

MARÍA ARAVENA, CARLOS CAAMAÑO, JOAQUÍN GIMÉNEZ

MODELOS MATEMÁTICOS A TRAVÉS DE PROYECTOS

MATHEMATICAL MODELS THROUGH PROJECTS

RESUMEN. Esta investigación analiza la producción matemática de un grupo de estudiantes de secundaria cuando se enfrentan al trabajo de proyectos basado en la modelización de situaciones. La elaboración e implementación de la propuesta didáctica tomó en cuenta a diversos estudios que muestran la conveniencia de incorporar este tipo de trabajo al aula, tanto para superar obstáculos y dificultades como para el desarrollo de habilidades matemáticas. Para el análisis de las producciones de los alumnos –objeto de estudio de caso– se diseñaron categorías que permitieron valorar esta metodología. A nivel de resultados, hay un desarrollo manifiesto de capacidades cognitivas, metacognitivas y de formación transversal, así como un desempeño eficiente en el uso de conceptos y procesos matemáticos.

PALABRAS CLAVE: Modelos matemáticos, procesos de modelización, modelos y proyectos, educación secundaria.

ABSTRACT. In this research we analyze the mathematical production of a group of secondary students when faced with the task of projects based on the modelization of situations. In the development and implementation of the didactic proposal several studies were considered that illustrated the benefits of introducing this type of work into the classroom as much to overcome obstacles and difficulties as to develop mathematical skills. In order to analyze students' production, the object of this case study, categories were designed to enable the evaluation of this methodology. On a results level, there is a manifest development of cognitive and metacognitive capacities and of transversal formation, in addition to an efficient performance in the utilization of concepts and mathematical processes.

KEY WORDS: Mathematical models, modelization processes, models and projects, secondary education

RESUMO. Nesta investigação se analisa a produção matemática de um grupo de estudantes da escola secundária, quando se propõe um trabalho de projetos baseado na modelagem de situações. Na elaboração e implementação da proposta didática, se consideraram diversos estudos que mostram a conveniência de se incorporar em sala de aula este tipo de trabalho, tanto para superar obstáculos e dificuldades como para o desenvolvimento de habilidades matemáticas. Para a análise das produções dos alunos, objeto do estudo, se desenharam categorias que permitiram aplicar esta metodologia. A nível de resultados a um manifesto de capacidades cognitivas, metacognitivas e de formação transversal, como também, um desempenho eficiente na utilização de conceitos e processos matemáticos.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2008) 11(1): 49-92
Recepción: Enero 23, 2007/Aceptación: Febrero 26, 2008

PALAVRAS CHAVE: Modelos matemáticos, processos de modelagem, modelos e projetos, educação secundária.

RÉSUMÉ. Cette recherche analyse la production mathématique d'un groupe d'étudiants du Collège, lorsqu'ils réalisent des projets portant sur la modélisation des situations. Pour l'élaboration et l'implémentation du choix didactique, on a considéré diverses études montrant la pertinence d'incorporer ce type de travail dans la salle de classe. En effet, cela permet de surmonter des obstacles et des difficultés et de développer des habilités mathématiques. Pour l'analyse des productions des élèves, l'objet de cette étude, on a conçu des catégories mettant en valeur cette méthodologie. Au niveau des résultats, on remarque un développement manifeste des capacités cognitives, métacognitives, de formation transversale et une pratique efficace dans l'utilisation des concepts et des processus mathématiques.

MOTS CLÉS: Modèles mathématiques, processus de modélisation, modèles et projets, éducation niveau collège

1. ANTECEDENTES

La formación matemática que se enseña en los establecimientos municipalizados de la educación secundaria chilena, salvo excepciones, está sustentada en un trabajo que no considera la resolución de problemas. La bibliografía revisada apunta que una de las dificultades es la forma como se articula el contenido en el aula, el cual se orienta preferentemente hacia el ámbito puramente matemático, basado en la ejercitación y el manejo de algoritmos, pero ofrece escasa vinculación con problemas del mundo real y de las ciencias. Esto trae como consecuencia que los estudiantes no conciban la utilidad de la matemática en su proceso de formación (Aravena, 2002).

Los resultados de los diagnósticos efectuados en Chile, durante los últimos años, dieron cuenta del estado de la educación media. En los análisis de dichos diagnósticos se pone de manifiesto que en el aprendizaje de la matemática se entrega una visión artificial del conocimiento, la cual no comunica bien el saber científico, no ofrece un acercamiento auténtico al proceso investigativo y sólo da un acceso esquemático y restringido a una imagen, no siempre contemporánea, del mundo físico y humano. Las prácticas de evaluación tampoco contribuyen a desarrollar capacidades de alto nivel, pues se basan en pruebas escritas descontextualizadas que privilegian la memorización, los algoritmos y la parcelación del conocimiento, dejando de lado las aplicaciones en contextos auténticos.

Se reconoce además que la Región del Maule, donde se ha realizado esta investigación, es históricamente una de las áreas geográficas con los rendimientos más deficientes en las mediciones nacionales. Los resultados del SIMCE (2004) muestran bajos niveles de logro en matemáticas a escala básica y media; además, se puede apreciar que estas diferencias son mayores en los establecimientos municipalizados que atienden a sectores de nivel socioeconómico medio bajo y, aún más en los sectores rural y marginal, en los que se manifiesta la diversidad en forma clara.

De igual modo, la formación educativa en la Región del Maule es poco coherente con las necesidades locales, ya que no se entrega una formación con visión de futuro; la ciencia, las materias y los temas escolares no satisfacen las demandas del entorno ni responden a los desafíos actuales y próximos. En la asignatura de matemática, por lo general la enseñanza se limita al análisis de los temas más fáciles o utiliza versiones muy simplificadas de los temas tratados. Con ello, se renuncia fácilmente a que la mayoría de los alumnos realice aprendizajes significativos (Aravena, 2002).

Respecto a los temas matemáticos, salvo contadas excepciones, la enseñanza no contempla la integración con otras áreas del conocimiento ni entre la propia matemática, lo cual impide a los alumnos dar significado a las ideas, conceptos matemáticos y no matemáticos. Lo anterior coincide con investigaciones que ratifican tal situación, y recomiendan que la enseñanza debe plantear diversas aproximaciones –con el uso de diversas perspectivas– para mostrar a los estudiantes sus conexiones con las diferentes áreas del conocimiento (Hitt, 1998; Sierpinska, 1996).

Por su parte, los reportes a nivel internacional presentan numerosas propuestas que han permitido romper con la atomización del currículo tradicional de matemática. Dentro de ellas se encuentra el modelaje de situaciones matemáticas y el trabajo de proyectos, que explicita claramente que la incorporación de este tipo de experiencias al currículo adquiere real importancia en la formación matemática actual, ya que propicia la adquisición de competencias y capacidades para desenvolverse satisfactoriamente en el mundo actual; de igual manera, coloca a disposición de los estudiantes un conjunto de recursos que les permite entender en forma más amplia la aplicabilidad de los conceptos y procesos matemáticos (Gómez, 1998; Aravena, 2001). En diferentes países y condiciones, el trabajo de proyectos que se basa en la modelización ha preparado a los alumnos para una mejor inserción en una sociedad donde se necesita no sólo enfrentar y resolver problemas, tomar decisiones o hacer estimaciones, sino también plantear nuevos problemas (Griffiths & Howson, 1974; Gómez, 1998; Aravena, 2001).

Destacamos una serie de factores que justifican la inclusión del modelaje de situaciones mediante proyectos, Entre las más importantes, tenemos: desarrollo tanto de la capacidad para resolver problemas como de la capacidad crítica de la matemática en la sociedad (Niss, 1989); ayuda a comprender conceptos y métodos matemáticos, puesto que modelar permite analizar el comportamiento de numerosos fenómenos en forma aproximada (Niss, 1989); favorece la creatividad y curiosidad matemática en descubrimientos, lo cual motiva a que los estudiantes perciban las necesidades reales de los contenidos (Alsina, 1998; Gómez, 1998). Se reconoce que modelar experiencias tiene relevancia en el sentido de participación y control en la solución de procesos, ya que ayuda a descubrir las dinámicas inherentes a muchas situaciones problemáticas y, al mismo tiempo, sirve como medio para introducir nuevos conceptos (Swetz & Hartzler, 1996).

1.1. *Aplicaciones e integración en matemática a través del modelaje de situaciones*

La importancia de las aplicaciones ha sido señalada por numerosos autores, quienes han justificado las razones fundamentales para incluirla en las actividades matemáticas. Entre las más importantes presentamos las siguientes:

- *Las aplicaciones como motivación.* Aquellos alumnos que no manifiestan un interés por la matemática pueden ser persuadidos a aprender matemáticas por las aplicaciones, de ahí que sean vistas como una herramienta para solucionar problemas prácticos (Griffiths & Howson, 1974).
- *Las aplicaciones como elementos culturales.* Algunas aplicaciones de matemática forman parte de una herencia cultural de la sociedad; dicho factor justificaría por sí mismo la inclusión de las aplicaciones (Griffiths & Howson, 1974).
- *Las aplicaciones como forma de evitar aprendizajes incorrectos.* La forma como la matemática es utilizada a veces en las clases muestra que hay la posibilidad de que los alumnos adquieran nociones groseras e incorrectas, como una tendencia a memorizar fórmulas que no son comprendidas (Griffiths & Howson, 1974).

Ahora bien, si las aplicaciones se integran a través del modelaje, entonces cobran importancia en la enseñanza de numerosos temas matemáticos. Dentro de los argumentos presentados sobresalen los siguientes (Matos et al, 1996; Gómez, 2000; Aravena, 2001):

- *Como argumento formativo.* Las aplicaciones y el modelaje pueden ser trabajados como dos medios adecuados para desarrollar competencias en los alumnos. De este modo se estimula su interés por el descubrimiento, la creatividad y la confianza en sus actividades y recursos.
- *Como argumento de competencia crítica.* La sociedad está cada vez más matematizada con el empleo de modelos matemáticos en todas las esferas de actividades. Por ello, es necesario desarrollar en los alumnos la competencia crítica (entendida como capacidad de reconocer, comprender, analizar y evaluar ejemplos actuales a través de la disciplina) que les permita intervenir en la sociedad como ciudadanos activos, y puedan contribuir a la resolución de problemas relevantes.
- *Como argumento de una visión integrada.* Las aplicaciones y el modelaje en matemáticas ayudan a que los estudiantes adquieran destrezas e interioricen conceptos y métodos matemáticos. Además, los motiva en el estudio de situaciones interesantes que pueden ser exploradas. Desde el punto de vista del aprendizaje, algunos temas muestran tendencia a lograr mayor consistencia cuando son enseñados en contextos de aplicación.
- *Como argumento de utilidad.* Tiene como objetivo de enseñanza preparar a los alumnos en el uso de las matemáticas para resolver problemas de la vida real y de otras áreas (Abrantes,1994).

1.2. Modelización a través de proyectos para el desarrollo de capacidades

El trabajo de proyectos se ha convertido en una vía prometedora para elevar los aprendizajes matemáticos de los estudiantes. Desde esta perspectiva, se reconoce su importancia como estrategia metodológica pertinente para el desarrollo de capacidades y habilidades necesarias en el mundo actual, potenciándose aún más si se trabaja con la modelización de situaciones reales (Abrantes, 1994). Por lo tanto, ofrecer situaciones concretas permite organizar e interpretar información y datos; describir relaciones matemáticas; enfrentar problemas con soluciones múltiples; entender la aplicabilidad de los conceptos y procesos; analizar e interpretar problemas a través de la matemática; entender nuevas ideas; incorporar conocimientos; asimilar información, y adaptarse a los cambios tecnológicos y científicos. Según el enfoque metacognitivo, desarrolla

la creatividad y el interés por el descubrimiento; el transversal, que propicia el desarrollo de habilidades comunicativas orales y escritas (Alsina, 1998; Aravena, 2001) y la comprensión del rol que asumen las matemáticas en una sociedad moderna y postmoderna (Niss, 1992; Keitel, 1993; Abrantes, 1994; De Lange, 1996; William & Ahmed, 1997; Alsina, 1998; Aravena, 2001; Gómez, 2002).

Asimismo, trabajar problemas a través de proyectos se considera una estrategia potente para la formación del pensamiento globalizado, que se concibe como el proceso de búsqueda de las relaciones que pueden establecerse o encontrarse en torno a un tema. Tal aspecto es muy importante en la formación de los alumnos, ya que se pretende desarrollar un sentido, una visión en la forma de relacionarse con la nueva información que haga que su aprendizaje vaya siendo relacional y comprensivo (Alsina, 1998; Aravena, 2001). También se considera que esta metodología de trabajo favorece el empleo creativo de la información porque permite relacionar el conocimiento y su campo de aplicación, vincular ideas de otras áreas para lograr nuevos conceptos, asociar necesidades y recursos, así como resolver problemas sobre la base del conocimiento disponible (Letelier, López y Martínez, 1994; Aravena, 2001).

