Gabriela Buendía, Alejandra Ordóñez

EL COMPORTAMIENTO PERIÓDICO EN LA RELACIÓN DE UNA FUNCIÓN Y SUS DERIVADAS: SIGNIFICADOS A PARTIR DE LA VARIACIÓN

PERIODIC BEHAVIOR IN THE RELATIONSHIP BETWEEN A FUNCTION AND ITS DERIVATIVES: MEANINGS FROM VARIATION

RESUMEN. En este artículo abordamos la relación entre una función y sus derivadas para funciones periódicas. El objetivo es proponer elementos que resignifiquen dicha relación, a partir de su análisis en un contexto de variación y desde una perspectiva de las prácticas sociales. Hemos estudiado algunos usos de lo periódico en la relación de una función y sus derivadas sucesivas, dentro de contextos de movimientos y de ingeniería en los que se refieren marcos de referencia más amplios que los considerados en el discurso escolar. Es a partir del ejercicio intencional de prácticas como graficar, modelar o predecir que los comportamientos periódicos en las variaciones de las funciones adquieren significación para el quehacer científico.

PALABRAS CLAVE: Variación, periodicidad, primitiva y derivada

ABSTRACT. This article deals with the relationship between a function and its derivatives for periodic functions. The aim is to provide elements that redefinition for the said relationship from its analysis in a context of variation and from a social practice perspective. We have studied some ways the periodic is used in the relationship between a function and its successive derivatives, in the contexts of movement and engineering where reference frameworks are noticeably wider than those considered in school discourse. It is by conducting intentional practices such as graphing, modeling or predicting that periodic behavior in function variations acquires meaning for scientific work.

KEY WORDS: Variation, periodicity, primitive and derived

RESUMO. Neste artigo abordamos a relação entre uma função e as suas derivadas no caso das funções periódicas. O objectivo é propor elementos de ressignificação para a referida relação, a partir da sua análise num contexto de variação e de uma perspectiva das práticas sociais. Temos estudado alguns dos usos do periódico na relação de uma função e das suas derivadas sucessivas no contexto de movimentos e da engenharia, onde existem marcos de referência mais amplos que os existentes no discurso escolar. É a partir do exercício intencional de práticas como representar graficamente, modelar e prever que os comportamentos periódicos nas variações das funções adquirem significado para o saber científico.

PALAVRAS CHAVE: Variação, periodicidade, primitiva e derivada

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2009) 12(1): 7-28.
Recepción: Septiembre 30, 2008 / Aceptación: Febrero 26, 2009

RÉSUMÉ. Cet article a pour thème la relation entre une fonction et ses dérivées en ce qui concerne les fonctions périodiques. A partir de l'analyse des variations de la fonction et de ses possibles utilisations dans le champ des pratiques sociales, l'objectif de ce travail est de proposer des éléments qui permettront de redéfinir cette relation. Plusieurs utilisations de la périodicité des relations entre une fonction et ses dérivées successives ont été étudiées dans des contextes de mouvements et dans le cadre de l'ingénierie et on démontre que les champs de référence sont plus importants que ceux généralement pris en compte par le discours scolaire. C'est à partir d'exercices pratiques avec pour buts l'élaboration de graphiques, de modèles, de projections que les comportements périodiques dans les variations de fonctions prennent de l'importance pour le travail scientifique.

MOTS CLÉS : Variation, périodicité, primitive et dérivée

1. INTRODUCCIÓN

La investigación socioepistemológica ha dado evidencia de que el desarrollo de estrategias propias de un pensamiento y lenguaje variacional genera bases de significación para diferentes conceptos de cálculo y precálculo, entre ellos la derivada[1]. Estudiar qué es lo que varía –y cómo– en fenómenos cambiantes permite dotar a la derivada de significados que se alejan del manejo de fórmulas de derivación, hecho al cual se suele limitar su enseñanza. En ese marco, el análisis de las variables y de sus variaciones sustenta la propuesta de que el manejo simultáneo y coordinado de las derivadas sucesivas es una condición sin la cual la formación de la idea de derivada deviene frágil (Cantoral y Farfán, 1998; González, 1999).

Bajo esta perspectiva variacional proponemos discutir la relación entre una función y sus derivadas en el marco de las funciones periódicas, ya que dicha relación involucra fenómenos didácticos que atañen tanto a la primitiva y sus derivadas como a la propiedad periódica. Por un lado, lo poco significativa que es la relación entre una función y su derivada provoca que las propiedades de una parezcan ser heredables a la otra. Por ejemplo, si a una función se le suma una constante, ésta permanece en su derivada; en consecuencia, si una gráfica tiene un desplazamiento vertical sobre el eje y, la gráfica de su derivada también se desplaza verticalmente (Aguilar, 1999; Hernández, 2004; González, 1999).

[1] Ver, por ejemplo, los trabajos desarrollados por Cantoral (2004) y Dolores, Alarcón y Albarrán (2002).

Consideramos que esta *falsa herencia* también involucra a la propiedad periódica, pues al vivir en el discurso matemático escolar como una propiedad que califica a una función, y no a su comportamiento, resulta común que una implicación del tipo f *es periódica* $\Leftrightarrow f'$ *es periódica* sea trivialmente considerada cierta, ya que sólo es pensada en términos del referente obligado para lo periódico: las funciones trigonométricas (ver figura 1).

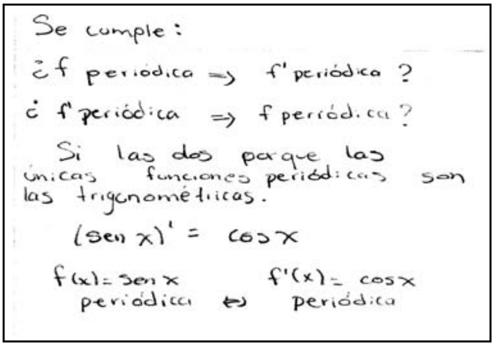

Se cumple:
¿f periódica ⇒ f' periódica?
¿f' periódica ⇒ f periódica?
Si las dos porque las únicas funciones periódicas son las trigonométricas.
$(\text{sen } x)' = \cos x$
$f(x) = \text{sen } x$ $f'(x) = \cos x$
periódica ⇔ periódica

Figura 1. Respuesta de un profesor de ingeniería civil (Ordóñez, 2007).

