GERT SCHUBRING

GAUSS E A TÁBUA DOS LOGARITMOS

GAUSS AND A TABLE OF LOGARITHMS

RESUMEN. La matemática escolar se presenta generalmente como algo esencialmente estático, sujeto a pocos cambios solamente. Asimismo, la propia matemática parece tener un carácter acumulativo donde todos los períodos y resultados previos son de alguna manera "preservados" dentro del estado moderno de la matemática. Los logaritmos constituyen un caso que contradice ambas visiones. Establecidos como un medio para facilitar cálculos complicados, fueron durante siglos, y hasta hace poco, una herramienta indispensable para los matemáticos y así las tablas logarítmicas constituían una materia clave en la enseñanza secundaria. En la actualidad, los ordenadores y las calculadoras han substituido completamente este conocimiento tradicional. El ejemplo particular de una tabla logarítmica alemana conduce no sólo a reveladores estudios para determinar el autor de la misma, sino especialmente a descubrimientos epistemológicos entorno a la naturaleza y el desarrollo de la matemática, y a la relación entre la matemática pura y la matemática aplicada.

PALABRAS CLAVE: Matemática escolar, instrumentos, logaritmos, biografía, epistemología de las matemáticas

ABSTRACT. School mathematics is generally presented as essentially static and subject to only few changes. Likewise, mathematics itself seems to have a cumulative character where all earlier periods and achievements are somehow “preserved” within the modern state of mathematics. The logarithms present a case, which contradicts both convictions. Established as a device for facilitating complicated calculations, they were over centuries, until recently, an indispensable tool for mathematicians, and logarithmic tables constituted therefore a key subject for learning in secondary schools, too. Today, computers and hand-held calculators have entirely substituted this traditional knowledge. The example of a particular German logarithmic table leads not only to revealing studies for determining the author of the table, but moreover to epistemological insights into the nature and development of mathematics and the relation between pure and applied mathematics.

KEY WORDS: School mathematics, instruments, logarithms, biography, mathematical epistemology

RESUMO. A matemática escolar é apresentada em geral como sendo essencialmente estática, somente sujeita a poucas mudanças. E a própria matemática parece ter um carácter cumulativo em que de certa maneira as épocas e resultados anteriores ficam respectivamente preservados na matemática moderna. Os logaritmos constituem um caso que contradiz ambas as convicções. Estabelecidos como um meio para facilitar cálculos complicados, eles foram – até recentemente –

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2008) *11*(3): 383 - 412
Recepción: Agosto 22, 2008 / Aceptación: Octubre 14, 2008

uma ferramenta indispensável para os matemáticos, e de mesma maneira as tábuas dos logaritmos constituíram um assunto chave a ser aprendido nas escolas. Hoje em dia, computadores e calculadoras têm substituído inteiramente este saber tradicional. O exemplo de uma particular tábua alemã leva não somente a estudos reveladores para determinar o autor das tábuas mas também a descobertas epistemológicas sobre a natureza e o desenvolvimento da matemática e sobre a relação entre matemática pura e matemática aplicada.

PALAVRAS CHAVE: Matemática escolar, ferramenta, logaritmos, biografia, epistemologia da matemática

RÉSUMÉ. Les mathématiques scolaires sont regardées en général comme étant essentiellement statiques et capables seulement de rares changements. Pareillement, les mathématiques eux-mêmes semblent avoir un caractère cumulatif dont toutes les périodes et accomplissements antérieurs sont préservés d'une certaine manière dans l'état actuel de la science. Les logarithmes constituent un cas qui contredit les deux convictions. Développés comme un moyen pour faciliter des calculs compliqués, ils devenaient un outil indispensable pour les mathématiciens pendant des siècles, jusqu'à récemment, et ainsi aussi un sujet-clé pour l'apprentissage des mathématiques à l'école. Mais aujourd'hui les ordinateurs et les calculatrices ont substitué entièrement ce savoir et cette pratique traditionnels. L'exemple présenté ici d'une table particulière de logarithmes d'Allemagne ne mène pas seulement à des investigations révélatrices concernant l'identité de l'auteur de la table mais aussi à des réflexions épistémologiques sur la nature et le développement des mathématiques et les relations entre mathématiques pures et appliquées.

MOTS CLÉS: Mathématiques scolaires, instruments, logarithmes, biographie, épistémologie des mathématiques

1. INTRODUÇÃO

Durante séculos houve uma ferramenta no ensino da matemática que foi absolutamente indispensável e fundamental, e que presentou na época uma tecnologia utilizada no ensino – evidentemente uma tecnologia com um caráter bem diferente daquele que caracteriza a tecnologia em uso no ensino de hoje: trata-se das tábuas dos logaritmos. Hoje em dia, tal tecnologia parece estar inteiramente desaparecida:

Mostro aqui a folha de rosto da tábua que foi mais divulgada e utilizada nas escolas alemãs desde, pelo menos, o fim do século XIX (Figura 1).

Quando eu mostro tais tábuas em minhas aulas aos alunos, revela-se sempre que elas constituem objetos desconhecidos e eles não têm nenhuma idéia e conhecimento matemático de como aplicá-las. Tudo é substituído pelo uso das calculadoras. Assim, as tábuas dos logaritmos documentam as mudanças nas técnicas e nas ferramentas matemáticas – na ciência e no ensino.

Figura 1. Folha de rosto da tábua.

2. ALGUNS ELEMENTOS DA HISTÓRIA

Como introdução, vou dar algumas explicações históricas sobre o conceito. A idéia principal subjacente aos logaritmos consiste em relacionar uma serie geométrica com uma serie aritmética: tal idéia encontra-se, bastante clara, pela primeira vez na obra *Aritmetica Integra* do alemão Michael Stifel, em 1544 e que se pode interpretar hoje como exprimindo um logaritmo particular.

1544 erscheint bei **Stifel** die Erweiterung der Potenzreihe auf negative Exponenten (vgl. auch S. 285) [1; 249^v]:

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Diese Tabelle kann man als eine Logarithmentafel für $y = {}^2\log x$ mit $\frac{1}{8} < x < 64$ und $-3 < y < 6$ auffassen; allerdings sind hier nur ganzzahlige y berücksichtigt.

Figura 2. Serie aritmética e geométrica em Stifel 1544 (Tropfke 1980,).

O inglês John Napier foi o primeiro a estabelecer tábuas logarítmicas, com base na relação entre uma série aritmética e uma serie geométrica – ambas sendo seqüências de valores diminuindos - : desde 10^7 até 0,

Seqüência aritmética: $a_n = n(1 + \frac{1}{2 \cdot 10^7})$, Seqüência geométrica: $b_n = 10^7(1 - \frac{1}{10^7})^n$

e com base $\approx \frac{1}{e}$

Cabe observar que nas primeiras introduções e aplicações, os logaritmos constituíram um objeto aritmético, e mesmo objetos técnico-materiais, como evidenciam os famosos bastõezinhos do Napier:

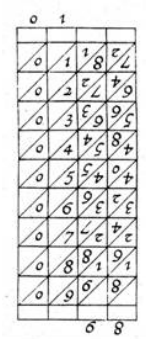

Figura 3. Um modelo do primeiro bastãoezinho, com os quatro lados cortados e colocados num plano.

E mostro aqui um exemplo de como funcionava executar uma multiplicação:

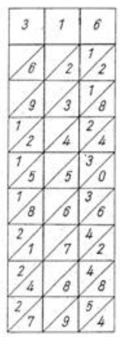

Abb. 7.9. Prinzipskizze zum Gebrauch der Neperschen Stäbchen. Die Ziffern in benachbarten Diagonalfeldern werden addiert und liefern die Ziffern des Multiplikationsergebnisses. Beispiel: 316 · 6 ergibt sich aus den Ziffern der 6. Zeile der zu den Ziffern 3, 1 und 6 gehörenden Stäbchen: also 1 / 8 + 0 / 6 + 3 / 6, d. h. 1896."

Figura 4. Como se multiplica 316 por 6 (Wußing 1989, 149).

3. O CONCEITO DE LOGARITMO

Como Maria Ângela Miorim e Antonio Miguel têm muito instrutivamente exposto no livro deles, *Os Logaritmos na Cultura Escolar Brasileira* (2002), existe além do aspecto aritmético dos logaritmos um outro: o algébrico-funcional. De fato, as definições clássicas do logaritmo baseiam-se no aspecto funcional:

$$y = b^x, \quad x = \log_b y$$
$$y = a^x, \quad x = \log_a y$$
$$\log_b y = M \cdot \log_a y \quad M = \tfrac{1}{\log_a b}$$

As propriedades principais do logaritmo são em particular:

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$$
$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y \quad \log \tfrac{x}{y} = \log x - \log y$$
$$\log x^n = n \cdot \log x$$

O aspecto funcional tem incitado desenvolvimentos importantíssimos na análise, porém eu quero falar hoje do aspecto aritmético-tecnológico.

O conceito de logaritmo e as primeiras tábuas dos logaritmos foram estabelecidos no começo do século XVII. O objetivo do novo conceito e da aplicação das tábuas foi simplificar as operações de cálculo – ao reduzir operações de um nível maior a operações de um nível menor. Porém, mesmo esta ferramenta estabelecida para simplificar as operações de cálculo, tem experimentado em si simplificações que são uma expressão para mudanças nas posições, na ciência da matemática, quanto aos valores dominantes sobre o que são as normas exigidas de rigor e de exatidão.

De fato, uma das primeiras tábuas, a de Briggs, de 1617, operava com quatorze casas decimais.

