CLAUDIA ROSARIO MURO, PATRICIA CAMARENA y ROSA DEL CARMEN FLORES

ALCANCES DE LA TEORÍA DE VERGNAUD EN LA REPRESENTACIÓN DE UN PROBLEMA COMPLEJO DE INGENIERÍA

SCOPE OF VERGNAUD'S THEORY IN THE REPRESENTATION OF A COMPLEX ENGINEERING PROBLEM

RESUMEN. Con el propósito de implementar tareas que apoyen a un grupo de estudiantes a construir el significado de la convergencia de la serie de Fourier, en esta investigación se estudia su vinculación con un problema relativo a situaciones que describen un fenómeno de transferencia de masa hasta alcanzar el estado de equilibrio.

En la realización de las tareas, se lleva a cabo un análisis de las representaciones del grupo sobre cómo entiende y soluciona problemas tocantes a este objeto matemático, retomando aspectos que plantea Vergnaud en estudios de operaciones básicas en la educación primaria. Los resultados destacan concepciones aisladas de ambos contextos y dificultades en el conocimiento de las ecuaciones diferenciales que rigen al fenómeno, así como la implicación de la serie de Fourier.

PALABRAS CLAVE: Convergencia, serie de Fourier, transferencia de masa, representaciones.

ABSTRACT. With the aim of implementing tasks to help a group of students to construct the meaning of the convergence of the Fourier series, this research studies its relationship with a problem concerning situations that describe a mass transfer phenomenon until equilibrium is reached.

As they performed the tasks, an analysis was made of the group's representations on how they understand and solve problems which touch on this mathematical object, recalling aspects mentioned by Vergnaud in studies on basic operations in primary education. The results bring to light isolated conceptions in both contexts and difficulties in knowledge of differential equations which govern the phenomenon, as well as the consequence of the Fourier series.

KEY WORDS: convergence, Fourier series, mass transfer, representations.

RESUMO. Com o propósito de implementar tarefas que aponham um grupo de estudantes a construir o significado da convergência da série de Fourier, a presente pesquisa se estuda sua vinculação com um problema referente a situações que descrevem um fenômeno de transferência de massa até alcançar o estado de equilíbrio.

Na realização das tarefas, é realizada uma análise das representações do grupo sobre como se entende e soluciona problemas relacionados a esse objeto matemático retomando aspectos

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2007) 10(3): 401-419
Recepción: Marzo 06, 2007/Aceptación: Octubre 18, 2007

apresentados por Vergnaud, em estudos em torno de operações básicas no ensino fundamental. Os resultados desatacam concepções isoladas de ambos contextos e dificuldades no conhecimento das equações diferenciais que regem o fenômeno, assim como a implicação da série de Fourier.

PALAVRAS CHAVE: Convergência, série de Fourier, transferência de massa, representação.

RÉSUMÉ. Dans l'objectif d'implémenter des tâches pour soutenir un groupe d'étudiants dans la construction de la signification de la convergence de la série de Fourier, cette recherche étudie le rapport de cette signification avec un problème portant sur des situations qui décrivent un phénomène de transfert de masse jusqu'à arriver à l'état d'équilibre.

Dans la réalisation des tâches, est développée une analyse de représentations du groupe, portant sur : Comment comprendre et résoudre des problèmes abordant cet objet mathématique, en considérant des aspects exposés par Vergnaud en études sur les opérations élémentaires à l'école élémentaire. Les résultats soulignent des conceptions isolées de deux contextes et des difficultés par rapport aux connaissances des équations différentielles qui régissent ce phénomène et l'implication de la série de Fourier.

MOTS CLÉS: Convergence, série de Fourier, transfert de masse, représentations

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de la serie de Fourier en situaciones características de un fenómeno de transferencia de masa puede ser una alternativa para abordar la enseñanza de este concepto en el área de ingeniería química, estableciendo las relaciones entre ambos tipos de contextos. Un bosquejo de la vinculación que guarda la serie con el proceso es la convergencia y equilibrio que alcanza el fenómeno, lo cual justifica la determinación de situaciones en las que ambos conceptos se pueden ver apoyados por el nexo biunívoco que conservan.

Dentro de las matemáticas, la serie de Fourier es un concepto básico en los cursos avanzados en ingeniería, y abarca elementos que caracterizan su complejidad tanto en su enseñanza como en su aprendizaje. Algunos de los más importantes son la suma infinita de las funciones trigonométricas que la constituyen, la periodicidad de sus funciones y su convergencia. Este último concepto concierne a la evaluación de la serie en un punto, que se puede apreciar en el comportamiento gráfico de la suma, cuando las componentes o funciones sinusoidales se aproximan a una función; el límite de la serie corresponde a esa función en todos sus puntos de continuidad.