Por otra parte, hemos identificado que, al caracterizar como periódica o no a una función, es común el uso de argumentos que no explotan la gráfica resultante, sino cómo está variando alguno de sus componentes. La figura 2 muestra que un profesor de matemáticas de nivel superior, califica como periódica a la gráfica por la forma en que varía el tiempo (Buendía, 2005).

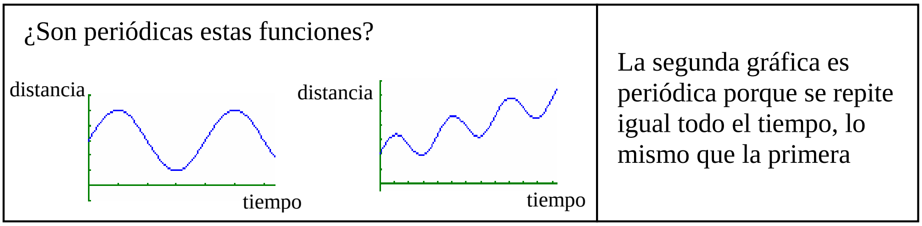


Figura 2. La repetición del tiempo.

Esta investigación nace en la socioepistemología, una aproximación teórica sistémica que refiere la construcción social del conocimiento matemático a través de su naturaleza epistemológica, dimensión sociocultural, planos de lo cognitivo y modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral, 2004). Tal visión nos permitió aproximarnos al análisis de una función y sus derivadas en un escenario periódico desde sus usos en distintas áreas del conocimiento y dar cuenta de las herramientas y argumentos variacionales que se ponen en juego al tratar de dar significado a la relación $f - f'$.

La hipótesis que formulamos es que, en un escenario que involucra a fenómenos periódicos, el uso de argumentos y herramientas variacionales permite resignificar[2] la relación entre una función y sus derivadas. Esto es, el ejercicio de prácticas surgidas al matematizar fenómenos de variación y cambio, como la predicción y la modelación-graficación, más que ser una habilidad tiene el status de generador de conocimiento.

2. LA PROBLEMÁTICA

En el discurso matemático escolar, la relación entre una función y sus derivadas para las funciones periódicas resulta poco significativa, debido a que se privilegia a los aspectos analíticos asociados. Buendía (2004, 2006) ha señalado que la periodicidad en el discurso matemático escolar, en especial para el caso de las funciones, no está siendo usada como una propiedad que califica a cierto comportamiento, sino se limita a calificar a una determinada función, la trigonométrica, en específico a la función seno. Por ello, el marco de referencia para analizar la veracidad o falsedad de implicaciones como *f es periódica $\Leftrightarrow$ f' es periódica* sólo considera como posibilidad de función periódica a alguna trigonométrica (ver figura 1).

Incluso cuando esa doble implicación se perciba como no trivial, se privilegian los aspectos analíticos formales de la matemática. Por ejemplo, Spivak (1980) presenta a la periodicidad como una propiedad de las funciones en general, no como una propiedad exclusiva de las funciones trigonométricas, presentación que difiere de la mayoría de los libros de texto. Sin embargo, al profundizar en el uso de lo periódico propone sólo ejercicios para analizar qué sucede al derivar o integrar funciones periódicas. La meta es el uso correcto de la definición para demostrarlo:

a) Supóngase que f es diferenciable y periódica, con periodo a (es decir, $f(x) = f(x+a)$ para todo x). Pruebe que f' es también periódica.

---

[2] El sentido de *resignificación* en este escrito es de reconstrucción de significados en el ejercicio intencional de prácticas como la predicción.

b) Si f es periódica con periodo a e integrable en [0, a], muestre que $\int_0^a f = \int_b^{b+a} f$ para todo b.

c) Hallar una función f tal que f no sea periódica, pero f' sí.

d) Suponga que f' es periódica con periodo a. Pruebe que f es periódica si y sólo si $f(a) = f(0)$.

Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) sintetizan la investigación realizada sobre la comprensión de la derivada, en particular sobre la conexión entre lo gráfico y lo analítico. En su trabajo exponen las dificultades que tienen los estudiantes al intentar esbozar la gráfica de la derivada a partir de la gráfica de la primitiva. Esto es, las gráficas son tratadas como una representación de una función, sin que por ellas mismas tengan algo que informar. Sin que exista un lenguaje gráfico de por medio, la derivada y su gráfica están atadas a la aplicación de una regla a una expresión algebraica previamente conocida.

En otro tipo de investigaciones, también reportadas por los autores, la coordinación entre las diferentes representaciones parece favorecer un significado para la función y sus derivadas. Sin embargo, al ser la representación el objetivo de la enseñanza, se evidencia la dificultad del alumno para conectar los elementos propios de cada forma de representación.

Entre sus conclusiones, los autores mencionados señalan que los estudiantes, al trabajar en diferentes contextos, no pueden conectar automáticamente los diferentes procesos vinculados a la derivada; por procesos, ellos se refieren a la derivada como razón, al límite, o a la función. Pareciera que la construcción de la idea de derivada no descansa sólo en la articulación de estructuras conceptuales.

A la problemática sobre el poco significado existente para la relación entre una primitiva y sus derivadas parece aunarse el estrecho marco de referencia para tratar lo periódico. Sobresalen fenómenos didácticos como el señalado en la figura 2, donde las gráficas que presenten *algo* repetitivo son matemáticamente caracterizadas como periódicas. Esto también sucede en contextos físicos, ya que estaríamos tratando con movimientos que conservan sólo algunas de sus características periódicas: su velocidad es periódica, mientras que la función que describe la distancia recorrida puede no serlo.

3. ANTECEDENTES: VISUALIZANDO LO QUE VARÍA

A lo largo de la investigación para formular una socioepistemología de lo periódico (Buendía, 2004, 2005 y 2006; Buendía y Cordero, 2005), la función de tipo $y = ax + b + senx$ fue presentada como un ejemplo de función que, sin ser periódica, suele ser caracterizada como tal. Esto permitió evidenciar la relación irreflexiva entre gráficas de tipo senoidal o que presentan algún tipo de repetición con gráficas periódicas.