Otra de las bondades que justifica los proyectos es que ayuda a desarrollar la creatividad, en el sentido que este tipo de trabajo requiere de la flexibilidad para asumir determinadas tareas, como imaginación, capacidad de riesgo, autonomía en la toma de decisiones, capacidad de síntesis y coherencia en la organización del pensamiento reflexivo frente a situaciones nuevas (Abrantes, 1994; Letelier, López & Martínez, 1994). Promueve, además, la proyección del pensamiento estratégico; es uno de los componentes esenciales para desarrollar el espíritu crítico, abierto a aceptar la resolución de problemas, la formulación de nuevos problemas y soluciones; da pie a la autonomía porque el alumno toma sus propias decisiones, al ir adquiriendo una libertad de pensar en la solución de problemas. Con este tipo de trabajo se crean las condiciones para que los estudiantes puedan elaborar y estructurar ideas; renovar tareas; desarrollar el ingenio, curiosidad y agilidad para asociar ideas; hacer adaptaciones a la realidad; propiciar la fluidez verbal, y generar la independencia del pensamiento, de tal forma que digan lo que piensan con convicción, argumenten y expongan sus ideas (Abrantes, 1994; (Letelier, López y Martínez, 1994; Aravena, 2001; Aravena y Giménez, 2002.).

La tendencia en la sociedad actual es la búsqueda de formas participativas de trabajo; por ello, las relaciones interpersonales e intrapersonales se convierten en factor clave para el trabajo de proyectos. Resulta imprescindible la

interacción entre los estudiantes para construir el conocimiento mediante la discusión con sus pares y el trabajo en equipo (Cordero, 1995; Dubinsky, 1996). Los argumentos descritos en las investigaciones se transforman en un aspecto fundamental para este estudio, en especial si se quiere incidir en la estructura cognitiva y en buscar formas de trabajo más eficientes con el fin de desarrollar las capacidades de los estudiantes (Aravena, 2001).

1.3. *Problemática*

A partir de la situación descrita en la sección anterior, nos damos cuenta que tanto en Chile como en numerosos países hay una problemática que no ha sido resuelta. En este marco, nos interesamos por la enseñanza de manera integrada y pensamos que, en este proceso de integración y construcción, la apropiación de conceptos y objetos matemáticos por parte de los estudiantes necesita ser contextualizada en un ambiente de resolución de problemas (Gómez, 1998), a través de la regulación continua de los aprendizajes (Giménez, 1997). Aquí, la planificación sobre el desarrollo del trabajo en proyectos tiene que contemplar una enseñanza investigativa, cíclica y cooperativa (Dubinsky, 1996), al igual que unas bases para su enseñanza (Leontiev, 1993; Jorba y Casellas, 1997; Davydov, 1998, citado en Sepúlveda, 2000).

Dicho énfasis en la integración, que se basa en establecer una relación estrecha de lo algebraico con lo geométrico y analítico, aboga por una forma de trabajo más eficiente, sustentado en la modelización y proyectos. Justificamos que un tratamiento con tales características permite una mejor comprensión de la matemática, puesto que históricamente muchos problemas analíticos no resultaron claros hasta que fueron abordados por métodos algebraicos; asimismo, en la actualidad hay problemas cuya solución obliga a resultados numéricos que son factibles después de su algebrización (Farfán, 1995). Al mismo tiempo, numerosas investigaciones confirman la importancia de la visualización y la intuición geométrica en la comprensión y tratamiento de problemas matemáticos (Zimmermann & Cunningham, 1991; Caamaño, 2001).

Entre las investigaciones hechas en Chile, no se localizan estudios en la educación secundaria acerca de cómo desarrollar un proceso de modelización con el trabajo de proyectos para tratar el contenido matemático. No hay un trabajo que apunte a modelizar situaciones, ni se destaca en los tipos de aplicaciones la integración con diferentes áreas del conocimiento (Aravena, 2001; Aravena y Caamaño, 2007). Los ámbitos que se articularon en esta investigación corresponden a modelización, proyectos y evaluación, donde

mostramos el interés específico del trabajo con base en tres ejes fundamentales: integración álgebra–análisis, inclusión de trabajos de proyectos mediante la modelización y diseño de instrumentos de evaluación para regular este tipo de tarea.

Lo anterior nos situó en la temática de trabajo, que se justifica con los siguientes puntos:

Interés por una temática integradora. En los cursos de matemática hay un planteamiento tradicional de los temas, el cual carece de una visión moderna de enseñanza que responda a los requerimientos actuales. El tratamiento de los temas se hace dejando de lado las aplicaciones, por lo que no se relacionan con las distintas áreas del saber. Se hace necesaria una formación matemática en la que los estudiantes puedan entender nuevas ideas, incorporar conocimientos, asimilar información y adaptarse a los cambios tecnológicos y científicos.

Necesidad de introducir el modelaje. Con todo ello hemos mostrado que existe en Chile –así como en otros países– una desatención al tratamiento modelizador de la matemática, que debería contribuir a una mejor educación en los ámbitos cognitivos, metacognitivos y de formación transversal. Se reconoce además como herramienta potente para formar el pensamiento globalizado y expresar ideas como lenguaje de comunicación creadora de modelos.

Necesidad de trabajo en resolución de problemas y proyectos. La función proyectiva tiene que desarrollarse e incluirse en el trabajo cotidiano que atañe a la formación matemática. Asimismo, la resolución de problemas va a permitir el reconocimiento de los contenidos matemáticos, de forma que se haga consciente su aplicabilidad (Schoenfeld, 1992; Aravena y Giménez, 2002). En este marco se destaca la importancia de las aplicaciones porque enriquecen los recursos para solucionar problemas, impulsan el uso de herramientas tecnológicas, facilitan el insight a aplicaciones matemáticas, propician el desarrollo de un análisis crítico de la información y suscitan una aproximación investigativa en la enseñanza y aprendizaje (Alsina, 1998).

Necesidad de un nuevo planteamiento de evaluación. Los sistemas evaluativos en Chile se han manejado por años en la línea tradicional; predominan fuertemente las pruebas de papel y lápiz. En la actualidad, los sistemas demandan reorientaciones con nuevas formas de enseñanza más activas y eficaces, donde lo más importante es enseñar a los alumnos a construir su propio conocimiento. Una visión moderna de la matemática no sólo debe atender a una formación teórica, que se justifica por sí misma, sino también a una de índole crítico y comunicativo-social mediante la regulación continua (Aravena, 2001).

Por esta razón, nos planteamos realizar un estudio con el siguiente

problema: ¿Cuál es el potencial de un trabajo de modelización matemática en la educación secundaria, de forma que los estudiantes desarrollen un proyecto en grupo?

2. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

El enfoque de la investigación fue de corte cualitativo. Se diseñó una propuesta de trabajo que incorporó como central al trabajo de proyectos y se llevó a cabo un estudio de caso que permitió reconocer el progreso del grupo. Aquí se efectuaron dos análisis:

- a) Una interpretación del contenido, para el cual se establecieron categorías a priori que se consolidaron tras haber revisado el material. Las categorías y subcategorías fueron validadas mediante una triangulación de jueces expertos, de acuerdo con lo que se debe evaluar en un proceso de modelización.
- b) Para ahondar en el trabajo de proyectos en forma grupal, se recogieron datos de cada uno de los grupos de estudio en diferentes momentos de la secuencia. Esto permitió contrastar los resultados obtenidos en distintos momentos con el objetivo de detectar cambios y evoluciones que ha experimentado el grupo de trabajo con el proceso de estudio.

A continuación, se refieren y justifican las distintas etapas de la investigación, así como de la construcción de los instrumentos de análisis.

2.1. *Diseño de la propuesta global. El lugar de los proyectos*

Debido a la relevancia que tiene la matemática en el mundo actual, hemos considerado de vital importancia que haya una complementariedad del pensamiento algebraico con el geométrico y el analítico, lo cual hará que los estudiantes desarrollen esquemas de razonamiento cada vez más abstractos a partir de objetos matemáticos concretos (Hitt, 1998; Caamaño, 2001). A partir de tal reconocimiento, se diseñó una propuesta didáctica en el tema de las funciones que se apoyó en la modelización a través de proyectos en grupo. La propuesta consideró un acercamiento con las distintas áreas del saber e incorporó otros supuestos que hacen hincapié en la importancia del trabajo con

funciones, ya que permite a los estudiantes observar el fenómeno desde distintas perspectivas al transitar por los diferentes sistemas de representación (Janvier, 1987; Font, 2001a). Dichos acercamientos no se pueden entender en forma aislada para el estudio del objeto, sino considerando que “las representaciones dentro de un sistema están relacionadas de manera rica unas con otras” (Goldin & Steingold, 2001, p.2).

Mostramos a continuación el lugar de los proyectos en el aula, donde se refleja que para incorporar dicha metodología es necesario organizar una secuencia de trabajo de aula coherente con el trabajo de proyectos. Por ello, en la sala se implementaron talleres grupales con problemas de modelización sobre diferentes situaciones de la vida real y de las ciencias, a fin de incorporarlos a procesos de modelización. Para la regulación continua y evaluación de cada una de las tareas se diseñó un conjunto de pautas que incluyó a los siguientes elementos reguladores:

- a) Patrones de los aspectos que se quiere evaluar, conocidos por los estudiantes.
- b) Los aspectos cognitivos (qué materia).
- c) Los aspectos metacognitivos (a quién formamos).
- d) Los aspectos transversales (personal-afectivo).
- e) Elementos de adaptación y desempeño.

2.1.1. *La planificación de los proyectos*

El trabajo de proyectos tiene como punto de partida la selección de una situación real que esté en estrecha relación con la temática de estudio y sea susceptible su formulación en términos de una función polinómica (lineal, cuadrática, lineal por tramos). Consiste en resolver un problema real a través del proceso de modelizar una situación que involucre una investigación en terreno, a fin de que los estudiantes puedan asociar los conceptos y procesos matemáticos con otras áreas del saber. Los proyectos de trabajo se desarrollan durante cuatro meses y comprenden las siguientes etapas:

1. *Etapla inicial.* Corresponde a la presentación del trabajo por parte del profesor, la formación de los grupos y la búsqueda y selección del tema de trabajo que sea de interés para el grupo.
2. *Etapla de elaboración.* Atañe a los estados de avance o la organización que tienen las etapas para elaborar el proyecto. La figura 1 muestra la etapa I de elaboración, donde se recopila la información, se analiza, se hace el resumen

teórico y se prepara el primer avance. La etapa II instauro las modificaciones dadas en el primer avance, organiza el diseño metodológico y realiza el trabajo de campo donde se recopilan los datos. Además, inicia el trabajo matemático, que comprende la organización y análisis de datos, construcción de gráficos, búsqueda y formulación del modelo y preparación preliminar del informe y segundo avance. Se debe considerar que esta etapa es una de las más complejas en el trabajo de proyectos.

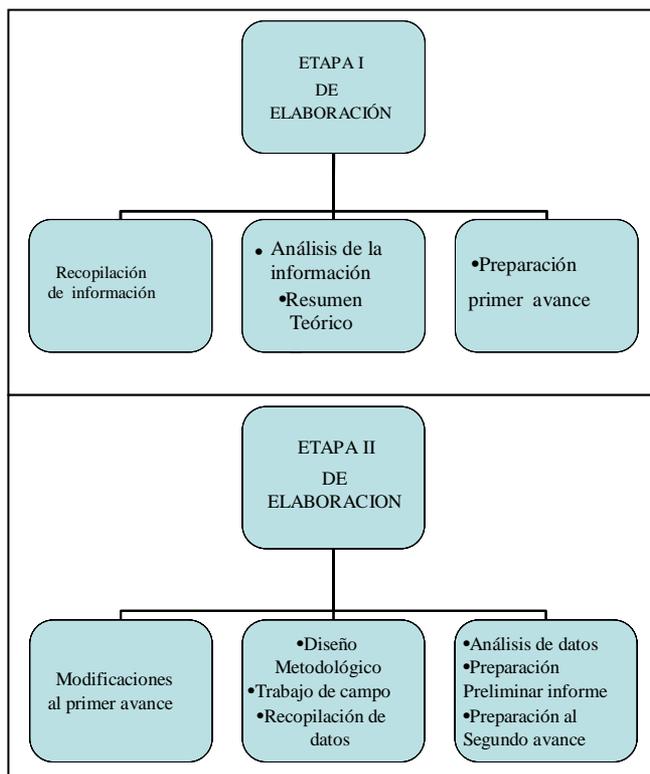


Figura 1. Secuencia metodológica de las etapas de elaboración del proyecto.

