Solange Roa-Fuentes, Asuman Oktaç

CONSTRUCCIÓN DE UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA: ANÁLISIS TEÓRICO DEL CONCEPTO TRANSFORMACIÓN LINEAL

CONSTRUCTING A GENETIC DECOMPOSITION: THEORETICAL ANALYSIS OF THE LINEAR TRANSFORMATION CONCEPT

RESUMEN. El objetivo de este trabajo es dar a conocer el procedimiento que seguimos para diseñar una descomposición genética sobre el concepto transformación lineal, mostrando los pasos seguidos en su construcción y las dificultades para realizarlo. El diseño se determina por la elaboración y desarrollo del análisis teórico que plantea el ciclo de investigación de la teoría APOE. Asimismo, proponemos dos descomposiciones genéticas que describen los posibles caminos para construir el concepto: uno determinado por el mecanismo de interiorización, y el otro por el de coordinación.

PALABRAS CLAVE: Transformación lineal, descomposición genética, álgebra lineal, teoría APOE.

ABSTRACT. The aim of this paper is to present the process that we followed in order to prepare a genetic decomposition of the concept of linear transformation, showing the steps we took in its construction and the difficulties that we encountered. The design is based on a theoretical analysis determined by the research cycle related to APOS theory. We propose two genetic decompositions that describe two possible ways to construct this concept, one that uses the mechanism of interiorization and another that uses coordination.

KEY WORDS: Linear transformation, genetic decomposition, linear algebra, APOS theory.

RESUMO. O objetivo deste trabalho é dar a conhecer o procedimento que seguimos para projetar uma decomposição genética do conceito transformação linear, mostrando as etapas seguidas na sua construção e as dificuldades para o realizar. O projeto consiste na elaboração e desenvolvimento de análise teórica apresentada pelo ciclo de investigação da teoria APOE. Além disso, propomos duas decomposições genéticas que descrevem os possíveis caminhos para construir o conceito: uma determinada pelo mecanismo da interiorização, e outro pelo de coordenação.

PALAVRAS CHAVE: Transformação linear, decomposição genética, álgebra linear, teoria APOE.

RÉSUMÉ. Le but de cet article est de présenter le chemin que nous avons suivi pour préparer une décomposition génétique sur le concept de transformation linéaire, en montrant les pas que nous avons pris, et les difficultés trouvées. La conception de cette décomposition génétique se base sur une analyse théorique déterminée par le cycle de recherche relié à la théorie APOS. Nous proposons deux décompositions génétiques qui décrivent deux possibles chemins pour la construction de ce concept, l'une déterminé par le mécanisme d'intériorisation et l'autre par celui de coordination.

MOTS CLÉS: Transformation linéaire, décomposition génétique, algèbre linéaire, théorie APOS.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2010) 13 (1): 89-112.
Recepción: Junio 16, 2009 / Aceptación: Noviembre 23, 2009.

1. INTRODUCCIÓN

Durante los últimos 20 años se han publicado varios estudios que toman como marco de referencia a la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema). Los investigadores que han hecho estos trabajos, principalmente miembros del Grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), han centrado sus análisis en diferentes áreas de las matemáticas como cálculo, álgebra abstracta, matemáticas discretas, estadística y teoría de números, en los que han enfocado su atención en algunos de sus conceptos (Dubinsky & McDonald, 2001) y en nociones de álgebra lineal, que fueron estudiadas para diseñar el texto *Learning linear algebra with ISETL* (Weller, Montgomery, Clark, Cottrill, Trigueros, Arnon, & Dubinsky, 2002). En nuestro grupo, se ha considerado el análisis de conceptos particulares del álgebra lineal, entre ellos los sistemas de ecuaciones (Trigueros, Oktaç & Manzanero, 2007), espacio vectorial (Oktaç, Trigueros & Vargas, 2006; Parraguez & Oktaç, 2010; Trigueros & Oktaç, 2005), base (Kú, Trigueros y Oktaç, 2008) y transformación lineal (Roa, 2008).

Debido a la naturaleza abstracta del álgebra lineal y las dificultades que afrontan los estudiantes cuando intentan construir conceptos como los mencionados, hemos encontrado en la teoría APOE una herramienta potente para explicar el porqué de esos problemas, mediante la aplicación de su ciclo de investigación (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996). Este ciclo consta de tres componentes: 1) análisis teórico; 2) diseño e implementación de enseñanza, y 3) observación, análisis y verificación de datos. En este trabajo nos centraremos en el desarrollo de la primera componente, que describe las construcciones (acciones, procesos, objetos y esquemas) y los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, asimilación) que puede realizar un estudiante para construir un concepto matemático determinado. La segunda y tercera componentes, que conciernen al diseño de situaciones con base en el análisis teórico y su aplicación, las consideraremos en un próximo escrito donde determinaremos la validez del primer análisis, a la luz de los datos empíricos obtenidos.

Cada uno de los trabajos hechos con la teoría APOE ha ido fortaleciéndola y enriqueciéndola, en la medida en que los análisis reflejan un mejor entendimiento sobre las construcciones y mecanismos usados por dicho marco de referencia para explicar la construcción del conocimiento matemático. Ahora bien, las investigaciones publicadas generalmente proponen una descomposición genética terminada y, en algunos casos, muestran cómo se refinó según los datos empíricos, pero no hay estudios que muestren de manera explícita el camino que se puede seguir en su construcción, aunque mencionan que el análisis se basa en la experiencia y resultados anteriores.

En esta investigación nos enfocamos en describir los pasos que hemos seguido para proponer una descomposición genética sobre el concepto transformación lineal, así como las dificultades que tuvimos que afrontar. Con ello queremos revelar el trabajo que hay detrás de este análisis y evidenciar su importancia, al ahondar en conceptos matemáticos avanzados que se tratan desde su propia naturaleza: la abstracción. Esto nos permite considerar las interrelaciones que un individuo puede establecer entre un nuevo concepto y sus construcciones previas, con lo cual genera un proceso de asimilación o construcción del nuevo objeto y las nuevas relaciones que puede instaurar.

En la siguiente sección, con base en una reflexión sobre la teoría APOE donde consideramos algunas ideas que fundamentan su construcción, formuladas por Piaget y García (2004), realizamos una descripción de sus elementos básicos y, desde nuestro punto de vista, referimos sus alcances y limitantes. En la tercera sección exponemos el procedimiento para diseñar la descomposición genética y, a partir de la descripción de los elementos que consideramos en el análisis teórico, presentamos dos descomposiciones genéticas del concepto que representan caminos diferentes para construir el mismo objeto matemático. Finalmente, en la sección cuatro reflexionamos sobre el trabajo efectuado y la pertinencia de su continuación.

