José António Fernandes, Paulo Ferreira Correia, Rafael Roa Guzmán

AQUISIÇÃO DAS OPERAÇÕES COMBINATÓRIAS POR ALUNOS PRÉ-UNIVERSITÁRIOS ATRAVÉS DE UMA INTERVENÇÃO DE ENSINO

Acquisition of combinatorial operations by pre-university students by means of a teaching intervention

RESUMEN. En este artículo se presentan los principales resultados de un trabajo de investigación sobre una intervención de enseñanza y aprendizaje de las operaciones combinatorias en una clase de 2º de Bachillerato. La intervención de enseñanza, realizada el año lectivo de 2008/2009, se centró en la secuenciación de las operaciones con base en su grado de dificultad, en las ideas previas de los alumnos sobre las operaciones, en el aprendizaje por descubrimiento y en el trabajo de grupo. Después de terminada la intervención de enseñanza fue realizado un examen en dos fases, concebido para evaluar las adquisiciones de los alumnos en las operaciones combinatorias relativamente a las estrategias utilizadas, al desempeño y a los errores. En general, los resultados revelan que la intervención de enseñanza se ha mostrado eficaz en el desarrollo de las capacidades de raciocinio combinatorio.

PALABRAS CLAVE: Operaciones combinatorias, enseñanza de las matemáticas, aprendizaje de las matemáticas, intervención de enseñanza y aprendizaje, alumnos de 2º de Bachillerato.

ABSTRACT. This article presents the main results of a research study relating to a teaching and learning intervention for combinatorial operations in a 12th grade class. The teaching intervention carried out during school year 2008/2009 focused on the sequencing of operations based on their level of difficulty, on the previous ideas of students in relation to the operations, on learning by discovery and on group work. Once the teaching intervention had been carried out, a two stage exam was applied, designed to evaluate the acquisitions of students in combinatorial operations relating to strategies used, performance and mistakes. In general, the results reveal that the teaching intervention was effective in developing combinatorial reasoning abilities.

KEY WORDS: Combinatorial operations, teaching of mathematics, learning of mathematics, teaching and learning intervention, 12th grade students.

RESUMO. Neste artigo apresentam-se os principais resultados de um trabalho de investigação sobre uma intervenção de ensino e aprendizagem das operações combinatórias numa turma do 12º ano de escolaridade. A intervenção de ensino, realizada no ano lectivo de 2008/2009, centrou-se na sequencialização das operações com base no seu grau de dificuldade, nas ideias prévias dos alunos sobre as operações, na aprendizagem por descoberta e no trabalho de grupo. Depois de terminada a intervenção de ensino foi aplicado um teste em duas fases, concebido para avaliar

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2010) 13 (2): 215-242.
Recepción: Octubre 20, 2009 / Aceptación: Mayo 12, 2010.

as aquisições dos alunos nas operações combinatórias relativamente às estratégias utilizadas, ao desempenho e aos erros. Em geral, os resultados revelam que a intervenção de ensino se revelou eficaz no desenvolvimento das capacidades de raciocínio combinatório.

PALAVRAS CHAVE: Operações combinatórias, ensino da matemática, aprendizagem da matemática, intervenção de ensino e aprendizagem, alunos do 12º ano de escolaridade.

RÉSUMÉ. Cet article est une présentation des principaux résultats d'un travail de recherche relatif à un face-à-face pédagogique et à l'apprentissage des opérations combinatoires dans une classe de première (« deuxième année du lycée »). Le face-à-face pédagogique, qui a eu lieu pendant l'année scolaire 2008/2009, s'est concentré sur la division en séquences des opérations en prenant en compte leur niveau de difficulté, sur les idées préalables des lycéens en ce qui concerne les opérations, sur l'apprentissage par découverte et sur le travail en groupe. Une fois le face-à-face terminé, on a procédé à un examen en deux étapes. Cet examen a été conçu pour évaluer les acquisitions des lycéens en matière d'opérations combinatoires par rapport aux stratégies pédagogiques employées, aux bonnes réponses et aux erreurs. En général, les résultats révèlent que le face-à-face pédagogique a été efficace pour développer les capacités de raisonnement combinatoire.

MOTS CLÉS: Opérations combinatoires, enseignement des mathématiques, apprentissage des mathématiques, face-à-face pédagogique et apprentissage, lycéens de première (« deuxième année de lycée »).

1. Introdução

Muito embora a Combinatória desempenhe um papel importante no desenvolvimento do pensamento formal (Piaget & Inhelder, s/d) e em muitos ramos do saber, ela tem sido um campo pouco explorado em investigação didáctica. A sua importância é salientada por Fischbein no prefácio do livro *Razonamiento Combinatorio* (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994), ao referir que áreas como a probabilidade, programação linear, teoria dos jogos, topologia e teoria de números beneficiarão de um ensino mais efectivo da Combinatória.

O raciocínio combinatório desempenha um papel importante no êxito dos principais objectivos curriculares (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1997), pois os problemas de Combinatória facilitam o desenvolvimento de processos de enumeração, de formulação de conjecturas, de generalização e o pensamento sistemático, processos que, segundo English (2005), são essenciais para a aprendizagem da matemática em todos os níveis de ensino.

Glaymann e Varga (1975) destacam a importância da Combinatória no desenvolvimento de raciocínios de Probabilidades e os professores também reconhecem essa aplicação da Combinatória (Ferreira, 2007). Em Portugal, o estudo da Combinatória inclui-se no tema de Probabilidades e Combinatória, do programa de Matemática A do 12º ano de escolaridade. Embora o estudo do tema apareça associado às Probabilidades, e não como unidade temática autónoma, é referido no programa que "as técnicas de contagem (…) constituem uma aprendizagem por si só, especialmente se desenvolverem mais as capacidades do raciocínio combinatório e as conexões matemáticas e menos a aplicação das fórmulas" (Ministério da Educação [ME], 2002, p. 1).

Segundo Silva, Fernandes e Soares (2004), os professores consideram a Combinatória um tema difícil, o que explica o facto de o ensino se centrar na exposição de fórmulas, aplicadas seguidamente à resolução de exercícios, contrariamente às recomendações actuais para o seu ensino (ME, 2002; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2003). Adicionalmente, as operações combinatórias habitualmente estudadas (arranjos, permutações e combinações) revelam-se insuficientes para resolver determinados problemas, o que poderá explicar a dificuldade do tema quando o seu ensino é centrado na algoritmização e categorização de problemas com base apenas nessas operações combinatórias (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994).

Roa, Batanero e Godino (2003) consideram que é importante apresentar aos alunos situações que os ajudem a desenvolver destrezas em Combinatória, sem que seja dada uma ênfase excessiva às definições das operações combinatórias e à sua utilização como único método de resolução dos problemas, até porque estratégias como dividir o problema inicial em subproblemas, traduzir o problema num problema equivalente e fixar variáveis podem ser adequadamente exemplificadas e aplicadas a outras áreas da matemática.

Neste contexto, no presente artigo, estudam-se as aquisições em Combinatória de alunos do 12º ano de escolaridade, avaliadas através de um teste em duas fases, que foi ministrado no final de uma intervenção de ensino das operações combinatórias, centrada na sequencialização das operações (pela ordem: arranjos completos, arranjos simples, permutações e combinações), nas ideias prévias dos alunos sobre as operações combinatórias, na aprendizagem por descoberta, no trabalho de grupo e na valorização das conexões matemáticas em detrimento da aplicação de fórmulas.

2. Enquadramento teórico

2.1. *Raciocínios em Combinatória*

São vários os autores (e.g., Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994; English, 2005; Fischbein, 1975; Roa, 2000) que realçam a importância das representações gráficas e dos raciocínios indutivo, recursivo e analógico na aprendizagem da Combinatória.

De entre as representações gráficas, Fischbein (1975) destaca o diagrama de árvore por incorporar as duas características essenciais do raciocínio recursivo: a "generalização iterativa", entendida como a generalização a um maior número de elementos, e que matematicamente corresponde à indução matemática; e a "generalização construtiva", entendida como a sua adaptação a novos problemas derivados do inicial, portanto relacionada com o raciocínio analógico.

Para Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994) a recursão, como método geral de resolução de um problema, consiste em começar por obter uma versão mais fácil do problema, reflectir sobre aquilo que se fez e, finalmente, exprimir todo o processo na forma de algoritmo ou expressão recorrente. Assim, nas actividades de resolução de problemas em que intervêm os arranjos e as permutações, a recursividade assume um papel importante dado que, geralmente, a construção de uma determinada configuração efectua-se a partir de outra de menor dimensão. Por exemplo, para formar os arranjos com repetição de n elementos tomados k a k podemos partir das configurações formadas na ordem $k-1$ e acrescentar-lhes um último elemento. Assim, o diagrama de árvore apresenta um carácter recursivo, já que uma árvore com k níveis de ramificação se constrói a partir de uma outra com $k-1$ níveis.