Los argumentos como los que se exponen en la figura 3 refieren que, al tratar con comportamientos como el de dicha función (repetición uniforme en el dominio, patrón de crecimiento en el eje y) es factible percibir que tiene dos componentes: el comportamiento en el eje x y el comportamiento en el eje y.

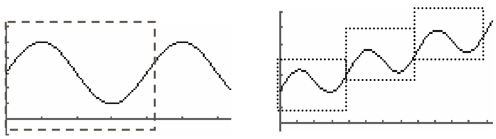
¿Son gráficas de funciones periódicas? 	Es como si hiciéramos un cuadrito en la primera para ver el periodo de repetición. Podemos hacer también un cuadrito para la segunda gráfica y veríamos, igual que en la primera, que el cuadrito se va repitiendo todo el tiempo igual... aunque también sube.

Figura 3. Respuesta de un profesor de matemáticas ante de la pregunta de si se trata de gráficas de funciones periódicas.

Darse cuenta de este doble comportamiento y al mismo tiempo poderlos unir, resulta esencial para distinguir una función periódica de otra que no lo es. La socioepistemología de lo periódico afirma que, cuando se proponen intencionalmente prácticas de predicción sobre estas gráficas, queda favorecido ese análisis dual, lo cual permite hacer una distinción significativa entre la repetición y la forma como se presenta.

Por otra parte, ante la pregunta fundamental de la investigación, *“¿es periódica?”*, comenzó a hacerse notorio que, más que centrarse en el objeto periódico (la función) era necesario atender su comportamiento a través de la gráfica: un elemento que pertenecía más al tipo de herramientas que el hombre ocupa al hacer matemática que a un elemento de la estructura matemática en sí (Cordero, 2001). Surgieron respuestas que tendieron a un cierto razonamiento que aludía a la variación presente en la gráfica y del consecuente uso que se da a la propiedad periódica. Mostramos a continuación dos ejemplos (figuras 4 y 5).

Ejemplo 1:

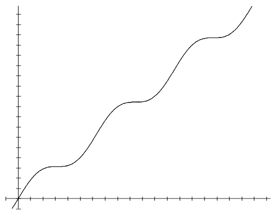
	… no es periódica si tomo como sistema de referencia los ejes de coordenadas propuestos, pero si yo tomo uno distinto (rotando el eje x para que coincida con la gráfica), entonces sí lo es.

Figura 4. Pregunta dirigida a un profesor de matemáticas.

En este ejemplo destaca que la respuesta del profesor no propone una rotación de ejes en un sentido estrictamente matemático, sino postula que *sólo* se mueva el eje x. Además de evidenciar lo poco significativo que le resulta un sistema de referencia (los ejes cartesianos) propio de una estructura matemática, parecería que está buscando la manera de justificar la periodicidad que él percibe: *ajusta* un eje de referencia.

La naturaleza de esta idea es un asunto que aborda a profundidad la teoría gestáltica. Uno de sus principios dice que el ser humano tiende a organizar el campo percibido según principios simplificadores; entonces, hay una tendencia a preferir la mejor estructura posible. Por *mejor estructura* se refiere a características como regularidad, simetría, unidad, armonía, máxima simplicidad, y consideramos que también a la periodicidad. De ahí la tendencia a que las estructuras casi-periódicas sean entendidas como periódicas (Shama, 1998).

La Gestalt implica el retorno a una percepción donde la experiencia inmediata no está viciada por el aprendizaje (Díaz, 2008). En el ejemplo anterior podemos identificar la necesidad de una justificación de acuerdo con la estructura matemática vigente: rotación de ejes, o al menos de uno de ellos, ya que en tal eje se hace patente la forma de repetición que toda función periódica debiera tener.

Por tanto, en esa búsqueda de la *mejor estructura posible,* apreciar lo que varía y cómo varía, parece ser un argumento que justifica el acomodo un tanto voluntarioso del eje x.

Ejemplo 2:

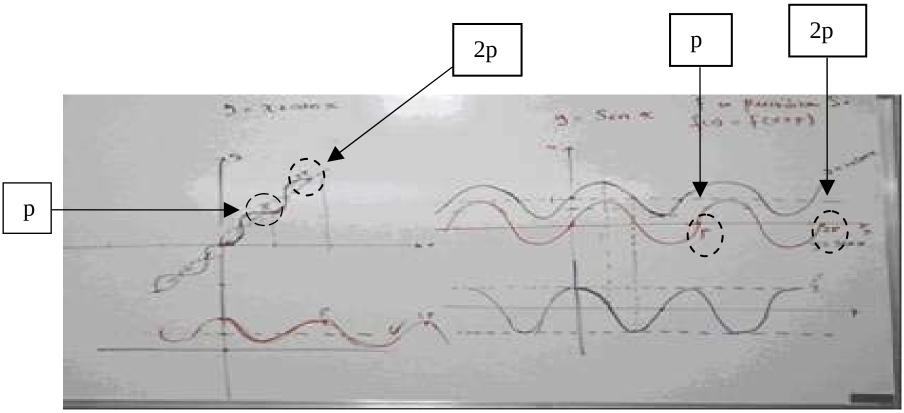


Figura 5. Identificando lo que se repite.

A un estudiante de posgrado se le mostró la gráfica de las funciones $f(x) = senx$ y $f(x) = x + senx$, y se le pidió que las clasificara como periódicas o no periódicas y que verificara si cumplían o no con la propiedad periódica dada por la igualdad $f(x) = f(x + p)$. El alumno señaló en primera instancia que ambas funciones eran periódicas y de manera congruente identificó una p sobre la gráfica, de tal manera que la función fuera *igual*. Y por *igual* pareció referirse a la forma o trayectoria particular que seguía la gráfica en esos pedazos, sin importar el efecto de la ordenada a cada cambio de p. En este caso, pareciera que hubo una búsqueda de aquello que se repite y al encontrarlo sobre la trayectoria de la gráfica eso justificó –o quizá ratificó– la propiedad periódica de ambas funciones.