2. Una reflexión sobre la teoría APOE

2.1. *Antecedentes de la teoría APOE*

La teoría APOE es una interpretación de la teoría constructivista que se basa principalmente en el concepto de abstracción reflexiva, introducido por Piaget, para describir el desarrollo del pensamiento lógico en los niños, y extiende la idea a nociones matemáticas más avanzadas (Dubinsky, 1991). Dubinsky usa la abstracción reflexiva para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un concepto determinado, partiendo de la siguiente idea del conocimiento matemático:

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, y construyendo acciones, procesos y objetos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas (Dubinsky & McDonald, 2001, p. 276).

En este comienzo se enfatiza en la necesidad de enfrentar al individuo con situaciones matemáticas que promuevan su reflexión. El razonamiento que logre hacer el estudiante sobre cierta situación depende del tipo de preguntas que se le planteen, orientándolas al objetivo de que generen un nuevo conocimiento que se integre al conjunto de construcciones previas. Piaget y García mencionan que *"el desarrollo del conocimiento no se realiza por la agregación continua de nuevos conocimientos (…), sino por etapas que representan niveles cognoscitivos característicos; y en cada etapa hay una reorganización de los conocimientos adquiridos en la etapa anterior"* (2004, p. 134). Dichas etapas, que caracterizan los autores como *intra*, *inter* y *trans* determinan la evolución del conocimiento matemático de un individuo y sus posibilidades de razonamiento frente a ciertos conceptos matemáticos.

La construcción de un concepto está asociada con las estructuras previas de un individuo y las ideas que pueda hacerse del objeto durante su experiencia con éste. A esto Piaget y García (2004) llaman *asimilación*, un mecanismo que consiste en apreciar al conocimiento matemático como una relación indisociable entre el sujeto y el objeto, donde el objeto es el contenido al cual el sujeto le impone una forma extraída de sus estructuras anteriores, pero ajustadas al contenido, y modifica el esquema asimilador por medio de acomodaciones o las diferenciaciones en función del objeto que acaba de asimilar (Piaget y García, 2004). De esta manera, asimilar es equivalente a estructurar, y responde principalmente a la construcción de nuevos esquemas en función de los precedentes o acomodación de los anteriores.

Un individuo construye su conocimiento matemático por medio de un proceso de abstracción. Piaget caracterizó tres tipos de abstracción: *empírica*, *pseudoempírica* y *reflexiva*. La abstracción reflexiva depende de la empírica y la pseudoempírica, ya que la abstracción empírica le permite al individuo abstraer propiedades comunes de varios objetos y realizar acciones sobre ellos, a través de la interiorización y coordinación de las acciones en nuevas y crear nuevos objetos (Dubinsky, 1991). Así, cuando un individuo enfrenta una situación matemática debe recurrir a sus ideas sobre los conceptos involucrados en ella, haciendo una reconstrucción de su conocimiento como resultado de la reflexión sobre las condiciones del problema planteado. De esta manera puede reestructurar su conocimiento mediante una reorganización de las estructuras en un nivel más elevado, donde el nuevo conocimiento es asimilado.

En este sentido, las estructuras que un individuo posee de manera previa determinarán su construcción del nuevo concepto. Por tanto, una meta clara dentro de este marco teórico es ayudar a los estudiantes a que construyan las estructuras apropiadas para cada nuevo concepto, estableciendo las conexiones adecuadas con las estructuras previas. De esta manera las estructuras, denominadas *acciones*, *procesos, objetos* y *esquemas,* están relacionadas de tal modo que sus conexiones determinan el conocimiento matemático de un individuo.

2.2. *Descripción general de la teoría APOE*

Sin duda, los trabajos que pueden encontrarse en la literatura muestran que la teoría APOE es útil para analizar conceptos matemáticos avanzados. Los estudios hechos por diferentes investigadores, entre ellos los miembros del Grupo RUMEC, encabezados por Dubinsky [McDonald (2000) presenta una lista muy amplia de trabajos hechos con base en la teoría APOE], y los académicos mexicanos han enriquecido este marco teórico. Hoy tenemos una mejor comprensión de sus fundamentos y contamos con gran cantidad de conceptos matemáticos analizados que son una potente herramienta para la comunidad académica.

La teoría APOE apoya la existencia de una relación cercana entre la naturaleza de los conceptos matemáticos y su desarrollo en la mente de un individuo (Piaget, 1970, p. 13; tomado de Dubinsky, Weller, McDonald & Brown, 2005); por tanto, sus explicaciones son de orden epistemológico y psicológico. En este sentido, la teoría APOE puede ser ocupada para explicar las dificultades de los estudiantes ante un concepto y plantear caminos de construcción para su aprendizaje, con lo que arroja resultados concretos respecto a las estrategias pedagógicas pertinentes para motivar la elaboración de dicha noción.

Como dijimos en la sección anterior, el interés principal de la teoría APOE reside en describir la manera como se construye el conocimiento matemático, y la principal herramienta para tal fin es la descomposición genética porque describe los aspectos constructivos de una porción de conocimiento matemático que, a su vez, se espera que determinen aspectos metodológicos relacionados con la enseñanza del conocimiento (Asiala et al., 1996).

En su teoría, Dubinsky considera cinco tipos de abstracción reflexiva: la *interiorización*, la *coordinación*, la *encapsulación*, la *generalización* y la *reversión*. Estos son considerados mecanismos que dan lugar a las construcciones llamadas acciones, procesos y esquemas. Los esquemas son las construcciones más amplias que podemos determinar de una porción de conocimiento matemático, ya que forman una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas, así como de las relaciones entre ellos en función del concepto. Asimismo, son estructuras inacabadas que evolucionan por la asimilación de un nuevo objeto y la reacomodación de las estructuras por las nuevas relaciones que entabla el objeto.

Una característica fundamental de los esquemas es su coherencia, que alude a la capacidad del individuo para establecer si un esquema le permite solucionar un problema particular. Como menciona Dubinsky (1994), un esquema puede ocuparse para resolver una situación matemática y ser tematizado en un objeto para realizarle nuevas transformaciones (acciones y procesos). Esta cualidad fractal (Meel, 2003) de considerar los esquemas como nuevos objetos que entran a ser parte de otros esquemas permite hacer múltiples conexiones entre los elementos previos y los nuevos conceptos que un individuo busca integrar a sus estructuras.

Sin embargo, ¿cómo se logra la construcción de esquemas? Ya que los esquemas son colecciones de otros elementos como acciones, procesos y objetos, describiremos cómo se logran este tipo de construcciones y los mecanismos necesarios para elaborarlos. Cuando un individuo está frente a una situación matemática puede utilizar ciertos mecanismos para construir estructuras matemáticas que puedan ser aplicadas para solucionar dicha situación. Las estructuras más elementales son las acciones y los procesos, que están relacionadas con los mecanismos de interiorización y encapsulación, respectivamente. Esta teoría señala que cuando un individuo inicia la construcción de un concepto matemático realiza transformaciones (acciones y procesos) sobre otros objetos construidos previamente, a fin de generar el nuevo objeto (Dubinsky et al., 2005). Entonces, cuando realiza ciertas transformaciones sobre objetos, las cuales obedecen a estímulos externos, decimos que tiene una concepción *acción* del nuevo concepto; esto le permite realizar transformaciones paso a paso, determinadas por algún conector externo. Por ejemplo, al trabajar con una situación que involucre el concepto transformación lineal, necesitará de una fórmula explícita que le indique cómo verificar las propiedades de linealidad. Esto debe estar seguido de la pregunta prototipo: *¿es T una transformación lineal?* En este caso, las acciones se determinan por la repetición de un algoritmo y la notación de los objetos, sin la consciencia de la naturaleza de los elementos involucrados.