Das estratégias espontâneas utilizadas por alunos do 9º ano de escolaridade na resolução individual de problemas de Combinatória, Correia (2008) verificou que os alunos recorreram à estratégia de enumeração, predominantemente sistemática, seguindo-se as estratégias de diagrama de árvore, fórmula e, por fim, a operação numérica, predominando a operação de multiplicação. Um número considerável de respostas baseou-se na combinação de duas estratégias, concretamente, a operação numérica com a enumeração ou com o diagrama de árvore. As estratégias de enumeração e diagrama de árvore foram mais utilizadas nas questões que envolviam um menor número de elementos, e à medida que o número de elementos aumentava a percentagem de alunos a utilizarem estas estratégias diminuiu, aumentando a utilização da estratégia operação, sozinha ou combinada com a enumeração ou com o diagrama de árvore.

2.2. *Dificuldades e erros em Combinatória*

A identificação das dificuldades que comprometem a solução de um problema combinatório é um passo necessário para uma melhor compreensão das habilidades dos alunos na resolução de problemas e na melhoria dessas habilidades (Hadar & Hadass, 1981).

> Possivelmente uma das chaves das dificuldades e do lento desenvolvimento espontâneo da capacidade de realização das operações combinatórias, por parte dos sujeitos, se deva a uma relação inadequada ou insuficiente com a recursão e a indução matemática, o mais genuíno e criador dos raciocínios matemáticos segundo Poincaré. (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994, p. 63).

Para English (1998, 2005) um dos grandes objectivos da educação matemática é que os alunos identifiquem conexões entre as ideias matemáticas e apliquem esta compreensão na construção de novas ideias e na resolução de novos problemas, atribuindo à falha na aplicação de processos de raciocínio analógico uma das maiores causas das dificuldades dos alunos na resolução de problemas. Todavia, segundo English (2005), muitos estudos em Combinatória revelam que os alunos têm dificuldades em identificar conexões entre os problemas e, consequentemente, em transferir as aprendizagens efectuadas para novas situações.

As dificuldades em Combinatória podem surgir logo na confusão entre os problemas de arranjos simples e os problemas de combinações simples ou de arranjos com repetição, ao não reconhecerem se a ordem é ou não relevante ou se é possível ou não repetir os elementos (Watson, 1996).

No caso particular da Combinatória, segundo Hadar e Hadass (1981), mesmo que os alunos resolvam correctamente um problema para vários casos particulares, eles falham muitas vezes a descoberta de uma solução geral devido à incapacidade de relacionar as soluções recursivamente.

No seu estudo, Roa (2000) concluiu que os alunos universitários com preparação matemática avançada, que participaram na investigação, em alguns problemas, não obtiveram melhores resultados do que os obtidos pelos alunos do ensino secundário, com 14-15 anos de idade, que participaram no estudo de Navarro-Pelayo (1994). Neste último estudo observou-se que alguns alunos que aplicaram a definição de operação combinatória num modelo de selecção não foram capazes de transferir essa definição para os problemas que envolviam um modelo combinatório diferente, por exemplo aplicar o conceito de arranjo com repetição usado nos problemas de selecção num problema de distribuição.

São vários os autores (e.g., Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994; Batanero, Navarro-Pelayo & Godino, 1997; Correia, 2008; Esteves, 2001; Roa, 2000; Silva, Fernandes & Soares, 2004) que referem erros dos alunos em Combinatória, dos quais se destacam: a incorrecta interpretação do enunciado; o erro de ordem (mais frequente nos problemas de combinações); o erro de repetição; a confusão do tipo de objectos; a exclusão de alguns elementos na constituição das configurações; a listagem não sistemática; o uso incorrecto do diagrama de árvore; as respostas intuitivas erróneas; o esquecimento da fórmula correcta e do significado dos parâmetros da fórmula combinatória; a confusão do tipo de célula/subconjunto; e o erro na partição obtida.

2.3. *Ensino e aprendizagem da Combinatória*

Segundo Piaget e Inhelder (s/d) é apenas no estádio operacional formal que se "assinala um marco (…) na compreensão das operações combinatórias" (p. 282), o qual ocorre pelos 11-12 anos. Contudo, para Fischbein (1975) a criança não adquire espontaneamente as técnicas combinatórias, nem mesmo no período das operações formais, pois embora a capacidade de enumerar sistematicamente se presuma adquirida neste estádio, há estudos que revelam que esta capacidade nem sempre é alcançada por todos os sujeitos de 12-15 anos de idade (Navarro-Pelayo, 1994; Roa, 2000; Silva, Fernandes & Soares, 2004). Consequentemente, Fischbein (1975) advoga a necessidade de instrução para a aquisição das operações combinatórias.

Para DeGuire (1991) é importante que os alunos vão além de enumerar e construir diagramas de árvore, retirando o máximo proveito destas estratégias para encontrarem procedimentos mais eficientes, nomeadamente: a regra da soma, sempre que um conjunto de configurações combinatórias fica determinado pela reunião de subconjuntos mutuamente exclusivos; a regra do produto, mediante a qual se constroem produtos cartesianos de conjuntos de elementos; e a regra do quociente, para relacionar entre si, por exemplo, combinações e arranjos.

As dificuldades reveladas pelos alunos que participaram no estudo de Correia (2008), na construção e na interpretação de diagramas de árvore, levaram o autor a concluir sobre a pertinência do seu uso explícito no ensino, na medida em que os alunos ao usarem o diagrama de árvore estão a assimilar uma lei de construção em que os sucessivos passos do raciocínio implícito ocorrem indutivamente e quase directamente (Fischbein, 1975). Também a dificuldade em identificar os operandos envolvidos nas expressões correctas e as dificuldades em generalizar a um maior número de casos, levou o autor a partilhar com DeGuire (1991) a ideia de que as estratégias de enumeração e diagrama de árvore poderão convencer o aluno sobre a razoabilidade de multiplicar para obter o número de configurações possíveis e da vantagem de usar procedimentos mais eficazes, como o princípio fundamental de contagem.

Investigando dificuldades típicas na resolução de problemas combinatórios, através das soluções obtidas por alunos do primeiro curso de Combinatória na resolução do problema das cartas mal endereçadas, Hadar e Hadass (1981) concluíram da importância dos seguintes aspectos na resolução do problema: identificação dos acontecimentos a serem contados; escolha de uma notação apropriada; compreensão do problema inicial como um conjunto de problemas particulares; construção de métodos sistemáticos de contagem que pressupõem o domínio do problema; fixação de uma ou mais variáveis; concretização de um plano de contagem; e generalização através de uma estrutura unificadora das soluções obtidas para vários casos particulares.

English (2005) aponta a riqueza e o significado dos contextos em que os problemas combinatórios são formulados como recursos que permitem ao aluno procurar sozinho a solução. Também, enquanto os alunos resolvem os problemas, a sua compreensão pode ser estimulada por um questionamento apropriado por parte do professor, pedindo-lhes, por exemplo, que expliquem e justifiquem as suas respostas. Para esta autora, é também importante dar liberdade ao aluno para usar diferentes representações e abordagens, bem como encorajá-lo a descrever e a explicar os seus processos de resolução e a partilhar as suas ideias com os colegas.

Em geral, o trabalho de grupo é valorizado por Petocz e Reid (2007) ao referirem, com base em vários estudos, que o trabalho e a avaliação em grupo permitem aos professores desenvolver tarefas mais compreensivas, capacita os alunos a adquirirem um *insight* sobre as dinâmicas e os processos de grupo, possibilita aos alunos o desenvolvimento de *skills* interpessoais, permite expor os alunos aos pontos de vista dos outros membros do grupo, encoraja os alunos a prepararem-se para o ponto de 'vista real' e promove a reflexão e a discussão como parte essencial do processo de se tornarem práticos competentes e reflexivos.

Almeida e Ferreira (s/d) realizaram um estudo piloto com uma turma do 2º ano do curso médio envolvendo o ensino das operações combinatórias, privilegiando os seguintes aspectos: criação de um ambiente favorável à exposição, à discussão, ao desenvolvimento de ideias e à resolução de problemas, em que o aluno é ouvido e as suas ideias são valorizadas; comunicação à comunidade escolar dos pressupostos da intervenção; tarefas interessantes e desafiadoras, inicialmente de grau de dificuldade crescente e passando depois a graus de dificuldade variável; trabalho dos alunos em grupo, de quatro ou cinco elementos; o professor como aquele que acompanha e incentiva o trabalho dos alunos nos grupos; e a administração de um teste diagnóstico antes (como forma de identificar as suas ideias prévias) e depois da intervenção.