Justificamos los estados de avance porque el trayecto que recorre un proyecto de trabajo es demasiado complejo. Por eso fue necesario contar con dos estados de avance, en los que los estudiantes se presentaron a entrevistas planificadas cuyo objetivo era detectar cambios y evoluciones, dificultades y progreso, ya que se trataba de un trabajo dilatado fuera del aula, que requería de tiempo y esfuerzo (Aravena, 2001; Aravena y Giménez, 2002).

En cuanto a la elaboración del informe, varios autores (Abrantes, 1994;

Giménez, 1997; Alsina, 1998; Gómez, 1998; Aravena, 2001) plantean la conveniencia de trabajar con los estudiantes en la redacción de informes escritos, pues en ellos muestran lo que han sido capaces de hacer en una tarea, especialmente cuando se trata de proyectos. El informe escrito demanda la integración de los siguientes elementos: (1) fundamentación; (2) objetivos del estudio e hipótesis; (3) metodología utilizada y planificación; (4) resultados, análisis y modelo matemático; (5) conclusiones, sugerencias y recomendaciones; (6) presentación de bibliografía y anexos.

3. *Fase final. La exposición oral.* El trabajo de proyectos finaliza con una presentación oral, en la que los estudiantes deben exponer los puntos que desarrollaron en el informe: (1) antecedentes que justifiquen la realización del proyecto; (2) justificación del problema y descripción de los objetivos; (3) metodología utilizada; (4) resultados y análisis; (5) conclusiones y proyecciones.

Dicha etapa es la más importante porque expresar procesos matemáticos en forma oral adquiere suma relevancia en un trabajo de la disciplina, particularmente en un proyecto que ofrece numerosas ventajas para la enseñanza de los aprendizajes matemáticos; por eso, se destaca que facilita el aprendizaje de matices en lo que se desea transmitir y que es difícil percibirlo de otra manera. Asimismo, hay descubrimientos que se producen al comunicar oralmente lo que los estudiantes saben: explicación de un proceso, justificaciones de cálculos, síntesis de sus conocimientos o propuesta de procedimientos (Burton, 1999; Aravena, 2001).

2.2. *Métodos e instrumentos de análisis*

Referimos a continuación los métodos e instrumentos utilizados para el análisis, al igual que la muestra de estudio, de acuerdo con la metodología de trabajo.

2.2.1. *Muestra*

El trabajo de proyectos se aplicó a tres cursos de tercer año de enseñanza media en liceos municipalizados que estuvieron de acuerdo en participar de la experiencia, tanto los profesores como los alumnos. Los 98 alumnos participantes se distribuyeron en grupos de trabajo que tenían 4 ó 5 integrantes.

Para la implementación de los proyectos se generaron alrededor de 16 grupos de trabajo, de donde se eligió al azar 4 grupos para el estudio de caso. En este reporte se analiza la producción del grupo que trabajó el tema *Consumo de marihuana en la juventud*. Una de las características que nos hizo saber el

grupo era que a ninguno le gustaba ni le interesaba la matemática, por lo que no estudiarían nada que se relacionara con esta materia.

2.2.2. Métodos de análisis e instrumentos

Se realizó un análisis interpretativo del contenido que permitió reconocer las capacidades en cada uno de los episodios, atendiendo a las propias producciones registradas por el grupo. Para ello, se diseñaron categorías de análisis que tomaron como referencia las investigaciones descritas en los apartados anteriores. La categorización quedó establecida en función de la temática respectiva, haciendo énfasis en su contenido e interpretación. El contenido de cada categoría se abordó mediante un esquema de trabajo de reducción (Miles & Huberman, 1994), que se ciñó a fragmentos y citas de diferentes diagramas o representaciones gráficas sobre las relaciones entre los conceptos.

En lo tocante a los instrumentos de análisis, la secuencia de documentos que conformaba el trabajo de proyectos consideró momentos clave en su desarrollo con el propósito de verificar los cambios, evoluciones y capacidades que se desplegaron durante el experimento. De acuerdo a esto, los documentos elegidos para el análisis corresponden a las entrevistas de los estados de avance 1 y 2, el informe escrito y la grabación en video de la exposición oral.

2.2.3. Confiabilidad y validez

Para la confiabilidad y validación del trabajo de proyectos se recurrió a una triangulación metodológica en dos sentidos. Por un lado, se utilizó el mismo método de análisis en ocasiones diferentes; esto es, se hizo con los relatos (momentos de proyectos). Por otro, aplicamos distintos métodos de análisis para el mismo material a través de la triangulación de sujetos; es decir, se estudiaron las transcripciones de acuerdo con el modelo de la actividad (Jorba y Casellas, 1997).

Se distinguen cuatro fases, que son: 1) de exploración; 2) introducción de conocimientos; 3, estructuración; 4: aplicación). En conjunto, ponen de manifiesto la integración del contenido matemático. Ahora bien, para cada una de las fases se buscan: capacidades desarrolladas, que refieren el progreso de los estudiantes, y desempeño en el trabajo de proyectos, que concierne a la gestión en los diferentes momentos.

2.2.4. *Categorías de análisis*

A continuación se muestra la variable de estudio con sus respectivas categorías y subcategorías de análisis para responder al siguiente objetivo: Describir y analizar las capacidades desarrolladas en el trabajo de proyectos a través de la modelización de situaciones.

Variable: capacidades desarrolladas en el trabajo de proyectos

Categoría 1. *Aspectos cognitivos*

Aluden a la evaluación de capacidades cognitivas de los estudiantes. Se resalta la importancia de valorar dichos elementos en la propuesta, pues miden la adquisición de los conocimientos; este factor no puede dejar de presentarse en ningún nivel de enseñanza. En la adquisición de conocimientos se distinguen las siguientes subcategorías: elementos conceptuales, procedimentales, autorreguladores y comunicación matemática.

Subcategorías:

S1.1. Elementos cognitivos conceptuales (CC)

Son los dos elementos que atañen a los contenidos incorporados al trabajo de modelización: comprensión de los sistemas de representaciones y conceptualización, que abarca reconocimiento de conceptos, interpretación de los conceptos, propiedades y características de los objetos matemáticos asociados.

S1.2. Elementos cognitivos procedimentales (CP)

De los cognitivos procedimentales se incorporan: 1) la organización e interpretación de la información; 2) la matematización, donde se da énfasis a las descripciones matemáticas que interpretan el proceso y la formulación del modelo; 3) las habilidades y destrezas que los estudiantes han utilizado para enfrentar la solución de los diferentes problemas, así como técnicas matemáticas, cálculos realizados y determinación de parámetros.

S1.3. Elementos autorreguladores y aplicación (AUT)

Se analiza el significado con el que dotan a los conceptos y su utilidad, las estrategias que siguen para resolver problemas y el nivel de estructuración y regulación.

S1.4. Comunicación matemática (COM)

Hace hincapié en la comunicación de métodos y procesos utilizados;

explicaciones en las que los alumnos demuestren que entienden lo que han hecho; discusiones en torno al problema, argumentos, sistematización y explicitación de resultados; representaciones diversas (uso de tablas, gráficas, mapas, planos, esquemas) para manifestar lo que han hecho, al igual que notaciones precisas.

Categoría 2. *Aspectos metacognitivos*

Los aspectos metacognitivos son considerados como el autoanálisis de la persona sobre sus propios procesos. De ellos, se consideró importante constatar la creatividad, tratando de verificar lo que planteaban los investigadores acerca de que la modelización de situaciones desarrolla la creatividad; es decir, el conocimiento que el grupo tiene de sus procesos y resultados cognitivos.

Subcategorías:

S2.1. Creatividad (CR)

En el diálogo de los alumnos constataremos la forma como se enfrentan a los problemas, el aporte de nuevas ideas en su resolución y el análisis de situaciones.

S2.2. Pensamiento estratégico (PE)

Abarca la visión de futuro, el espíritu crítico, la búsqueda en la solución de situaciones y la forma de enfrentarse a un problema desde diversas perspectivas.

Categoría 3. *Aspectos de formación transversal*

Se necesita formar a los estudiantes como agentes del desarrollo que puedan trabajar en equipo, valorar su propio progreso, ser responsables frente al trabajo y los compromisos, al igual que comprender los diferentes fenómenos sociales. Para ello, se debe desarrollar una visión integrada de las matemáticas que les permita a los estudiantes entender y valorar la utilidad de los conceptos y procesos.

Subcategorías:

S3.1 Actitud matemática (TAM)

Incluye la manera en que los alumnos valoran el uso que le dan a los conceptos, la tendencia a comprobar pasos, el reconocimiento a la utilidad de las nociones y los procesos para resolver problemas.

S3.2 Autonomía (TAT)

Aquí se comprende la responsabilidad frente al trabajo de aula y tareas, la

adaptación al contexto, la forma de enfrentarse a las dificultades, así como asumir errores, respetar ideas, escuchar, seguir instrucciones y la toma de decisiones.

S3.3. Autovaloración

En este elemento cobra interés la valoración que hace el estudiante a la calidad del trabajo, donde se toman en cuenta a las relaciones interpersonales (RIN) y las intrapersonales (RTR).

3. RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL TRABAJO DE PROYECTOS

El presente capítulo describe la experiencia hecha con el grupo que sirvió como estudio de caso. Aquí presentamos un análisis pormenorizado del discurso que permitió detectar las capacidades que se fueron desarrollando durante el trabajo. Consideramos los estados de avance 1 y 2 y la exposición oral para enfatizar en el trabajo matemático; de manera específica, quisimos mostrar cómo los alumnos interrelacionaban los aspectos matemáticos y la problemática de estudio. Los aspectos matemáticos se constituyeron en la base de ejemplificación mediante esquemas de resumen sobre las capacidades cognitivas; los aspectos metacognitivos y transversales también los analizamos con detalle, sobre todo los transversales, ya que se manifestaron en alto grado por la dinámica del proceso en proyectos. Finalmente, damos a conocer un análisis del trabajo de acuerdo con lo que necesita darse en un proceso de modelización.

3.1. *Resultados y análisis del proceso en proyectos*

Referiremos a continuación los diferentes episodios que ocurrieron en los ciclos de aprendizaje, los cuales fueron extraídos de la codificación, según el plan de análisis. Además, se describirá cómo aparecieron las ideas más importantes en el diálogo de las entrevistas de avance y en la exposición oral.

3.1.1. *Primer ciclo de aprendizaje: estado de avance 1*

Este primer encuentro resulta muy importante en el trabajo de esta índole. Por ello, tiene que ponerse especial atención al diseño del guión y los puntos a tratar en la entrevista, ya que un guión claro ofrece la oportunidad de captar

el significado de lo que se busca (Ruiz, 1997). Nosotros la hemos considerado como una conversación profesional que implica siempre un proceso de comunicación, en cuyo transcurso entrevistador y entrevistado pueden influirse mutuamente (Rodríguez, Gil y García, 1996).

A continuación, presentamos los diferentes episodios en los que se ilustra la forma como los estudiantes se van apropiando de los conceptos y procesos matemáticos.

Fase 1. Exploración del problema. En la primera fase se analiza la manera de explorar el problema. El entrevistador solicita a los alumnos que le aclaren sobre qué temática están trabajando, a fin de conocer cómo la enfrentan.

Entrevistador: Bueno. Veamos, ¿qué tipo de trabajo están realizando?, ¿de qué se trata?

Patricio: Es un proyecto para poder llevar las reflexiones hacia la vida cotidiana; poder realizar un modelo matemático que nos ayude a representar, en este caso, el consumo de la marihuana en la juventud; poder determinar al año cómo va a ir aumentando o puede ir disminuyendo... Lo tenemos que investigar nosotros, o sea, cómo aplicar las funciones en la vida cotidiana.

Entrevistador: Muy bien, ¿qué significa aplicar las funciones en la vida cotidiana?

Patricio: Poder saber cómo se comporta el consumo de marihuana en diferentes años.

Entrevistador: ¿Qué significa eso?

Pancha: Poder graficar la información para ver el aumento o disminución.

Vania: Poder predecir.

Entrevistador: Poder predecir qué cosa.

Vania: El comportamiento en diferentes años.