Según la teoría APOE, cuando un individuo repite y reflexiona sobre una acción, ésta puede ser *interiorizada* en un proceso mental. La interiorización de una acción consiste en construir una estructura mental que hace el mismo trabajo que el de la acción externa; decimos que el individuo posee una concepción *proceso* del concepto cuando puede reflexionar sobre el concepto, sin realizar acciones específicas sobre él. En el caso de la transformación lineal, una evidencia de la interiorización para las funciones conocidas o sencillas es que el estudiante puede reconocer si es o no una transformación lineal al verificar mentalmente la preservación de la suma vectorial y el producto por un escalar, o la preservación de combinaciones lineales. En esta concepción es muy importante que las condiciones se consideren como equivalentes; esto lo discutiremos con más detalle en las siguientes secciones.

Como ya mencionamos, un proceso puede ser resultado de la interiorización de una acción. Ahora bien, un proceso también puede generarse por la *coordinación* de dos o más procesos; este mecanismo permite establecer relaciones entre los procesos (por ejemplo mediante conectores lógicos) para determinar un nuevo proceso. Las acciones y procesos son transformaciones dinámicas que pueden transformar otro tipo de construcciones, denominadas *objetos*, que son estáticas como resultado de la *encapsulación* de un proceso. Cuando un individuo piensa en el proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre su totalidad, decimos que posee una concepción *objeto* al aplicar el mecanismo de encapsulación, que se considera como el más importante para construir el conocimiento matemático, pero el más difícil de lograr.

Dicho mecanismo consiste básicamente en la conversión de una estructura dinámica (el proceso) en una construcción estática (el objeto), que se genera cuando el individuo debe transformar al objeto para resolver una situación. En el caso del concepto transformación lineal, al realizar preguntas específicas sobre esta función, como *si T es una transformación lineal, ¿es siempre T^{-1} una transformación lineal?*, o al considerar $L(U,V)$ como el conjunto de transformaciones lineales definidas entre los espacios vectoriales U y V, donde cada función g definida entre los espacios vectoriales es una transformación lineal y conforma un vector del espacio vectorial $L(U,V)$, las transformaciones lineales son consideradas como objetos.

Tan importante como el mecanismo de encapsular es el de *desencapsular*, que consiste en regresar sobre el proceso que determinó un objeto; es decir, 'desempacar' el objeto y determinar el proceso que lo precede. Esto es indispensable para construir nuevas estructuras, ya que el proceso permite la coordinación con otros procesos y la generación de nuevos procesos para la encapsulación en nuevos objetos. Si se considera el caso de transformación lineal, cuando hay dos transformaciones lineales f y g (este tipo de situaciones permite hacer hincapié en las transformaciones lineales como funciones, independientemente de su notación) y se quiere determinar la transformación $f + g$, es necesario que el individuo tenga una concepción objeto del concepto que le permita pensar en generar un nuevo objeto, en este caso $f + g$. Pero para determinar el nuevo objeto es preciso que determine los procesos que generaron cada una de las transformaciones lineales, así como al nuevo proceso para que sea encapsulado en el nuevo objeto.

Esta descripción sobre la construcción de nuevos objetos que se integran a las estructuras previas de un individuo genera, como ya mencionamos, la evolución de sus esquemas previos y la generación de nuevas relaciones que enriquecen su conocimiento matemático. Con ello, amplía su horizonte de posibilidades al abordar situaciones que involucran los conceptos relacionados, y enriquece su coherencia al establecer las relaciones que crea el nuevo objeto en los esquemas donde es integrado. Generar constantemente este ciclo continuo de reconstrucción y reacomodación de las estructuras matemáticas de los estudiantes debe ser, desde nuestro punto de vista, el principal interés de los maestros en el aula de clase de matemáticas.

2.3. *Ciclo de investigación planteado por la teoría APOE*

La teoría APOE proporciona un ciclo de investigación que integra tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y observación, análisis y verificación de datos.

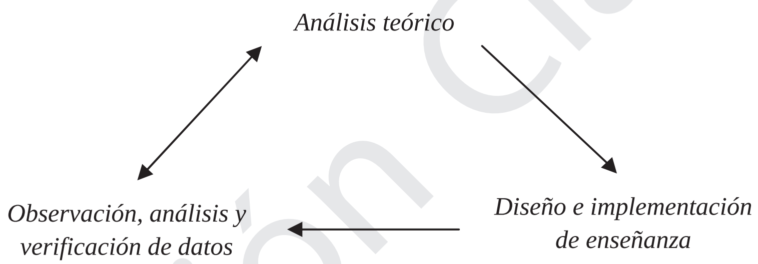

Figura 1. Ciclo de investigación (Asiala et al., 1996)

La aplicación de este ciclo permite obtener una descripción más detallada y cercana a la construcción de los conceptos matemáticos. Cada vez que es aplicado con base en la descomposición genética de un concepto, ésta se refina como resultado del análisis sobre los datos empíricos que se obtuvieron en el desarrollo de la tercera componente.

El análisis teórico, componente que nos ocupa en este artículo, es la base que fundamenta los resultados que se logran en la aplicación total del ciclo. Toma en cuenta el análisis de libros de texto, la experiencia de los investigadores y los resultados de estudios previos, entre otros aspectos que pueden contribuir al diseño de un camino viable en la construcción de un concepto determinado. Asimismo, por medio de la descripción de las construcciones mentales, permite modelar la epistemología y la cognición del concepto matemático estudiado.

Asiala et al. (1996) plantean dos preguntas que deben guiar el trabajo en esta componente: *¿Qué significa comprender un concepto matemático? ¿Cómo esa comprensión puede ser alcanzada por un individuo?* El planteamiento promueve la reflexión sobre qué es comprender un concepto determinado y las implicaciones que tiene en la forma como un estudiante puede concebirlo. Va mucho más allá de la repetición mecánica de algoritmos o la supuesta construcción de un concepto aislado.

El objetivo principal del análisis teórico consiste en diseñar una descomposición genética del concepto que determine un camino viable en términos de construcciones y mecanismos mentales, de tal manera que un estudiante pueda seguirlo para construir dicho concepto de manera exitosa. Cabe mencionar que no hay una única descomposición genética del concepto, ya que dependen de los caminos de construcción y las estructuras mentales previas del individuo.

3. DESCRIPCIÓN DEL ANÁLISIS TEÓRICO: EL CASO DE LA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Con base en lo descrito en las secciones anteriores, presentamos un ejemplo de cómo se construye y desarrolla el análisis teórico que plantea el paradigma de investigación de la teoría APOE. Explicaremos las fases que comprenden el análisis del concepto para la construcción de la descomposición genética mostrando la forma en que esta componente de investigación fue desarrollada en nuestro trabajo.