2		Logarithmi.			Logarithmi.
1	0	0000,00000,00000	34	1	5314,78917,04226
2	0	3010,29995,66398	35	1	5440,68044,35028
3	0	4771,21254,71966	36	1	5563,02500,76729
4	0	6020,59991,32796	37	1	5682,01724,06700
5	0	6989,70004,33602	38	1	5797,83596,61681
6	0	7781,51250,38364	39	1	5910,64607,02650
7	0	8450,98040,01426	40	1	6020,59991,32796
8	0	9030,89986,99194	41	1	6127,83856,71974
9	0	9542,42509,43932	2	1	6232,49290,39790
10	1	0000,00000,00000	43	1	6334,68455,57959

Figure 8 Part of a page from Briggs (*1617*: 2)

Figura 5. Briggs, apud Kaunzner 1992, 224.

Cabe observar aqui uma particularidade das primeiras tábuas: os logaritmos são apresentados como números inteiros e não como números decimais. A razão para isso é simples: no século XVII, o conhecimento e o uso das frações decimais não tinham ainda sido divulgados e aceitos. Foi preciso então representar os logaritmos como multiplicações com tantas potências de 10 quanto houvesse casas decimais nas tábuas. Com efeito, houve por isso o fator 10^7 nos logaritmos de Napier.

O número enorme de casas nas tábuas de Briggs explica-se pelo grau alto de exatidão intencionada nos cálculos, em particular devido à área principal de aplicação das tábuas: a astronomia. Porém, as primeiras experiências mostraram que o trabalho com tábuas de quatorze casas foi demasiado penoso e, assim, tábuas com sete casas foram aceitas por um longo tempo como a forma mais normal.

4. As tábuas no ensino

O prefácio das tábuas de Gauß evidencia, no entanto, um processo adicional de simplificação: para o ensino escolar este processo revelou-se sempre mais que para o objetivo do ensino em outros casos, a saber, a introdução do uso escolar das tábuas de logaritmos não exigiu praticar um mesmo grau de exatidão como na prática profissional. O prefácio caracteriza o processo de simplificação para o ensino como "a eliminação de um peso morto e inútil de números, do ensino escolar". E foi explicado também que a eliminação deste peso morto começou no ano 1880, por uma portaria do ministério prussiano da instrução que qualificou as tábuas com sete casas e com seis casas como inconvenientes, requerendo o uso de tábuas com cinco casas decimais. O processo de simplificação acabou, em 1925, por uma nova portaria que declarou tábuas com cinco casas como "dificultando inutilmente os procedimentos de calcular" e requereu o uso de tábuas com quatro casas decimais. A portaria exprimiu a convicção de que os alunos, introduzidos no uso do cálculo por meio das tábuas com quatro casas decimais seriam mais tarde, na prática profissional, capazes de aprender facilmente o uso das tábuas com cinco casas. De fato, as tábuas com quatro casas foram usadas desde então até os anos 1970 – quando desapareceu do ensino – o material didático standard nas escolas. A tábua que eu utilizei como aluno na escola foi uma com quatro casas. Já, desde 1900, as tábuas de Gauss foram publicadas paralelamente com quatro e com cinco casas decimais.

Cabe mencionar que todas estas tábuas permitiram de uma maneira bem efetiva interpolar rapidamente os valores intermediários depois da última casa decimal da tábua.

Quero mostrar aqui alguns exemplos tirados de um livro didático muito divulgado nos anos 50 e 60, na Republica Federal Alemã, nos *Gymnasien* – a série de Reidt-Wolff, como intensivamente foram ensinados os logaritmos e o uso diferenciado das tábuas. As tarefas vão ser entendíveis apesar dos textos em alemão:

2. Der Zehnerlogarithmus. Bezeichnungen (S. 166, Nr. 4)

Beispiel: lg 300 = 2,47712

3. a) Die Kennzahl der Logarithmen der n-stelligen Zahlen ist (n—1).

b) Die Kennzahl der Logarithmen der echten Dezimalzahlen ist gleich der negativ genommenen Anzahl der Nullen von der ersten geltenden Ziffer.

Beispiele: a) lg 0,152 = 0,1818 — 1; **b)** lg 0,00152 = 0,1818 — 3

c) Die Logarithmen der Zahlen von verschiedenem Wert aber mit derselben Ziffernfolge haben dieselbe Mantisse.

Beispiele: a) lg 15,2 = 1,1818; **b)** lg 1520 = 3,1818; **c)** siehe vorige Beispiele.

Übungen:

Die folgenden Ausdrücke sind mit Hilfe der Sätze 1 bis 3 zu logarithmieren:

1. a) xy **b)** xyz **c)** $r(s+t)$ **d)** $(a+b)(c+d)$ **e)** $\frac{x}{y}$

f) $\frac{xy}{z}$ **g)** $\frac{x}{yz}$ **h)** $\frac{xy}{uv}$ **i)** $\frac{xyz}{w}$ **k)** $\frac{r+s}{t}$

l) $\frac{p+q}{r-s}$ **m)** $\frac{1}{a}$ **n)** $\frac{1}{ab}$ **o)** $\frac{1}{xyz}$ **p)** $\frac{1}{x(y-z)}$

2. a) x^3 **b)** y^5 **c)** z^n **d)** $(a \cdot b)^2$ **e)** a^3b^4

f) x^{-4} **g)** $\frac{1}{y^2}$ **h)** $\frac{a^4}{b^3}$ **i)** $\frac{6a^2}{7b}$ **k)** $\frac{1}{x^2y^3}$

3. a) $\sqrt{x}$ **b)** $y^{\frac{1}{2}}$ **c)** $\sqrt[4]{z}$ **d)** $\sqrt{ab}$ **e)** $\sqrt[3]{\frac{ab}{c}}$

f) $\sqrt[4]{a^3}$ **g)** $\frac{1}{\sqrt{z}}$ **h)** $\frac{1}{\sqrt[3]{b^2}}$ **i)** $7\sqrt[5]{a^3}$ **k)** $x\sqrt{y^3}$

4. a) $(a+b)^2$ **b)** a^2-b^2 **c)** $a\sqrt{b-c}$ **d)** $\sqrt{a^2+b^2}$ **e)** $x^3\sqrt[5]{\frac{x-z}{a}}$

5. Bestimme die Ausdrücke, deren Logarithmen in den folgenden Aufgaben vorliegen!

a) $\lg a + \lg b - \lg c$ **b)** $3\lg a + 5\lg b - 3\lg c$ **c)** $3\lg x + \frac{1}{2}\lg y - \frac{1}{3}\lg z$

d) $2\lg(a-b) + \frac{1}{2}\lg(a+b)$ **e)** $\frac{1}{3}\lg(a^2+b^2) + 3\lg a$ **f)** $\frac{1}{2}\lg(a^2-b^2) - \lg(a+b)$

Figura 6. Aplicar as propriedades dos logaritmos a termos algébricos (Reidt-Wolff 1957, 169).

Aufschlagen der Logarithmen

13. **a)** 25 **b)** 48 **c)** 59 **d)** 70 **e)** 98 **f)** 148
g) 206 **h)** 105 **i)** 786 **k)** 800 **l)** 7 **m)** 3

14. **a)** 13,6 **b)** 39,9 **c)** 61,4 **d)** 92,1 **e)** 48,5 **f)** 21,2
g) 2,6 **h)** 5,7 **i)** 1,1 **k)** 3,65 **l)** 8,79 **m)** 9,04
n) 0,76 **o)** 0,24 **p)** 0,0431 **q)** 0,0054 **r)** 0,00903 **s)** 0,000101

15. **a)** 48,26 **b)** 6,348 **c)** 821,5 **d)** 583,4 **e)** 941,7
f) 4943 **g)** 69820 **h)** 304600 **i)** 2,761 **k)** 4,019

16. **a)** 0,9805 **b)** 0,004132 **c)** 5,008 **d)** 0,7637 **e)** 0,0001049
f) 2,843 **g)** 5983000 **h)** 0,00008924 **i)** 23470 **k)** 0,01032

17. **a)** 81,492 **b)** 7,6358 **c)** 348,182 **d)** 0,89165 **e)** 29,4973
f) 0,0899961 **g)** 49,2834 **h)** 510,48 **i)** 0,0036474 **k)** 0,000976329

Aufschlagen der Numeri

18. **a)** 1,4362 **b)** 3,8248 **c)** 0,7404 **d)** 2,5575 **e)** 4,9533
f) 0,8014 — 1 **g)** 0,6628 — 3 **h)** 0,1847 — 2 **i)** 0,9031 — 5 **k)** 0,3560 — 4

19. **a)** 2,4536 **b)** 1,8140 **c)** 0,5629 **d)** 3,8894 **e)** 1,7684
f) 0,2415 **g)** 0,1246 **h)** 1,7319 **i)** 1,4141 **k)** 1,6496
l) 2,8284 **m)** 2,1968 **n)** 2,7989 **o)** 0,4622 **p)** 1,2278

20. **a)** 4,6428 **b)** 5,7369 **c)** 0,5247 — 1 **d)** 0,4621 — 1 **e)** 0,7319 — 1
f) 6,8947 **g)** 0,1293 — 2 **h)** 0,8748 — 3 **i)** 0,6923 — 5 **k)** 5,0546
l) 7,6996 **m)** 4,5008 **n)** 0,0241 — 2 **o)** 0,0105 — 1 **p)** 0,9001 — 5

Figura. 7. Procurar os logaritmos na tábua, a partir dos *numeri* - e inversamente: dados os logaritmos, procurar na tábua os *numeri* (Reidt-Wolff 1957, 170).

Houve páginas e páginas, todas cheias de tais exercícios. Assim, foi um assunto muito extenso tratar os logaritmos na sala de aula de matemática na escola secundária.

5. BIOGRAFIAS DE AUTORES DE TÁBUAS

Em seguida a essa introdução sobre as tábuas dos logaritmos quero voltar-me para o lado biográfico: quem foram os autores das tábuas dos logaritmos?

- John Napier (1550-1617) 1614
- Jost Bürgi (1552-1632) 1620

Napier e Bürgi

Os dois primeiros, e de fato basicamente simultâneos, foram John Napier com a publicação em 1614 e Jost Bürgi em 1620. Nenhum dos dois foi matemático profissional: Napier foi um *Lord* inglês, podemos nomeá-lo um matemático amador. E Bürgi foi artesão: um construtor de ferramentas, em particular um relojoeiro. Ele foi contratado como relojoeiro na corte de um conde de Hesse, em Kassel, e mais tarde na corte do imperador alemão, em Praga.