Posteriormente, se le pidió al estudiante que obtuviera la gráfica de la función derivada y que, de nuevo, analizara si cumplía o no con la propiedad periódica. Mediante el uso de herramientas de corte gráfico y analítico halló la gráfica de la derivada, p, y concluyó que ambas eran periódicas. De ahí estableció la veracidad de la proposición: f *es periódica* $\Leftrightarrow$ f' *es periódica*.

Cuando el alumno obtiene la gráfica de la derivada de la función $y = x + senx$, la identificación que realiza en ella de los intervalos *p* y 2*p* va a dar lugar a nuevos intervalos periódicos de la derivada. Esto hace pensar que la forma regular como al menos un componente varía (en este caso las abscisas), es suficiente para caracterizar el comportamiento periódico de la función.

3.1. *Discusión*

El estudio de lo periódico en un contexto de variación identificó un manejo *sui generis* de aquello que varía y cómo varía. De manera especial, esto fue notorio en el continuo manejo de la función $y = ax + b + senx$, que tiene la característica de que, mientras ella no es periódica, su derivada sí. Por ello, no resultó sorpresivo que fuera el tipo de función que más comúnmente se catalogara como periódica.

Ahora bien, el tipo de argumentos y herramientas que se ponían en juego –como el comportamiento de la función anteriormente descrito– motivó el interés por entender qué ocurriría con lo periódico en contextos donde explícitamente entraran en juego una función y sus distintas variaciones. En este campo, la socioepistemología ya ha proporcionado resultados.

4. ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

4.1. *La relación entre una función y sus derivadas*

En la línea de investigación sobre el pensamiento y lenguaje variacional se ha indicado que es factible construir una relación significativa entre una función y sus derivadas cuando se favorece un tránsito entre las variaciones sucesivas, es decir, cuando se puede establecer un uso simultáneo entre la función y sus derivadas. Ello permite que se pueda reconocer en todas ellas la forma de estudiar los cambios sucesivos y así romper con la idea de iteración (González, 1999; Dolores et al 2002).

González (1999) dice que el concepto de derivada se construye sólo si se transita entre las variaciones sucesivas; no se elabora únicamente con la primera derivada como pendiente, ni tampoco como velocidad o como razón de cambio, sino en dirección de las variaciones y lo que las caracteriza. Otra idea de cambio puede analizarse en una gráfica que no tenga expresión matemática y se pregunte por los signos de la función, así como de la primera, segunda y tercera derivadas. Si se piensa en un nivel más general pueden formularse problemas de forma verbal, de tal modo que el pensamiento de los estudiantes imagine comportamientos.

Con el mismo objetivo de dar significados a la relación entre una función y sus derivadas, la investigación también ha recurrido al uso de gráficas que representan una forma de argumentación propicia para la construcción del conocimiento matemático. En una situación de transformación, Cordero (2001) indica que la función $y = f(x)$ en la relación entre la derivada y primitiva puede ser concebida como una instrucción que organiza comportamientos entre ellas, ya que la función no se percibe como un proceso previo a la gráfica. Aquí, la gráfica de f permite organizar los comportamientos de la gráfica de f' y viceversa. Para ello se tiene que pasar significativamente por los registros gráfico, algebraico e incluso el tabular.

Dicho proceso no se fundamenta en conseguir la representación de una función en forma gráfica, sino en hacer de la gráfica una forma de argumentación en sí misma. Suárez (2008) propone al uso de las gráficas para resignificar especialmente las situaciones que tengan que ver con la variación y el cambio, pues la graficación, en el seno de la modelación, ofrece un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y la argumentación. Esta idea se integra a la propuesta socioepistemológica respecto a la necesidad de adquirir, previo al estudio del cálculo, un lenguaje gráfico que posibilite la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos a causa de las enseñanzas tradicionales, estableciendo un isomorfismo entre el lenguaje algebraico y el gráfico (Cantoral y Farfán, 1998).

La búsqueda socioepistemológica para dar sentido a la derivada deja de lado a aproximaciones didácticas que buscan adquirir el concepto de derivada a través de su definición como límite de un cociente, o que la presenten en términos de sus aplicaciones, pues no consideran a la actividad que rodeó, acompañó y dio significado a la derivada en su contexto de origen. Por tanto, no se busca trabajar con la derivada y sus estructuraciones conceptuales, sino modelar, medir, aproximar o calcular en situaciones de variación para generar la necesidad de una herramienta que explique y resuelva dichas situaciones (Montiel, 2005).

4.2. *Socioepistemología de lo periódico*

Al seno del paradigma en el que se reconoce el carácter social de la matemática, la socioepistemología centra su atención en el papel de las prácticas sociales para construir el conocimiento matemático y las reconoce como normativas de la actividad humana: aquello que hace que los individuos o grupos hagan lo que hacen (Covián, 2005). Una de sus tareas consiste en la formulación de epistemologías de prácticas, las cuales permiten conformar bases de significados para el conocimiento y para su introducción significativa y articulada al sistema didáctico (Buendía y Cordero, 2005).

Una socioepistemología que se ha propuesto para lo periódico (Buendía, 2004, 2005 y 2006) señala a la predicción como una práctica asociada al reconocimiento significativo de tal propiedad. Se reconoce a lo periódico como una construcción social en la que los aspectos analíticos de la periodicidad se nutren de otros de carácter cultural, histórico e institucional.

La práctica de predecir se fundamenta en la idea de describir el estado posterior de un fenómeno, dada una cierta información sobre el estado actual, y su ejercicio intencional al seno de una situación, lo cual provoca una distinción entre la repetición que presenta el fenómeno y cómo se presenta. Al tratar con gráficas de funciones, el ejercicio intencional predictivo obliga a considerar una unidad de análisis que permita realizar una comparación entre un estado visible de la gráfica y el resto. En la identificación y uso de dicha unidad se explicitan el comportamiento en el eje x y en el eje y; al mismo tiempo hay que considerarlos coordinados para poder hacer la predicción remota que se requiera (Vázquez, 2008).

De este modo, se favorece una reconstrucción de significados acerca de lo que es una gráfica o movimiento repetitivos, a través de una distinción en el tipo de repetición que presentan. La resignificación es inducida por la actividad de predecir, ya que cualquier método de predicción se basará en el comportamiento que presente la gráfica. El predecir hará posible distinguir significativamente entre el *qué se repite* y el *cómo se repite*, lo cual es necesario para reconocer la naturaleza misma de la propiedad y no del objeto al cual se aplica.