Se detecta en el episodio que los alumnos muestran un reconocimiento global de lo que quieren realizar. Ellos se ubican en la temática e identifican el problema que han planteado desde sus propios puntos de vista. Existe una claridad sobre el producto esperado y reconocen que la representación gráfica podría ayudarles a ver cómo se comporta el fenómeno. Se destacan las variables matemáticas año versus consumo, que permitirían modelar la situación; asimismo, se afirma que el modelo puede predecir fenómenos.

Organización e interpretación de la información. En esta etapa se destacan los estudios teóricos y el trabajo de campo, con miras a recopilar los datos. El siguiente episodio presenta la manera en que los alumnos han llevado a cabo el trabajo:

Entrevistador: ¿Cuál es la información que han utilizado hasta ahora?

Vania: De todo... Bueno, la idea es ordenar la información para completar el

- marco teórico sobre qué es la marihuana, los daños que causa y eso... toda la información teórica que hemos buscado.
- Pancha: La información del Consejo Nacional para el Control de Estupefacentes (Conace) ... Nosotros fuimos al Conace y solicitamos unos libros donde ellos habían realizado unos estudio. Entonces, ahí aparecía todo lo que tiene que ver con el consumo de drogas.
- Patricio: Ellos nos facilitaron estudios... Se han realizado cinco estudios a nivel general y nos facilitaron el quinto estudio; buscamos los otros a través de internet y aparecieron a nivel general, regional y comunal. Nosotros decidimos tomar a nivel comunal o a nivel regional.
- Pancha: Sí, también consultamos internet para sacar información de qué era la marihuana, en lo que consistía básicamente y los daños.
- Patricio: (...) Lo que pasa que al principio íbamos a preguntar, pero en relación con el alcohol. El Conace nos informó que el consumo de alcohol se empezó a tomar en cuenta en el quinto estudio; entonces, no se habían hecho trabajos anteriores. Teníamos ahí la duda, porque si teníamos el estudio sólo de un año no podíamos realizar un modelo.
- Pancha: Sí, la información no era la suficiente para buscar el modelo... Decidimos estudiar la marihuana.

Se destaca la organización en la planificación y diseño, ya que el grupo hace una presentación de la información recopilada y muestra los diversos estudios que han conseguido respecto al consumo de marihuana. Aunque no hay una idea clara de la forma en que organizarán la información, sí tienen claridad de la problemática que investigarán. Se explicita la delimitación de la muestra que considerarán para el estudio y se presentan los objetivos, donde plantean los subproblemas que trabajarán a nivel regional, comunal y de su liceo.

La figura 2, que resume los elementos esenciales de la entrevista, refiere la forma en que los alumnos exploran el problema de estudio.

La organización del discurso permitió identificar cuatro ideas centrales que se ilustran en la figura 2:

1. Proyectar a futuro, reconociendo que el problema se puede modelizar a través de las funciones.
2. Necesidad de representar el fenómeno real en términos matemáticos, pero se requiere de información.
3. Necesidad de seleccionar la idea más conveniente.
4. Necesidad de tener datos.

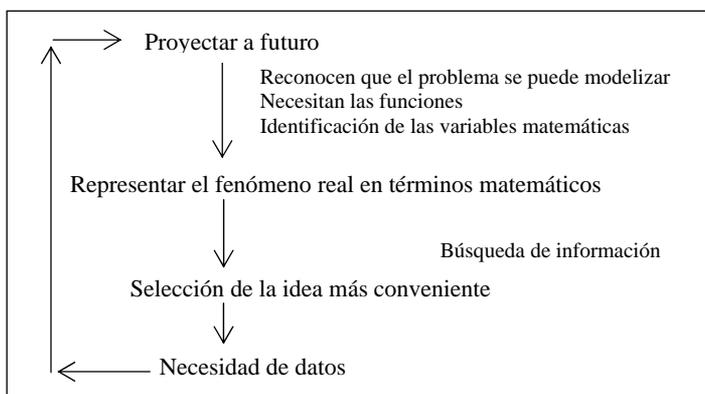


Figura 2. Ideas que introducen los alumnos cuando exploran el problema de estudio.

Fase 2. Nuevos conocimientos que introduce el grupo. Aquí se puso atención a los nuevos conocimientos o procedimientos que habían puesto en juego los alumnos. Los siguientes episodios permiten deducir las ideas centrales.

- Vania: Decidimos estudiar la marihuana, un tema que era relevante para nosotros y sobre el cual teníamos información.
- Pancha: Que es como la realidad más cercana a nosotros y, a pesar de ser una droga, es superfácil conseguirla, entonces... Y más si estábamos experimentando cosas, tenía importancia para nosotros.
- Entrevistador: Entonces, ¿está claro el problema que quieren resolver? ¿Cuál es?
- Pancha: Analizar el consumo de drogas como la marihuana para ver si ha ido en aumento o disminución.
- Patricio: (...) La única duda que teníamos era con los datos, porque en algunos años aumentaba, en otros disminuía. También el problema se debía a que era nivel de curso (...) a eso le estábamos dando vueltas. Entonces, yo creo que aquí no se da tanto el consumo; tendríamos que realizarlo a nivel de liceo, como que aquí en el curso no lo podríamos tener.
- Vania: No nos daría estadísticas confiables.
- Pancha: Lo que también habíamos pensado era consultar el censo, porque el año pasado se hizo aquí en censo en el liceo, donde en las preguntas estaba lo relacionado con la marihuana y la frecuencia. Esos datos son importantes...
- Entrevistador: ¿O sea, podrían utilizar esos datos para el estudio?
- Pancha: Entonces pensábamos de qué... Lo que llamó la atención de esas encuestas es que había ido en aumento en relación, o sea que es muy alto el porcentaje que se dio en cuanto al consumo.

Asimismo, notamos la necesidad del grupo por dar respuesta a un problema social, como es el consumo de marihuana en la juventud. No obstante, sólo ofrecen ideas generales de lo que quieren realizar, identifican el problema de estudio, mas no hay claridad en los conceptos que necesitan. La idea central está referida a la necesidad de datos y la delimitación de la muestra, donde se ubican los análisis sobre las diferentes posibilidades para delimitar el estudio.

Fase 3. Estructuración de conceptos y procesos: de los datos al modelo. Sobre la forma en que los alumnos estructuran los conceptos y procesos para modelizar, podemos deducir de los diálogos que el modo como organizan el trabajo es haciendo énfasis en la necesidad de datos para modelizar y poder predecir a futuro.

- Entrevistador: ¿Necesitan tener algunos datos para solucionarlo? ¿Ya los tienen?
¿Qué piensan hacer con ellos?
- Patricio: Necesitamos datos para ver el consumo en los años posteriores.
- Pancha: Poder predecir el consumo para poder evitar también...
- Entrevistador: Entonces, ¿qué les interesa modelar? ¿Han pensado qué elementos matemáticos van a utilizar?
- Patricio: Yo creo que podríamos determinar, por ejemplo, el consumo de cuánto aumentaría o disminuiría el consumo de marihuana. Se puede establecer incluso una comparación de lo que ha pasado en el colegio con los datos, si aumentan y cuánto.

Se clarifican los conceptos matemáticos y técnicos de manera global que se visualizan como importantes, entre los que destacan crecimiento, decrecimiento e idea de predicción. Los alumnos tienen una visión clara sobre la proyección de los datos, que permitiría conocer lo que sucederá a futuro.

Fase 4. Aplicación con base en la proyección de datos. En esta fase, los alumnos han elaborado algunas ideas y conjeturas sobre lo que están trabajando, reconocen la utilidad del proyecto y exponen algunas proyecciones de lo que pretenden.

- Entrevistador: O sea, para ustedes tiene importancia trabajar en este problema.
- Pancha: Sí, y presentar nuestro trabajo, porque ellos tienen allá una especie de biblioteca, que igual es chica, pero manejan harta información. Entonces, les podría servir nuestro trabajo.
- Vania: Yo creo que sí, porque uno igual prende la tele y siempre dicen 'eh, no a la droga' y todo eso. Lo mismo ocurre con la violencia que estamos viendo ahora: todos sabemos que existe, pero no le tomamos el real peso.
- Entrevistador: Es relevante la idea que tienen. Entonces, ¿hacia dónde quieren apuntar con el modelo?
- Patricio: A ver el consumo en los años posteriores.

- Pancha: Para poder predecir... para poder evitar también.
- Patricio: Darlo a conocer para que se tomen medidas antes de que lleguemos a ese resultado. Podríamos informar a las autoridades, proporcionar nuestra información...
- Entrevistador: Bien. Entonces, ¿tienen algún cronograma de las actividades que les quedan para terminar este proyecto?
- Patricio: Tenemos claro lo que hay que seguir haciendo.
- Entrevistador: Tienen que hacer un cronograma de lo que van a ir haciendo semana a semana y el tiempo que requiere, ¿de acuerdo?
- Todos: Sí.

El grupo insiste tanto en la necesidad de proyectar los datos a futuro como en analizar el comportamiento del fenómeno por diferentes años. El concepto de predicción es clave en la modelización de situaciones, ya que permite proyectar los datos. Los alumnos reconocen además que su proyecto es importante y viable porque se podría dar a conocer. En esta fase no hay un alto nivel de análisis, pues se muestra claramente que los alumnos todavía están débiles en los contenidos necesarios para modelar. Esto se considera natural, debido a que se encuentran en la etapa inicial del proyecto.

3.1.2. Resultados del análisis respecto a las capacidades desarrolladas. Primer ciclo de aprendizaje

1. *Elementos cognitivos:* Destacan en este primer ciclo las capacidades cognitivas conceptuales, específicamente los elementos autorreguladores y de aplicación. Esto ofrece una idea del modelo matemático como predictor de fenómenos; además, se reconoce la utilidad de las funciones para representar fenómenos de la vida cotidiana. Nace la idea de variables matemáticas cuando los alumnos manifiestan la determinación de los años, y queda destacada en forma explícita la variable tiempo y el aumento o disminución. Se puede observar en el episodio una idea clara de modelización porque representa el problema real en términos matemáticos; es decir, hay una capacidad de tipo conceptual de interpretación, al reconocer que el problema se puede matematizar.

Dicho aspecto adquiere relevancia en la modelización, puesto que una de sus etapas importantes es la descripción de relaciones matemáticas para interpretar el proceso. Ahora bien, dentro de los conceptos matemáticos que los alumnos ponen en juego destacan: crecimiento, decrecimiento, variable, predicción, ajuste y modelo matemático. Respecto a las capacidades cognitivas procedimentales, que conciernen a organizar y analizar la información, los alumnos han hecho una selección de datos, pero tienen conflictos al construir el

marco teórico. Aunque colocan en el discurso el interés para conocer las causas, no han decidido qué aspectos considerarán en su organización.

Un aspecto interesante es que en ningún momento se alejan del problema real y lo relacionan con el problema matemático al plantear que necesitan datos para buscar el modelo. Hay un elemento conceptual de autorregulación importante, cuando manifiestan que la escasez de datos no les permitiría modelar y nace una idea clave de procedimiento, como es la idea de muestra y la necesidad de varios datos para describir el modelo. Se destaca capacidades comunicativas al explicitar los métodos para enfrentarse a los datos, reconociendo la forma de cómo podría comportarse el fenómeno mediante una proyección de ideas.

2. *Elementos metacognitivos*: También en el episodio hay elementos metacognitivos estratégicos y de creatividad, lo cual se nota con el aporte de nuevas ideas para enfrentar el problema. De igual manera, se lleva a cabo un análisis de los datos disponibles, ya que se manifiesta la necesidad de considerar más datos para “analizar la realidad y que éstos sean confiables”. Si bien la idea de predicción y proyección está presente en todo momento (“cómo va a ir aumentando o disminuyendo”), la más relevante es conocer cómo se comporta el fenómeno (“poder saber cómo se comporta el consumo de marihuana en diferentes años”). Como idea central sobresale un pensamiento estratégico, ya que los alumnos en todo momento están proyectando a futuro y la forma de saber hacia dónde dirigir su tarea.

3. *Elementos transversales*: En el episodio se pueden distinguir capacidades transversales comunicativas y de autonomía. Esto se nota porque los alumnos explicitan, por un lado, los diferentes lugares que han visitado, por otro, muestran que la toma de decisiones es acorde con los datos que pueden obtener; además, plantean la búsqueda de caminos para enfrentar el problema, refiriéndolo a la selección de la muestra. Esto cobra relevancia en el trabajo de proyectos, ya que una de las bondades descrita en las investigaciones (Abrantes, 1994; Aravena, 2001) alude al contacto con el medio externo y a las dificultades que deben superarse, potenciando fuertemente las capacidades comunicativas y de organización. Los alumnos mantienen una actitud dialogante y crítica para enfrentarse a la tarea, valoran el tema trabajado y plantean la viabilidad de su proyecto.

