal. Una mirada desde la Teoría de Situaciones Didácticas. *Comunicación presentada en XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil, 1-12.
Rojas, I. (2011). Elementos para el diseño de técnicas de investigación: Una propuesta de definiciones y procedimientos en la investigación científica. *Tiempo de Educar*, 12(24), 277-297.
Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1525-1544. doi: 10.1590/1980-4415v28n50a25
Tran Kiem, M. y Lagrange, J. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM: the international journal on mathematics education,* 48(6). 793-807. doi: 10.1007/s11858-016-0774-z

Autores

Francisco Cordero. Cinvestav-IPN – México. fcordero@cinvestav.mx

Tamara Del Valle. Universidad de Talca. Linares - Chile . tamaradc.mat@gmail.com

Astrid Morales. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. astrid.morales@pucv.cl