Porém, as etapas seguintes de desenvolvimento das tábuas de logaritmos ocorreram sob a participação decisiva de cientistas:

Johannes Kepler (1571-1630) 1624

A próxima obra importante de tábuas foi elaborada por Kepler e publicada por ele em 1624.

Parece que a primeira tábua elaborada na França, em 1743, deve-se a Dominique Rivard (1697-1778), professor de matemática num colégio da universidade de Paris.

Fica notável que o foco da produção de tábuas foi – durante o século XVIII – a França: a seguinte, foi publicada em 1760 por Nicolas de La Caille (1713-1762), um astrônomo e professor de matemática em Paris – junto com Joseph-Jérome de Lalande (1732-1807), o famoso astrônomo e diretor do observatório de Paris. Esta tábua foi elaborada originalmente com seis casas decimais, mas Lalande publicou em 1805 uma nova edição com cinco casas e essa obra manteve-se durante todo o século XIX como a obra standard na França.

No começo do século XIX houve uma concorrente para a tábua de LaCaille/Lalande: as tábuas de Jean Charles Borda (173-1799), um outro astrônomo e membro da Academia de Paris. A tábua de Borda, concluída depois deste ser morto por seu colega Jean-Baptiste Delambre (1749-1822), foi publicada em 1801.

Enquanto a produção de todas as tábuas até aqui foi dominada por astrônomos e estas serviram de fato aos objetivos deles, foi lançado nos anos 1790 um projeto a fim de elaborar logaritmos e tábuas trigonométricas para o levantamento topográfico. Este projeto foi dirigido por Gaspard Riche de Prony (1755-1839), uma personalidade muito interessante, porque ativo em muitas áreas e competente em ciência e em técnica. Ele foi professor de análise na Escola Politécnica de Paris e diretor da *École des Ponts et Chaussées*, escola universitária para a formação de engenheiros em estradas e pontes. Esse projeto foi um empreendimento de dimensões gigantescas: por um lado, porque pela primeira vez, desde as origens, a tarefa foi estabelecer tábuas com quatorze casas e com uma exatidão nunca antes atingida. Por outro lado, porque não foi a obra de uma pessoa elaborando isoladamente e com fadiga enorme – ao contrário, foi um procedimento com divisão de trabalho: cerca de cem calculadores trabalharam durante vários anos, dividindo entre eles as tarefas. Foi pela primeira vez o caso de se aplicar, na matemática, métodos praticamente industriais. Grattan-Guinness (1990) dedicou um artigo interessante a esse projeto, intitulado *Work for the hairdressers*. Com efeito, Prony contratou para o trabalho mais ou menos mecânico de calcular as tábuas, os cabeleireiros da nobreza que estavam em grande número sem emprego devido à Revolução Francesa e a eliminação da nobreza. Prony conseguiu que a obra enorme fosse concluída, em 1801, porém o resultado foi de uma tal extensão – dezenove volumes em manuscrito – que tornou-se impossível imprimir essas tábuas. Somente em 1891 foi publicada uma versão abreviada.

No século XIX não houve mais um monopólio francês quanto à produção de tábuas. Em 1827, publicou Charles Babbage (1792-1871), o famoso matemático inglês e pioneiro da construção das máquinas de calcular, uma tábua que é particularmente importante por causa da sua qualidade e da reflexão metodológica do autor.

A primeira tábua alemã bem conhecida foi elaborada por Georg Freiherr von Vega (1754-1802), um matemático e oficial de artilharia na Áustria; ele publicou em 1783 uma tábua com sete casas decimais.

6. O AUTOR DA NOSSA TÁBUA

Assim, já ficamos cronologicamente perto da tábua de logaritmos de Gauss em que consta o nome abreviado e podemos então ocupar-nos do seu autor. Quem foi o autor da tábua?

No próprio livro, como apresentado anteriormente, a única indicação, um pouco mais detalhada que na folha de rosto, fica na página do titulo e diz: Dr. F. G. Gauß.

Essa indicação pode fazer surgir dúvidas sobre se o autor da tábua é idêntico ao grande matemático, conhecido como o “Princeps Mathematicorum”, cujos prenomes em geral ficam abreviados assim:

C. F. Gauß

Essa diferença já é decisiva para se constatar uma não-identidade? Em geral, em nenhum caso, porque foi comum na Alemanha até o começo do século XX dar a um recém-nascido no batismo três, quatro ou mesmo cinco prenomes. Para o matemático Dirichlet, por exemplo, houve três prenomes: Johann Peter Gustav. E não foi definido para sempre qual dos vários prenomes seria utilizado para chamar uma pessoa; poderia variar da mesma maneira como a ordem dos prenomes. O “nosso” Gauß – para fixar pelo momento assim o matemático conhecido – indicava os seus prenomes aos dezessete anos de idade, dessa forma:

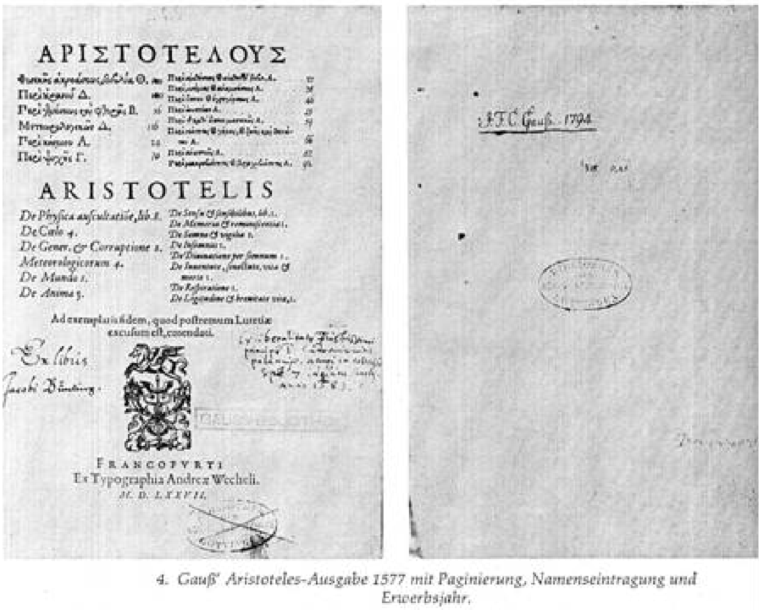

Figura 8. J. F. C. (Küssner 1979, 30).

Por outro lado, a tábua de logaritmos que utilizei no colégio foi impressa no ano 1958 e não é provável se neste momento tardio não se teria utilizado a seqüência comum das letras abreviadas para o “nosso” Gauß. Mais agravante para o caso de autoria do Gauß em discussão é que, além disso, segundo o prefácio, a primeira edição do livro foi publicada no ano 1870 – ano em que o "nosso" Gauß já estava morto desde há 15 anos!

Assim, se o autor da tábua não foi o “nosso” Carl Friedrich Gauß, como é possível obter clareza sobre o verdadeiro autor?

Eu encontrei uma primeira pista durante as minhas pesquisas entre 1981 e 1983, sobre a história da profissão dos professores de matemática na Prússia. Escolhi como uma das dimensões da pesquisa procurar indicadores para o êxito profissional dos professores de matemática. Assim, como um dos possíveis indicadores, eu procurei se alunos que concluíram o *Gymnasium* com o *Abitur* tinham se decidido a estudar, na universidade, a disciplina ainda bastante nova da matemática. Para esta pesquisa eu acumulei o máximo possível de listas dos concludentes dos *Gymnasien* na Prussia, a fim de avaliar as intenções aí indicadas de estudar uma certa disciplina. E nesta ocasião, eu encontrei um aluno Friedrich Gauß, e mesmo no *Gymnasium* da cidade onde eu moro, em Bielefeld!

Porém, este graduado do ano 1851 indicava como disciplina para estudo, a filologia, então um estudo para se tornar mais tarde professor das línguas antigas. Eu detectei depois que esse aluno estudou, (na verdade, não a filologia mas a matemática e que ele tornou-se professor ginasial dessa disciplina na Silésia – mas sem publicar tábuas!

Eu achei, no entanto, a solução definitiva um pouco mais tarde, em novembro de 1983 quando o jornal de Bielefeld, *Neue Westfälische*, publicou um artigo comemorando um antigo cidadão chamado no artigo: “der vergessene Bielefelder”, “o esquecido de Bielefeld”. Para minha surpresa, o esquecido foi justamente o F. G. Gauß que revelou-se ser chamado Friedrich Gustav Gauß e sendo um irmão mais velho do Friedrich Gauß:


Nr. 258 Neue Westfälische — Bielefelder Tageblatt — Montag, 7. November 1983

Ein vergessener Bielefelder, eine alte Plakette

Friedrich Gustav Gauß, Mathematiker und Schöpfer des preußischen Steuerkatasters

Was halten Sie von günstigen Preisen?

Figura 9: artigo na “Neue Westfälische”, 7.11. 1983.

O artigo apresentou esse Gauß como sendo também um matemático e como uma personalidade de excelência na área de geodésia e de cadastro dos impostos (Steuerkataster). O artigo continha também a informação de que esse segundo Gauß foi de fato o autor procurado das tábuas dos logaritmos. Essa reportagem tem o mérito de dar também informações já detalhadas sobre a biografia desse segundo Gauß.