Este énfasis en las prácticas favorece un tránsito articulado y significativo a lo largo del currículo escolar. Mientras que la construcción del objeto matemático (sucesión, función) pudiera anclarse a determinados niveles escolares, la práctica de predicción que da sentido a lo periódico pasa entre los objetos y niveles, desarrollándose situacionalmente.

4.3. *Aspectos metodológicos*

A partir de los aspectos metodológicos trabajados en las investigaciones del área (Buendía, 2004; Buendía y Cordero, 2005; Cordero, 2006), se propone el siguiente esquema metodológico (figura 6). Por la naturaleza de dichas investigaciones, se parte de reconocer a los fenómenos didácticos relacionados con la propiedad periódica, y en particular para este estudio, su uso en la relación de una función y sus derivadas. La aproximación socioepistemológica ofrece una revisión, una búsqueda de carácter epistemológico que permite referir *porqué ocurre lo que ocurre*, involucrando diferentes fuentes y tipos de revisiones, desde aquellas que tienen que ver con el desarrollo histórico de la propiedad periódica[3], hasta como la que se desea mostrar en este artículo: la búsqueda del uso de dicha propiedad en contextos particulares como la ingeniería.

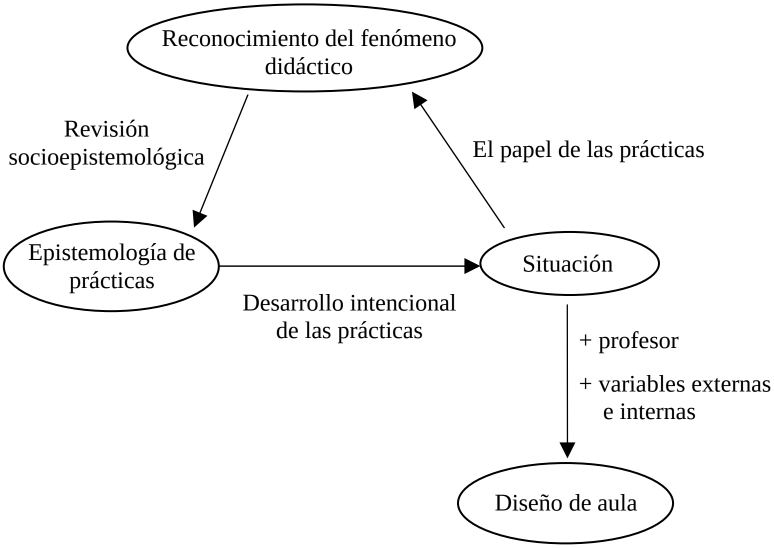


Figura 6. Esquema metodológico para la investigación en Socioepistemología.

Con ello, se busca integrar una epistemología de prácticas sobre lo periódico que exponga el papel de las prácticas en la generación de dicho conocimiento. Esta se nutre de otros estudios socioepistemológicos, como aquellos sobre la relación entre una función y sus derivadas que dan evidencia de que los argumentos y contextos variacionales son significativos para construir dicha relación. Las investigaciones en torno a la modelación-graficación también han aportado elementos con relación a las gráficas como sustentos de argumentación, al igual que la relevancia del comportamiento de una gráfica como una herramienta propia del ser humano que hace matemáticas. Entender el uso de la propiedad periódica en la relación de una función y sus derivadas contribuye a enriquecer la epistemología de prácticas propuesta.

Las prácticas mencionadas tendrán que ser reinterpretadas para desarrollarse *intencionalmente* en el diseño de una situación, tanto

[3] Para más detalle de esta revisión, puede verse Buendía (2006) y Vázquez (2008).

para proporcionar evidencia de la viabilidad de la socioepistemología como para llegar a ser un mecanismo de incidencia en el aula. Esto requiere la generación de socioepistemologías cada vez más robustas, con elementos provenientes de distintos tipos de revisiones, que enfaticen el carácter social de la matemática. La situación diseñada será la que dé cuenta del papel de las prácticas para resignificar el saber matemático inmiscuido en el fenómeno didáctico del cual se partió.

Finalmente, el diseño de situaciones será el mecanismo para lograr incidir en la reorganización de la matemática escolar. El papel del profesor y de otras variables involucradas –como el uso de la tecnología– serán determinantes para que las situaciones lleguen al aula. De ahí la importancia de proponer y articular continuamente las socioepistemologías que la investigación en el área genera, ya que son el fundamento de nuestra propuesta didáctica hacia una reorganización de la obra matemática escolar.

4.3.1. *Acerca del uso de lo periódico en la relación* $f - f'$

Las explicaciones y propuestas didácticas socioepistemológicas no parten, entonces, del propio dominio matemático, sino de tomar en cuenta aquellas circunstancias que favorecen la construcción del saber. Un modelo que proponga a las prácticas como generadoras de conocimiento matemático ofrece marcos de referencia más amplios que los meramente analíticos marcos tradicionales, donde la matemática se explica desde la matemática misma. En cambio, ahora se reconoce que es en otros dominios científicos y otras prácticas en donde la matemática, especialmente la que vive en el nivel educativo superior, adquiere sentido y significación (Cantoral y Farfán, 2003).

Los grupos humanos que intervienen en los distintos campos de conocimiento crean sus propias organizaciones; en ellas cristalizan sus propios pensamientos, resignificaciones y argumentaciones para que, como dice Cordero (2006), puedan formular sus intenciones, direcciones y consensos. Ese es el *uso* de lo periódico en la relación $f - f'$ que queremos entender y reconocer: el conocimiento como una actividad que desarrollan personas específicas en circunstancias específicas (Lave & Wenger, 1991).

La metodología específica que nos ha permitido referir ese *uso* se basa en la exploración del tipo de argumentaciones y herramientas variacionales que en contextos no matemáticos se ponen en juego. Los hallazgos permitirán fortalecer los elementos que ya hemos citado sobre la socioepistemología de lo periódico y poder generar una epistemología de prácticas cada vez más robusta y articulada, como discutimos en el diagrama de la figura 6.