La transferencia de masa es un fenómeno que se presenta en diversas operaciones unitarias del tipo difusionales, típicas dentro de la ingeniería, y su base teórica común plantea que *se transfiere masa de una fase fluida a otra a través de una interfase*. El fenómeno descrito se encuentra asociado a la emigración de las moléculas de un lugar a otro por la diferencia de concentración; tal contraste provoca la tendencia a salir de una región y establecerse en una zona distinta. El proceso de transferencia de masa visto a través de la emigración de las moléculas tiene un límite para un tiempo que es teóricamente infinito; ahora bien, el equilibrio que alcanza el fenómeno con el tiempo es referido al estado estable del proceso, donde los cambios producidos en una propiedad transferente con respecto al tiempo ya no son significativos. Por tanto, el movimiento de moléculas en el estado estable se debe únicamente al espacio de emigración.

Bajo tales circunstancias, matemáticamente existe la representación de una función que caracteriza el proceso de transferencia en el tiempo y su condición de equilibrio cuando el tiempo es infinito. Dicha función se halla íntimamente ligada con la convergencia de la serie de Fourier precisamente cuando converge a esa función.

El concepto de la convergencia de la serie de Fourier se puede encontrar desde su origen en la teoría analítica del calor, establecida por Fourier (Farfán, 1995). Esta teoría da un aporte importante, tanto para la ingeniería como para el análisis matemático, que consiste en un estudio cualitativo y empírico del fenómeno físico del calor, que conduce al análisis de la convergencia de una serie infinita ligada a la naturaleza del fenómeno de la conducción. Para llegar a dicho análisis, Fourier planteó la ecuación del estado inestable y estable que representaba al sistema estudiado. De esta forma halló que la solución de las ecuaciones para ambos estados era una serie trigonométrica infinita, que ahora se conoce como *serie de Fourier*.

Así, el planteamiento de la teoría analítica del calor rige los fenómenos de transferencia y, por tanto, constituye la base para el análisis de un sistema donde se transfiere masa. Esto permite que se establezcan similitudes entre el mecanismo de estos dos tipos de transporte molecular, con el fin de identificar y fijar los elementos que determinan el concepto en la difusión de masa, así como las relaciones que surgen entre la serie y su convergencia.

Entre las investigaciones en matemática educativa que han retomado la obra de Fourier podemos citar las de Ulín (1984) y Farfán (1995), donde se realiza un análisis histórico-crítico sobre la conducción del calor y la relación entre las temperaturas finales que alcanza un cuerpo en la etapa estable de la difusión; asimismo, señalan la implicación de la convergencia de la serie Fourier en este estado. Ambos trabajos resaltan el estado estacionario del fenómeno ligado al estudio de la convergencia de una serie trigonométrica infinita, y sintetizan tal concepto en la relación que tiene encontrar el estado estacionario a la verificación de la convergencia. En el estudio realizado por Farfán se analiza el ambiente en que surge esta teoría y se diseñan secuencias didácticas acerca de la convergencia de series infinitas, atendiendo a cuestiones del planteamiento de Fourier, con el fin de presentar una visión sobre las percepciones matemáticas del profesor en relación con el fenómeno.

Respecto a los estudios que han dejado al descubierto las carencias del significado de la serie de Fourier en problemas de la ingeniería, están los de Camarena (1993) y Muro (2000). Su propuesta consiste en destacar la importancia de enseñar la serie de Fourier en vinculación con problemas característicos del área de ingeniería para facilitar su aprendizaje, de ahí que sugieran la creación de situaciones en un ambiente adecuado, donde el estudiante pueda construir el significado de la serie de Fourier en temas propios de su actividad (Muro, 2004). Por ejemplo, Muro (2000) presenta el desarrollo de una situación relativa a la transferencia de agua a través de un sólido cuando se hace pasar aire caliente para su secado. El comportamiento de dicho proceso se obtiene mediante una serie de Fourier, y las representaciones formales que lo describen a través de la relación recíproca entre los aspectos matemáticos y los aspectos que confluyen en la situación o situaciones donde ocurre el proceso de transferencia de masa. El producto de la investigación deriva tanto del significado que atañe al problema como del conjunto de conceptos y situaciones que entran en juego para ese contexto (Muro, 2004).