Friedrich Gustav Gauß nasceu no dia 20 junho 1829, em Bielefeld. O pai foi um comerciante de linho – a indústria principal de Bielefeld – e o avó um camponês em uma aldeia próxima. Gauß foi aluno no *Rats-Gymnasium* de Bielefeld –um colégio tradicional, sendo estimado aí como "*Rechengenie*"– gênio de calcular: mas ele não finalizou o *Gymnasium*, saiu já na *Sekunda*, depois seis dos nove anos do curso ginasial. Depois ele tornou-se aluno na *Provinzialgewerbeschule* em Bielefeld, uma escola para profissões técnicas e comerciais – mas somente por um ano e, enfim, ele foi aprendiz para formar-se como agrimensor. Essa formação não foi institucionalizada, mas ocorreu segundo o modelo tradicional para os artesãos, então "learning on the job" ou "segue o modelo do mestre". Houve, no entanto, já um certo nível de formalização porque o ano e meio como aprendiz finalizou com um exame estadual para agrimensores, em 1848, em Minden.

Depois, durante o serviço militar obrigatório, em Minden também, ele atuou como agrimensor para o governo em Minden. Mas a posição que determinou o seu futuro destino foi a de atuar como controlador do cadastro na região de Eifel, no oeste da Prússia. Em primeiro plano parecia ser uma tarefa normal: levantar topograficamente os campos. O particular nisto foi que se tratou da realização do *Grundsteuerkataster*: o cadastro para determinar as contribuições prediais. Este trabalho, aparentemente sem desafios hoje em dia, foi na época um elemento chave de reformas sociais e estruturais internas do estado que teve início com as reformas de Napoleão. E a base destas reformas-que vou ainda comentar mais tarde – foi o primeiro levantamento topográfico completo e moderno das províncias ocidentais da Prússia.

Quando em 1861 foi decretada uma lei instituindo a contribuição predial para as províncias do leste também, Gauß alcançou uma posição importante no ministério das Finanças em Berlim: foi nomeado diretor do levantamento topográfico, no departamento para a contribuição predial, encarregado de resolver as tarefas técnicas quanto ao estabelecimento do cadastro para as províncias do leste. Em sua biografia, as qualidades extraordinárias de junção de competência na área e capacidades de *management*, são elogiadas assim:

> "Graças à habilidade de organização e à intensidade de trabalho investida por Gauß, ele conseguiu terminar a obra com um contingente pessoal de 3.400 pessoas, especificamente formadas para a tarefa, e devido ao uso adaptado de mapas já existentes, no prazo inimaginavelmente breve de três anos e meio. Em seguida, ele foi nomeado em 1868 "Geheimer Rechnungsrat" – conselheiro titular em cálculo – e, em 1872, inspetor geral do cadastro" (Neue Deutsche Biographie, vol. 6, 1964).

Enfim, Gauß estabeleceu também os cadastros para as novas províncias da Prússia: Hesse-Nassau, Hanover e Schleswig-Holstein. E a mesma biografia aponta que o trabalho imensamente extenso destes agrimensores em, praticamente, todas as províncias da Prússia incitava Gauß a elaborar a tábua dos logaritmos.

Figura 10. Placa comemorativa F. G. Gauß, município de Bielefeld.

Porém, como vemos, Gauß e as obras dele foram inteiramente práticas e ele não estudou em uma universidade – como lhe foi possível obter um grau acadêmico? A explicação é a seguinte, Gauß conseguiu ascensões ainda mais espectaculares: em 1892, *Wirklicher Geheimer Oberfinanzrat* (Veradeiro Conselheiro Superior das Finanças), e enfim: *Wirklicher Geheimer Rat* e *Exzellenz* (Veradeiro Conselheiro Titular e Excelência); e (no fim) ele ainda foi honrado academicamente, em 1899, obteve o grau de doutor *honoris causa* pela universidade de Strasbourg!

Gauß aposentou-se em 1905 e faleceu em 1915.

A placa foi esquecida da mesma maneira como o próprio Gauß, mas nos anos 1980 ela foi restaurada e fica agora na prefeitura de Bielefeld, em frente ao escritório do prefeito – cada vez que sai do seu escritório ele deveria olhar a placa.

Comparamos agora o retrato desse Gauß com um retrato do outro, “nosso” Gauß:

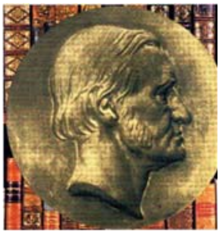

Figura 11. C. F. Gauß (Küssner 1979).

Podemos constatar então que o autor da tábua dos logaritmos não é o matemático de Göttingen, C. F. Gauß, mas um outro detentor do nome Gauß, com efeito, não parente, originário de Bielefeld e que foi uma pessoa importantíssima na área do levantamento topográfica na Prússia do século XIX. Podemos formular o resultado obtido até aqui por uma equação de conjuntos:

$$\text{Gauß} \cap \text{Gauß} = \varnothing$$

Cabe mencionar que a origem para escrever o resultado dessa maneira data[1] de uma publicidade da editora Springer: eles utilizaram para a própria publicidade a seguinte equação de conjuntos:

$$\text{Springer} \cap \text{Springer} = \varnothing$$

Depois do ano de 1968, quando houve o atentado ao Rudi Dutschke, um dos líderes do movimento estudantil, ficou claro que o atentado foi provocado pela atmosfera de perseguição oriunda dos jornais da editora Axel Springer e em particular da *Bildzeitung*. Assim, foi preciso para a grande editora tradicional da matemática, Julius Springer, demonstrar que não teve nada a ver com o outro Springer.

Mas isto já é o resultado definitivo?

7. AGRIMENSORES E GEOMETRIA

Uma indicação para uma reflexão aprofundada apresenta-se pela designação da profissão: Feldmesser, agrimensor. Como mencionado, a formação para tornar-se agrimensor foi o treinamento com um prático, pela participação na prática dele. Como documentam textos publicados contemporaneamente e mesmo cartas pertencentes ao arquivo do ministério prussiano de instrução, estes práticos foram não somente chamados "agrimensores" mas também "geômetras".

Deve-se constatar, com efeito, que a designação "geômetra" tem dois sentidos: por "geômetra" entende-se por um lado um cientista da matemática, e isto ainda durante todo o século XIX. E por outro lado, a designação "geômetra" foi aplicada também para pessoas praticantes de algumas técnicas da matemática, em particular os agrimensores, também nomeados de uma forma

[1] Desde já, vou nomear C. G. Gauß ‚Gauß I' e F. G. Gauß ‚Gauß II'.

um pouco mais nobre como “geodéticos”. A ambivalência existe não somente na língua alemã mas também em outras línguas, por exemplo, no francês.

No entanto, a dupla significação de “geômetra” não constitui simplesmente uma questão da língua que se poderia eliminar por uma convenção adequada. Na verdade, fica ligada diretamente com a natureza da matemática. Quero ilustrar essa ambivalência com uma olhada na história da matemática.

Existe um elemento básico relativo ao saber histórico-matemático que, acredito, tem-se sedimentado em cada pessoa com um mínimo de interesse pela matemática, como parte da cultura geral. Eu acho portanto que vocês estão também familiarizados com este elemento básico: a saber, a afirmação de que a geometria se originou no Egito – como conseqüência da necessidade de estabelecer uma nova agrimensura a cada ano, depois das inundações anuais do rio Nilo. Uma formulação clássica dessa afirmação encontra-se no livro de história da matemática, também clássico, de Moritz Cantor:

> A agrimensura – assim afirmam todos os antigos historiadores – foi praticada no Egito. Fazia nascer a geometria teórica, oriunda da necessidade de determinações repetidas dos limites dos campos quando de uma inundação pelo Nilo – que acontecendo mais forte que normalmente – destruiu os antigos sinais dos limites dos campos. (M. Cantor, 1875, 64)

Vale ser consciente do foco no nascimento da geometria **teórica**, como enunciado nesta versão da história clássica. Vale, porém, comparar a fonte original com este sedimento do saber histórico na cultura geral. Como é bem conhecido, o primeiro tal relatório foi escrito pelo historiador grego Heródoto (cerca de -484 até -420). Ele viajou muito e recolheu muitos relatórios históricos sobre outros povos.

Em sua obra “Histórias”, livro dois, Heródoto descreve o Egito e aí se encontra a versão original sobre o nascimento da geometria. Vou mostrar primeiramente este parágrafo na sua fala grega original:

Κατανεῖμαι δὲ τήν χώρην Αἰγυπτίοισι ἅπασι τοῦτον ἔλεγον τὸν βασιλέα, κλῆρον ἴσον ἑκάστῳ τετραγωνον διδόντα, καὶ ἀπὸ τούτου τὰς προσοδους ποιήσασθαι, ἐπιτάξαντα ἀποφορήν ἐπιτελέειν κατ' ενιαυτόν. εἰ δέ τινος τοῦ κλήρου ὁ ποτάμος τι παρέλοιτο, ἐλθὼν ἂν πρὸς αὐτὸν ἐσήμαινε τὸ γεγενημένον. ὁ δὲ ἔπεμπε τοὺς ἐπισκεψομένους καὶ ἀναμετρήσοντας ὅσῳ ἐλάσσων ὁ χῶρος γέγονε, ὅκως τοῦ λοιποῦ κατὰ λόγον τῆς τεταγμένης ἀποφορῆς τελέοι. δοκέει δέ μοι ενθεῦτεν **γεωμετρίη** εὑρεθεῖσα ἐς τὴν **Ἑλλάδα** ἐπανελθεῖν. πόλον μὲν γὰρ καὶ γνώμονα καὶ τὰ δυώδεκα μέρεα τῆς ἡμέρης παρὰ **Βαβυλωνίων** ἔμαθον οἱ Ἕλληνες.

Figura 12. Herodot, em grego (Herodot 1995, no. 109; meus grífos).

Porém, não a fim de que vocês leiam o trecho, mas principalmente a fim de que reconheçam aqui a palavra γεομετρια e também de que se fala da Grécia-‘Ελλαδα - e sobre os Babilônios.