Del análisis de este primer ciclo de aprendizaje se rescatan dos aspectos importantes. El primero se refiere a la idea de modelización que subyace, pues en el proceso de modelización los alumnos plantean la necesidad de tener datos para poder establecer una dependencia entre las variables y, así,

describir la función matemática, lo que permitiría proyectar y predecir. El segundo concierne a que los alumnos establecen conjeturas sobre los resultados que podrían alcanzar.

Resumen de las capacidades cognitivas detectadas en el análisis

La tabla I presenta un resumen de las capacidades que han manifestado los alumnos en cada una de las fases que integran el primer ciclo de aprendizaje, de acuerdo con las categorías definidas: conceptuales (CC), procedimentales (CP), de autorregulación (AUT) y de comunicación matemática (COM).

TABLA I
Capacidades cognitivas en el primer ciclo de aprendizaje (parte 1)

	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4
CC	(1) Idea vaga de modelización y de matematización (2) Ideas de variable independiente y dependiente (3) Aspectos teóricos y técnicos del tema	(1) Idea de crecimiento y decrecimiento de acuerdo con las variables (2) Idea de porcentaje y aumento	(1) Identificación de las variables para el estudio (2) Presentación de conceptos técnicos	
CP	(1) Recopilación de la información teórica. <i>Estrategias</i> (2) Reconocimiento a la necesidad de varios datos para modelizar.	<i>Organización e interpretación de la información</i> (1) Presentan e interpretan la información que han recopilado <i>Matematización</i> (2) Necesidad de establecer relaciones matemáticas para describir el fenómeno		Predicción a través de los datos
AUT	<i>Utilidad y aplicación de conceptos</i> (1) Idea de modelo matemático para representar el fenómeno (2) Idea de que las funciones pueden representar un fenómeno (3) Reconocimiento de la necesidad de los datos para modelizar la situación			

TABLA I
Capacidades cognitivas en el primer ciclo de aprendizaje (parte 2)

	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4
C O M			Organizan y explicitan diferentes procedimientos para enfrentarse a los datos y a las tareas pendientes	Comunican la importancia de predecir a través del modelo

3.1.3. Segundo ciclo de aprendizaje: estado del avance 2

Fase 1. Exploración en cuanto a lo que se quiere alcanzar. En esta fase destaca la relación entre la información del primer avance y las transformaciones del proyecto, de acuerdo con las sugerencias del primer avance. Se pide que se puntualicen las transformaciones y los arreglos.

- Entrevistador: Hola, revisé el informe preliminar que me dieron... está bien. ¿Cómo va el trabajo? ¿Han realizado alguna transformación en el proyecto desde que empezaron hasta ahora?
- Pancha: Algunos puntos los tuvimos que transformar y otros los continuamos.
- Vania: Dependió de la información que íbamos obteniendo.
- Pancha: Y de acuerdo a lo que nos faltaba.
- Vania: Y los que nos convenía.

Se explicitan preguntas de progreso y modificaciones. Los alumnos refieren las transformaciones del proyecto, de acuerdo con la planificación y la información recopilada.

- Entrevistador: ¿Aceptaron las sugerencias del primer avance?
- Todos: Sí.
- Entrevistador: ¿En qué cosas aceptaron las sugerencias? ¿En la organización o en qué?
- Patricio: El primer avance fue cuando usted nos entregó esa hojita. Las aceptamos porque arreglamos la fundamentación, la información teórica de las cosas que nos faltaban, referidas a las causas del porqué las personas...
- Vania: Que después, cuando lo planteó usted, lo encontramos como importante. Cuando usted nos mostró la hoja encontramos que era relevante incluir eso.
- Entrevistador: Entonces, ¿tienen claridad de lo que están haciendo?
- Todos: Sí.

En cuanto a la generación de transformaciones, de acuerdo con las sugerencias del primer avance, los alumnos proporcionan información sobre los arreglos que hicieron a la organización del informe. Aceptaron las críticas y mejoras al primer avance, hicieron adaptaciones debido a los cambios y tuvieron conciencia de la necesidad de completar su información teórica. De igual modo, puntualizan ideas del trabajo con base en lo que están haciendo, con lo cual presentan una adaptabilidad a los cambios. Esto denota elementos transversales importantes porque los alumnos se acoplan a las condiciones del medio, reconocen su progreso y aceptan las transformaciones sugeridas en el primer avance.

Fase 2. Introducción de conceptos o procedimientos. En este segundo avance, los alumnos exponen el trabajo matemático y las relaciones entre los datos y la gráfica.

Entrevistador: A ver, ¿por qué creen que tiene claridad de lo que están haciendo?

Vania: Porque nos hemos interesado en el tema y a través de los datos, de los gráficos y todo eso vamos entendiendo lo que hacemos... describiendo la relación.

Patricio: Y llegamos finalmente a la función, que era lo que nosotros esperábamos.

Entrevistador: ¿En qué parte del proyecto se encuentran ya analizando datos?

Pancha: En la última.

Patricio: En lo último, estableciendo las conclusiones, encontrando el modelo y las conclusiones.

El entrevistador les solicita a los alumnos que clarifiquen los conceptos o procesos. Ellos plantean que han graficado los datos, lo cual les ha permitido entender lo que están haciendo en la descripción del modelo, donde han descrito relaciones matemáticas. Se destaca el uso de representaciones, donde los alumnos recurren a la representación gráfica para describir el modelo y para explicar lo que están proyectando. Dicho aspecto es primordial porque las investigaciones señalan que en el trabajo con problemas, en particular con las funciones, se vuelve central el tránsito por diferentes representaciones (Janvier, 1987; Font, 2001a; Font, 2001b). Aunque se reconoce que resulta difícil de lograr, “la conversión de representaciones es un problema crucial en el aprendizaje de las matemáticas” (Duval, 2002, p. 318).

El entrevistador vuelve a retomar la pregunta sobre los aspectos matemáticos para centrar la conversación. Se requiere que los alumnos puntualicen los conceptos y procesos trabajados.

Entrevistador: Ahora, ¿tienen claridad de los conceptos matemáticos que están en juego? ¿Qué conceptos matemáticos han considerado relevantes?

- Pancha: Las funciones lineales, por tramo.
 Entrevistador: Explicar claramente los conceptos utilizados en el trabajo.
 Pancha: El ajuste de datos se ajusta a una lineal, observando la gráfica es como el mejor ajuste.
 Patricio: También la interpolación, para los datos que nos faltan.

Los alumnos ponen en evidencia que han transitado por distintas representaciones, desde los datos a la gráfica y desde la gráfica al modelo y viceversa, cuando plantean que han efectuado un ajuste lineal y han vuelto a la gráfica. Reconocen al lineal como mejor ajuste para describir el modelo; identifican el tipo de función que logra dar respuesta al problema; muestran conciencia del enfrentamiento con la función matemática, a partir del ajuste de datos y de la gráfica, y aportan un concepto matemáticamente potente, la interpolación, el cual no es tratado en los programas de estudio vigentes en Chile.

- Entrevistador: Qué bien. ¿Qué dificultades han tenido en este trabajo?
 Pancha: Encontrar la información más antigua, desde el 2000 hacia acá, porque...
 Patricio: Eso también, porque nosotros al principio decíamos que era difícil predecir; después nos dimos cuenta que no era tan difícil.
 Entrevistador: Bien. ¿Hicieron un esquema para ver qué les quedaba pendiente y cómo iban a seguir?
 Todos: Sí.

La figura 3 ofrece un resumen organizado de los elementos presentes en esta fase.

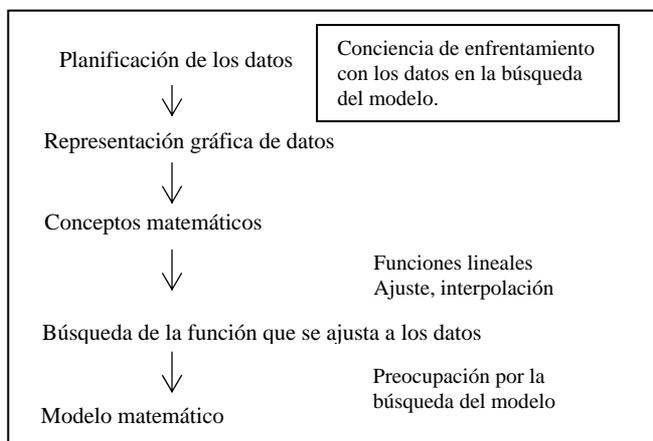


Figura 3. Conceptos y procedimientos introducidos en la segunda fase.

La figura ilustra cinco ideas centrales que surgieron de la entrevista:

1) organización de los datos; 2) representación gráfica, que conduce a; 3) los conceptos matemáticos que los alumnos han puesto en juego –como las funciones lineales y por tramo–; 4) la necesidad de realizar un ajuste que permita la búsqueda de la función de mejor ajuste para describir el modelo; (5) preocupación por hallar el modelo y de interpolar para datos que faltan.

Fase 3. Estructuración de los conceptos matemáticos. De los datos al modelo. El siguiente episodio revela la forma en que los estudiantes los conceptos y procesos que les han permitido modelar la situación.

- Entrevistador: ¿Cómo han tomado la decisión de una función lineal?
 Pancha: Ajuste.
 Vania: Interpolación.
 Patricio: Interpolación lineal.
 Pancha: La función es por tramo.
 Entrevistador: Función por tramo, ¿por qué? ¿Tienen claridad de lo que tienen que modelar o no?
 Todos: Sí.
 Pancha: El consumo de marihuana a nivel comunal.
 Patricio: Comuna y regional lo tenemos ahí.
 Pancha: Hemos aplicado todo lo que hemos estado trabajando en clases. Para el problema que estamos trabajando en el proyecto utilizamos los conceptos que vamos pasando.
 Patricio: Lo hemos aplicado en el proyecto, estudiando cómo va la gráfica y con el ajuste lineal se acerca a los datos, pero hasta cierta parte... después cambia.
 Entrevistador: ¿Cómo se acerca?
 Patricio: Se acerca a los datos que tenemos, los reales.
 Vania: También hicimos un ajuste cuadrático por ver qué pasaba... y se aleja.

Los alumnos insisten en que la función lineal sirve como un buen ajuste para el tratamiento de los datos. Cuando presentan un análisis sobre las diferentes gráficas que tienen elaboradas para mostrar su comportamiento, argumentan que dicha función es el mejor ajuste porque no se aleja de los datos reales; de igual manera, justifican porqué decidieron considerar un modelo lineal por tramo.

Uno de los aspectos más importantes en este fragmento ocurre cuando los alumnos reconocen el concepto de función al plantear: “con el ajuste se acerca a los datos, pero hasta cierta parte... después cambia”. La idea que está explícita en este relato pone en evidencia su dominio para identificar las condiciones y restricciones del problema a partir de los datos reales.

Fase 4. Aplicación con respecto a los conceptos y la interpretación de resultados. En esta fase, los alumnos explican algunos resultados desde el

punto de vista matemático, con lo que muestran claramente una proyección de los datos.

Entrevistador: ¿Podrían explicar algunos resultados matemáticos? ¿Tienen alguna idea más o menos de las conclusiones a que estarían llegando?

Vania: Disminuye.

Pancha: Ah, que va aumentando.

Patricio: Es que a nivel regional nosotros nos dimos cuenta de que va disminuyendo el consumo de marihuana, pero a nivel comunal pasa diferente... iba aumentando.

Entrevistador: Ya. A ver, ¿va disminuyendo el consumo de marihuana a nivel regional?

Patricio: Sí, porque el primer gráfico, que podría ser como una parábola, es a nivel regional, y el segundo gráfico a nivel comunal... se refiere a la comuna de Talca.

Pancha: Y ese es el que va aumentando.

Entrevistador: ¿Dijiste una parábola? ¿Cómo, si decían que era lineal, por tramos?

Patricio: Pero con el ajuste es más lineal. Hicimos el ajuste cuadrático y se alejaba... Era difícil ajustar y predecir todo eso. Después nos dimos cuenta que no era tan difícil porque fue algo diferente salir de la rutina de matemáticas de las clases, de los ejercicios. Hemos hecho cosas diferentes.

Respecto a la forma en que los alumnos han utilizado los conceptos matemáticos para establecer proyecciones, explican el comportamiento de los datos a partir de la interpretación gráfica y del modelo que han elaborado y refinado. Presentan la idea de proyección ocupando la gráfica y los datos, donde ponen en evidencia la idea de crecimiento y decrecimiento mediante la interpretación de las variables del estudio y el establecimiento de relaciones. Afirman que tuvieron dificultades iniciales y reconocen sus limitaciones y progreso para entender el ajuste y la predicción, si bien durante el trabajo han podido ir aclarando tales conceptos.