Do pré-teste para o pós-teste verificou-se que os alunos desenvolveram significativamente o seu raciocínio combinatório e a forma de trabalhar em grupo, destacando-se: a capacidade de enumeração de configurações e de observação de padrões e sua utilização na resolução de problemas; a aplicação, correcta e consciente, dos princípios de contagem (aditivo e multiplicativo); a capacidade de reconhecer as diferenças entre configurações ordenadas e não ordenadas e utilizá-las na elaboração de estratégias de resolução; criar estratégias de resolução de problemas independentes do uso de fórmulas; trabalhar em equipa de forma colaborativa; observar dados relevantes para a resolução de um problema; aprender com os erros e produzir pequenos textos argumentativos.

Correia e Fernandes (2009) investigaram os processos de resolução de problemas de Combinatória desenvolvidos por 39 alunos do 9º ano de escolaridade em situação de ensino, centrando-se essa intervenção nas estratégias espontâneas dos alunos sobre as operações combinatórias, na aprendizagem por descoberta e no trabalho de grupo. Dessa intervenção, os autores concluíram que os alunos desenvolveram as suas capacidades de raciocínio combinatório, aprofundaram os seus processos de resolução de problemas, ultrapassaram limitações das suas estratégias espontâneas e adoptaram estratégias em consonância com o saber normativo.

Da investigação realizada com estudantes universitários com formação em Combinatória, Eizenberg e Zaslavsky (2003), estudando o efeito da colaboração na resolução de problemas combinatórios − por comparação dos resultados obtidos pelos alunos que trabalharam individualmente com os resultados obtidos pelos alunos que resolveram os problemas em pares, concluíram que a apresentação de situações que encorajem os alunos a uma resolução colaborativa dos problemas pode constituir um meio de ultrapassar algumas das dificuldades que os alunos encontram na resolução de problemas combinatórios. Esta colaboração poderá aumentar a confiança e o sucesso dos alunos, permitindo-lhes construir um conjunto de abordagens para a obtenção da solução e para a verificação de estratégias.

A verificação de um resultado, bem como da forma como foi obtido, permite aos alunos consolidar os seus conhecimentos e tornarem-se mais hábeis na resolução de problemas (Polya, 2003). Voltar à solução proporciona a oportunidade de investigar conexões dentro de um mesmo problema e entre problemas (Eizenberg & Zaslavsky, 2004). Embora sendo importante, a verificação da resposta a um problema combinatório é uma tarefa particularmente difícil, pois não há processos que assegurem a identificação de erros e a sua identificação não fornece necessariamente pistas para obter a resposta correcta (Eizenberg & Zaslavsky, 2004).

Para Gardiner (1991) o valor educacional da Combinatória reside precisamente no facto dela pressionar o aluno a "*pensar*" sobre assuntos tão elementares (na medida em que recorre a um número reduzido de pré-requisitos técnicos) como a contagem sistemática. No entanto, isto pode ser facilmente enfraquecido pelo facto de muitos professores se sentirem na obrigação de "*ajudar*" os alunos a resolver os problemas mais difíceis reduzindo a solução a um número manobrável e previsível de etapas ou regras e, consequentemente, requerendo o "*mínimo de pensamento*" por parte do aluno.

3. Metodologia

No presente estudo relata-se uma intervenção de ensino e aprendizagem das operações combinatórias (arranjos com repetição, arranjos simples, permutações simples e combinações simples) avaliada através da aplicação de um teste de desempenho nessas operações.

3.1. *Participantes*

O estudo decorreu no início do ano lectivo de 2008/2009 e nele participaram os 23 alunos (A_1, A_2, …, A_{23}) de uma turma do 12º ano, de uma escola secundária com 3º ciclo do ensino básico do norte de Portugal. A turma era constituída por 11 raparigas e 12 rapazes, com 17 anos de média de idades, o que constitui a idade normal de início da frequência do 12º ano, e com médias de 14,2 e 14,7 valores (numa escala de 0 a 20) na disciplina de Matemática, obtidas no final do 10º e 11º anos de escolaridade, respectivamente. A turma tinha apenas um aluno com repetências no ensino secundário, das quais uma no 10º ano e outra no 12º ano.

3.2. *Caracterização da intervenção de ensino*

Aos alunos que participaram no estudo foi aplicada uma sequência de ensino sobre Combinatória, implementada em 10 aulas de 90 minutos, das quais as sete primeiras incidiram sobre as operações combinatórias e as três restantes sobre o triângulo de

Pascal e o binómio de Newton. Na tabela I apresenta-se apenas a distribuição das actividades exploradas na sequência de ensino das operações combinatórias, assunto a que se reporta este texto.

TABELA I

Distribuição das actividades da sequência de ensino das operações combinatórias.

Aula	Actividades
1	Arranjos com repetição. Actividade de descoberta sobre arranjos com repetição. Ficha de trabalho sobre arranjos com repetição.
2	Arranjos simples. Actividade de descoberta sobre arranjos simples. Ficha de trabalho sobre arranjos com repetição e arranjos simples.
3	Permutações simples e notação factorial. Actividade de descoberta sobre permutações simples. Ficha de trabalho sobre arranjos e permutações.
4	Continuação da resolução da ficha de trabalho sobre arranjos e permutações.
5	Combinações simples. Actividade de descoberta sobre combinações simples. Ficha de trabalho sobre arranjos, permutações e combinações.
6	Continuação da resolução da ficha de trabalho sobre arranjos, permutações e combinações.
7	Resolução de problemas envolvendo as operações combinatórias.
11	Teste de avaliação em duas fases sobre as operações combinatórias.

Em cada operação combinatória começou-se por aplicar uma actividade de descoberta, resultado da ampliação das actividades utilizadas por Correia (2008). A ordem de exploração das operações combinatórias teve em consideração o nível de dificuldade observado em Correia (2008), o que resultou, da mais fácil para a mais difícil, na seguinte sequencialização: arranjos com repetição, arranjos simples, permutações simples e combinações simples.

Na tabela II estão descritas, resumidamente, as actividades de descoberta exploradas durante a intervenção de ensino.

Exceptuando as questões d) de cada actividade de descoberta, onde se pretendia que os alunos descobrissem uma fórmula para contar $\overline{A}_p^n$, A_p^n, P_n e C_p^n, em todas as outras questões apresentava-se um exemplo de configuração possível.

TABELA II
Actividades de descoberta exploradas na intervenção de ensino.

Actividades	Questões a)	Questões b)	Questões c)	Questões d)
Actividade 1 – Formar números	$\overline{A}_2^3$	$\overline{A}_2^5$	$\overline{A}_3^5$	$\overline{A}_p^n$
Actividade 2 – Definir bandeiras com barras horizontais	A_2^3	A_2^5	A_3^5	A_p^n
Actividade 3 – Dispor amigos em fila para tirar uma fotografia	P_3	P_5	—	P_n
Actividade 4 – Formar grupos de pessoas para participarem num concurso	C_2^3	C_2^5	C_3^5	C_p^n

As actividades de descoberta incorporavam, intencionalmente, um factor de aprendizagem sugerindo a aplicação de um método particular, com o objectivo de conduzir os alunos à descoberta da lei de formação associada a cada uma das operações combinatórias. Assim, tomando como referência o desenho de Piaget e Inhelder (s/d), o questionário foi heuristicamente construído, atendendo à ordem de apresentação das operações combinatórias, ao aumento progressivo dos valores dos parâmetros envolvidos nessas operações e à sequencialização das questões em cada operação combinatória.

Em geral, para o desenvolvimento das actividades de descoberta propostas era necessário que os alunos aplicassem raciocínios que estabelecessem a validade do algoritmo de formação de todos os elementos do conjunto de configurações pedidas. Os valores dos parâmetros iniciais representam uma variável fundamental para o controlo da situação didáctica − por exemplo, o valor 5 nas permutações dá lugar a 120 possibilidades, o que requer a utilização do raciocínio recursivo.

A cada actividade de descoberta seguia-se a resolução de uma ficha de trabalho com problemas sobre as operações combinatórias tratadas, incluindo ainda a definição da operação combinatória abordada na respectiva actividade de descoberta e a fórmula de contagem. Além disso, todas as fichas de trabalho continham as soluções numéricas dos problemas, permitindo aos alunos confrontar as suas respostas com as respostas correctas e, no caso das respostas incorrectas, aprender com os erros.