En correspondencia a los estudios sobre las representaciones de problemas matemáticos, Vergnaud ha enmarcado trabajos donde se enfatiza en el papel de las diferentes relaciones en situaciones que contienen estructuras aditivas, multiplicativas y relaciones número-espacio, entre otros, como los de Vergnaud y Durán (1976), Vargas y López (1988), Guerrero (1997), Vergnaud (1997), Nunes y Bryant (1998). Dichas investigaciones han analizado los procedimientos que los niños emplean para resolver problemas y destacan el estudio de los procedimientos informales –no algorítmicos– que ocupan para llegar a soluciones correctas. Asimismo, han brindado información sobre la complejidad de la jerarquía entre problemas de tal índole, así como la diferencia en los procedimientos de su solución, dependiendo del grado escolar y las demandas conceptuales que se estudian.

Las investigaciones de Vergnaud acerca de las estructuras aditivas muestran el conjunto de conceptos y teoremas que permiten ahondar en los problemas como tareas matemáticas, bajo factores establecidos a partir de la actividad del niño en diversos cuestionamientos. Por tanto, el conocimiento que resulta de la actividad del niño es visto como pragmático y se establece mediante la identificación de sus invariantes operatorias. Vergnaud (1990, 1996, 1997 y 2000) apunta que las invariantes operatorias son proposiciones que el sujeto sostiene como verdaderas en un cierto rango de situaciones, y como categorías que posibilitan contar con elementos para obtener información adecuada al problema.

En esta línea, Flores (2003) señala el interés por comprender diversas transformaciones y transiciones en el conocimiento matemático, centrándose en estructuras aditivas que aparecen en el tránsito de una resolución no-canónica hacia una canónica y algorítmica. Por un lado, considera las características de los esquemas y sus componentes –propósitos, reglas de acción, inferencias, teoremas y conceptos en acto– que forman la representación de un problema elaborado por un individuo en el proceso de su resolución. Por otro, las formas de simbolización que también integran las resoluciones que hacen los niños. Ambos aspectos son el eje del planteamiento conceptual de Vergnaud.

Nunes y Bryant (1998), a partir de un análisis a varios trabajos relacionados con lo que expone Vergnaud, afirman que las dificultades que encuentra un niño en la solución de diferentes problemas se deben tanto al problema como a las invariantes que plantea y la familiaridad con el contexto en que se inserta. También dicen que el entendimiento de un problema depende de la vinculación que los niños hacen entre invariantes y simbolizaciones; por ello, estipulan que el desarrollo del conocimiento implica el dominio gradual de un conjunto de conceptos y principios matemáticos que derivan, a su vez, del significado de una diversidad de problemas.

En tal sentido, las investigaciones de Vergnaud y las que toman como referencia su marco para explicar la evolución en el conocimiento del niño corresponden, en su mayoría, a trabajos efectuados dentro del nivel de educación primaria, con la intención de explicar el conocimiento ante situaciones que se generan por las operaciones aritméticas. Bonilla, Block y Waldegg (1993) plantean que en México las investigaciones relacionadas con los planteamientos de Vergnaud son un esfuerzo importante, pero aún incipiente, que intenta no sólo describir, sino también llegar a revelar los procesos involucrados en el aprendizaje de los contenidos matemáticos de la educación básica.

Referente al nivel medio superior y superior, en México se han encontrado trabajos que se rigen por algunos aspectos que marca Vergnaud, como los de Muñoz (1997, 2000) y Muro (2004). La investigación de Muñoz aborda la problemática de separación entre lo conceptual y algorítmico en la enseñanza del cálculo integral, mostrando elementos que propician el enlace de ambos aspectos a través del análisis y clasificación de diversas situaciones problema, con lo cual hace que el concepto de la integración en el cálculo pueda pensarse desde el punto de vista del estudio del movimiento de un cuerpo en el nivel medio superior. Esto es, mediante la perspectiva de la estructura relacional que tiene lugar en esta clase de problemas, tratando de mostrar procedimientos de solución algorítmicos y no algorítmicos. Por su parte, Muro identifica situaciones problema acerca de la serie de Fourier en contexto, a fin de analizar la actividad conceptual del estudiante en términos de las invariantes operatorias que se identifican en su esquema de conocimiento sobre dicha noción, retomando aspectos de la teoría de Vergnaud.

Si se repara en la problemática de la enseñanza en un nivel superior, hay que prestar atención a los resultados de las investigaciones de Muro (2000, 2004) porque revelan un interés de identificar las representaciones formales de un problema complejo como lo es el fenómeno de transferencia de masa, que implica la aplicación de la serie de Fourier y, con base en ello, ahonda en la actividad cognitiva de un grupo de sujetos a través de sus representaciones en la situación problema.