4.4. *Discusión*

Estamos frente a una discusión que no trata sobre *qué enseñar*, sino *cómo enseñarlo*. La derivada no podría ser vista como una definición de cociente incremental y luego pretender que sea entendida a través de sus aplicaciones –como velocidad o pendiente de rectas tangentes–, sino tendría que ser construida en un contexto de variación, en el que sea la matematización de la variación la que nos lleve al concepto mismo. En este contexto, la primitiva y sus derivadas podrían informar acerca del comportamiento de las otras, sin que dicha relación sea sólo una iteración con su consecuente seguimiento de reglas para poderlas obtener.

Reconocemos una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar. Hay una distinción entre el funcionamiento de una actividad matemática, la que realizan los matemáticos en su carácter de constructores de conocimiento matemático en su comunidad, y la actividad humana, la que efectúa una persona al hacer uso del conocimiento matemático para responder preguntas de su vida diaria o profesional. Si bien en la primera viven los objetos matemáticos en forma explícita y como su objetivo, en la segunda un lenguaje de herramientas es el que permite dar sentido a los objetos, y dependen totalmente del contexto en el que se presenten (Suárez, 2008; Cordero, 2006).

5. EL USO DE LA RELACIÓN $f - f'$ EN UN ESCENARIO PERIÓDICO

La investigación socioepistemológica refiere el carácter culturalmente situado del conocimiento matemático, ya que lo estudia a través de sus usos en diferentes contextos. Con ello propone una base de significación para el tópico o tópicos matemáticos en cuestión, a fin de integrar una epistemología de prácticas y explicar el papel de las prácticas en la generación del conocimiento matemático.

Ordóñez (2007) hizo una búsqueda de los usos de una función y sus derivadas sucesivas en escenarios periódicos, con el propósito de determinar el papel que jugaban las herramientas y argumentos de corte variacional en su estudio. Los siguientes ejemplos mencionan primero los datos resumidos sobre la referencia en cuestión, y luego el tipo de argumentos o herramientas variacionales que consideramos entran en juego.

Ejemplo 1:

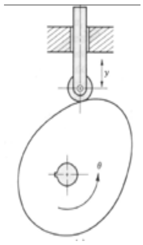
Miranda (2003) al trabajar en el diseño de levas  Leva de placa que, sujeta a un eje y con una forma especial, gira provocando un movimiento determinado en el seguidor (arriba-abajo en este caso).	…es importante revisar que los perfiles de las levas de alta velocidad no presenten cambios bruscos de pendiente o discontinuidades en las gráficas de velocidad y aceleración. Existen movimientos que permiten asegurar derivadas “suaves" como el movimiento armónico y el movimiento cicloidal. La derivada es una medida de la rapidez con la que cambia el movimiento de la leva, ésta ayudará a controlar que el movimiento del seguidor sea suave. La segunda derivada presenta una relación para el radio de curvatura de la leva en varios puntos a lo largo de su perfil. Ya que la relación es inversa, conforme *y’’* crezca, el radio de curvatura se hará más pequeño. La tercera derivada puede utilizarse como una medida de la rapidez de cambio de *y*.

Figura 7. Levas

En este escenario de diseño de levas (figura 7), un elemento mecánico que sirve para empujar a otro, el análisis del cambio resulta un punto fundamental a tratar, pues el autor dice que cuando las levas giran a bajas velocidades los cambios de fuerza que generan en la aceleración pueden despreciarse. Sin embargo, a altas velocidades se convertirán en fuerzas que actuarán en el seguidor; por ello, se requiere que el movimiento de la leva no se altere en forma brusca. Esto lleva a considerar que el movimiento tenga derivadas suaves (cambios en los valores de las pendientes de las tangentes). También los significados que propone para la segunda y tercera derivadas están en términos de dar cuenta sobre las variaciones que califican.

Miranda remite continuamente a las gráficas del desplazamiento, velocidad y aceleración, así como a sus expresiones analíticas correspondientes, a fin de sustentar la importancia de la derivada (figura 8). Esto favorece un tránsito entre los contextos gráfico, físico y analítico, donde las gráficas son una herramienta para explicar cómo serán las características del movimiento de la leva diseñada. Con ello descarta el movimiento parabólico para levas de alta velocidad, ya que si bien en apariencia es *suave*, sus derivadas no lo son.

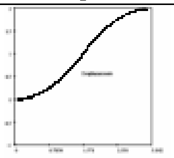
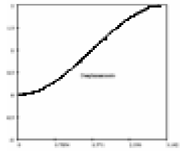
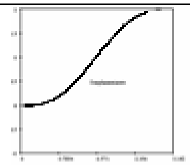
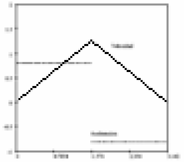
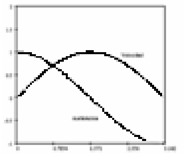
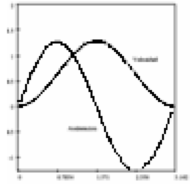
Movimiento parabólico	Movimiento armónico	Movimiento cicloidal
		
		
$y = A\theta^2 + B\theta + C$ $y' = 2A\theta + B$ $y'' = 2A$ $y''' = 0$	$y = \frac{L}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right)$ $y' = \frac{\pi L}{2\beta}\sin\frac{\pi\theta}{\beta}$ $y'' = \frac{\pi^2 L}{2\beta^2}\cos\frac{\pi\theta}{\beta}$	$y = L\left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$ $y' = \frac{L}{\beta\left(1 - \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)}$ $y'' = \frac{2\pi L}{\beta^2}\cos\frac{2\pi\theta}{\beta}$

Figura 8. Desplazamiento, velocidad y aceleración y expresiones analíticas usados en el diseño de levas.

La seguridad de usar este tipo de movimientos para las levas de altas velocidades se debe a que las funciones que modelan los movimientos armónico o cicloidal tienen comportamientos periódicos que, al ser derivados, se conservan. Es decir, si la función de desplazamiento no es periódica, como en el caso de una leva que presenta un movimiento de ir y venir ascendente, su comportamiento sobre las abscisas sí tiene una repetición propia de lo periódico. Al derivar este crecimiento la variación se mantiene y, en consecuencia, la velocidad y la aceleración son periódicas.