Na selecção dos problemas das fichas de trabalho tinha-se por objectivo a apreensão das operações combinatórias com a valorização da diversificação de estratégias de resolução em detrimento da utilização apenas de fórmulas. Por outro lado, ao contemplar em cada ficha de trabalho problemas que envolviam as operações combinatórias tratadas nas aulas anteriores, pretendeu-se valorizar a conexão entre as operações abordadas.

Quanto à metodologia de trabalho, optou-se pelo trabalho de grupo, tendo sido constituídos seis grupos, cinco de quatro elementos e um de três elementos, considerando que todos os grupos apresentassem um desempenho escolar homogéneo a Matemática e cada grupo incluísse alunos com desempenhos variados nessa disciplina, a empatia entre os elementos do grupo e o equilíbrio de participantes de cada sexo.

Com esta metodologia de trabalho de grupo procurou-se promover a resolução colaborativa dos problemas, num ambiente de aprendizagem propício ao surgimento de novas ideias, à discussão e partilha de estratégias de resolução e à explicação dos raciocínios aos colegas, ajudando-os a ultrapassar dúvidas e dificuldades. Aos alunos era dado tempo suficiente para que investigassem as possíveis soluções às questões colocadas, eram estimulados a inventar as suas próprias representações e, por vezes, eram estimulados a *encenar fisicamente* as situações apresentadas (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994).

Durante a realização das tarefas os alunos decidiam livremente sobre as estratégias a utilizar na resolução das actividades de descoberta e na resolução dos problemas das fichas de trabalho, optando-se, assim, por um trabalho centrado no aluno, em que o professor tinha o papel de questionar, acompanhar e incentivar o trabalho dos alunos nos seus grupos.

3.3. *Recolha e análise de dados*

Tendo em vista avaliar o impacto da intervenção de ensino, recolheram-se dados através da aplicação de um teste (em duas fases). O teste era constituído por um conjunto de sete problemas de contagem, extraídos/adaptados de um manual escolar (Neves, Guerreiro & Moura, 2005) e dos trabalhos de investigação em Combinatória de Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994) e Roa (2000), envolvendo as operações combinatórias estudadas. Esses problemas, semelhantes aos das fichas de trabalho, mantinham similaridades ao nível dos conceitos combinatórios e diferenças ao nível do contexto.

Depois de concluído o ensino da Combinatória, aplicou-se o teste em duas fases: numa primeira fase, com a duração de 60 minutos, os alunos resolveram, individualmente, os sete problemas de contagem propostos. Depois de entregarem as resoluções, deu-se início à segunda fase, com a duração de 15 minutos, em que foram fornecidas as soluções dos sete problemas para que os alunos as pudessem confrontar com as respostas obtidas na primeira fase (registadas em rascunho) e rectificar algumas das suas resoluções iniciais, se assim o entendessem.

Deste modo, na fase II do teste, os alunos deveriam procurar erros de raciocínio nas resoluções efectuadas na fase I e fazer as devidas correcções. Às novas respostas era atribuída a cotação total da questão apenas no caso de o aluno apresentar uma resolução correcta que evidenciasse compreensão do que foi feito. Em qualquer outro caso mantinha-se a cotação atribuída na fase I.

A análise dos dados do teste incidiu sobre as estratégias de resolução dos alunos nos sete problemas contemplados, os erros identificados nas suas produções escritas e o seu desempenho nas operações combinatórias.

As estratégias de resolução dos problemas, na fase I do teste, foram distribuídas pelas seis categorias seguintes, adaptadas de Correia (2008), Roa (2000) e Silva, Fernandes e Soares (2004): *desenhos*; *operações* de multiplicação, adição e divisão; *fórmulas* dos arranjos (com e sem repetição), das permutações e das combinações; *desenhos e operações*; *desenhos e fórmulas*; e *operações e fórmulas*.

Os erros identificados nas produções escritas dos alunos, na fase I do teste, foram distribuídos pelas sete categorias seguintes: *ordem*, se a ordem era considerada quando era irrelevante e vice-versa; *repetição*, se era permitida a repetição dos elementos quando não era pertinente e vice-versa; *operação combinatória*, no caso de uma identificação incorrecta da operação combinatória; *parâmetros*, no caso de os parâmetros da fórmula serem incorrectamente identificados; *operandos*, se nas expressões apresentadas havia falta ou excesso de operandos, reflectindo que nem todas as condições do problema foram consideradas ou interpretadas correctamente; *operação*, se nas expressões apresentadas era utilizada uma operação numérica incorrecta; e *enumeração*, se havia excesso ou falta de configurações.

Finalmente, a variável desempenho em Matemática assumiu, para cada aluno, o valor da média aritmética das classificações obtidas pelos alunos no 10º e 11º anos de escolaridade. Seguidamente, a partir dos valores obtidos para a média, os alunos foram distribuídos por um dos três grupos estabelecidos: [0, 10 [, desempenho fraco (1 aluno); [10, 14 [, desempenho satisfatório (8 alunos); e [14, 20], desempenho bom (14 alunos).

Finalmente, recorreu-se ao teste bilateral t de Student para amostras emparelhadas para comparar as médias do desempenho dos alunos em Matemática e na fase I do teste e as médias do desempenho dos alunos nas fases I e II do teste.

4. Análise das resoluções dos problemas do teste

4.1. *Análise das estratégias utilizadas na fase I do teste*

Na tabela III podem observar-se as estratégias usadas pelos alunos e as percentagens de alunos que a elas recorreram na resolução das várias questões do teste na fase I.

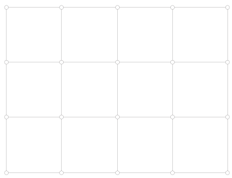
TABELA III
Distribuição, em percentagem, das resoluções dos alunos, na fase I do teste, segundo a estratégia utilizada (percentagem de respostas correctas).

Estratégias	Questões do teste							
	1 (n = 23)	2 (n = 23)	3 (n = 22)	4 (n = 23)	5 (n = 23)	6 (n = 18)	7 (n = 23)	*Total* (n = 155)
Desenhos	0	0	5 (0)	0	0	39 (86)	0	*5 (75)*
Operações	9 (100)	9 (100)	9 (100)	0	4 (0)	0	9 (0)	*5 (63)*
Fórmulas	4 (100)	39 (100)	27 (0)	0	39 (22)	33 (83)	0	*20 (55)*
Desenhos e Operações	61 (29)	52 (92)	45 (80)	39 (56)	0	0	82 (16)	*42 (48)*
Desenhos e Fórmulas	13 (0)	0	14 (67)	61 (43)	57 (62)	28 (100)	9 (0)	*26 (53)*
Operações e Fórmulas	13 (100)	0	0	0	0	0	0	*2 (100)*

Na resolução das questões na fase I do teste registou-se um forte recurso à estratégia desenhos (em 73% das resoluções), como única estratégia de resolução ou combinada com operações ou fórmulas. A estratégia desenhos ocorreu na resolução (incompleta correcta) de um aluno na questão 3 e nas resoluções de 7 alunos na questão 6. Nesta última questão, os alunos utilizaram os conhecimentos adquiridos sobre o Triângulo de Pascal para obter a resposta, como exemplifica a resolução do aluno A_{10} (Figura 1).

> *Questão 6*. Na parte central da ilha de Manhattan as ruas formam (aproximadamente) uma quadrícula de ruas horizontais e avenidas verticais, tal como ilustra a figura a seguir apresentada.

Você está aqui



Museu de Arte Moderno

Supondo que nunca recua, quantos percursos diferentes podem ser efectuados para chegar ao museu de Arte Moderna? Explique o seu raciocínio (Resposta correcta: 35).

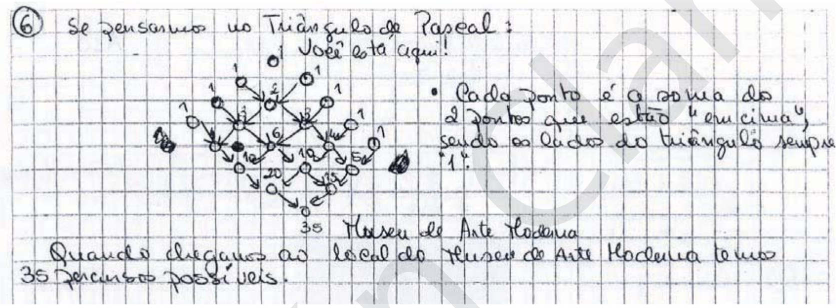


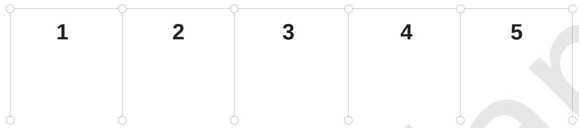
Figura 1. Resolução da questão 6 pelo aluno A_{10} na fase I do teste.