3.1. *Elementos para el análisis teórico*

En nuestra investigación decidimos analizar el concepto de transformación lineal, con el objetivo de diseñar una descomposición genética viable que describa un modelo cognitivo que fundamente el diseño de material docente y apoye la reflexión sobre el aprendizaje de tal concepto. Planteamos las siguientes preguntas: *¿Qué elementos previos debe poseer un estudiante para poder abordar de manera exitosa el concepto transformación lineal?¿Qué construcciones y mecanismos mentales están asociados a dicho concepto?* (Roa, 2008).

En este trabajo referimos la manera como realizamos una descomposición genética, describiendo cada uno de los elementos que consideramos en su diseño como resultado de la primera componente del ciclo de investigación. En un escrito posterior daremos a conocer la parte empírica. A continuación, explicamos cada uno de los elementos que tomamos en cuenta para nuestro análisis, siguiendo las preguntas de investigación.

3.1.1. *Análisis anteriores*

El concepto de transformación lineal fue analizado previamente por miembros del Grupo RUMEC para elaborar el texto *Learning linear algebra with ISETL* (Weller et al., 2002). La descomposición genética describe un camino para construir el concepto que incluye la realización de actividades con el software ISETL. A continuación, describimos los elementos principales de este análisis que, de alguna manera, son un antecedente de nuestro trabajo.

Esta descomposición genética se basa fundamentalmente en la construcción del concepto de transformación como una función definida entre dos espacios vectoriales, donde los procesos de espacio vectorial y función se coordinan para construir una transformación. Con una concepción *acción de transformación*, un individuo necesita de una fórmula explícita que le permita tomar un vector del dominio y transformarlo con una regla de asignación definida para obtener un vector de salida. Cuando un individuo logra interiorizar dichas acciones en un proceso puede verificar la condición de linealidad para cada función dada. Es importante aclarar que la condición de linealidad no se puede averiguar mediante una concepción *acción*, ya que requiere de visitar mentalmente todos los vectores de un espacio vectorial.

Los miembros del Grupo RUMEC señalan que con una concepción *proceso* un individuo puede programar un algoritmo, al cual han llamado *func is_linear* (la mayoría de las actividades se basan en el software ISETL), que le permita determinar si una transformación dada de $Z_p{}^n \to Z_p{}^m$ es lineal, averiguando las condiciones de linealidad. La encapsulación de este proceso se presenta cuando construye una acción o proceso para aplicarlo al concepto; por ejemplo, al aplicar el algoritmo *func is_linear*. Esta es una función booleana que determina si, dada una transformación, es o no lineal; dicha concepción también puede observarse cuando un individuo toma una transformación lineal específica, la multiplica por un escalar dado y verifica su linealidad.

3.1.2. *Observación de un curso*

Uno de los aspectos que consideramos muy importante es observar al grupo de estudiantes, cuyos conocimientos harán parte de los datos empíricos al trabajar con álgebra lineal. Por ello, decidimos asistir a un curso que ofrecía la universidad donde hicimos el estudio, el cual iba dirigido a estudiantes de Estadística y Matemáticas. A este curso asistían regularmente entre 8 y 10 alumnos dos veces por semana, en sesiones de dos horas; la observación se efectuó durante un semestre académico. El contenido del curso estaba dividido principalmente en cuatro capítulos: matrices (11 sesiones), espacios vectoriales reales (8 sesiones), transformaciones lineales (7 sesiones) y vectores propios y diagonalización (4 sesiones).

Antes de cada examen, la docente hizo una sesión de preguntas sobre la temática a evaluar; asimismo, se resolvieron los problemas de una guía de trabajo que fue diseñada para cada contenido. Ahora bien, hacemos la mención de que los temas vistos en el curso no se abordaron de manera muy formal; sólo se realizaron algunas demostraciones o generalizaciones sobre algunos conceptos.

Durante la investigación se llevaron a cabo una prueba diagnóstica y una entrevista. Estas pruebas fueron transcritas y analizadas desde nuestro marco teórico, lo cual permitió reformular una de las descomposiciones genéticas planteadas preliminarmente, que analizaremos con detalle más adelante.

3.1.3. *Análisis de los libros de texto*

Como menciona Trigueros (2005), una característica muy importante de la teoría APOE es que parte de la reflexión de los conceptos desde la definición matemática. Por lo tanto, es necesario tener claro qué definición esperamos que los estudiantes finalmente tengan y sus alcances en la construcción del conocimiento matemático.

En este punto reparamos que estudiaríamos el concepto de transformación lineal sin tener en cuenta su representación geométrica ni matricial. Por ser ésta la primera investigación que se realiza del concepto desde APOE, decidimos analizar la construcción del concepto en su forma analítica. La integración de la construcción del concepto de transformación lineal con sus diversas representaciones puede ser un proyecto de estudio interesante que puede realizarse en un futuro.

A continuación, presentamos la definición del concepto transformación lineal como aparece en uno de los textos guía ocupado por los estudiantes del curso que observamos:

(Hoffman y Kunze, 1973). Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo F. Una transformación lineal de V en W es una función T de V en W, tal que $T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$ para todos los vectores α y β de V y todos los escalares c de F.

En esta definición se utiliza sólo un escalar c en F para precisar la combinación lineal, aunque una más estándar toma dos escalares, por ejemplo c y d, para definirla: $T(c\alpha + d\beta) = T(c\alpha) + T(d\beta)$. Cabe aclarar que Hoffman y Kunze usan una notación diferente a la introducida en el curso; la notación empleada en los cursos es la que utilizaremos de ahora en adelante. Los autores caracterizan a la transformación lineal como una función entre espacios vectoriales que preserva combinaciones lineales. Consideramos que esta definición permite percibir la esencia del concepto porque las condiciones se ponen juntas y enfatiza la idea de conservación de las combinaciones lineales, aunque al principio del aprendizaje podría ser más didáctico separar las condiciones para ahondar en cada una de las condiciones de linealidad.

El concepto de transformación lineal muchas veces forma parte de la lista de nuevas definiciones y teoremas que los estudiantes no logran asimilar. Como muestra Dorier (2002), esto parece ser resultado de la naturaleza abstracta de los conceptos del álgebra lineal, que son percibidos por los estudiantes como algo extraño y desconocido, lo cual genera en algunas instituciones educativas el diseño y ejecución de cursos donde se hace énfasis en la memorización y aplicación de algoritmos y tareas que se reducen al tratamiento de vectores en R^2 y matrices.