3.1.4. Resultados del análisis respecto a las capacidades desarrolladas en el segundo ciclo de aprendizaje

El segundo ciclo permite apreciar de manera clara las capacidades de tipo cognitivas en un grado mayor al del primer avance, ya que los alumnos han podido trabajar los datos con miras a formular el modelo matemático de mejor ajuste.

Capacidades cognitivas. Se destacan capacidades conceptuales, al haber un reconocimiento explícito del tipo de función que permite modelizar la situación.

Los alumnos reconocen los conceptos que están en juego a partir del ajuste de datos, como la función lineal y por tramos, lo cual hace que den respuesta al problema real. Defienden esta idea apoyándose en la representación gráfica y en los datos de la tabla.

Asimismo, hay un elemento importante que nace del diálogo, cuando los alumnos refieren el ajuste de datos a una lineal es bueno porque no se aleja de los datos reales; consideran relevante el concepto de interpolación lineal, ya que les ha permitido buscar los datos que les faltaban, Su objetivo central es la búsqueda de un modelo para proyectar y predecir, sin perder de vista en ningún momento el problema real, específicamente cuando plantean que su modelo se ajusta bien a datos reales. Los conceptos que han puesto en juego e identifican como esenciales para resolver el problema real son: ajuste de datos lineal y cuadrático, funciones lineales, idea de dominio, idea de interpolación para encontrar datos, función por tramos e idea de crecimiento y decrecimiento.

Respecto de los elementos procedimentales, destaca que los alumnos usan tablas de valores y la representación gráfica de los datos. Ocupan como estrategia el ajuste a partir de los datos y la gráfica, lo cual les ha permitido llegar a la función de mejor ajuste a los datos del problema, reconociendo también el dominio y recorrido de la función. Tal aspecto resalta en este nivel de enseñanza, puesto que las investigaciones muestran que los alumnos no comprenden dicho concepto cuando llegan a primer año de universidad, y presentan obstáculos en el tránsito por diferentes representaciones (Aravena, 2002). Aquí coincidimos con la investigación de Cantoral y Farfán (1998) cuando plantean la importancia de transitar por diferentes representaciones, principalmente porque la tendencia a estudiar este concepto en secundaria es eminentemente algorítmica.

En el caso de que se logren incorporar elementos visuales como parte de la actividad matemática al enfrentar problemas, entonces se suele manejar la función no sólo como objeto, lo que ya es un gran logro, sino que además pueden transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal con cierta versatilidad (Cantoral y Farfán, 1998, p.356).

Sobre los elementos autorreguladores, hay algunas ideas clave del proceso de modelización. Entre las que se explicitan están el reconocimiento y la necesidad de ajustar los datos reales para encontrar la función matemática más aproximada a la situación; aquí se evidencia una conciencia clara de enfrentamiento con la función matemática a partir de la gráfica. Estos elementos potencian la capacidad matemática de los estudiantes; las investigaciones señalan que el tránsito por diferentes representaciones, asociadas al concepto de función, coloca en funcionamiento diferentes procesos cognitivos que

permiten comprender el concepto desde diferentes perspectivas (Janvier, 1987; Romberg, T.; Carpenter, T. & Fennema, E.; (1994); Schwartz & Dreyfus, 1995; Font, 2001b). Respecto de la idea de ajuste y predicción, ha sido puesta en escena como un elemento central en la modelización de situaciones reales, y sobresale dentro del trabajo matemático en secundaria porque conduce a una comprensión más profunda “hacia la noción matemática de lo analítico” (Cantoral y Farfán, 1998, p.368).

Comunicación matemática: Los elementos comunicativos aparecen en todo el ciclo de aprendizaje y ponen en juego los siguientes aspectos: describen e interpretan resultados; clarifican resultados a partir de gráficas; explican procesos matemáticos en la búsqueda y descripción del modelo, y explicitan resultados alcanzados en los análisis. Los alumnos manifiestan dificultades iniciales al explicar el concepto de interpolación cuadrática, ajuste y predicción. El desarrollo de dichos aspectos tiene gran valoración en este trabajo, ya que la comunicación de ideas matemáticas es la menos trabajada en la enseñanza de las matemáticas (Alsina, 1998; Aravena, 2001).

Elementos metacognitivos: En este ciclo se distingue la interrelación entre los contenidos trabajados y la problemática de estudio, ya que hay diferentes caminos para enfrentarse a la solución. Los alumnos muestran una plena conciencia tanto de lo que tienen que modelar como de la idea de proyección y predicción de los datos, que se encuentra en todo el discurso.

Elementos transversales: Los alumnos revelan en el ciclo de aprendizaje los siguientes elementos: asumen reconocen sus aciertos y limitaciones, específicamente en la idea de predicción al identificar dificultades iniciales; tienen conciencia de su progreso y responsabilidad en los compromisos adquiridos, como la transformación y aceptación de las sugerencias que les hizo el profesor; se plantean las dificultades en el trabajo de campo, de manera particular en la búsqueda de datos; muestran autonomía en la toma de decisiones, al adaptarse a los cambios de acuerdo con la información que iban obteniendo, y asumen las limitaciones en los aspectos teóricos y técnicos de lo que les faltaba en el proyecto. Además, se distingue una actitud positiva hacia la matemática, al reconocer su utilidad para resolver problemas reales.

En la tabla II mostramos un resumen de las capacidades de índole cognitiva conceptual (CC), procedimental (CP), de autorregulación (AUT) y de comunicación matemática (COM) que manifestaron los estudiantes en cada una de las fases de la entrevista.

TABLA II.
Capacidades cognitivas en el segundo ciclo de aprendizaje (parte 1)

	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4
C C		<p><i>Sistemas de representación</i></p> <p>(1) Utilización de sistemas de representación.</p> <p><i>Reconocimiento de conceptos.</i></p> <p>(2) Reconocen el tipo de función que permite modelizar la situación.</p> <p>(3) Reconocen los conceptos en juego que les permite resolver el problema.</p> <p><i>Conceptualización</i></p> <p>(4) Idea clara de función lineal y por tramos.</p> <p>(5) Idea clara de ajuste de datos.</p> <p>(6) Reconocen el significado de interpolación.</p>	<p><i>Organización de conceptos</i></p> <p>(1) Idea de ajuste para el tratamiento de los datos.</p> <p>(2) Idea de interpolación para datos que faltan.</p> <p>(3) Identifica función por tramos.</p> <p>(4) Identifican la variable dependiente y lo que quieren modelar.</p>	<p><i>Interpretación de conceptos</i></p> <p>(2) Interpretación de la variables del estudio.</p> <p>(3) Interpreta idea de crecimiento.</p> <p><i>Representación.</i></p> <p>(5) Reconocimiento de la importancia de representación gráfica.</p> <p><i>Reconocimiento de conceptos</i></p> <p>(6) Reconocen que es posible hacer un ajuste cuadrático.</p>
C P	<p><i>Estrategias utilizadas</i></p> <p>Transformación del proyecto de acuerdo a las necesidades detectadas para el análisis.</p>	<p><i>Organización e interpretación de la información</i></p> <p>(1) Representación gráfica de los datos del problema.</p> <p>(2) Lectura e interpretación de gráficas.</p> <p><i>Utilización de métodos</i></p> <p>(3) Se reconoce la necesidad de realizar un ajuste de datos.</p>	<p><i>Organización e interpretación</i></p> <p>(1) Idea clara de la representación gráfica de la situación.</p> <p><i>Matematización.</i></p> <p>(2) Se buscan relaciones matemáticas.</p> <p>(3) Realización de interpolación lineal para datos que faltan.</p> <p>Ajuste de datos.</p> <p><i>Estrategias utilizadas.</i></p> <p>(4) Utilización como estrategia de análisis la representación gráfica.</p> <p>(5) Idea de proyección de los datos a través de la gráfica.</p> <p>(6) Relación entre los datos y la gráfica.</p>	<p><i>Estrategias</i></p> <p>(1) Utilización como estrategia de análisis la representación gráfica.</p> <p>(2) Idea de proyección de los datos a través de la gráfica.</p> <p>(3) Relación entre los datos y la gráfica.</p> <p>(4) Idea de creciente y decreciente.</p> <p><i>Matematización.</i></p> <p>(5) Se trabajan los conceptos matemáticos algoritmos y propiedades.</p> <p>Interpretación.</p> <p>(6) Integración de conocimientos mediante la lectura de gráficos.</p>

TABLA II.
Capacidades cognitivas en el segundo ciclo de aprendizaje (parte 2)

	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4
A U T		<i>Utilidad y aplicabilidad de los conceptos</i> (1) Conciencia de enfrentamiento con la función matemática a partir de la gráfica. (2) Reconocimiento de la necesidad de ajustar los datos reales. <i>Estructuración de los conceptos.</i> (3) Conciencia del enfrentamiento con los datos en la búsqueda del modelo.	<i>Utilidad y aplicabilidad de los conceptos</i> (1) Reconocen el ajuste para encontrar la función. (2) Relación entre los conceptos trabajados en clases y los utilizados en el proyecto. (3) Reconocen que aplican los conceptos estudiados en clase	
C O M		<i>Explicitación de métodos</i> Explicitación del proceso seguido: datos, gráficos y función. (2) Se explicita el proceso en la búsqueda del modelo matemático. <i>Explicitación de resultados</i> (3) Explicitan qué buscan en el modelo.	<i>Métodos y procesos</i> Explicitan qué saben sobre lo que van a modelar	<i>Explicitación de procesos y resultados</i> Explicitación de resultados alcanzados en los análisis. (2) Se explicita el proceso seguido en el trabajo con gráficos y datos.

3.1. 5. *Exposición oral*

Esta etapa es considerada como una de las más importantes en el trabajo de proyectos debido a que los alumnos efectúan un resumen del informe escrito que refiere su labor durante todo el proceso. Se presenta cada una de las fases de acuerdo con el modelo.

Fase 1. Exploración del problema. Presentación global de la investigación. Los estudiantes hacen una exposición del problema investigado.

Pancha: Bueno, ahora les vamos a presentar nuestro proyecto, que se trata del consumo de la marihuana en la juventud. Ordenamos nuestro trabajo en los siguientes puntos: fundamentación, objetivos y análisis de los datos y conclusiones.

En la comunicación del tema de trabajo explican la forma que seguirán en su exposición.

Fase 2. Introducción de conceptos y procedimientos. Lenguaje técnico

Pancha: La preparación de la marihuana es a base de hoja seca, flores y también de una planta llamada cannabis, que es de la familia del cáñamo. Actualmente, la marihuana es prensada con kerosene y bencina, que la hace mucho más perjudicial para la salud.

Bueno, dependiendo de la clase de la marihuana y del estado anímico de la persona, los efectos son mareo (...), confusión, miedo y ansiedad (...). Otra cosa importante es que las personas que generalmente tienden a consumir marihuana son jóvenes de riesgo social y que tienen problemas familiares, como la soledad, y también el maltrato.

Se interpreta la información teórica del problema, así como se manejan conceptos que atañen a la temática del estudio. Los alumnos los interpretan y los relacionan con la problemática social y los daños que causa, lo cual muestra que han seleccionado y analizado la información recopilada.

Vania: Todos los factores antes mencionados son los que crean la cultura de cada persona. Si son manipulados en forma inapropiada el joven puede caer en el consumo de drogas (...). Ahora, el consumo de drogas en los jóvenes ha aumentado considerablemente y eso se debe principalmente... Un factor importante es que los jóvenes están como descuidados emocionalmente por sus familias, y se siente la gente más pobre discriminada porque no tiene las oportunidades socioculturales de otras personas y las consecuencias se ven, generalmente, en su rendimiento escolar porque disminuye y se crean eh... jóvenes socialmente aislados.

Los alumnos asumen una crítica respecto a las escasas oportunidades que tienen los jóvenes en la Región del Maule y de la problemática social que se presenta en los más pobres. Además, regresan a la exploración del problema.

Vania: Los objetivos de nuestro proyecto son: 1) conocer la magnitud del consumo de drogas en la población escolar; 2) utilizar las matemáticas en este experimento a nivel del liceo; 3) ocupar las funciones para apreciar el consumo de los siguientes años. También se busca: 4) emplear el proyecto como forma de prevenir el consumo de drogas en los jóvenes escolares; 5) reconocer la utilidad y la importancia del estudio matemático en el análisis del consumo de drogas en el liceo, en la comuna y la región.