Da análise das resoluções, ainda referente à questão 6, resultou que a estratégia *desenhos* ocorreu, predominantemente, associada a "traços" (em que cada traço representa um elemento ou um grupo de elementos) e, por vezes, associada a esquemas (diagrama de árvore) e figuras (triângulo de Pascal). De entre as 7 questões apresentadas, esta foi a que reuniu uma maior percentagem de não respostas (22%).

O problema consiste na determinação de todas as permutações das letras V V V H H H H (V = 1 movimento na vertical; H = 1 movimento na horizontal) atendendo a que há apenas dois tipos de objectos e que as permutações entre os objectos do mesmo tipo não produzem novas configurações. Assim, este problema poderia ser resolvido escolhendo 3 movimentos verticais de entre 7 movimentos possíveis ou, equivalentemente, escolhendo 4 movimentos horizontais de entre 7 movimentos possíveis, dado que $C_p^n = C_{n-p}^n$, para $n \geq p$, revelando, desta forma, a conexão com o triângulo de Pascal.

Nas resoluções da questão 6, os alunos apresentaram os resultados C_4^7 (44%), C_3^7 (6%) e $7!/(3!\times4!)$ (6%), enquanto as restantes resoluções envolveram apenas o triângulo de Pascal (33%) (Figura 1), atendendo a que cada elemento de uma linha (excepto os dos extremos) pode ser obtido por $C_{p\ 1}^{n\ 1}\quad C_p^n\quad C_{p\ 1}^n$.

A questão 2 consiste na distribuição dos 3 carros pelos 5 lugares de estacionamento, com a condição de que só é possível colocar um carro em cada lugar.

> Questão 2. A garagem da Joana tem cinco lugares de estacionamento, como mostra a figura.
>
> 
>
>
> De quantas maneiras podem a Joana, o Carlos e a Teresa estacionar os seus carros nesta garagem? (Nota. Cada pessoa só tem um carro.)
>
> Explique o seu raciocínio (Resposta correcta: 60).

Das resoluções obtidas através da estratégia *desenhos e operações* destaca-se a resolução do aluno A_{18} (Figura 2).

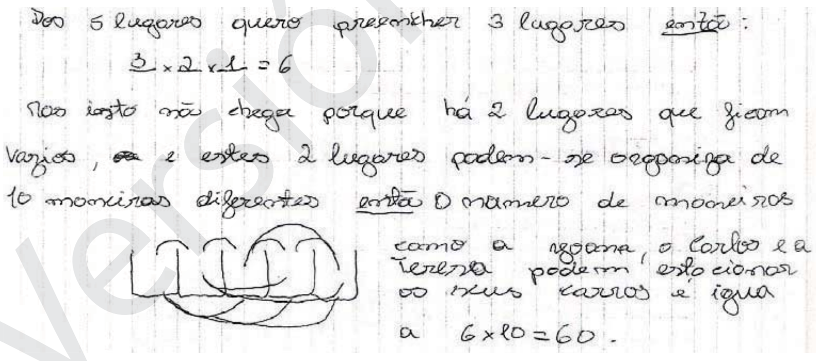


Figura 2. Resolução da questão 2 pelo aluno A_{18} na fase I do teste.

A solução pode ser obtida pela contagem dos A_3^5, dado que a situação pode ser interpretada como um problema de selecção ordenada sem reposição, em que cada uma das 3 pessoas selecciona um dos 5 lugares de estacionamento disponíveis. Este raciocínio foi o mais frequente, tendo sido utilizado em 87% das resoluções.

Na resolução desta questão, o aluno A_{18} começou por determinar o número de possibilidades de ordenar os 3 objectos diferentes (os carros) em 3 espaços diferentes (três lugares de estacionamento), o que corresponde a contar as P_3. Seguidamente determinou o número de pares não ordenados de dois lugares vazios, que corresponde a contar as C_2^5, e, por fim, aplicou a regra do produto para obter a resposta ao problema. O raciocínio do aluno considerou o facto de que contar os A_p^n $(n \geq p)$ equivale a determinar $P_p \quad C^n_{n\ \ p}$, em que, na situação apresentada, p representa o número de carros e n o número de lugares de estacionamento.

Na resolução da questão 7, o aluno A_1 (Figura 3), através da estratégia *desenhos e operações* (utilizada em 82% das resoluções), começou por determinar uma lista de situações possíveis recorrendo ao diagrama de árvore, seguindo-se a determinação dos três tipos possíveis de sequências ordenadas com repetição a serem contadas.

> *Questão 7.* Considere todos os números ímpares com quatro algarismos. Quantos desses números têm exactamente dois algarismos pares? Explique o seu raciocínio (Resposta correcta: 1625).

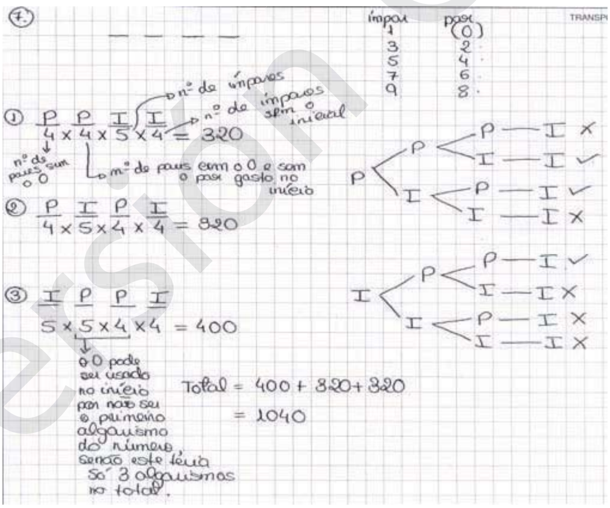


Figura 3. Resolução da questão 7 pelo aluno A_1 na fase I do teste.

Na sua resolução, o aluno A_1 efectuou a contagem do número de configurações de cada tipo (cometendo o erro de não permitir a repetição dos algarismos) aplicando a regra do produto, seguida da aplicação da regra da soma para obter a solução do problema.

Pela tabela IV conclui-se que nas resoluções que envolveram fórmulas (48% das resoluções) predominou a fórmula das combinações e a fórmula dos arranjos com repetição foi a menos utilizada.

TABELA IV
Distribuição, em percentagem, das resoluções dos alunos, na fase I do teste, que envolveram a estratégia fórmula.

Fórmulas	Questões do teste							
	1 ($n = 7$)	2 ($n = 9$)	3 ($n = 9$)	4 ($n = 14$)	5 ($n = 22$)	6 ($n = 11$)	7 ($n = 2$)	*Total* ($n = 74$)
C_p^n	29		56	7	92	91	50	*53*
A_p^n	42	100	33		4	–	50	*23*
$\overline{A}_p^n$			11		–	–		*1*
P_n	29			93	4	9		*23*

Em três resoluções, a utilização da fórmula ocorre em jeito de síntese da resolução efectuada através de outra estratégia, como é o caso da resolução do aluno A_1 na questão 2, que escreveu $5 \times 4 \times 3 = 6\,0 = {}^5A_3$.

No caso da fórmula das combinações, na questão 3, o aluno A_{16} apresentou a resolução que consta da figura 4.

> *Questão 3.* Sete amigas vão passar o fim-de-semana na casa da avó de uma delas. A avó só tem a sala e o escritório disponíveis para as sete amigas dormirem. De quantas formas diferentes podem ser distribuídas as sete amigas pelos dois espaços disponíveis? Explique o seu raciocínio (Resposta correcta: 128).

Numa primeira fase da resolução desta questão, 13% dos alunos optaram por determinar todas as possibilidades de dividir as 7 amigas por 2 grupos (Figura 4) e 9% dos alunos optaram por determinar todas as decomposições do número 7 em duas parcelas. No primeiro caso, seguiu-se a contagem dos subconjuntos possíveis de k elementos ($k \quad \{0,1,2,3,...,7\}$) recorrendo à fórmula das combinações, o que equivale a determinar os 8 elementos da 7ª linha do triângulo de Pascal, e por fim, fazendo uso da regra da soma, os alunos obtiveram o número de maneiras possíveis de distribuir as sete amigas pelos 2 compartimentos. No segundo caso, um aluno apresentou o número de subconjuntos como resposta ao problema e outro aluno efectuou uma contagem incorrecta do número de grupos possíveis com k elementos.