Desde nuestra perspectiva, este fenómeno puede ser consecuencia de la desconexión que se da entre los elementos básicos del álgebra lineal. Los alumnos no poseen las estructuras previas para abordar dichos elementos y, por tanto, no es posible que logren avanzar en el desarrollo de sus construcciones mentales, ya que éstas sólo se ciñen a la aplicación de ciertas acciones limitadas por una orden externa. Por ejemplo, en el caso de la transformación lineal, un estudiante por lo general ejecuta la acción de verificar dos propiedades que ha memorizado, en la mayoría de los casos, sin el uso de cuantificadores, existenciales, conectores lógicos o la pertenencia o contenencia de elementos y conjuntos, respectivamente. Cuando aborda una situación relacionada con el tema fuera de un contexto particular o con una notación diferente, sus construcciones no le permiten comprenderla. Incluso la notación de transformaciones lineales como T con una notación diferente, como f y g, crea conflictos en sus acciones con el concepto, ya que parece exclusiva de las funciones y, de acuerdo con sus construcciones, no están relacionadas con el concepto de transformación lineal.

3.1.4. *Construcciones previas necesarias para la construcción del nuevo concepto*

Una de las nociones fundamentales para construir el concepto de transformación lineal es la de función. Debido a que consideraremos funciones $f: U \rightarrow V$, cuyo dominio U y V son espacios vectoriales sobre un campo K, donde la función f asigna a cada vector u en U un vector v en V, esperamos que el objeto espacio vectorial sea asimilado por el esquema de función; es decir, que el alumno sea consciente de la posibilidad de establecer funciones cuyo dominio y codominio sean espacios vectoriales. Esto permitirá que considere que las transformaciones lineales son fundamentalmente funciones.

Bajo el esquema de función, el estudiante puede recurrir a las funciones como objetos, desencapsulando el proceso por el que dicho objeto fue construido para aplicarlo frente a una determinada situación. De esta manera, podrá sin mayor dificultad utilizar los elementos del proceso u objeto, según sea necesario. Como mencionan Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols (1992), una concepción proceso del concepto de función involucra una transformación dinámica de objetos donde, dado un objeto inicial, se produce una transformación de él. Así, un estudiante podrá determinar la imagen de los vectores de V bajo una función f. Podrá pensar en dicha transformación como un todo que toma objetos y, al hacer algunas cosas sobre ellos, da origen a objetos de alguna clase. Una vez que el estudiante encapsule dicho proceso podrá considerar a las funciones como objetos, logrará tomar dos objetos y obtendrá uno nuevo mediante una operación binaria definida; por ejemplo, la composición. Para esto, el individuo debe desencapsular los dos objetos y coordinar los procesos en un nuevo proceso que, al ser encapsulado, determina una nueva función, un nuevo objeto que resulta al componer los objetos iniciales (Dubinsky, 1991).

De la misma manera, consideramos que los conceptos de operación binaria y combinación lineal están íntimamente relacionados con los conceptos de espacio vectorial y de vector, que se desprende de este último. Por tanto, pensamos que una concepción previa de espacio vectorial como esquema permite el acceso a estos conceptos, en particular a las construcciones de vector y combinación lineal como objeto y a la operación binaria como proceso. Para nuestro análisis resulta de gran importancia evidenciar las operaciones definidas en los espacios vectoriales que se involucran en las transformaciones, con un mayor énfasis en la forma como la preservación de tales operaciones determinan la linealidad de una transformación. Por esto, tomaremos en cuenta el trabajo hecho por Brown, DeVries, Dubinsky & Thomas (1997), quienes reportan que un estudiante tiene una concepción proceso de operación binaria cuando puede pensar a la operación binaria genérica como un proceso con dos objetos de entrada, y al realizar algo sobre ellos logra un nuevo objeto de salida.

Trigueros y Oktaç (2005) dicen que, para construir un esquema de espacio vectorial, un individuo debe poseer como elementos previos el esquema de conjunto y de operación binaria. Aunque no se considera el concepto de vector y combinación lineal de manera explícita, resulta claro que en un determinado momento dichos conceptos son asimilados como objetos por el esquema de espacio vectorial, al tomar a los vectores como elementos del espacio o generar nuevos vectores como combinaciones lineales.

Con todos los elementos descritos en esta sección, iniciaremos la construcción de la descomposición genética preliminar.

3. 2. *Descomposición genética del concepto transformación lineal: un análisis preliminar*

En la descripción de nuestra descomposición genética preliminar consideramos dos posibles caminos para construir el concepto transformación lineal que describiremos con más detalle en esta sección. En el primer camino, suponemos que un individuo primero construye el concepto general de transformación (entenderemos por transformación a las funciones definidas entre los espacios vectoriales que se especifican sobre un campo). Puede considerarse que el individuo debe poseer una concepción objeto del concepto transformación, ya que las propiedades de preservación de suma vectorial y producto por un escalar son transformaciones sobre T, donde es posible determinar si dicho objeto cumple o no con las propiedades. En el segundo camino, el objeto espacio vectorial es asimilado por el esquema de función; de esta manera, el individuo generaliza su esquema de función y acepta que las funciones pueden definirse entre espacios vectoriales.

Una característica fundamental y común entre los dos caminos que presentamos en nuestra descomposición genética es concebir a la construcción de las dos propiedades de linealidad de manera independiente. La definición que ocupamos para cada una es la siguiente:

Propiedad 1. Sean U y V espacios vectoriales sobre un campo K y $T:U\rightarrow V$ una función tal que para todo $u_1, u_2, \in U$ se tiene que $T(u_1 + u_2)=T(u_1) + T(u_2)$.

Propiedad 2. Sean U y V espacios vectoriales sobre K y $T:U\rightarrow V$ una función tal que para todo $u \in U$ y para todo $c \in K$ se tiene que $T(cu)=cT(u)$.

3. 2. 1. *Camino 1: Objeto transformación como elemento preliminar*

En este camino pensamos que, si el estudiante posee de manera previa una concepción objeto de transformación, es posible que desencapsule dicho objeto y trabaje con el proceso que lo generó. Así, mediante la coordinación entre el proceso de transformación y de operación binaria (adición vectorial), por el cuantificador universal $\forall$, podrá generar un nuevo proceso que le permitirá determinar si la transformación T cumple o no con la propiedad 1. Esta coordinación se presenta cuando el estudiante considera que la transformación T puede ser aplicada a todo elemento de U, y que al adicionar dos vectores cualesquiera, u_1 y u_2, el vector resultante $u_1 + u_2$ está en U (por ser U espacio vectorial); por tanto, es posible determinar su imagen bajo T. Diremos que el estudiante posee una concepción proceso de la propiedad 1 si puede considerar el cumplimiento de ella para todo par de vectores en U. Cabe enfatizar que en este camino de construcción los procesos de las propiedades se construyen mediante una coordinación de dos procesos, no como la interiorización de acciones.