De esta manera, las concepciones que alcanzan los sujetos en situaciones del área de la ingeniería se pueden categorizar de acuerdo con el marco de referencia de Vergnaud sobre las estructuras aditivas dentro de la educación básica.

2. ANÁLISIS CONCEPTUAL DE LA SITUACIÓN PROBLEMA Y DEL PROCESO DE SOLUCIÓN

Dentro de la diversidad de situaciones que acoge la enseñanza de la serie de Fourier en la ingeniería, se establece su representación en un problema sobre el fenómeno de transferencia de masa en el contexto de la ingeniería química. Esto permite identificar las representaciones de un grupo de estudiantes mediante el análisis de los esquemas que tienen lugar en el entendimiento y solución del problema.

La modelación matemática de la transferencia de masa en el proceso de secado de un material toma como referencia una lámina plana con dimensiones y, z, con espesor x. Por las características de la lámina, se supone que el área superficial en las dos caras es mucho más grande que el área a lo largo del espesor; de ahí que la transferencia de masa principalmente se lleve a cabo a lo largo del espesor. Bajo este argumento, la transferencia del agua en el secado del material se describe en una sola dirección (x), según los términos del cambio en una propiedad transferente, como puede ser el cambio en la humedad del material (T), lo cual se refleja cuando las moléculas emigran en tal dirección en función del tiempo t y del recorrido en x .

El cambio se representa por una ecuación diferencial parcial lineal, que llamaremos (1), dada en siguiente expresión:

$$k_g \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Aquí, k_g es el coeficiente de difusividad de masa de la sustancia que se transfiere.

Ahora bien, la solución de esta ecuación debe ser una función en dos variables $\mathrm{T}(x,t)$ que describa el cambio de la propiedad transferente, según las condiciones limitantes del fenómeno. Para determinar la solución de la ecuación diferencial que conduzca a la representar la función $\mathrm{T}(x,t)$ en términos del problema, hay que establecer esas condiciones de frontera.

3. ASPECTOS A CONSIDERAR PARA EL ANÁLISIS DE LAS REPRESENTACIONES DE LA SITUACIÓN PROBLEMA

Frente al manejo de la información, en el proceso de hallar la solución de un problema el estudiante se enfrenta a dos tareas: *¿dónde colocar la información?* y *¿qué información colocar en qué lugar?* Su ejecución se percibe en las representaciones que conciernen al proceso de solución del problema (Vergnaud, 1987), por lo que su análisis permite obtener varios esquemas, sobresaliendo *los que dan lugar al entendimiento* y *los que dan lugar a la solución* (Flores, 2003).

El entendimiento del problema tiene como propósito *atribuirle un significado*; mediante reglas de acción e inferencias se identifica de qué problema se trata y cuáles son las variables conocidas y desconocidas; tal esquema da lugar al que conduce a su solución. La descripción de la acción del estudiante en términos de aquellas que dan significado al problema y las que tienen lugar para llegar a una solución constituye el estudio de sus representaciones, las cuales son categorizadas por estas dos clases de esquemas. Ambos estados se caracterizan por invariantes operacionales específicos.

De acuerdo con Flores (2003), se identifican dos tipos de representaciones en los esquemas de entendimiento y solución de un problema:

a) Entendimiento canónico. Integrado por los propósitos, reglas de acción, inferencias e invariantes operacionales que corresponden a una comprensión del problema, la cual pudiera alcanzar un esquema de solución, dirigido a una solución verdadera.
b) Entendimiento no canónico. Son los propósitos, reglas de acción, inferencias e invariantes que conciernen a una comprensión del problema según un significado no canónico, dirigido a una solución falsa.

Los esquemas de solución describen comportamientos, razonamientos, adaptaciones y modificaciones en el planteamiento del problema, por lo que se clasifican en *esquemas algorítmicos*, que implican la simbolización y el procedimiento convencional del mecanismo a seguir para darle solución y los *esquemas no algorítmicos*, que ocupan simbolización espontánea, no algorítmica, para obtener su solución.

Ahora bien, la simbolización alude a los símbolos y signos que sirven como herramientas en el proceso del pensamiento, al igual que en la comunicación de la experiencia y los conocimientos conceptuales. En la simbolización se identifican dos formas: la *espontánea*, donde las invariantes operacionales se representan por símbolos genéricos (dibujos, trazos, objetos materiales) y la *convencional*, donde las invariantes operacionales son simbolizadas mediante notaciones convencionales de un algoritmo.

El marco de análisis esquemático en el entendimiento y solución de un problema que expone Vergnaud, así como las categorizaciones que propone Flores, son aspectos que rigen esta investigación, cuyo propósito es explicar las representaciones de un grupo de estudiantes sobre un problema referente al significado que la serie de Fourier atribuye al fenómeno de la transferencia de masa por el secado de un material.