Olhemos agora uma tradução alemã desse trecho:

> Dieser König [Sesostris] habe das Land auch unter alle Bewohner aufgeteilt - so erzählt man - und jedem ein gleich großes, viereckiges Stück gegeben. Die jährliche Abgabe, die er davon erhob, bildete seine Einkünfte. Riß aber der Strom von einem Ackerstück etwas mit weg, dann ging sein Besitzer zum König und meldete ihm dies. Der sandte Leute hin, die untersuchen und ausmessen sollten, wieviel kleiner die Fläche geworden war, damit der Besitzer die ursprünglich auferlegte Abgabe nur im Verhältnis zum Rest zu bezahlen brauchte. Mir scheint, daß hierbei die *Kunst der Landvermessung* erfunden wurde, die dann nach Griechenland kam. Denn die Sonnenuhr mit ihrem Zeiger und die Einteilung des Tages in zwölf Stunden haben die Griechen von den Babyloniern übernommen.
> (Herodot, Buch II, Nr. 109. Übersetzung Josef Feix)

Figura 13. Herodot 1995; meus grífos.

Nessa tradução eu coloquei grifos para a expressão traduzida como γεομετρια: *Kunst der Landvermessung*, ou seja, arte da agrimensura e não geometria. Este fato revela uma particularidade da filologia alemã – na tradução inglesa utiliza-se simplesmente a palavra *geometry* e do mesmo modo na francesa, *geométrie*.

> I think it was from this that *geometry* was discovered and came to Greece. For the sun-clock and the sundial and the twelve divisions of the day the Greeks learned from the Babylonians.
>
> C'est ce qui donna lieu, à mon avis, à l'invention de la *géométrie*, que des Grecs rapportèrent dans leur pays. pour l'usage du polos, du gnomon, et pour la division du jour en douze parties, c'est des Babyloniens que les Grecs les apprirent.

Figura 14. Herodotus 1987; Herodote 1970; meus grífos.

Contra isso, eu não achei nenhuma tradução alemã de Heródoto onde fosse utilizada a palavra “Geometrie”. Ou se fala de “Landvermessung” – então, agrimensura – ou mesmo de *Kunst der Landvermessung*. Esta maneira fica marcadamente em contraste com a tradição da história da matemática em que se refere a Heródoto para deduzir que a geometria teórica grega tem origens no Egito. Como a agrimensura foi praticada no Egito já no tempo de Heródoto e desde épocas muito remotas, o sentido dessa relação certamente não recai sobre o nascimento da agrimensura, mas sobre o fato de que a partir dela se desenvolveu uma forma superior – a saber, a geometria que constituiu já na época de Heródoto um conceito firme e, além disso, que os gregos tinham recebido tanto a geometria como a astronomia por outras culturas.

Por outro lado, a tenacidade dos filólogos alemães sublinha o significado original de "geometria" e, isto é, de fato: agrimensura. Geometria implica, desde o começo e devido ao seu assunto, uma componente teórica e uma empírica. E por isso constituem a matemática pura e a matemática aplicada já desde, as origens, duas partes complementares dessa ciência.

Cabe sublinhar que nas várias culturas os dois lados não foram desenvolvidos de maneira igual, mas – segundo os próprios sistemas de valores – em formas diferentes. Como é conhecido, os Gregos elevaram a geometria teórica a um nível impressionante, com os Elementos de Euclides como expressão paradigmática. Houve também na Grécia uma aritmética prática e uma geometria prática, mas que foram julgados com um valor menor. Porém na cultura dos Romanos, os pesos foram divididos diferentemente: aí houve também um grupo de especialistas da matemática, e a designação deles foi a tradução exata da palavra grega 'geometroi' para o Latim – a saber, *agrimensores*. Porém, a significação desta palavra e a das atividades deles foi justamente *agrimensores*, aqueles que mediam os campos. As tarefas destas pessoas foram muito extensas, a fim de determinar os impostos a serem requeridos, dadas as dimensões enormes do Império Romano.

No entanto, a avaliação tradicional da historiografia da matemática sobre os agrimensores romanos é negativa. Para exemplificar, de novo Moritz Cantor:

> A opinião geral seria a de estimar o nível dos conhecimentos matemáticos dos Romanos como sendo baixo. Isso seria justo também para a corporação dos agrimensores – já Cícero refutou a pretensão deles de serem matemáticos. Além disso, os Romanos foram "na geometria propriamente científica, muito alheios" (p. 69). E Cantor constatou principalmente que os Romanos atuaram na história da matemática com um papel de somente conservar, mas não de promover o saber. E tudo que eles conservaram do saber clássico matemático, foi conservado – afirma Cantor – sem um próprio entendimento (Cantor 1875, p. 128).

E em todos os muitos séculos da Idade Média que se seguiram ao colapso do Império Romano, eu não sei de atividades notáveis de agrimensores ou de projetos estaduais para efetuar agrimensura – nem para os países árabes, nem para os da Europa. A razão para esta falta ou redução reside, segundo minha tese, na constituição feudal da Idade Média: impostos foram "pagos" aí, em geral, com produtos do solo, como "décima", por causa da falta de uma economia baseada no dinheiro, e não em impostos definidos por posse de terreno. Desde os tempos modernos, agrimensuras foram organizadas de novo – porém principalmente para medidas de infra-estrutura, como construção de canais, e não para determinar levantamentos de impostos.

Uma mudança decisiva nesta situação fraca de matemática aplicada ocorreu devido à Revolução Francesa. Ela destruiu por um lado as estruturas da sociedade feudal e eliminou, por outro lado, as particularidades e fechamentos locais pelo estabelecimento de um sistema geral e homogêneo de medidas e pesos: pela unificação das medidas ela tencionou uma universalização da comunicação. Para tais tarefas, os matemáticos e astrônomos nos países europeus, contanto que tivessem sido atingidos pela Revolução Francesa ou mais tarde pela expansão napoleônica, ganharam um papel decisivo. Vou mencionar somente o projeto imenso da medida do meridiano nos anos 1790 que conseguiu, entre 1798-1799, no primeiro congresso internacional científico em Paris e, daí, entre outros países, a determinação do metro como unidade universal de comprimento.

O sucesso da medida do meridiano significava praticamente o arranque inicial para um nível superior de agrimensura, a geodésia. Apoiando-se em ferramentas científicas da geodésia, uma grande parte dos estados europeus começou, desde aproximadamente o começo do século XIX, a organizar levantamentos cartográficos exatos do próprio território – forçando a determinação exata das altitudes e amplitudes geográficas de todas as cidades e lugares de maior importância, cartografar os rios, as estradas e as fronteiras. E se deve saber que o método básico da geodésia para a cartografia foi a triangulação.

Ao mesmo tempo nasceu uma nova área de tarefas para os agrimensores tradicionais. Eu já mencionei na biografia de Gauß II, que o embate para o cadastro dos impostos territoriais nas províncias do oeste prussiano foi dado pelas reformas napoleônicas: a destruição da sociedade feudal implicava também a abolição das contribuições feudais e na Prússia, em particular, a abolição da servidão dos camponeses. A conseqüência desta–ao menos idealmente conseguida–igualdade de todos os cidadãos, requeria uma reestruturação fundamental de todo o sistema financeiro do estado, a saber, com base no levantamento de impostos de modo individual e direto. A fonte principal para um tal sistema de arrecadação foram os impostos sobre o terreno. O *Code Napoléon*, a famosa obra com as leis para a sociedade pós-revolucionária e burguesa, iniciou esta reestruturação fundamental. Como províncias do oeste, Rheinland e Westfalen foram territórios ou direta ou indiretamente franceses, antes do ano 1815, a Prússia ao se atribuindo-los não podia recusar estes princípios de modernização, decidindo-se enfim por uma lei própria de impostos sobre terrenos para esta parte ocidental do seu estado. E a aplicação desta lei requeria o estabelecimento do cadastro para *Rheinland* e *Westfalen* – essa foi a nova e extensa tarefa para os geômetras, no sentido da palavra agrimensores. Foi aqui, para tal tarefa de modernização da sociedade, que aconteceu a formação e a atividade profissional de Gauß II.

8. GAUSS I: TRIANGULAÇÃO E TÁBUAS

Assim, enfim eu cheguei ao ponto onde de novo entra um Gauß. Devido ao duplo significado de 'geometria', é que encontramos novamente o Gauß I nesta área de atividades para matemáticos, depois de iniciada a Revolução Francesa. Foi Gauß mesmo quem propôs em 1818 ao governo do seu estado, o reinado de Hanover, efetuar uma triangulação para um levantamento geodésico de todo o território. Com efeito, o governo ordenou Gauß a dirigir o projeto, em que ele investiu uma energia enorme para realizá-lo. Até 1837, Gauß dedicou todos os meses do verão ao processo de triangulação.

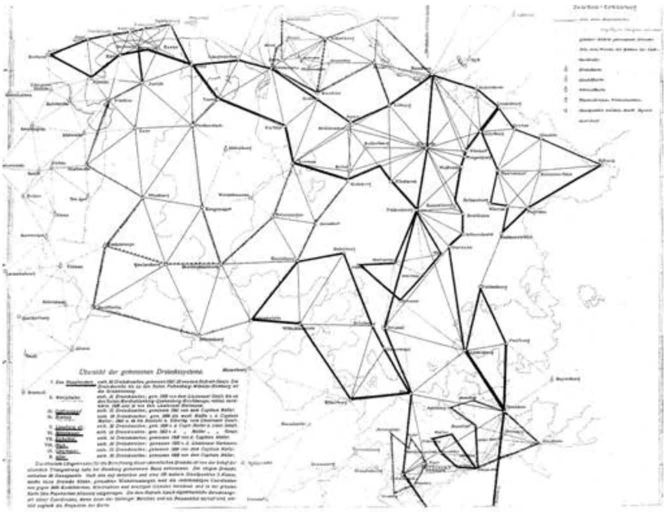

Figura 15. A rede de triangulação do C. F. Gauß (Gauß: Werke, Band 9, 1903).