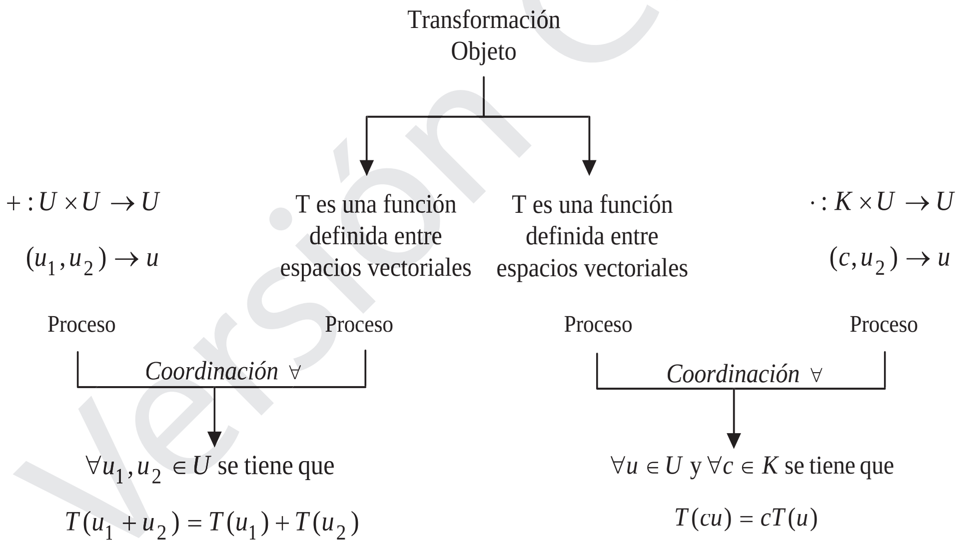

Figura 2. Objeto transformación como elemento preliminar

Del mismo modo, por la coordinación que se realiza mediante el cuantificador universal $\forall$ entre los procesos transformación y multiplicación por un escalar, un estudiante puede lograr una concepción proceso de la propiedad 2 (ver Figura 2).

Esta coordinación a través del cuantificador se presenta específicamente cuando el estudiante compara los vectores $T(cu)$ y $cT(u)$, y piensa de manera general en el cumplimiento de la propiedad para todo elemento u en U y todo c en K.

3. 2. 2. *Camino 2: Asimilación del objeto de espacio vectorial por el esquema de función*

En este camino planteamos la construcción de las dos propiedades a partir de acciones específicas, como resultado de la interiorización de una acción.

La primera propiedad involucra a la operación (+) definida entre elementos de un espacio vectorial, que genera nuevos elementos del espacio. Mediante la asimilación del espacio vectorial por el esquema de función, el estudiante podrá determinar que la suma de dos elementos cualesquiera de U es un nuevo vector de U y, por tanto, es posible determinar su imagen en V. De manera similar, podrá determinar que al sumar dos vectores cualesquiera en V el nuevo vector es un elemento de V. Así establecerá en este momento de manera consciente que el dominio y codominio de la función T son espacios vectoriales y, por ende, son cerrados respecto a la operación binaria (+) definida en cada espacio vectorial.

Con una concepción acción, el estudiante puede tomar dos vectores particulares de U y sumarlos mediante la adición definida en este espacio, determinar su imagen bajo T como elemento de V, obtener un nuevo elemento de V y comparar los vectores resultantes, bajo una concepción objeto de los nuevos elementos hallados como vectores. Cabe mencionar que por medio de una concepción acción el estudiante sólo puede verificar el cumplimiento de tal propiedad para casos específicos de U, y no puede considerar que se compruebe sobre todos los elementos de U de manera general bajo la transformación T. Si empieza a pensar en la forma general de los elementos que incluye el espacio vectorial U y ya no considera casos específicos, sino vectores en general; diremos que esas acciones se han interiorizado y el estudiante posee una concepción proceso de la propiedad 1 que le permite determinar si una transformación T cumple o no dicha propiedad, sin actuar de manera directa sobre ella. Es decir, puede pensar en el cumplimiento o no de la propiedad para todos los vectores del espacio U y la manera como T actúa sobre ellos, sin tener que realizar cálculos.

Pensamos que es posible que haya un estado intermedio entre la construcción de la acción y el proceso: un estudiante podría verificar la propiedad sobre la forma general de los vectores sin pensar en todos los vectores del espacio U, o que sólo esté realizando acciones de manera mecánica sobre un objeto familiar. Por tanto, podría tener muchos procesos y no lograr coordinarlos mediante el cuantificador universal $\forall$. En este caso, consideraremos que el alumno se encuentra en transición entre las concepciones acción y proceso de la propiedad 1 (figura 3).

La segunda propiedad está relacionada con la operación producto por un escalar, entre un vector del espacio vectorial U y un escalar del campo K. Mediante su concepción de espacio vectorial, un estudiante podrá determinar que el producto entre elementos cualesquiera del espacio U y del campo K son nuevos elementos en el espacio U y, por tanto, considerará la cerradura del producto para U y de manera similar para el producto definido en V.

Acción

Fijados un par de vectores u y w en U

$T(u+w) = T(u) + T(w)$

$\downarrow$

$T(u+w) = T(u) + T(w)$

Estado intermedio

$\downarrow$

Proceso

$\forall u_1, u_2 \in U$ se tiene que

$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$

Interiorización

$\forall$

Acción

Fijados u en U y c en K

$T(cu) = cT(u)$

$\downarrow$

$T(cu) = cT(u)$

Estado intermedio

$\downarrow$

Proceso

$\forall u \in U$ y $\forall c \in K$ se tiene que

$T(cu) = cT(u)$

Figura 3. Construcción del concepto transformación lineal mediante asimilación del objeto espacio vectorial por el esquema de función

Mediante la asimilación del espacio vectorial por el esquema de función, el estudiante podrá verificar el cumplimiento de esta propiedad como el resultado de transformar los elementos de un espacio vectorial en otro. Si comprueba la propiedad para casos concretos; es decir, si toma un vector particular de U y un escalar específico de K y verifica tal propiedad, diremos que posee una concepción acción de ella, pues sólo considera el cumplimiento de la propiedad sobre elementos particulares de U y K. Cuando pueda pensar en el vector u en U de manera general como un representante de todos los elementos del espacio y determine $T(cu)$ y $cT(u)$ como elementos de V, los compare bajo una concepción objeto de vector y establezca si se cumple o no de la propiedad para todo elemento de U y para todo elemento de K, diremos que el alumno tiene una concepción proceso de la propiedad 2, que le permite pensar que se comprueba la propiedad para todo elemento del dominio de U.

Es posible, a pesar de la manipulación de la forma general de un vector como representante de todos los elementos de un espacio vectorial, que el estudiante no pueda generalizar el cumplimiento de esta propiedad para todos los elementos de U. Diremos que está transitando entre la concepción acción y la concepción proceso de la propiedad 2 (el estado intermedio que ilustra la figura 3). En este caso, tiene muchos procesos que se cumplen, pero no puede considerar el cumplimiento de la propiedad mediante el cuantificador universal $\forall$.

Hasta el momento hemos descrito la construcción de las propiedades de linealidad. Es preciso aclarar que en la segunda construcción el alumno debe determinar de manera consciente la existencia de funciones entre espacios vectoriales, que puede establecerse por la asimilación del objeto de espacio vectorial por el esquema de función.