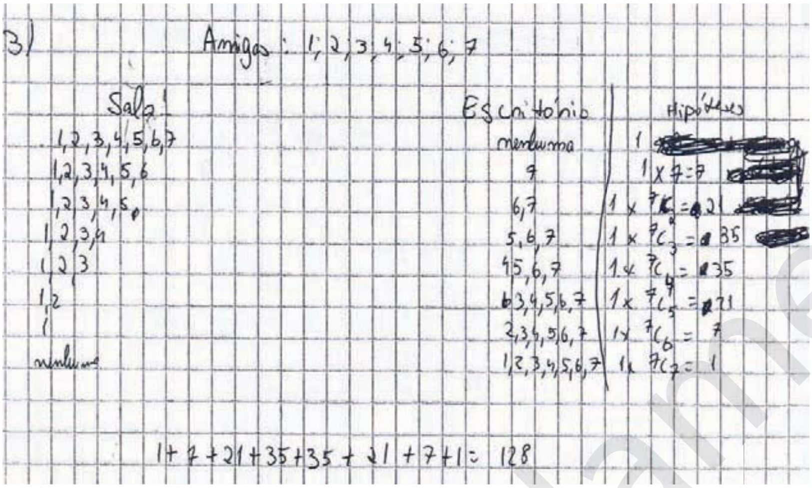


Figura 4. Resolução da questão 3 pelo aluno A_{16} na fase I do teste.

Ainda nesta questão, 39% dos alunos apresentaram como resposta ao problema o valor de 2^7, uma vez que distribuir as 7 amigas pelos 2 compartimentos equivale a escolher 7 vezes consecutivas um compartimento dos dois disponíveis (podendo ficar um dos compartimentos vazio), isto é, contaram os $\overline{A}_7^2$.

Nas resoluções os alunos revelaram cuidado ao nível da organização da informação, procurando reunir toda e apenas a informação necessária à resolução do problema. Observou-se também um forte recurso à elaboração de pequenos textos explicativos dos raciocínios envolvidos na resolução dos problemas, como se exemplifica na resolução (incompleta) da questão 4 pelo aluno A_{12}.

> *Questão 4*. Os primeiros-ministros de 7 países, incluindo Portugal, Espanha, França e Itália, sentaram-se numa mesa em fila. De quantas formas diferentes se podem sentar se o português e o espanhol querem ficar juntos, o italiano quer ficar num extremo e o francês quer ficar no outro extremo? Explique o seu raciocínio (Resposta correcta: 96).

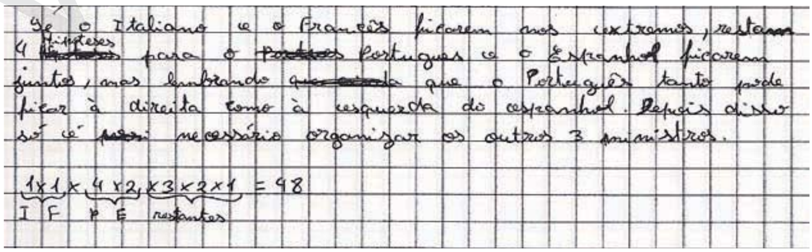


Figura 5. Resolução da questão 4 pelo aluno A_{12} na fase I do teste.

4.2. *Desempenho dos alunos no teste*

No gráfico da figura 6 estão representadas as médias das classificações obtidas pelos alunos no 10º e 11º anos de escolaridade a Matemática e das classificações obtidas na primeira fase (fase I) e na segunda fase (fase II) do teste.

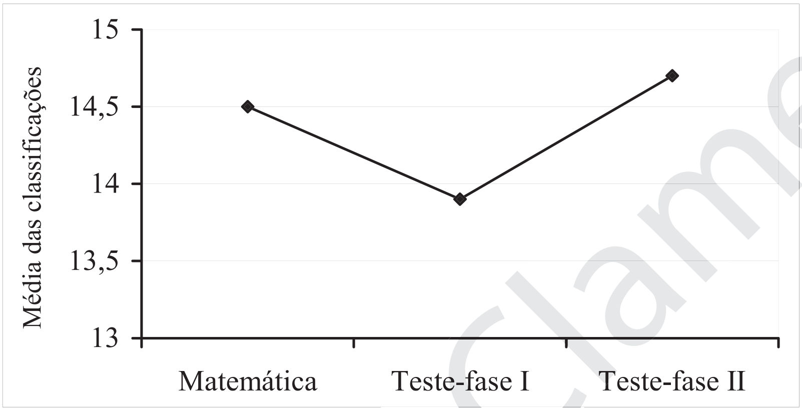


Figura 6. Classificação média da turma em Matemática e nas fases I e II do teste.

A aplicação do teste t de Student a amostras emparelhadas não determinou diferenças estatisticamente significativas entre as médias das classificações obtidas em Matemática ($\bar{x}=14,5$) e na fase I do teste ($\bar{x}=13,9$). Já da fase I ($\bar{x}=13,9$) para a fase II ($\bar{x}=14,7$) do teste observou-se um aumento da média das classificações estatisticamente significativo ($p<0{,}01$).

A melhoria dos resultados na fase II do teste, tendo os alunos que explicitar de forma clara o seu raciocínio, destaca a importância da solução numérica (recorde-se que na fase II do teste foram fornecidos os valores das soluções) na detecção de erros de raciocínio na resolução de problemas combinatórios, até porque é difícil encontrar estratégias de verificação, ou até impossível, como é o caso das situações com solução de grande dimensão.

Pela tabela V verifica-se que, na fase I do teste, as questões que se revelaram mais fáceis para os alunos, foram as questões 1, 2 e 4 (com uma percentagem da cotação total variando entre 81% e 87%), das quais se mostrou mais fácil a questão 2. As que se revelaram mais difíceis foram as questões 3, 5 e 7 (com uma percentagem da cotação total variando entre 52% e 54 %), das quais se mostrou mais difícil a questão 7. Finalmente, a percentagem da cotação total obtida pelos alunos na questão 6 foi de 67%.

TABELA V

Análise do desempenho dos alunos nas fases I e II nas 7 questões do teste.

Questão	1	2	3	4	5	6	7
Cotação	3	3	3	3	3	3	2
Fase I							
Média	2,59	2,61	1,63	2,42	1,59	2,00	1,04
Desvio padrão	0,55	0,64	1,41	0,75	1,29	1,38	0,63
Fase II							
Média	2,67	2,61	1,63	2,64	1,80	2,13	1,17
Desvio padrão	0,57	0,64	1,41	0,67	1,30	1,32	0,69

As questões em que os alunos mais investiram na segunda fase do teste foram as questões 1, 4 e 7 (tabela VI), verificando-se que, da totalidade das novas resoluções dos alunos, 76% refere-se a estas questões. Contudo, a melhoria mais significativa, da fase I para a fase II do teste, registou-se nas questões 4 (7,3%), 5 (7%) e 7 (6,5%).

TABELA VI

Número de alunos por tipo de resolução na fase II do teste.

Tipo de resolução	Questões do teste						
	1	2	3	4	5	6	7
Correcta e pontuada	4	-		5	2	1	4
Correcta não pontuada	7		5	4			2
Com incorrecções	1			1	2		3
Total	*12*		*5*	*10*	*4*	*1*	*9*

A percentagem de respostas correctas na fase II do teste, que foi de 83%, aumentou por alteração da pontuação inicial em 39% das resoluções. Na figura 7 apresentam-se as resoluções da questão 5 efectuadas pelo aluno A_{19} nas fases I e II do teste, evidenciando o aprofundamento da compreensão do aluno.

> *Questão 5*. A turma do 12º A tem 17 alunos, dos quais 10 são rapazes. O professor de Matemática pretende indicar cinco para fazerem um trabalho sobre história das Probabilidades. De quantas maneiras o pode fazer se o grupo dos cinco alunos tiver pelo menos dois rapazes e pelo menos duas raparigas? Explique o seu raciocínio (Resposta correcta: 4095).

Fase I	Fase II
${}^7C_2 = 21$ → 2 das 7 raparigas $\times$ ${}^{10}C_2 = 45$ → 2 dos 10 rapazes $\times$ ${}^{13}C_1 = 13$ → do resto, mais 1 $21 \times 45 \times 13 = 12285$	$\underbrace{{}^{10}C_3 \times {}^7C_2}_{\text{3 dos 10 rapazes / 2 das 7 raparigas}} + \underbrace{{}^{10}C_2 \times {}^7C_3}_{\text{2 dos 10 rapazes / 3 das 7 raparigas}} = 4095$ ou

Figura 7. Resoluções da questão 5 pelo aluno A_{19} nas fases I e II do teste.