Aquí, hacen una exposición detallada de los objetivos del estudio –tanto los matemáticos como los no matemáticos– y dan a conocer a la audiencia lo que se pretende con el proyecto y el impacto que tendrá si se divulga. Muestran una valoración de las matemáticas para resolver problemas y reconocen que, a

través de sus conceptos, como las funciones, pueden modelizar la situación y proyectar, con lo cual perfilan una visión estratégica de futuro.

Fase 3. Apropiación de la estructura. Presentación de datos, gráficos y explicitación y formulación del modelo

En esta fase, los alumnos presentan los datos y gráficos que elaboraron para abordar la prevalencia del consumo de marihuana en la población escolar en la VII Región del Maule.

Patricio: El primer gráfico que nosotros hicimos fue el de la prevalencia del consumo de marihuana en la población escolar en la VII Región. Aquí podemos ver que entre los años 1999 y 2001 tuvo un aumento el consumo. El porcentaje de personas que consumen marihuana va de un 8.7 a un 8.8, ya eso tuvo una elevación; entre los años 2001 y 2003 disminuyó de un 8.8 a un 8.1 y a un 7.8(...).

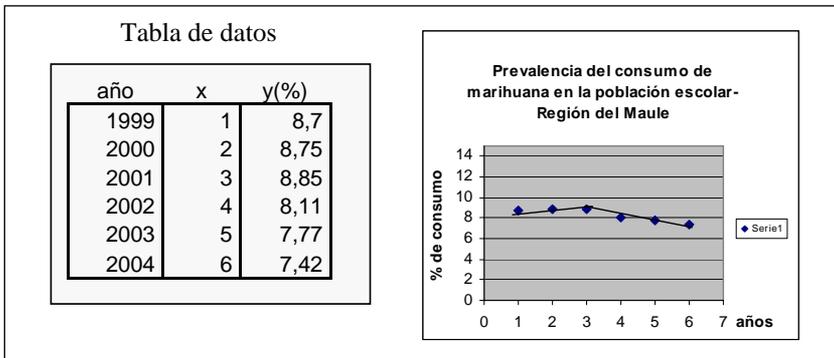


Figura 4. Representación gráfica a partir de los datos de la tabla.

Patricio: Bueno, la prevalencia del consumo de marihuana en la comuna de Talca. Aquí podemos ver que entre los años 1999 y 2001 tuvo un alza de un 8.7 a un 9.40% de consumidores, mientras que entre los años 2001 y 2003 el alza fue de un 9.40% de consumidores a un 10.4%. Como podemos ver en la comuna de Talca, la recta va ascendente, esto quiere decir que el porcentaje de alumnos que consumen marihuana aumenta a medida que transcurre el tiempo.

En la interpretación que realizan a partir de los datos y el apoyo de la gráfica, se nota la descripción del proceso de modelización, no perdiendo de vista el problema real. Realizan comparaciones de los datos en los diferentes tramos de la curva, estableciendo una idea de proyección de los datos. Comunican resultados de acuerdo al comportamiento de éstos y establecen relación entre los conceptos matemáticos y el problema de estudio.

Explicación y formulación del modelo: Los alumnos describen el proceso que llevaron a cabo para obtener los modelos matemáticos; asimismo, explican los conceptos matemáticos que emplearon y los procesos y métodos seguidos al formularlos.

Pancha: Bueno, a través de los gráficos que ‘Pato’ presentó anteriormente, pudimos obtener dos modelos matemáticos. El primero, que se nota acá, es el que obtuvimos para la VII Región: como la recta era una ascendente y una descendente, sacamos dos tramos. Es así que para el tramo entre 0 y menor o igual a 3 nos dio $f(x) = 0,05X + 8,65$, y en el tramo que es menor a 3, es decir que el año 2001... 2003 perdón, mayor que 3... 2001 en adelante nos dio: $f(x) = -0,345X + 9,49$.

En cuanto a la prevalencia del consumo en la comuna de Talca, como vieron la recta, era ascendente, donde pudimos nosotros realizar el ajuste lineal. A partir de esto nos dio la función $f(x) = 0,5X + 8,9$.

Bueno, estos datos nos permitieron decir el porcentaje del consumo de años desconocidos, como lo eran el 2000 y el 2002, y poder predecir el consumo de años posteriores.

Dentro de los aspectos más importantes que surgen en el diálogo sobresalen: 1) utilización del sistema de representaciones; 2) explicitación de las variables matemáticas en la organización de los datos, en las gráficas y la relación de dependencia entre ellas; 3) análisis y descripción de la información, a partir del comportamiento de los datos y la gráfica, donde los alumnos van mostrando cómo llegaron a modelizar la situación; 4) comunicación de resultados sobre el consumo en diferentes años, donde los alumnos explican claramente el comportamiento de la gráfica en su aumento y disminución por intervalos de tiempo. Destacan nociones como pendiente, porcentaje, idea de proyección, variables, funciones por tramos, ajuste lineal y proyección de datos. Una idea que destaca en la exposición alude al reconocimiento de la idea de interpolación lineal, donde los alumnos evidencian la comprensión del significado y su utilización práctica, ya que les permite solucionar el problema de los datos que faltan.

Fase 4. Aplicación. Del modelo a las conclusiones. Interpretación de resultados y su relación con el problema de estudio

A continuación, los alumnos informan sobre las conclusiones y establecen comparaciones tanto a nivel comunal como regional; de igual modo, organizan la información que da respuesta a uno de los objetivos.

Vania: Con los datos recopilados a nivel comunal y regional se puede apreciar y concluir que el consumo de marihuana en la juventud va en aumento

en nuestra comuna a medida que transcurre el tiempo (...) En cambio, en la región, al analizar los datos sucede todo lo contrario. Como puede verse en la función por tramos, que tiene como objetivo principal predecir el consumo de marihuana en la juventud para años posteriores, y además encontrar los datos desconocidos, como son los años 2000 y 2002. A partir de esto, se puede predecir una lenta disminución en el consumo a nivel regional, siempre y cuando las condiciones de la región se encuentren en forma similar.

Dentro de las conclusiones, los alumnos revelan una idea clave sobre el proceso de modelización matemática, al plantear que el modelo sirve para predecir si las condiciones se mantienen. Establecen una relación entre uno de los objetivos y el modelo matemático; asimismo, explicitan una proyección de los datos. La figura 5 ilustra un esquema que organiza los elementos que los alumnos han manejado al presentar los resultados, al igual que muestra la estructuración que le han dado a los conceptos y procesos y a la formulación del modelo.

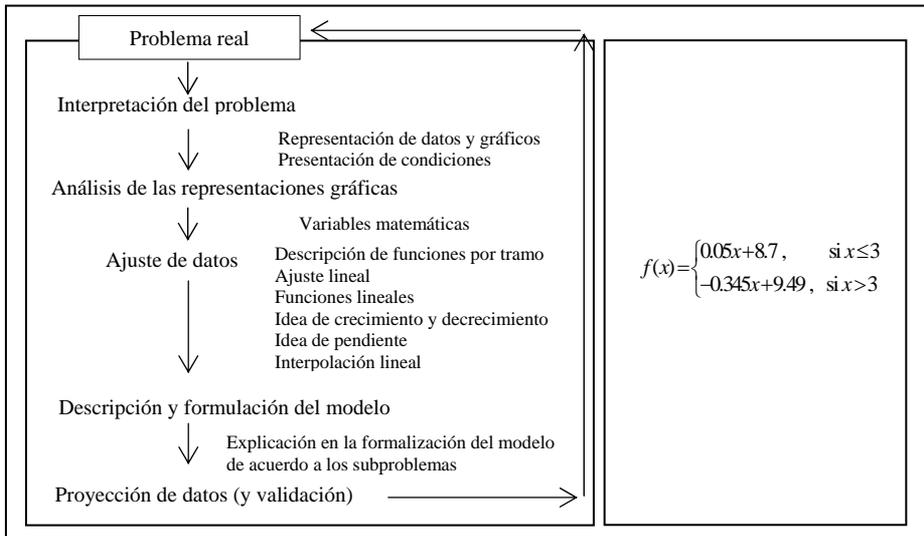


Figura 5. Elementos descritos en la presentación de resultados y formulación del modelo

En la figura se muestran los elementos centrales que han puesto en juego los alumnos, entre los que destacan: 1) interpretación del problema real y sus condiciones iniciales, pues aparecen los datos del problema y sus representaciones gráficas, que dan cuenta cómo se comporta el fenómeno; 2) análisis de las representaciones gráficas y descripción de las variables

matemáticas; 3) ajuste de datos a una función por tramos, pues se describen el ajuste lineal, las funciones lineales que responden el problema matemático y la interpolación lineal para los datos que faltan; 4) descripción y formulación del modelo, donde los alumnos manejan una explicación de acuerdo con los subproblemas; 5) proyección de datos y validación, lo cual lleva a dar respuesta al problema real.

3.1.6. Resultados del análisis. Capacidades desarrolladas en la exposición oral

En esta etapa hemos constatado que un trabajo de proyectos que se basa en la modelización ayuda a que los estudiantes desarrollen una serie de capacidades, las cuales no sólo les permiten apreciar la utilidad de la matemática, sino también desarrollar capacidades de orden superior.

Capacidades cognitivas: Las capacidades cognitivas más relevantes de los estudiantes fueron las siguientes:

1. Dotan de significado a los conceptos y procesos matemáticos, al relacionarlos con la problemática real, con lo cual formulan el modelo que da respuesta a la situación.
2. A través de la obtención de su modelo, han podido conjeturar lo que pasará con el tiempo si se mantienen las mismas condiciones. Este hecho resulta relevante en un trabajo matemático porque permite la proyección del conocimiento a través del lenguaje algebraico.
3. Desde el punto de vista de la resolución de problemas de modelaje, lograron aislar las variables que necesitaban para poder formular el modelo y dar respuesta a su problema de estudio. Este es un cambio importante en el aprendizaje porque ha permitido una adquisición del lenguaje algebraico para representar situaciones reales.
4. Respecto al problema de estudio, los alumnos adquieren un dominio del lenguaje técnico y algebraico que fue incrementando sus ideas iniciales. Con ello, desarrollan un trabajo matemático preciso y coherente, tanto del lenguaje algebraico como de las propiedades y procesos algorítmicos.
5. Dan sentido a las relaciones funcionales que habían determinado mediante el proceso de evaluación de datos en el modelo, y verifican y establecen proyección a futuro.

6. Las representaciones están siempre presentes en el trabajo. Al apoyarse en ellas, los alumnos interpretan los datos y establecen comparaciones, pasando de una representación a otra.
7. Hacen generalizaciones y exponen como modelo una función por tramos que definieron muy bien matemáticamente, que da respuesta al problema. Esto es primordial para quienes se inician en un trabajo matemático, incluyendo a los de secundaria.
8. Seleccionan y manejan la información, pues se pudo constatar que eligieron los datos más relevantes. Además, muestran un desarrollo organizado al identificar un problema concreto para el estudio, así como para la búsqueda y selección de la información; planifican las tareas a realizar; estructuran los conceptos matemáticos en juego, y formulan el problema en términos matemáticos y la solución al problema real.

Capacidades metacognitivas: Los alumnos pusieron de manifiesto un desarrollo del pensamiento estratégico, en el que detectamos:

- a) *Visión de futuro.* El grupo posee una capacidad visionaria para solucionar su problema. Desde la generación de la idea, que se notó en las entrevistas, tenían claro hacia dónde iban a dirigir sus esfuerzos. Su exposición oral dejó constancia de que se encontraban en un nivel distinto al de la generación de la idea
- b) *Análisis crítico de la información.* Este es un aspecto esencial en la modelización, pues el aprendizaje a través de la modelización desarrolla un análisis crítico de ella (Alsina, 1998, Aravena, 2001). El grupo clasificó y seleccionó la información disponible, así como efectuó la búsqueda de datos, selección, análisis y relación entre las variables que les condujo a la formulación del modelo matemático. Con ello, el grupo pudo resolver el problema desde la base del conocimiento disponible, lo cual coincide con investigaciones que refieren que la modelización provoca una aproximación investigativa de la problemática estudiada (Alsina, 1998).