Para Gauß, essas triangulações não foram uma obrigação inoportuna. Pelo contrário, foi um prazer para ele caminhar durante o dia de uma aldeia a outra a fim de estabelecer “Richtstrecken” – linhas de divisa – que deveriam possibilitar determinações exatas das distâncias e dos ângulos, e passar as noites sempre em novos alojamentos com cálculos nunca acabados. Parece não ser tão bem conhecido que Gauß não somente planejou e construiu novas ferramentas geodésicas para tais tarefas – um dos sucessos notáveis dele foi o de ter construído heliógrafos de tal maneira que funcionavam mesmo com céu nublado e através de distâncias maiores – mas também ter aperfeiçoado teorias matemáticas que fundaram a geodésia – por exemplo, pesquisando sobre “mapeamentos conformes”. Ele publicou ainda sobre assuntos – como ele mesmo chamou – da geodésia superior (*höhere Geodäsie*).

Fica patente então que ambos, Gauß I e Gauß II necessitavam intensivamente dos logaritmos para os cálculos complicados e complexos, deles, na geodésia e na agrimensura. Gauß II desenvolveu, por isso, a nova tábua dos logaritmos que foi tão prática.

E Gauß I? Vocês talvez agora não ficarão mais surpresos – apesar da equação dos conjuntos como estabelecida e mostrada antes - ao saber que Gauß I publicou várias resenhas sobre tábuas de logaritmos editadas! Todas estas resenhas foram escritas sob o ponto de vista do cientista prático que quis realizado, o máximo possível, as ferramentas que facilitassem de uma maneira verdadeiramente ótima o trabalho do cálculo para os cientistas da matemática e da astronomia – um interesse evidentemente altamente legítimo em épocas que antecedem a dos computadores.

E nas resenhas que produziu, Gauß entrou mesmo em detalhes do arranjo e da impressão porque – como ele sublinhou – mesmo “pequenas facilidades” no uso das tábuas produzem efeitos enormes quando as operações “repetem-se milhares de vezes” (Gauß 1812, p. 498).

Na resenha entusiástica da nova tábua do Babbage, de 1827, Gauß discutiu extensamente a necessidade de uma otimização para o “calculador treinado”:

> “Quem procura somente de vez em quando alguns logaritmos nas tábuas, há de requerer em geral a exatidão a possível máxima. Porém, para outros, para quem as tábuas constituem a ferramenta do trabalho de cada dia, as instâncias, mesmo as mais insignificantes que podem influenciar a facilidade do uso não ficam mais insignificantes. Cor, grossura e beleza do papel; tinta da impressão; arranjo dos números, a fim de achar o que se procura sem fadiga do olho; presença de tudo que é preciso, mas também a ausência de tudo que não é necessário e que poderia perturbar a boa disposição: todas essas instâncias recebem uma certa importância para um negócio que se repete a cada dia cem vezes”. (Gauß 1828, 253).

Gauß dedicou-se, assim, tão intensivamente à questão da exatidão das tábuas que publicou uma obra própria sobre a probabilidade de erros cometidos em calcular as tábuas de logaritmos.

Assim fica evidente que não somente Gauß II foi um bom calculador numérico mas que Gauß I também foi um, pelo menos, com a mesma qualidade. Gauß I empregou estas qualidades não apenas construtivamente para os próprios trabalhos na astronomia e geodésia, mas também para o de outros, pela elaboração de tábuas. Por exemplo, ele publicou em 1815 tábuas chamadas hipsométricas, então tábuas para efetuar medidas de altitudes por meio de barômetros:

Beobachtungen und Berechnungen der *Pallas*, des Winter-Solstitiums von 1814; des Kometen von 1815 und Tafeln fürs Höhenmessen mit dem Barometer, vom Hrn. Prof. und Ritter *Gauſs*, in Göttingen, aus Briefen desselben.

Vom 1. Febr. 1815.

Die auch im letzten Jahrbuche vorkommenden Berechnungen für die *Pallas* haben sich wiederum auf das beste bestätigt. Ich selbst habe zwar den Planeten nur Einmal mit dem Kreismikrometer beobachtet

1814.	M. Z.	G. Aufst.	Abw.
Sept. 16	12U 1′ 1″	146° 16′ 23″4	11° 4′ 20″9 S.

allein durch eine schätzbare Reihe von Meridianbeobachtungen von den Herren *von Lindenau*, *Bessel* und *Schumacher* wurde ich in den Stand gesetzt die Opposition gut zu berechnen. Wegen der Details beziehe ich mich auf die G. G. A. St. 199 und führe hier bloſs das Endresultat an:

1814. Oct. 25. 12U 55′ 22″ M. Z. in Göttingen
wahre Länge .... 31° 58′ 11″3
geocentrische Breite, südl.... 37 20 53 2

Die sämmtlichen 10 bisherigen Oppositionen werden durch meine Theorie bis auf wenige Sekunden dargestellt.

Hr. *Enke* hat die verdienstliche Arbeit über sich genommen, die Rechnungen für die nächste Erscheinung im Voraus zu machen. Ich setze hier sein Resultat für die XI. Opposition her:

1816.

Figura 16. Gauß 1815, p. 167: a primeira página.

Tafel II.

Correction von A. Argument die Polhöhe.

Polh.	+		Polh.	+		Polh.	+	
0°	124	90°	15°	107	75°	30°	62	60°
1	123	89	16	105	74	31	58	59
2	123	88	17	102	73	32	54	58
3	123	87	18	100	72	33	50	57
4	122	86	19	97	71	34	46	56
5	122	85	20	95	70	35	42	55
6	121	84	21	92	69	36	38	54
7	120	83	22	89	68	37	34	53
8	119	82	23	86	67	38	30	52
9	118	81	24	83	66	39	26	51
10	116	80	25	79	65	40	21	50
11	115	79	26	76	64	41	17	49
12	113	78	27	73	63	42	13	48
13	111	77	28	69	62	43	9	47
14	109	76	29	65	61	44	4	46
15	107	75	30	62	60	45	0	45
	—	Polh.		—	Polh.		—	Polh.

Tafel III.

	+		+		+
1,9	1	2,8	4	3,4	17
2,3	1	2,9	5	3,5	22
2,4	2	3,0	7	3,6	27
2,5	2	3,1	9	3,7	34
2,6	3	3,2	11	3,8	43
2,7	3	3,3	14	3,9	54
2,8	4	3,4	17		

Gebrauch der Tafeln

t,t′ Temperatur der Luft; T,T′ Temperatur des Quecksilbers (nach Reaumur); b,b′ Barometerstand (in beliebigem Maaſs).

Man vermindere log b und log b′ resp. um 10 T, 10 T′ (als Einheiten der 5ten Decimale betrachtet, und ziehe die so corrigirten Logarithmen von einander ab, der Unterschied sey = u. Man addire log u und A, nachdem man, wenn man es für nöthig hält, letzteres nach der zweiten Tafel (die eben so wie die dritte Einheiten in der 5ten Decimale gibt) corrigirt hat; die Summe

Figura 17. Gauß 1815, p. 170 extrato da tábua com explicação do uso.

A fim de aumentar ainda o grau de concordância entre Gauß I e Gauß II quanto à prática numérica, eu vou surpreender vocês pelo fato de que existem na verdade também tábuas de logaritmos pelo próprio Gauß I! Devo admitir que eu mesmo fui surpreendido por isso, porque as tábuas não constam das obras completas dele e eu não as encontrei mencionadas na literatura biográfica. Uma edição tardia das tábuas foi feita por Theodor Wittstein, um matemático de Hanovre, em 1866:


SIEBENSTELLIGE
GAUSSISCHE LOGARITHMEN
AUFFINDUNG DES LOGARITHMUS DER SUMME ODER DIFFERENZ ZWEIER ZAHLEN, DEREN LOGARITHMEN GEGEBEN SIND.
THEODOR WITTSTEIN,
HANNOVER.

Figura 18. Folha de rosto: Wittstein 1866.

Como indica o título, trata-se de tábuas específicas de logaritmos, como complemento às tábuas "ordinárias".

A primeira publicação por Gauß ocorreu em 1812, em uma revista (Figura 19).

O título do artigo evidencia a tarefa específica da tábua: a saber, achar o logaritmo de uma soma e de uma diferença de duas quantidades, quando se conhecem das duas quantidades somente os logaritmos. As tábuas têm então a vantagem e a função de evitar primeiramente a procura dos números que expressam as quantidades. Gauß justificou a tarefa das suas novas tábuas assim:

> "Quanto mais amplamente se estendem os negócios dos astrônomos calculadores, tanto mais importante torna-se para eles cada facilidade que em si poderia parecer assim pequena . [...] a pequena tábua é todavia não verdadeiramente astronômica, porém há de ser particularmente bem-vinda ao astrônomo calculador [...]. O negócio, que a tábua deve facilitar,

encontra-se a cada momento nos cálculos astronômicos; sem a tábua é preciso procurar três vezes os logaritmos – ou após uma transformação fácil, em todo caso, duas vezes; mas aqui as operações reduzem-se a uma só”. (Gauß 1828, 253)

498 *Monatl. Correſp. 1812. NOV.*

XXXVI.

TAFEL

zur

bequemern Berechnung des Logarithmen der Summe oder Differenz zweyer Gröſsen, welche ſelbſt nur durch ihre Logarithmen gegeben ſind.

Von

Herrn Prof. *Gauſs.*

Je weiter ſich beſtändig die Geſchäfte der rechnenden Aſtronomen ausdehnen, deſto wichtiger wird ihnen jede, wenn auch an ſich nur kleine Erleichterung derſelben. Die *Monatliche Correſpondenz* hat ſich hierin ſchon vielfältige Verdienſte erworben, indem ſie mancherley Tafeln aufgenommen hat, deren kleiner Umfang nicht verſtattete, ſie beſonders herauszugeben. Ich lege daher gern in derſelben eine kleine Tafel nieder, die freylich nicht eigentlich aſtronomiſch iſt, aber beſonders doch den rechnenden Aſtronomen willkommen ſeyn wird, und die etwa in Zukunft ſehr zweckmäſsig mit einem neuen Abdruck der kleinen *La Lande*'ſchen Tafeln verbunden werden könnte. Das Geſchäft, was ſie erleichtern ſoll, kommt bey aſtronomiſchen Rechnungen alle Augenblick vor; es erfordert ſonſt ein dreymaliges, oder wenn man eine leichte Verwandlung anwen-

Figura 19. Gauß 1812, p. 498.