$\forall u_1, u_2 \in U$

$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$

Proceso

$\forall u \in U$ y $\forall c \in K$

$T(cu) = cT(u)$

Proceso

Coordinación $(\wedge)$

$\forall u_1, u_2 \in U$ y $\forall b, c \in K$

$T(bu_1 + cu_2) = bT(u_1) + cT(u_2)$

Proceso
Transformación lineal

Figura 4. Construcción del proceso transformación lineal

Una vez que logra una concepción proceso de ambas propiedades deben coordinarse mediante el conector lógico $\wedge$ (figura 4), ya que la verificación simultánea determinará que la función es una transformación lineal. Como resultado de la construcción de las propiedades 1 y 2, el estudiante ha considerado dentro de su universo de transformaciones aquellas que cumplen con la propiedad 1 o la propiedad 2; ahora debe identificar aquellas que cumplen con las dos propiedades simultáneamente. La coordinación de los procesos 1 y 2 se consigue cuando puede considerar su cumplimiento de manera simultánea. Estas dos propiedades se pueden compactar en una: $T(bu_1 + cu_2) = bT(u_1) + cT(u_2)$ para todo par de vectores en U y para todo par de elementos en K.

El estudiante tiene que reconocer que el cumplimiento de esta propiedad equivale a determinar la linealidad de la transformación. En este momento diremos que posee una concepción proceso del concepto transformación lineal como resultado de coordinar los procesos 1 y 2. Consideramos que para un estudiante que no ha logrado construir el objeto función será muy difícil lograr la construcción del concepto transformación lineal como un proceso.

La concepción proceso de transformación lineal pone en juego un concepto fundamental: el de *combinación lineal*. Por tanto, un estudiante con una concepción objeto de combinación lineal puede pensar que el vector $(bu_1 + cu_2)$ en U puede ser transformado bajo T; esto le permite determinar que $bT(u_1) + cT(u_2)$ es un vector de V. Mediante la comparación de estos vectores, que son el resultado de aplicar las operaciones definidas en cada espacio vectorial, el estudiante determinará la preservación de combinaciones lineales. Una vez que logra ver la transformación T como una función que preserva combinaciones lineales; es decir, que conserva la adición vectorial y el producto escalar definido en su dominio y codominio, consideraremos que está preparado para encapsular este proceso en un objeto.

La encapsulación sucede cuando hay una necesidad de aplicar acciones sobre el proceso. Entonces, el estudiante puede pensar en la transformación lineal como un todo y lo modifica de manera consciente. Las dos maneras como podemos caracterizar la construcción de este objeto en los estudiantes de un curso básico de álgebra lineal están determinadas por la generación de nuevas transformaciones lineales mediante las operaciones suma, producto o composición definidas para estos objetos, al igual que a través del análisis de preguntas específicas sobre las características o propiedades de este concepto. A continuación, haremos una descripción más específica de este tipo de acciones sobre el objeto transformación lineal.

Construcción de nuevos objetos: Al definir dos transformaciones lineales $T_1{:}V\rightarrow W$ y $T_2{:}U\rightarrow V$ para definir $T_1 \circ T_2{:}U\rightarrow V$ como una nueva transformación lineal, o un nuevo objeto que resulta al componer dos objetos de la misma naturaleza, es necesario que el estudiante posea una concepción objeto de transformación lineal y mediante el uso de su esquema de función determine la nueva transformación $T_1 \circ T_2$. Al mismo tiempo, por la desencapsulación del objeto transformación lineal, será capaz de determinar el proceso por el cual construyó dicho objeto y usarlo para construir la composición, como en el caso de la composición de funciones (Ayers, Davis, Dubinsky & Lewin, 1988).

De esta manera, a través de un proceso de generalización el alumno podrá pensar en nuevas transformaciones lineales como resultado de componer dos transformaciones lineales bajo las condiciones requeridas sobre sus dominios y recorridos. Incluso puede considerar al conjunto $L(U,U) = \{T:U \rightarrow U | T$ es una *transformación lineal*$\}$ como un conjunto cerrado respecto a la operación composición. La multiplicación de una transformación lineal por un escalar, o bien la suma de transformaciones lineales, le permite al estudiante realizar acciones sobre las transformaciones como objetos de un conjunto que pueden operarse con elementos de otro conjunto o con los que contiene.

De igual manera, si el estudiante considera la transformación lineal $T:U \rightarrow V$, donde U y V son espacios vectoriales sobre un campo K y a es un escalar en K, puede definir una nueva transformación aT, que asigna a cada vector u en U un vector $aT(u)$ en V. Si generaliza este resultado podrá crear nuevas transformaciones lineales como resultado de la multiplicación por los escalares del campo K, encapsulando como nuevos objetos de su conjunto de transformaciones lineales a las transformaciones múltiplos por escalares de transformaciones lineales dadas. Considerar a las transformaciones lineales como elementos que pueden operarse mediante la suma precisa que el alumno recurra a su esquema de función y considere el proceso a través del cual se define la suma de dos funciones. Así, dadas dos transformaciones lineales $T_1:U \rightarrow V$ y $T_2:U \rightarrow V$ podrá definir una nueva transformación $T_1+T_2:U \rightarrow V$. Al aplicar el proceso por el que determina la linealidad de una transformación podrá comprobar que la nueva transformación T_1+T_2 es una transformación lineal.

Propiedades o características del objeto: Una forma de caracterizar a las transformaciones lineales como un objeto es concebirlas como elementos de un conjunto. Por ejemplo, bajo las operaciones de suma y producto escalar descritas arriba, podríamos considerar al conjunto $L(U,V)$ como un espacio vectorial y a las transformaciones lineales como elementos de dicho conjunto; mejor aún, como vectores. Esta caracterización de las transformaciones lineales no es elemental para los estudiantes de un curso introductorio, pero puede generar que desarrollen una concepción objeto de este concepto.

Por otro lado, preguntas como *¿bajo qué condiciones una transformación lineal es invertible?* requieren pensar en las propiedades del concepto y, por ende, se necesita una concepción objeto para considerarlas de manera adecuada.

Con lo anterior, podemos concluir que la encapsulación del proceso transformación lineal en un objeto, tal como lo hemos descrito, implica que el estudiante analice situaciones que motiven su reflexión sobre las propiedades del objeto. Esto en su momento puede llevarlo a establecer fuertes conexiones con los conceptos que se construyen de manera simultánea a él, como inicio para la construcción de un esquema. Como resultado de dichas conexiones podrá transformar el objeto transformación lineal mediante la aplicación de nuevas acciones o procesos sobre él.

4. Reflexiones finales

En este trabajo planteamos una descripción detallada sobre la forma de construir una descomposición genética como resultado del desarrollo del análisis teórico, primera componente del ciclo de investigación de nuestro marco de referencia. Este análisis ha sido muy representativo, ya que nos permitió describir dos caminos para construir el concepto transformación lineal, que fueron determinados por mecanismos mentales diferentes: uno por el de coordinación, el otro por el de interiorización.