A resolução do aluno A_{19}, na fase I do teste, permite a repetição de configurações, contemplando o triplo das possibilidades, dado que considerando uma turma com n alunos dos quais p são raparigas, então ${}^pC_2 \times {}^{n-p}C_2 \times {}^{n-4}C_1 = 3\times({}^{n-p}C_3 \times {}^pC_2 + {}^{n-p}C_2 \times {}^pC_3)$. Assim, se representarmos por r_i, com i $\{0,1,2,\ldots,7\}$, as raparigas e por R_j, com j $\{1,2,\ldots,10\}$, os rapazes, pela resolução do aluno A_{19}, três configurações possíveis seriam: $\underline{r_1\, r_2}\ \ \underline{R_1\, R_2}\ \ \underline{R_3}$; $\underline{r_1\, r_2}\ \ \underline{R_3\, R_2}\ \ \underline{R_1}$; $\underline{r_1\, r_2}\ \ \underline{R_3\, R_1}\ \ \underline{R_2}$. Todavia, as configurações obtidas representam o mesmo grupo de trabalho. Comparando a resposta obtida com a resposta correcta, fornecida na fase II do teste, o aluno concluiu da necessidade de contar separadamente o número de grupos com 3 rapazes e 2 raparigas e com 2 rapazes e 3 raparigas.

Nas questões 2 e 3 são apresentados problemas de distribuição de objectos diferentes por caixas diferentes, que poderiam ser considerados como enunciados de problemas de selecção, em que ambos envolvem apenas uma operação combinatória uma única vez, mas em contextos diferentes. Na questão 2, o problema de distribuição de 3 objectos diferentes (os carros) por 5 caixas diferentes (os lugares de estacionamento) pode ser interpretado como um enunciado de selecção ordenada sem repetição (A_3^5).

Na questão 3, o problema de distribuição de 7 objectos diferentes (as amigas) por 2 caixas distintas (os dois compartimentos) pode ser interpretado como um enunciado de selecção ordenada com repetição ($\overline{A}_7^2$). Dado que o modelo combinatório era o mesmo nas duas questões, as maiores dificuldades sentidas pelos alunos na questão 3 podem estar relacionadas com a diferente operação combinatória e/ou com o contexto do problema.

Da tabela VI também se conclui sobre a percentagem significativa de resoluções correctas sem alteração da pontuação atribuída na primeira fase do teste. É o caso da resolução da questão 1 pelo aluno A_8 (Figura 8) que, da primeira para a segunda resolução, acrescentou à expressão inicial o factor "4" sem ter apresentado qualquer justificação. Entendeu-se, assim, que a alteração efectuada não foi mais do que uma tentativa de cálculo para obter a solução correcta.

> *Questão 1*. Uma criança está a brincar com doze cartas: nove cartas numeradas de 1 a 9, um *rei*, um *valete* e uma *dama*. De quantas maneiras pode a criança colocar em fila quatro das doze cartas, com a condição de que são sempre seleccionadas as três figuras? Explique o seu raciocínio (Resposta correcta: 216).

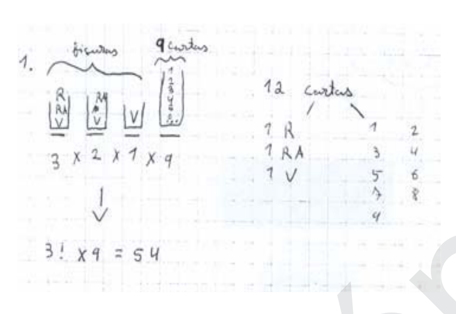
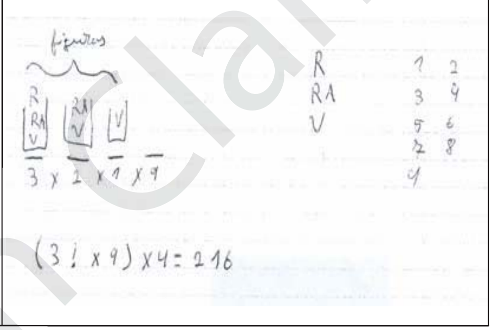
Fase I	Fase II
	

Figura 8. Resoluções da questão 1 pelo aluno A_8 nas fases I e II do teste.

A estratégia de fornecer as soluções, na fase II do teste, permitiu a 61% dos alunos melhorarem a sua classificação final: o único aluno com classificação a Matemática do intervalo [0, 10 [; 63% dos alunos com classificação a Matemática do intervalo [10, 14 [; e 57% dos alunos com classificação a Matemática do intervalo [14, 20].

4.3. *Análise dos erros nas resoluções da fase I do teste*

Analisados os erros dos alunos nas sete questões do teste (num total de 155 resoluções), conclui-se, pela tabela VII, que os erros mais frequentes relacionam-se com os operandos considerados nas expressões numéricas e com a ordem dos elementos.

No erro associado aos *operandos* envolvidos nas expressões obtidas pelos alunos foram consideradas as contagens: *completas incorrectas*, na medida em que eram contadas não só a totalidade das configurações pedidas no enunciado mas também configurações repetidas – por exemplo a expressão $C_2^{10} \quad C_2^{7} \quad C_1^{13}$ apresentada por 9 alunos na questão 5; *incompletas correctas*, na medida em que eram contadas apenas algumas das configurações pedidas no enunciado – por exemplo a expressão $5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 4 \quad 5 \quad 5 \quad 5$ em vez da expressão $5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 4 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 2$, apresentada por 4 alunos na questão 7; e *incompletas incorrectas*, na medida em que eram contadas apenas algumas das configurações pedidas no enunciado e configurações que não eram pedidas no enunciado – por exemplo a expressão $9 \quad 10 \quad 10 \quad 5$ apresentada por 12 alunos na questão 7.

TABELA VII
Distribuição, em percentagem, dos erros dos alunos na fase I do teste.

Erros	Questões do teste							
	1 ($n = 23$)	2 ($n = 23$)	3 ($n = 22$)	4 ($n = 23$)	5 ($n = 23$)	6 ($n = 18$)	7 ($n = 23$)	*Total* ($n = 155$)
Ordem	43	–	23	30	13	–	30	*21*
Repetição	–	4	27	–	–	–	13	*6*
Operação combinatória	–	4	36	–	4	–	–	*6*
Parâmetros	4	–	5	–	–	11	–	*3*
Operandos	4	–	5	26	52	–	74	*24*
Operação numérica	–	–	–	–	4	–	–	*1*
Enumeração	–	–	–	–	–	6	–	*1*

Nota: Quando na resolução de uma questão existia mais do que um erro contabilizou-se o número total de erros.

Quanto ao erro de *ordem* (a ordem era considerada quando era irrelevante ou vice-versa), tanto ocorreu associado à totalidade dos elementos de uma configuração como associado apenas a parte dos elementos (por exemplo, $9 \quad 3!$ em vez de $9 \quad 3! \quad 4$, na resolução de 7 alunos da questão 1). Nas questões 1, 3, 4 e 7 ocorreram 27 resoluções que evidenciam a irrelevância da ordem quando a ordem era importante. Nas questões 3 e 5 os alunos, num total de 5 resoluções, consideraram a ordem relevante quando não o era.

Nas questões 3 e 7 os alunos não permitiram a repetição dos elementos (em 9 resoluções) quando a repetição deveria ser considerada. Contrariamente, na questão 2 um aluno permitiu a repetição dos elementos quando não era pertinente.

O erro na *operação combinatória* utilizada para resolver o problema ocorreu predominantemente na questão 3 (em 36% das resoluções) e foi pouco expressivo na questão 2 (um aluno contou os $\overline{A}_5^3$ em vez de A_3^5) e na questão 5 (um aluno utilizou a fórmula dos arranjos simples em vez da fórmula das combinações simples).

O erro na identificação dos *parâmetros* da fórmula de uma operação combinatória foi um erro pouco frequente, tendo ocorrido nas questões 1, 3 e 6 e com maior frequência na questão 6. Este erro ocorreu associado à consideração de parâmetros incorrectos (por exemplo, escrever C_5^7 em vez de C_4^7 na questão 6) ou à troca entre dois parâmetros correctos (por exemplo, escrever $\overline{A}_2^7$ em vez de $\overline{A}_7^2$ na questão 3).

A utilização de uma *operação numérica* incorrecta (adição em vez de multiplicação) ocorreu apenas numa resolução da questão 5 e a *enumeração* sistemática incompleta correcta também ocorreu apenas numa resolução da questão 6, em que o aluno desenhou apenas alguns dos percursos possíveis.