Aspectos transversales. Hubo un desarrollo manifiesto de la autonomía. En tal aspecto coincidimos con investigaciones que ponen en evidencia que, a través de los proyectos, los estudiantes despliegan sus propias opiniones, argumentan sus decisiones e incrementan su actitud crítica y dialogante (Abrantes, 1994; Aravena, 2001). En los análisis que hemos realizado pudimos constatar dichas manifestaciones en los alumnos. Además, desarrollaron capacidades

interpersonales e intrapersonales al enfrentar el trabajo con responsabilidad, asumieron las tareas y compromisos, y superaron las dificultades, fracasos y situaciones que se le presentaron en la búsqueda de la información y datos para elaborar su trabajo. Podemos asegurar que el trabajo matemático a través de la modelización de situaciones inculca claramente en los estudiantes una actitud positiva hacia la matemática. Destacamos la valoración que el grupo hizo de la modelización como proceso matemático útil para resolver problemas reales (Alsina, 1998).

3.1.7. *Dificultades en el trabajo de proyectos*

En los análisis descritos se pudo apreciar que los alumnos tuvieron algunas dificultades iniciales para llevar adelante la tarea. En el primer avance, sus mayores conflictos fueron organizar tanto la información disponible como el marco teórico que sustentaba el problema, al igual que la obtención de datos. Tuvieron que superar una serie de obstáculos al enfrentarse al medio externo (lo cual suele generar desmotivación y pérdida de tiempo), no estaban claros los aspectos matemáticos; aunque sabían hacia dónde dirigir los esfuerzos, no habían determinado lo que querían modelar. Fue necesario que los alumnos acudieran a un segundo encuentro con el profesor para que los centrara en el trabajo y los guiara hacia lo principal, que era la formulación del modelo para solucionar el problema.

3.1.8. *La actividad matemática en procesos de modelización*

En la línea de lo que significa trabajar con modelos matemáticos y procesos de modelización, resalta la forma en que el grupo pasó por las diferentes etapas:

- 1) *Interpretación de datos y condiciones del problema:* Mediante problemas concretos, los estudiantes identificaron las restricciones y condiciones del problema. Utilizaron diferentes sistemas de representación para describir el fenómeno, con lo que pudieron transitar de una representación a otra.
- 2) *Matematización:* Los estudiantes describieron relaciones matemáticas que interpretaban el problema, desarrollaron algoritmos y propiedades, así como formularon el modelo matemático que daba repuesta a la situación.
- 3) *Validación y verificación del modelo:* Los alumnos fueron capaces de establecer una relación entre los datos y el problema

real, evaluando datos del dominio; además, instauraron predicciones mediante la evaluación de nuevos datos, adecuándose a las condiciones del problema. En un proceso de modelización tal aspecto es importante porque permite validar el modelo que explique nuevos datos, ya sea de manera exacta o muy aproximada.

- 4) *Comunicación matemática*: En todo momento los alumnos presentaron argumentos de los conceptos utilizados y de los procesos desarrollados; asimismo, dieron interpretaciones técnicas y matemáticas de datos y las soluciones, y explicitaron en detalle los conceptos y procesos que les permitieron dar respuesta al problema real (Aravena y Caamaño, 2007).

4. CONCLUSIONES E IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

Los resultados y análisis han permitido corroborar que un trabajo sustentado en la modelización prepara a los estudiantes para que tengan una participación activa en el ámbito social y cultural. Esta forma de trabajo permite que adquieran una visión integrada de la matemática, reconozcan su utilidad para resolver problemas del medio, además de que comprendan y valoran la utilidad de los conceptos y procesos. Dicho aspecto cobra relevancia porque una de las dificultades en el aprendizaje de la matemática radica en la comprensión y la utilidad de los conceptos cuando se presentan fuera de contexto.

También este tipo de trabajo fomenta la expresión de ideas, permite acceder a la información y adquirir elementos de juicio para opinar críticamente sobre los acontecimientos que se exponen. En tal sentido, trabajar proyectos a través de la modelización ha sido positivo para el grupo, ya que les ha ofrecido la posibilidad de desarrollar sus potencialidades al enfrentarse a un problema real, cercano a su entorno, y utilizar el conocimiento matemático disponible.

Dentro de las implicaciones didácticas, podemos señalar que un trabajo de este tipo:

- 1) Ofrece una visión integrada de las matemáticas que permite comprender y valorar la utilidad de los conceptos y procesos en un mundo cada vez más matematizado.
- 2) Hace que se entiendan los fenómenos mediante la descripción de relaciones científicas (fórmulas, proyección, ajuste, interpolación).

- 3) Da significado a los conceptos y métodos matemáticos, apreciando la aplicabilidad de los conceptos, la utilidad de las representaciones gráficas y de la manipulación algebraica en la descripción matemática del fenómeno en estudio.
- 4) Realza el aspecto formativo de la matemática, estimulando el interés por el descubrimiento.
- 5) Fortalece el trabajo en equipo y la discusión.
- 6) Prepara a los alumnos para enfrentar y superar dificultades en el medio externo.

Por último, destacamos que esta experiencia no permite establecer generalizaciones; sin embargo, la categorización que se ha utilizado en los análisis, a partir de las investigaciones descritas, consiste en un punto de partida para diseñar propuestas enmarcadas en proyectos, de tal manera que se puedan validar los resultados en condiciones similares. Pensamos que un trabajo en esta línea resulta prometedor para superar las deficiencias que tiene la educación secundaria en la Región del Maule y el país de Chile.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática a experiência do projecto MAT789*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Lisboa, Portugal.
- Alsina, C. (1998). *Neither a microscope nor a telescope, just a mathscope*. *Proceed.* International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA) 1997.
- Aravena, M. (2001). *Evaluación de proyectos para un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica*. Tesis de doctorado, Universidad de Barcelona, España.
- Aravena, M. (2002). Las principales dificultades en el trabajo algebraico. Un estudio con alumnos de ingeniería de la UCM. *Revista Académica UC Maule. Universidad Católica del Maule* 28, 63-81.
- Aravena, M. y Giménez, J. (2002). Evaluación de procesos de modelización polinómica mediante proyectos. Monografía modelización y matemáticas. *Revista UNO. Didáctica de las Matemáticas* 31, 44-56.
- Aravena, M. y Caamaño, C. (2007). *Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca-Chile*. Manuscrito presentado para publicación.
- Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza.
- Burton, L. (1999). Why is intuition so important to mathematics but missing from mathematics educations. *For the Learning of Mathematics* 19 (3), 27-32.
- Caamaño, C. (2001). *Bases para una formación integrada de álgebra y geometría en ingeniería*.

- El caso de las cuádricas*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Barcelona, España.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon* 42, 353-369.
- Cordero, F. (1995). El pensamiento de la matemática avanzada en el aprendizaje cooperativo. Algunas argumentaciones del cálculo. *Serie Antologías. Número 1*. (pp. 171-180). México: Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.
- Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (volume.1, pp. 369- 375). Utrecht, The Netherlands: State University of Utrecht.
- De Lange, J. (1996). Real problems with real world mathematics. In C. Alsina et al. (Eds.), *Proceedings of the 8th International Congress of Mathematics Education* (pp. 83-110). Sevilla, España.
- Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática* 8 (3), 24-41.
- Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematics thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematics visualization*. (pp. 311-335). North American Chapter of PME: México: Cinvestav-IPN.
- Farfán, R. (1995). El concepto de función hasta la primera mitad del siglo XIX. *Serie Antologías. Número 1* (pp. 99-145). México: Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.
- Font, V. (2001a). Reflexiones didácticas desde y para el aula. *Revista EMA* 6 (2), 180-200.
- Font, V. (2001b). Some views on the representation in teaching mathematics. *Philosophy of Mathematics Education Journal* 14, 1-35.
- Giménez, J. (1997). *Evaluación en matemáticas. Una integración de perspectivas*. Madrid, España: Síntesis.
- Griffiths, H. B. & Howson, A. G. (1974). *Mathematics: society and curricula*. Cambridge, USA: Cambridge University Press.
- Goldin, G. & Steingold (2001). System of representations and the development of mathematics concepts. In A. Cuoco y F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representations in school mathematics* (pp. 1-23). USA: Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Gómez, J. (1998). *Contribució a l'estudi dels processos de modelització a l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques a nivell universitari*. Tesis de doctorado, Universitat Autònoma de Barcelona, España. Disponible en <http://www.tesisexarxa.net/TDX-0920105-165302>.
- Gómez, J. (2000). *L'altra cara de les matemàtiques*. Barcelona, España: Ketres Editora.
- Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación Matemática* 10 (2), 23-45.
- Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. USA, Hillsdale, New Jersey: Lawrence Earlbaum.
- Jorba, J. y Casellas, E. (1997). *La regulación y la autorregulación de los aprendizajes*. Madrid, España: Síntesis.
- Kaput, J. (1988). Representations, inscriptions, descriptions and learning: a kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematics Behavior* 17 (2), 266-281.
- Keitel, C. (1993). Implicit mathematical models in social practice and explicit mathematics teaching by applications. In J. De Lange, C. Keitel, I. Hunthey y M. Niss (Eds.), *Innovation in maths education by modelling an applications* (pp.19-30). UK, Chichester: Ellis Horwood.
- Letelier, M.; López, R. y Martínez, M. (1994). *Educación para el desarrollo. Hacia una cultura*

- de educación innovativa*. Chile, Santiago: Centro de Investigación en Creatividad y Educación Superior, Universidad de Santiago.
- Leontiev, A. (1993). *Actividad, conciencia y personalidad*. México: Editorial Cartago.
- Matos, J. F.; Blum, W.; Houston, S. K. & Carrera, S. P. (1996). *Modelling and mathematics education*. UK, Chichester: Horwood Publishing.
- Miles, M. & Huberman, M. (1994). *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook*. UK, London: Sage.
- Niss, M. (1989). Aim and scope of applications and modelling in mathematics curricula. In W. Blum et al. (Eds.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics* (pp. 22-32). UK, Chichester: Ellis Horwood.
- Niss, M. (1992). Applications and modeling in school mathematics-directions for future development. In I. Wrszup y R. Steint (Ed) *Development in school mathematics around the world* (volume 3, pp. 346-361). USA: Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Niss, M. (2001). Issues and problems of research on the teaching and learning of applications and Modelling. In J. F. Matos, W. Blum, S. K. Houston y S. P. Carrera (Eds.), *Modelling and mathematics education* (pp. 73-88) UK, Chichester: Horwood Publishing.
- Ponte, J. M. (1984). *Funcional reasoning and the interpretation of cartesian graphs*. Tesis de doctorado, University of Georgia.
- Rodríguez, G.; Gil, J. y García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga, España: Ediciones Aljibe.
- Romberg, T.; Carpenter, T. y Fennema, E.; (1994). *Integrating research on the graphical representation of functions*. USA: Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Ruiz, O. J. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Bilbao, España: Universidad de Deusto.
- Sepúlveda, G. (2000). Enseñanza y complejidad: la formación en la sociedad del aprendizaje. En CINDA (Ed.), *Las nuevas demandas del desempeño profesional y sus implicaciones para la docencia universitaria* (pp. 51-73). Santiago, Chile: Centro Universitario de Desarrollo (CINDA)-Fondo de Desarrollo Institucional-Ministerio de Educación, Chile.
- Sierpiska, A. (1996). Mathematics: in context, pure or with applications? *For the Learning of Mathematics* 27, 35-57.
- SIMCE (2004). *Prueba SIMCE, 2o. Medio 2003. Análisis de resultados*. Obtenido en septiembre 20, 2006, de http://www.biblioteca.mineduc.cl/documento/Informe_2_Medio_2003.pdf.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense-marking in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-389). USA, New York: McMillan.
- Schthven, K. (1990). New actions upon old objects: a new ontological perspective on functions. *Educational Studies in Mathematics* 21, 259-291.
- Schwartz, B. & Dreyfus, T. (1995). New actions upon old objects: A new ontological perspective on functions. *Educational Studies in Mathematics* 29 (3), 259-291.
- Swetz, F. & Hartzler, J. S. (1996). *Mathematical modeling in the secondary school curriculum: a resource guide of classroom exercises*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Williams, H. & Ahmed, A. (1997). Applications, modelling and communication in secondary school mathematics. In *Modelling and mathematics educations* (pp. 11-21). UK, Chichester: Horwood Publications.
- Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Visualization and the nature of mathematics. In *Visualization in teaching and learning mathematics MAA, NOTES*, 19.

Investigación financiada por el Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT N° 1030122).

Autores

María Aravena. Instituto de Ciencias Básicas, Departamento de Matemática, Universidad Católica del Maule, Talca, Chile; maravena@ucm.cl

Carlos Caamaño. Instituto de Ciencias Básicas, Departamento de Matemática, Universidad Católica del Maule, Talca, Chile; ccaamano@ucm.cl

Joaquín Giménez. Dept Didactica de les Ciències Experi.m.i Matem, Facultat de Formació del Professorat, Universidad de Barcelona. España; quimgimenez@ub.edu