Así, no es suficiente considerar únicamente que el movimiento sea suave; hay que reparar en cómo será la variación del movimiento para que no haya fuerzas que dañen al sistema. El tránsito entre los contextos parece estar fundamentado en la problematización del cambio presente: *¿cómo tiene que cambiar para que el sistema funcione?* Los conceptos matemáticos de derivadas sucesivas y los físicos de velocidad y aceleración tienen una base de significación que se basa en la matematización de la variación.

Ejemplo 2:

Guerra, Carreola y Villalobos (2005) Estudio de las vibraciones mecánicas.	Cuando la variación de una cantidad física se repite con las mismas características después de cierto intervalo de tiempo se dice que se tiene un movimiento periódico y si el movimiento de una partícula puede ser representada por una forma senoidal entonces a este movimiento se le conoce como movimiento armónico.

Guerra, Carreola y Villalobos (2005) consideran que un punto importante en el buen funcionamiento de los procesos industriales es el mantenimiento predictivo que permite saber el estado actual y futuro de una maquinaria o de sus elementos. El análisis de vibraciones de maquinaria constituye una de las metodologías ampliamente usadas en el mantenimiento de maquinaria.

Dichos autores presentan una distinción entre movimiento periódico y un movimiento armónico, que se representa en forma de seno, lo cual implica que no se está basando en formas senoidales para identificar un movimiento periódico. Se observa que los movimientos periódicos no se limitan a los modelados por funciones trigonométricas, sino a aquellos cuyas características se repiten después de un intervalo de tiempo; dichas características son el desplazamiento y sus variaciones. Vemos que no basta el comportamiento del desplazamiento para determinar que un movimiento es periódico, sino también hay que considerar el de sus variaciones.

Ejemplo 3:

Jules Henri Poincaré Trabaja en poner de manifiesto la existencia de soluciones periódicas para las ecuaciones diferenciales.	En un determinado momento, un sistema se halla en un estado concreto y en un momento posterior vuelve, de nuevo, al mismo estado. Todas las posiciones y velocidades son las mismas después que antes. Así, debe repetirse, una y otra vez, el movimiento que le ha conducido desde un estado de nuevo a sí mismo: el movimiento es periódico.

Newton ya había formulado los principios de la mecánica. Su teoría del movimiento estableció las relaciones generales entre fuerzas, aceleraciones, distancias y masas. La naturaleza de su marco epistémico, menciona Muñoz (2006), está centrada en las relaciones funcionales entre variables y sus variaciones, así como en la construcción de sistemas de transformación que permiten pasar de los estados iniciales a los estados finales. Es inherente la noción de *predicción* en tanto práctica social, así como la necesidad de calcular la diferencia entre los estados finales e iniciales; subyace la noción de *acumulación* como práctica social detonada por la práctica de predecir. Así, la pregunta que vive en este marco es respecto a cómo calcular la evolución ulterior del sistema de movimiento si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en un lugar dado (las llamadas *condiciones iniciales*).

El desarrollo de nuevas formas de principios mecánicos aplicables a diferentes fenómenos de la naturaleza también hizo aportes al estudio de los movimientos celestes. Cuando los cuerpos en el espacio se atraen, las fuerzas entre ellos –sus aceleraciones, por consiguiente– pueden ser calculadas a partir de sus posiciones relativas. Al sumar las aceleraciones consecutivas o integración se obtienen las velocidades y, a partir de ellas, por medio de una segunda integración, se consiguen los cambios en la posición. Pero las posiciones resultantes de tal procedimiento son a su vez elementos necesarios en el cálculo de las aceleraciones originales, por lo cual estamos frente a la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales. Para dos cuerpos la solución fue hallada por Newton, pero para tres o más cuerpos no se podía hallar (Pannekoek, 1989).

En 1889, el rey de Suecia, Óscar II, instituyó una competencia matemática cuyo objetivo era determinar la estabilidad del Sistema Solar, como una variación del problema de los tres cuerpos. El reto consistía en determinar, en cualquier instante, las posiciones y velocidades de tres cuerpos, de cualquier masa, sometidos a su atracción mutua y partiendo de unas posiciones y velocidades dadas. Las ecuaciones involucradas no podían ser resueltas en términos de las funciones conocidas, y dado que el problema ofrecía incluso una infinidad de soluciones, Poincaré centró su atención en las relaciones que había entre estas soluciones (Collette, 1986). De este modo, desarrolló un nuevo enfoque para la búsqueda de soluciones de las ecuaciones diferenciales que gobiernan los movimientos periódicos, donde las posiciones y velocidades están simultáneamente involucradas.

En ese marco adquiere relevancia cómo el matemático caracteriza lo periódico. Según Aluja (2005), la periodicidad del movimiento para el matemático queda determinada si el cuerpo pasa por el mismo punto, a la misma velocidad y en la misma dirección, en un determinado tiempo. El uso que se hace de lo periódico puede verse en la llamada *sección de Poincaré*: en lugar de seguir con un telescopio toda la trayectoria de un cuerpo alrededor de la Tierra, se enfoca un plano que vaya de norte a sur, desde un horizonte a otro, y que esté alineado con el centro de nuestro planeta. Se toma nota del lugar donde pasa por primera vez, su rapidez y su dirección, y se permanece a la espera sólo enfocando el plano. La periodicidad exige que vuelva a pasar por el mismo punto, a la misma velocidad y en la misma dirección. Lo periódico y sus variaciones son, por tanto, una herramienta de predicción.

5. Comentarios finales

La socioepistemología de lo periódico, cuyos elementos se presentaron en uno de los apartados anteriores, propuso a la predicción como práctica asociada al reconocimiento significativo de lo periódico, tanto para las funciones como para otros objetos matemáticos (por ejemplo, sucesiones y fracciones). La identificación y empleo de una unidad de análisis –llamada *periodo* en el caso de las funciones– es una herramienta que, al desarrollarse en el seno de una práctica de predicción, favorece una distinción significativa entre el *qué se repite* y el *cómo se repite*. Esto sienta las bases para construir la propiedad periódica, cuyo sustento de significación no se compone únicamente de estructuras conceptuales, sino de herramientas y prácticas.