5. Conclusões

Na fase I do teste, as estratégias de resolução dos problemas combinatórios revelaram-se diversificadas e clarificadoras dos raciocínios envolvidos e apoiaram-se essencialmente em desenhos e operações numéricas, não se verificando uma grande valorização das fórmulas. Neste último caso predominou a fórmula das combinações simples.

O grande recurso à representação simbólica (por exemplo, iniciais para representar nomes), gráfica (por exemplo, tracinhos para representar as posições dos elementos) e numérica (por exemplo, números para representar pessoas) teve um papel importante na organização da informação pertinente para a resolução da questão e na esquematização das situações de contagem apresentadas, revelando preocupação dos alunos na interpretação do problema. Na resolução dos problemas a enumeração sistemática e o diagrama de árvore, quando utilizados, ocorreram como estratégias intermédias, na medida em que foram utilizadas para listar situações a serem contadas através de outra estratégia.

As produções escritas dos alunos ao contemplarem diferentes representações, abordagens diversificadas, conexões matemáticas e explicações dos seus raciocínios reflectem o desenvolvimento de capacidades do raciocínio combinatório, tal como é considerado por vários autores (e.g., Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994, 1997; English, 2005; Roa, Batanero & Godino, 2003; Roa, 2000).

Os erros identificados na fase I do teste e referidos por vários autores (e.g., Batanero, Navarro-Pelayo & Godino, 1997; Correia, 2008; Esteves, 2001; Silva, Fernandes & Soares, 2004) relacionam-se com os *operandos*, a *ordem*, a *repetição*, a *operação combinatória*, os *parâmetros*, a *operação numérica* e a *enumeração*. O erro mais frequente ocorreu associado aos operandos considerados nas expressões obtidas, resultando de contagens *incompletas correctas*, *completas incorrectas* e *incompletas incorrectas*. Seguiu-se, em frequência, o erro de ordem, predominantemente associado à não consideração da ordem quando ela era relevante.

As produções dos alunos enfatizam a importância dos raciocínios indutivo, recursivo e analógico na resolução de problemas combinatórios (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994; English, 2005), bem como a importância de retirar o máximo proveito de estratégias como o diagrama de árvore, a enumeração sistemática e a tradução do problema inicial em subproblemas, permitindo ao aluno a clarificação do significado dos operandos envolvidos nas expressões obtidas e das operações numéricas consideradas por aplicação das regras do produto, da soma e do quociente, aspectos referidos também por vários autores (DeGuire, 1991; Gardiner, 1991; Roa, Batanero & Godino, 2003).

Conforme foi referido antes, as potencialidades da verificação de um resultado (Polya, 2003) e as dificuldades a ela inerentes (Eizenberg & Zaslavsky, 2004) apoiam a estratégia adoptada de fornecer as soluções aos alunos. Realmente, a estratégia de fornecer as soluções numéricas na fase II do teste revelou-se uma estratégia eficaz na detecção de erros de raciocínio, promovendo o questionamento das resoluções efectuadas e proporcionando aos alunos mais uma oportunidade de aprendizagem, independentemente do grau de desempenho dos alunos em Matemática e do grau de dificuldade das questões. Contudo, se a resposta numérica permitiu à maioria dos alunos melhorarem a sua classificação final no teste, a percentagem significativa de resoluções correctas não pontuadas, na segunda fase do teste, reforça a importância de pedir aos alunos que justifiquem o seu raciocínio, de modo a distinguir entre solução correcta e compreensão da situação, tal como refere English (1998, 2005).

Globalmente, as resoluções dos alunos fornecem evidência sobre a influência da intervenção de ensino no desenvolvimento das capacidades de raciocínio combinatório e das conexões entre as operações combinatórias, em detrimento de um ensino mais centrado na aplicação das fórmulas, reforçando as recomendações do programa de Matemática A (ME, 2002) e de Batanero, Godino & Navarro-Pelayo (1994, 1997).

Referências bibliográficas

Almeida, A. L. & Ferreira, A. C. (s/d). *Aprendendo análise combinatória através da resolução de problemas: um estudo com classes de 9º ano do ensino fundamental e 2º ano do ensino médio*. Recuperado de http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/261-1-A-gt11_almeida_e_ferreira_ta.pdf

Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.

Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1997). Combinatorial Reasoning and its Assessment. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The Assessment Challenge in Statistics Education* (pp. 239-276). Amsterdam: IOS Press.

Batanero, C., Navarro-Pelayo V. & Godino, J. D. (1997). Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils. *Educational Studies in Mathematics, 32*(2), 181-199. doi: 10.1023/A:1002954428327

Correia, P. F. & Fernandes, J. A. (2009). Processos de resolução de problemas de Combinatória por alunos do 9º ano de escolaridade. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho & F. Viseu (Orgs.), *Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 339-353). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, CD-ROM.

Correia, P. F. (2008). *Raciocínios em combinatória de alunos do 9º ano de escolaridade* (Dissertação de mestrado). Universidade do Minho, Braga, Portugal.

DeGuire, L. (1991). Permutations and Combinations: A Problem-Solving Approach for Middle School Students. In M. Kenney & C. Hirsch (Eds.), *Discrete Mathematics Across the Curriculum, K-12* (pp. 59-66). Reston, VA: NCTM.

Eizenberg, M. & Zaslavsky, O. (2003). Cooperative Problem Solving in Combinatorics: the Inter-relations between Control Processes and Successful Solutions. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), 389-403.

Eizenberg, M. & Zaslavsky, O. (2004). Students' Verification Strategies for Combinatorial Problems. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(1), 15-36. doi: 10.1207/s15327833mtl0601_2

English, L. (1998). Rethinking what it Means to Understand: The Case of Combinatorial Problem Solving. In C. Kanes, M. Goos & E. Warren (Eds.), *Teaching Mathematics in New Times, Proceedings of the Twenty First Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (vol. I, pp. 185-193). Brisbane, Australia: Mathematics Education Research.

English, L. (2005). Combinatorics and the Development of Children`s Combinatorial Reasoning. In J. Graham (Ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 121-141). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Esteves, I. (2001). *Investigando os factores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental* (Dissertação de mestrado). Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Ferreira, J. S. (2007). *O ensino da combinatória no 12º ano de escolaridade: análise das estratégias de ensino* (Dissertação de mestrado). Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Dordrecht: D. Reidel.

Gardiner, A. (1991). A Cautionary Note. In M. Kenney & C. Hirsch (Eds.), *Discrete Mathematics Across the Curriculum, K-12* (pp. 10-17). Reston, VA: NCTM.

Glaymann, M. & Varga, T. (1975). *Les probabilités à l`école.* Paris: CEDIC.

Hadar, N. & Hadass, R. (1981). The Road to Solving a Combinatorial Problem is Strewn with Pitfalls. *Educational Studies in Mathematics, 12*(4), 435-443. doi: 10.1007/BF00308141

ME (2002). *Matemática A. Programa do 12º ano*. Lisboa: Autor.

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria* (Tesis inédita de doctorado). Universidad de Granada, Granada, España.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales (Tradução espanhola do original de 2000).

Neves, M. A. F., Guerreiro, L. & Moura, A. (2005). *Matemática A 12º: Probabilidades*. Porto: Porto Editora.

Petocz, P. & Reid, A. (2007). Learning and assessment in statistics. In B. Phillips & L. Weldon (Eds.), *The Proceedings of the ISI/IASE Satellite on Assessing Student Learning in Statistics*. Vooburg, The Netherlands: International Statistical Institute, CD-ROM.

Piaget, J. & Inhelder, B. (s/d). *A origem da ideia do acaso na criança*. Rio de Janeiro: Editora Record (Tradução portuguesa do original de 1951).

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Publicações Gradiva. (Tradução portuguesa do original de 1945).

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada* (Tesis inédita de doctorado). Universidad de Granada, Granada, España.

Roa, R., Batanero, C. & Godino, J. (2003). Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios. *Educación Matemática*, *15*(2), 5-25.

Silva, D., Fernandes, J. A. & Soares, A. (2004). Intuições de alunos de 12º ano em Combinatória: um estudo exploratório. In J. A. Fernandes, M. Sousa & S. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de Probabilidades e Estatística* (pp. 61-84). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Watson, R. (1996). Students' Combinatorial Strategies. *Teaching Mathematics and its Applications*, *15*(1), 27-32.

Autores

José António Fernandes. Universidade do Minho, Portugal; jfernandes@ie.uminho.pt

Paulo Ferreira Correia. Escola Secundária/3 de Barcelos, Portugal; ferreiracorreiapaulo@gmail.com

Rafael Roa Guzmán. Universidad de Granada, España; rroa@ugr.es