Vou dar um exemplo de uma página de tal tábua de Gauß, de 1812, que mostra as três entradas *A*, *B* e *C*:

XXXVI. Tafel z. bequem. Berech. d. Logarithm. etc. 509

A	B		C		A	B		C	
0,560	0,10565	21	0,66565	79	0,600	0,09732	20	0,69732	80
0,561	0,10544	22	0,66644	78	0,601	0,09712	20	0,69812	80
0,562	0,10522	21	0,66722	79	0,602	0,09692	20	0,69892	80
0,563	0,10501	22	0,66801	78	0,603	0,09672	20	0,69972	80
0,564	0,10479	21	0,66879	79	0,604	0,09652	20	0,70052	80
0,565	0,10458	21	0,66958	79	0,605	0,09632	20	0,70132	80
0,566	0,10437	22	0,67037	78	0,606	0,09612	19	0,70212	81
0,567	0,10415	21	0,67115	79	0,607	0,09593	20	0,70293	80
0,568	0,10394	21	0,67194	79	0,608	0,09573	20	0,70373	80
0,569	0,10373	22	0,67273	78	0,609	0,09553	20	0,70453	80
0,570	0,10351	21	0,67351	79	0,610	0,09533	19	0,70533	81
0,571	0,10330	21	0,67430	79	0,611	0,09514	20	0,70614	80
0,572	0,10309	21	0,67509	79	0,612	0,09494	20	0,70694	80
0,573	0,10288	21	0,67588	79	0,613	0,09474	19	0,70774	81
0,574	0,10267	21	0,67667	79	0,614	0,09455	20	0,70855	80
0,575	0,10246	21	0,67746	79	0,615	0,09435	19	0,70935	81
0,576	0,10225	21	0,67825	79	0,616	0,09416	20	0,71016	80
0,577	0,10204	21	0,67904	79	0,617	0,09396	19	0,71096	81
0,578	0,10183	21	0,67983	79	0,618	0,09377	20	0,71177	80
0,579	0,10162	21	0,68062	79	0,619	0,09357	19	0,71257	81
0,580	0,10141	21	0,68141	79	0,620	0,09338	19	0,71338	81
0,581	0,10120	20	0,68220	80	0,621	0,09319	20	0,71419	80
0,582	0,10100	21	0,68300	79	0,622	0,09299	19	0,71499	81
0,583	0,10079	21	0,68379	79	0,623	0,09280	19	0,71580	81
0,584	0,10058	20	0,68458	80	0,624	0,09261	19	0,71661	81
0,585	0,10038	21	0,68538	79	0,625	0,09242	19	0,71742	81
0,586	0,10017	21	0,68617	79	0,626	0,09223	19	0,71823	81
0,587	0,09996	20	0,68696	80	0,627	0,09204	20	0,71904	80
0,588	0,09976	21	0,68776	79	0,628	0,09184	19	0,71984	81
0,589	0,09955	20	0,68855	80	0,629	0,09165	19	0,72065	81
0,590	0,09935	21	0,68935	79	0,630	0,09146	19	0,72146	81
0,591	0,09914	20	0,69014	80	0,631	0,09127	19	0,72227	81
0,592	0,09894	20	0,69094	80	0,632	0,09108	18	0,72308	82
0,593	0,09874	21	0,69174	79	0,633	0,09090	19	0,72390	81
0,594	0,09853	20	0,69253	80	0,634	0,09071	19	0,72471	81
0,595	0,09833	20	0,69333	80	0,635	0,09052	19	0,72552	81
0,596	0,09813	20	0,69413	80	0,636	0,09033	19	0,72633	81
0,597	0,09793	20	0,69493	80	0,637	0,09014	18	0,72714	82
0,598	0,09773	21	0,69573	79	0,638	0,08996	19	0,72796	81
0,599	0,09752	20	0,69652	80	0,639	0,08977	19	0,72877	81
0,600	0,09732		0,69732		0,640	0,08958		0,72958	

Mon. Corr. XXV I. B. 1812 L 1

Figura 20. Gauß 1812, p. 509.

Como se vê, Gauß calculou a tábua com cinco casas decimais, mas exprimiu o desejo de que outra pessoa calculasse com sete casas. Isto aconteceu de fato mais tarde, com dois de seus alunos, Matthiesen e Zech. No entanto, estas tábuas nunca se tornaram realmente divulgadas, como relata Wittstein no prefácio da sua edição:

Introduction.

Les logarithmes de Gauss ont pour objet de faire

trouver le logarithme de la somme ou de la différence de deux nombres par le moyen de leurs logarithmes, ces nombres étant eux-mêmes inconnus.

C'est là une des conceptions qui ont illustré ce grand géomètre, et dont le calculateur pratique sait bien reconnaître la valeur, et pourtant ces logarithmes n'ont pas encore pu obtenir la sanction de l'usage universel. Cela tient sans doute à la construction des Tables dressées jusqu'ici qui laisse à désirer à plusieurs égards. Ainsi, pour ne parler que des logarithmes à *sept chiffres* de Gauss, lesquels n'existent encore que dans les Tables de Matthiessen et de Zech, celle de Matthiessen doit à l'ingénieuse complication même de son arrangement de n'être jamais, que je sache, devenue ce qu'on appelle d'un usage ordinaire. Quant à Zech, il voulut éviter cet écueil, et, dans l'intérêt de la clarté, il divisa sa Table en deux tables complètement distinctes, l'une pour l'addi-

Einleitung.

Die Gaussischen Logarithmen, welche den Zweck haben:

Aus den gegebenen Logarithmen zweier Zahlen den Logarithmus ihrer Summe oder ihrer Differenz zu finden, ohne diese Zahlen selbst zu kennen,

sind eine derjenigen Schöpfungen dieses grossen Meisters, deren Werth der praktische Rechner wohl zu schätzen weiss; doch ist die allgemeine Anwendung dieser Logarithmen bis jetzt daran gescheitert, dass die Anordnung derselben in den bisherigen Tafeln noch immer Mehreres zu wünschen übrig gelassen hat. Was insbesondere die *siebenstelligen* Gaussischen Logarithmen betrifft, welche bis jetzt nur in den Tafeln von Matthiessen und Zech existiren, so ist die Tafel von Matthiessen wegen ihrer zu künstlichen Einrichtung wohl niemals eigentlich in den Gebrauch gekommen; und wenn Zech, um dieselbe Klippe zu vermeiden, seine Tafel in zwei völlig von einander getrennte Tafeln zerlegt hat, von denen die eine nur für die Addition, und die andere nur für die Subtraction bestimmt ist, so kann jeden-

Figura 21. Wittstein 1866, p. VI.

Wittstein empreendeu então, em 1859, uma nova iniciativa para melhorar a representação gráfica e fazer o uso mais simples da tábua com cinco casas; e, em 1866, ele aplicou o seu método à tábua com sete casas. A abordagem de Wittstein foi a de reduzir as três entradas a duas entradas ou a duas colunas, A e B, em vez das três, como em Gauß.

As colunas A e B contêm os logaritmos log*x* e log *x*+*a*, para *x* de 0 até o infinito. A tábua pode servir também para achar as tangentes duplas e as secantes duplas entre 0 e 90 graus.