El primer camino está determinado por el objeto transformación como un elemento del esquema de función. La desencapsulación de este objeto le permite a un individuo pensar en el proceso que lo generó: *una función definida entre espacios vectoriales* que, al coordinarse con el proceso de operación binaria (suma vectorial o producto por un escalar), genera un nuevo proceso que hace que el individuo piense en una función entre espacios vectoriales que preserva una operación. Esta consiste en la suma vectorial o producto por un escalar con los escalares sobre el campo de los espacios vectoriales definidos.

El segundo camino de construcción está determinado por acciones específicas que un individuo puede realizar sobre vectores particulares de un espacio vectorial, al transformarlos bajo una función dada. Este camino permite la interiorización de las acciones cuando el individuo considera el cumplimiento de las propiedades (suma vectorial o producto por un escalar) para todos los elementos del espacio vectorial. En este caso, el objeto de espacio vectorial es asimilado por el esquema de función, ya que el individuo puede pensar en trabajar con funciones cuyo dominio y codominio sean espacios vectoriales. La construcción de las propiedades de linealidad por uno u otro camino resaltan la importancia de los espacios vectoriales y del concepto de función en la elaboración del nuevo concepto. Esto es de gran importancia porque el concepto transformación lineal se construye con base en elementos que han sido hechos previamente, lo cual permite que el individuo establezca de manera consciente las relaciones específicas con los elementos previos, y reconozca que una transformación es básicamente una función con ciertas características.

Los caminos de construcción descritos para las propiedades de linealidad los dirigimos hacia la construcción del concepto transformación lineal, visto como un único proceso. Al coordinar estas dos propiedades por medio del conector lógico ($\wedge$) buscamos construir un único proceso que nos permitiera, por un lado, encapsularlo en un objeto; por otro, concebir las transformaciones lineales como funciones definidas entre espacios vectoriales que preservan combinaciones lineales. Esto, como lo mostraremos en un próximo artículo, permite la relación directa de este concepto con otros; por ejemplo, el de base. La construcción de esta índole es fundamental para generar la construcción y evolución del esquema de transformación lineal, así como de las relaciones que puede establecer con otros esquemas existentes y con los que se construyen de manera paralela a él.

La descripción que presentamos en este escrito muestra la importancia de considerar los elementos necesarios para construir un concepto determinado, así como la importancia de enfatizar en los elementos involucrados con el concepto que en algunos casos son imperceptibles para los estudiantes, aunque resultan muy obvios para nosotros. El análisis del concepto transformación lineal como lo hemos planteado indica que, teóricamente, los alumnos pueden construir este concepto para percatarse de que en general una transformación lineal es una función con ciertas características determinadas por las operaciones definidas en su dominio y codominio; además, que su preservación bajo dicha función le da una nueva categoría, de transformación lineal o función lineal.

De igual manera, resalta la importancia de considerar a las operaciones de suma vectorial y producto por un escalar en una, la *preservación de combinaciones lineales*, ya que su construcción permite que evolucione el concepto. Por ejemplo, se considera que la construcción del conjunto $L(U,V)$, cuyos elementos son transformaciones lineales, propicia en los individuos un razonamiento más profundo de sus construcciones, al concebir a las transformaciones lineales como vectores de un espacio vectorial. Todo esto nos señala de manera clara elementos pedagógicos o didácticos sobre cómo el concepto de transformación lineal puede ser presentado en un salón de clase, y da pistas clave sobre los elementos que deben considerarse en el diseño de materiales para construirla.

Como se puede ver, la descripción de los mecanismos y las construcciones mentales que un individuo desarrolla alrededor de una pequeña porción de conocimiento matemático promueve su reflexión sobre muchos aspectos que hay detrás de su construcción, al igual que sobre los obstáculos cognitivos y en algunos casos epistemológicos que debe afrontar al intentar construir de manera exitosa un concepto matemático. Al reflexionar de esta manera y plantear caminos posibles de construcción vamos haciendo un intento por sopesar estas dificultades no sólo para entenderlas, sino para pensar sobre la manera como pueden ser superadas por los estudiantes.

Con base en todo lo que hemos presentado, mostraremos próximamente una descomposición genética refinada, que se fundamentará principalmente en el análisis de datos empíricos que señalan la viabilidad de este análisis, y dará indicaciones específicas sobre cómo los individuos construyen este concepto.

RECONOCIMIENTO

El trabajo presentado en este artículo ha sido parcialmente financiado por el proyecto *Conacyt 60763-H*.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (pp.1-32). U.S.A.: American Mathematical Society.

Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E. & Lewin, P. (1988). Computer Experiences in Learning Composition of Functions. *Journal for Research in Mathematics Education 19* (3), 246-259.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics 23* (3), 247-285.

Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E. & Thomas, K. (1997). Learning Binary Operations, Groups and Subgroups. *Journal of Mathematical Behavior 16* (3), 187-239.

Dorier, J.-L. (2002). Teaching Linear Algebra at University. In Tatsien Li (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, ICM* (Vol. III, pp. 875-884). Beijing, China: Higher Education Press.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005). Some Historical Issues and Paradoxes Regarding the Concept of Infinity. An APOS Analysis (Part I). *Educational Studies in Mathematics 58* (3), 335-359.

Dubinsky, E. & McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 273-280). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1994). A Theory and Practice of Learning College Mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (pp. 22-247). Hillsdale, NJ: Erslbaum.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Hoffman, K. y Kunze, R. (1973). *Álgebra lineal*. Bogotá: Prentice-Hall International.

Kú, D.,Trigueros, A. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática 20* (2), 65- 89.

McDonald, M. (2000). http://galois.oxy.edu/mickey/APOSbib.html

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6* (3), 221-271.

Oktaç, A., Trigueros, M. & Vargas, X. N. (2006). Understanding of Vector Spaces. A Viewpoint from APOS Theory. *CD-ROM Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics*. Istambul, Turkey: Turkish Mathematical Society.

Parraguez, M. & Oktaç, A. (2010). Construction of the Vector Space Concept from the Viewpoint of APOS Theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432, 2112-2124.

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. New York & London: Columbia University Press.

Piaget, J. y García, R. (2004). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI Editores.

Roa, D. (2008). *Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal*. Tesis de maestría, Cinvestav, México.

Trigueros, M., Oktaç, A. & Manzanero, L. (2007). Understanding of Systems of Equations in Linear Algebra. Demetra Pitta – Pantazi & George Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME* (pp. 2359-2368). Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.

Trigueros, M. & Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 10*, 157-176.

Trigueros, M. (2005). La noción del esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática 17* (1), 5-31.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2002). *Learning Linear Algebra with ISETL*. Obtenido de http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf.

Autoras

Solange Roa-Fuentes. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México. Grupo Educación Matemática *EDUMAT* de la Universidad Industrial de Santander *UIS*, Colombia; roafuentes@gmail.com

Asuman Oktaç. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México: oktac@cinvestav.mx