A medida que la revisión de carácter socioepistemológico se amplía al considerar otras fuentes, nuevos elementos robustecen el planteamiento original. En primer lugar, sobresale el papel de la visualización al trabajar con gráficas de funciones con cierto comportamiento periódico. Dicha herramienta ayuda a entender qué es lo que está siendo considerado para juzgar a la función como periódica o no, de tal manera que la intuición respecto a lo periódico no sea descartada abruptamente (Arcavi, 2003) y conviva con el manejo de los sistemas de referencia propios del sistema educativo.

Lo periódico es un ejemplo de conocimiento que transita desde lo intuitivo hacia el sistema educativo, trayendo consigo caracterizaciones un tanto cotidianas (*lo periódico es algo que se repite*), donde podemos reconocer una visión gestáltica sobre la imagen de la gráfica que permite independizarse de los ejes de referencia convenidos para aceptar una nueva mirada hacia lo que se repite. Este reconocimiento tiene conflicto con la formalidad exigida en una estructura matemática, de tal manera que herramientas propias de tal estructura, como la definición formal o la rotación de ejes, aparecen usadas un tanto a voluntad.

Sin embargo, el estudio de esta propiedad en un contexto de variación, en el que vive la práctica de predicción, permite darle significados que reconozcan al hombre haciendo matemáticas y no sólo a su producción matemática final; en ese reconocimiento resulta necesario entender el uso de lo periódico en diversas situaciones, como aquellas que involucran a las derivadas sucesivas.

Asimismo, se puede reconocer cómo la periodicidad de las derivadas, que no implica periodicidad en la función, puede ser relevante al predecir comportamientos. No basta conocer la posición de un cuerpo que parece moverse periódicamente; para poder predecir es necesario saber la velocidad, lo cual es una caracterización del *cómo está pasando* por el mismo punto una y otra vez. Esto es un elemento que resignifica lo periódico en una contexto de variación.

Finalmente, cabe destacar que el uso de las gráficas en nuestras investigaciones no parece remitirse sólo a la representación de las funciones. Las gráficas en sí mismas parecen ser el desarrollo de un conocimiento que permite trabajar la variación de un movimiento de manera simultánea –y no posterior– a los desarrollos analíticos correspondientes. Las gráficas resultan, además, un argumento central al discutir la forma de repetición que tiene una función, lo cual irá caracterizando lo periódico. El que las gráficas sean herramientas que permiten modelar el cambio intrínseco de las funciones de posición, velocidad y aceleración (Suárez, 2008), hace que la graficación sea un elemento a considerar en la epistemología de lo periódico que estamos proponiendo. El objetivo será favorecer actividades donde se problematicen las situaciones de variación y cambio, planteando preguntas en una gráfica acerca de cómo cambia.

La importancia de esta socioepistemología radica en que da cuenta de la construcción social del conocimiento matemático sobre lo periódico y en que será la base para diseñar situaciones en donde las prácticas serán desarrolladas de manera intencional. Así, la investigación está dando cuenta de que el mecanismo para incidir en el aula es a través de situaciones que reconozcan el carácter social de la matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguilar, M. (1999). *Relaciones entre la derivada y la primitiva: El papel del registro gráfico en algunas de las construcciones de los estudiantes.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.

Aluja, J. (2005). La matemática borrosa en economía y gestión de empresas I. *Matematicalia. Revista digital de divulgación matemática 1* (3). Obtenido en abril 30, 2007, de http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_content&task=view&id=140&Itemid=98

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 52* (3), 215-241

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Buendía, G. (2005). Lo periódico: una revisión en el marco de la socioepistemología. En C. Dolores, G. Martínez, R.M. Farfán, C. Carrillo, I. López, C. Navarro (Eds), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 77-90), México: Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.

Buendía, G. & Cordero, F. (2005). Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics 58* (3), 299-333

Buendía, G. (2006) Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa 9* (2), 227-251.

Cantoral R. (2004) Pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18* (pp.1-9). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon 42* (3), 854-856.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6* (1), 27-40.

Collette, JP (1986). *Historia de las matemáticas* (Vol. II). México: Siglo Veintiuno Editores.

Cordero, F. (2001) La distinción entre construcción del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4* (2), 103-128.

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del Cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 265-286). Reverté-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, AC.

Covián, O. (2005). *EL papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: el caso de la cultura maya*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Díaz, K. (2008). *Leyes de la Gestalt.* Obtenido en agosto 21, 2008, de http://www.innatia.com/s/c-psicologia-gestalt/a-leyes-gestalt-i.html.

Dolores, C., Alarcón, G. y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5* (3), 225-250.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Guerra C., Carreola J. y Villalobos F. (2005). Fundamentos de las vibraciones mecánicas. Obtenido en abril 20, 2007, de http://cguerra.fime.uanl.mx/articles/mechvibration/cap01.pdf.

Hernández, D. (2004). *Las argumentaciones gráficas de los estudiantes en las relaciones de f y f' para las funciones* x, x^2, *y* x^3. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Lave, J & Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation.* United Kingdom: Cambridge University Press.

Miranda, J. (2003). Diseño de levas. En *Mecanismos* (pp. 98-142). Obtenido en abril 20, 2007, de http://www.ufrrj.br/institutos/it/deng/kalil/IT_140_Proj_Maq/Parte2_Mecanismos/mecanismo.pdf.

Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (2), 219-233.

Muñoz, G. (2006). *Dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico relativa a un campo de prácticas sociales asociadas al cálculo integral: aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos.* Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Ordóñez, A. (2007). *Un estudio de lo periódico en la relación de una función y sus derivadas.* Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Chiapas, México.

Pannekoek, A. (1989). *A history of astronomy.* USA: Dover Publications Inc.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11* (2), 267-296.

Shama, G. (1998). Understanding periodicity as a process with a gestalt structure. *Educational Studies in Mathematics 35* (3), 255-281.

Spivak, M. (1980) *Calculus*. USA: Publish or Perish, Inc.

Suárez, L. (2008). *Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Vázquez, R. (2008). *Estudio de lo periódico en diferentes contextos: identificación y uso de la unidad de análisis*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Chiapas, México.

Autoras

Gabriela Buendía. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Cicata del IPN, México; gbuendia@ipn.mx

Alejandra Ordóñez. Escuela Bancaria y Comercial, Campus Chiapas. México; anlejandra@hotmail.com