A 0,450 — B 0,581 55

A	B 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,450	0,581 8795	9533	.0271	.1009	.1748	.2486	.3224	.3963	.4701	.5440
0,451	0,582 6178	6917	7655	8394	9133	9871	.0610	.1349	.2088	.2827
0,452	0,583 3566	4305	5044	5783	6522	7261	8001	8740	9479	.0219
0,453	0,584 0958	1698	2437	3177	3916	4656	5396	6135	6875	7615
0,454	8355	9095	9835	.0575	.1315	.2055	.2795	.3535	.4275	.5015
0,455	0,585 5756	6496	7237	7977	8717	9458	.0199	.0939	.1680	.2421
0,456	0,586 3162	3902	4643	5384	6125	6866	7607	8348	9089	9830
0,457	0,587 0571	1312	2054	2795	3536	4278	5019	5761	6502	7244
0,458	7986	8727	9469	.0211	.0953	.1694	.2436	.3178	.3920	.4662
0,459	0,588 5404	6146	6889	7631	8373	9115	9858	.0600	.1342	.2085
0,460	0,589 2827	3570	4313	5055	5798	6541	7283	8026	8769	9512
0,461	0,590 0255	0998	1741	2484	3227	3970	4714	5457	6200	6944
0,462	7687	8430	9174	9917	.0661	.1405	.2148	.2892	.3636	.4379
0,463	0,591 5123	5867	6611	7355	8099	8843	9587	.0331	.1076	.1820
0,464	0,592 2564	3308	4053	4797	5542	6286	7031	7775	8520	9264
0,465	0,593 0009	0754	1499	2244	2988	3733	4478	5223	5968	6713
0,466	7459	8204	8949	9694	.0440	.1185	.1930	.2676	.3421	.4167
0,467	0,594 4912	5658	6404	7150	7895	8641	9387	.0133	.0879	.1625
0,468	0,595 2371	3117	3863	4609	5355	6101	6848	7594	8340	9087
0,469	9833	.0580	.1326	.2073	.2820	.3566	.4313	.5060	.5807	.6553
0,470	0,596 7300	8047	8794	9541	.0288	.1035	.1783	.2530	.3277	.4024
0,471	0,597 4772	5519	6266	7014	7761	8509	9256	.0004	.0752	.1499
0,472	0,598 2247	2995	3743	4491	5239	5987	6735	7483	8231	8979
0,473	9727	.0475	.1224	.1972	.2720	.3469	.4217	.4966	.5714	.6463
0,474	0,599 7212	7960	8709	9458	.0207	.0955	.1704	.2453	.3202	.3951
0,475	0,600 4700	5449	6198	6948	7697	8446	9196	9945	.0694	.1444
0,476	0,601 2193	2943	3692	4442	5192	5941	6691	7441	8191	8941
0,477	9691	.0441	.1191	.1941	.2691	.3441	.4191	.4941	.5691	.6442
0,478	0,602 7192	7943	8693	9444	.0194	.0945	.1695	.2446	.3197	.3947
0,479	0,603 4698	5449	6200	6951	7702	8453	9204	9955	.0706	.1457
0,480	0,604 2208	2960	3711	4462	5214	5965	6717	7468	8220	8971
0,481	9723	.0475	.1226	.1978	.2730	.3482	.4234	.4986	.5738	.6490
0,482	0,605 7242	7994	8746	9498	.0251	.1003	.1755	.2508	.3260	.4012
0,483	0,606 4765	5517	6270	7023	7775	8528	9281	.0034	.0787	.1539
0,484	0,607 2292	3045	3798	4551	5305	6058	6811	7564	8317	9071
0,485	9824	.0578	.1331	.2084	.2838	.3592	.4345	.5099	.5853	.6606
0,486	0,608 7360	8114	8868	9622	.0376	.1130	.1884	.2638	.3392	.4146
0,487	0,609 4900	5655	6409	7163	7918	8672	9427	.0181	.0936	.1690
0,488	0,610 2445	3200	3954	4709	5464	6219	6974	7729	8484	9239
0,489	9994	.0749	.1504	.2259	.3014	.3770	.4525	.5280	.6036	.6791
0,490	0,611 7547	8302	9058	9814	.0569	.1325	.2081	.2836	.3592	.4348
0,491	0,612 5104	5860	6616	7372	8128	8884	9641	.0397	.1153	.1909
0,492	0,613 2666	3422	4178	4935	5691	6448	7205	7961	8718	9475
0,493	0,614 0231	0988	1745	2502	3259	4016	4773	5530	6287	7044
0,494	7801	8559	9316	.0073	.0831	.1588	.2346	.3103	.3861	.4618
0,495	0,615 5376	6133	6891	7649	8407	9165	9922	.0680	.1438	.2196
0,496	0,616 2954	3712	4470	5229	5987	6745	7503	8262	9020	9779
0,497	0,617 0537	1296	2054	2813	3571	4330	5089	5847	6606	7365
0,498	8124	8883	9642	.0401	.1160	.1919	.2678	.3437	.4197	.4956
0,499	0,618 5715	6474	7234	7993	8753	9512	.0272	.1031	.1791	.2551
0,500	0,619 3310	4070	4830	5590	6350	7110	7870	8630	9390	.0150
A	B 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

	738	739	740	741	742
1	73,8	73,9	74,0	74,1	74,2
2	147,6	147,8	148,0	148,2	148,4
3	221,4	221,7	222,0	222,3	222,6
4	295,2	295,6	296,0	296,4	296,8
5	369,0	369,5	370,0	370,5	371,0
6	442,8	443,4	444,0	444,6	445,2
7	516,6	517,3	518,0	518,7	519,4
8	590,4	591,2	592,0	592,8	593,6
9	664,2	665,1	666,0	666,9	667,8

	743	744	745	746
1	74,3	74,4	74,5	74,6
2	148,6	148,8	149,0	149,2
3	222,9	223,2	223,5	223,8
4	297,2	297,6	298,0	298,4
5	371,5	372,0	372,5	373,0
6	445,8	446,4	447,0	447,6
7	520,1	520,8	521,5	522,2
8	594,4	595,2	596,0	596,8
9	668,7	669,6	670,5	671,4

	747	748	749	750	751
1	74,7	74,8	74,9	75,0	75,1
2	149,4	149,6	149,8	150,0	150,2
3	224,1	224,4	224,7	225,0	225,3
4	298,8	299,2	299,6	300,0	300,4
5	373,5	374,0	374,5	375,0	375,5
6	448,2	448,8	449,4	450,0	450,6
7	522,9	523,6	524,3	525,0	525,7
8	597,6	598,4	599,2	600,0	600,8
9	672,3	673,2	674,1	675,0	675,9

	752	753	754	755
1	75,2	75,3	75,4	75,5
2	150,4	150,6	150,8	151,0
3	225,6	225,9	226,2	226,5
4	300,8	301,2	301,6	302,0
5	376,0	376,5	377,0	377,5
6	451,2	451,8	452,4	453,0
7	526,4	527,1	527,8	528,5
8	601,6	602,4	603,2	604,0
9	676,8	677,7	678,6	679,5

	756	757	758	759	760
1	75,6	75,7	75,8	75,9	76,0
2	151,2	151,4	151,6	151,8	152,0
3	226,8	227,1	227,4	227,7	228,0
4	302,4	302,8	303,2	303,6	304,0
5	378,0	378,5	379,0	379,5	380,0
6	453,6	454,2	454,8	455,4	456,0
7	529,2	529,9	530,6	531,3	532,0
8	604,8	605,6	606,4	607,2	608,0
9	680,4	681,3	682,2	683,1	684,0

A 0,500 — B 0,619

Figura 22. Wittstein 1866, p. 55.

O uso se explica assim. Primeiro para a soma:

Sejam dados log *a* e log *b*: Se *A* = log *a* e *B* = log (*a*+1): Como achar log (*a*+*b*)?

$$\log a - \log b = \log \tfrac{a}{b}$$
$$\Rightarrow B = \log(\tfrac{a}{b} + 1) = \log(\tfrac{a+b}{b}) = \log(a+b) - \log b$$
$$\Rightarrow B + \log b = \log(a+b)$$

Por outro lado, para a diferença: Sejam dados log *a* e log *b* e se *A*=log *a* e *B*=log (*a*+1): como achar log (*a*-*b*)?

$$\log a - \log b = \log \tfrac{a}{b}$$
$$\Rightarrow A = \log(\tfrac{a}{b} - 1) = \log(\tfrac{a.b}{b}) = \log(a-b) - \log b$$
$$\Rightarrow A + \log b = \log(a-b)$$

CONCLUSÃO

Resumindo, podemos constatar que o sentido duplo da palavra “geômetra” e a inter-relação entre matemática pura e matemática aplicada têm nos levado a perceber que os primeiros resultados não foram corretos. Devido a várias interseções podemos constatar como resultado definitivo:

$$\text{Gauß} \cap \text{Gauß} \neq \varnothing$$

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Regina Almeida de Cassia Manso, Rio de Janeiro, pela revisão do texto em Português [Versão revisada da palestra convidada no IV HTEM (História e Tecnologia no Ensino da Matemática), 5.-10. Maio 2008].

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Cantor, Moritz (1875). *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst: eine historisch-mathematische Untersuchung*. Leipzig:

Gauß. C. F. (1812). Tafel zur bequemern Berechnung des Logarithmen der Summe oder Differenz zweyer Größen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind. *Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde*. 1812, November, 498-528.

Gauß, C. F. (1815). Beobachtungen und Berechnungen der Pallas, des Winter-Solstitiums von 1814; des Kometen von 1815 und Tafeln fürs Höhenmessen mit dem Barometer, vom Hrn. Prof. und Ritter Gauß, in Göttingen, aus Briefen desselben. Bode (ed.), *Astronomisches Jahrbuch* für 1815. Berlin:Duemmler, 1818, 167-173.

Gauß, C. F. (1828). Review: Table of logarithms of the natural numbers, from 1 to 108000, by Charles Babbage. London 1827. *Göttingische gelehrte Anzeigen*, 19. Januar 1828. Reprint in: Gauß, *Werke*, Vol.3. Göttingen 1866, 253-254.

Gauß, F. G. (1958). *Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln*. Große Schulausgabe. 171.-180. Auflage. Stuttgart: K. Wittwer.

Herodot (1995). *Historien: griechisch-deutsch*. Josef Feix (Ed.). Band 1: Bücher I – V. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Herodotus (1987). *The history*. Transl. by David Grene. Chicago: Univ. of Chicago Press.

Hérodote (1970). *Histoires*. Texte etabli et traduit par Ph.-E. Legrand. Vol. 2 *Euterpe*. Paris: Les Belles Lettres.

Kaunzner, W. (1992), Logarithms. In: I. Grattan-Guinness (Ed.), *Companion Encyclopdia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. London: Routledge, 210-228.

Küssner, Martha (1979). *Carl Friedrich Gauß und seine Welt der Bücher*. Göttingen: Musterschmidt.

Miorim, M.A.; Miguel, A. (2002). *Os logaritmos na cultura escolar brasileira*. Natal: Editora da SBHMat.

Neue Deutsche Biographie (1964). Verbete „Friedrich Gustav Gauß", vol. 6. Berlin: Duncker & Humblot, 108.

Reidt-Wolff (1957). *Die Elemente der Mathematik. Aufgabensammlung. Mittelstufe. Band 1: Algebra und Arithmetik*. Schroedel: Hannover.

Tropfke, Johannes (1980). *Geschichte der Elementarmathematik*. Vol. 1, *Arithmetik und Algebra* 4. Auflage; vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel et al. Berlin: de Gruyter

Wittstein, Theodor (1866*). Siebenstellige Gaussische Logarithmen zur Auffindung des Logarithmus der Summe oder Differenz zweier Zahlen, deren Logarithmen gegeben sind: In neuer Anordnung*. Hannover. Hahn.

Wußing, Hans (1989). *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Autor

Gert Schubring. Institut für Didaktik der Mathematik. Universität Bielefeld. Germany; gert.schubring@uni-bielefeld.de