Independientemente de cuales sean los resultados obtenidos, en el análisis conceptual de los estudiantes sobre la serie de Fourier en un problema de transferencia de masa, el estudio se justifica desde el hecho de proporcionar argumentos para abordar la enseñanza de este concepto matemático. La fortaleza del análisis y los resultados la establece Vergnaud, al mostrar que el proceso de solución de un problema cuyo significado deriva de una situación es un medio y un criterio para la adquisición de contenidos rigurosos. Por ello, las soluciones y los errores que ocurren en el proceso de solución es un aspecto pedagógico esencial para que el investigador determine las relaciones que intervienen en el planteamiento del problema y las que se deben tener presentes para hallar su solución e interpretación, acorde con la situación que se estudia.

4. MÉTODO

El método para establecer las representaciones del estudiante sobre la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa es el siguiente:

1. Mediante la representación formal del problema, el establecimiento de tareas a realizar por el estudiante con el propósito de analizar sus representaciones.
2. Análisis de la variación en las representaciones que genera el estudiante al interactuar con este problema.
3. Identificar las invariantes operatorias en el análisis de la variación de sus representaciones.

La organización de las tareas para el problema o situación implica un análisis de los elementos matemáticos que entran en juego, correspondientes a la estructura de la serie de Fourier y al concepto de la transferencia de masa, bajo la perspectiva de una situación tocante al proceso de secado de un material.

El análisis de la forma en que el alumno interactúa con el problema se basa en un estudio de las variaciones de sus representaciones a través de la medición cualitativa de las invariantes operatorias, las cuales se organizan conforme al tipo de representaciones.

La recolección de datos se lleva a cabo con la observación y sesiones en profundidad o grupo de enfoque, en las que interviene la dirección andamiada del investigador.

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La formalidad del problema de transferencia de masa del tipo difusional en el secado de un material atañe a una situación donde se establece que, bajo ciertas condiciones, la transferencia de masa se debe al movimiento de moléculas de una región de mayor concentración a otra menor. El movimiento disminuye a través del tiempo y el poco espacio que tienen las moléculas para desplazarse.

Ahora bien, la transferencia de masa del agua por el secado se nota en los cambios que posee una propiedad transferente con el tiempo. En este caso, corresponde a la humedad del material representada por T, y su variación con el tiempo de transferencia t, mediante la función $\mathrm{T}(t)$, cuando el cambio en la humedad con el tiempo alcanza una condición de equilibrio. Tal condición representa la finalización de un estado inestable en el proceso (variación de la propiedad transferente con el tiempo) y el inicio del estado estable en la transferencia o movimiento molecular que aún ocurre en el fenómeno (no hay variación de la propiedad transferente con el tiempo). El comportamiento del secado se relaciona matemáticamente al límite de la función $\mathrm{T}(t)$.

De esta forma, el cambio de la humedad del material en el estado estable obedece a un movimiento molecular únicamente por acomodo espacial, debido a que la zona de transferencia tiene poco espacio. La función que representa dicho estado se establece en relación con el cambio en T con la posición x en el espesor del material, representado por $\mathrm{T}(x)$. Esta función también tendrá un límite cuando el espacio del movimiento molecular tienda a ser cero, indicando la finalización del proceso.

La representación matemática asociada a la descripción de ambos cambios de manera conjunta está dada por la ecuación (1), la cual representa concretamente el planteamiento del problema de secado, cuya solución debe dar como resultado la función $\mathrm{T}(x,t)$ que describa el comportamiento de la variación de la humedad del material en términos del espacio recorrido y del tiempo de secado. Para hallarla, se considera que la ecuación diferencial contiene variables separables y se pueden representar como el producto de dos funciones, una de x y otra de t, de acuerdo con lo representado en (2):

$$\mathrm{T}(x,t) = Z(x)R(t) \qquad (2)$$

Bajo este argumento, la solución de la ecuación (1) se representa mediante la expresión dada en (3), donde se puede localizar el producto de las dos funciones $Z(x)R(t)$, asociadas inicialmente con el problema.

$$\mathrm{T}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left[\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}\right] \exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2 k_g t}{4\ell^2}\right] \qquad (3)$$

Ahora bien, el segundo miembro de (3) corresponde al desarrollo de una serie de Fourier, la cual converge a la función que describe el comportamiento del fenómeno en términos del cambio de la transferencia de masa en espacio y tiempo. El coeficiente B_n varía según las condiciones limitantes del fenómeno, que caracteriza la situación del secado de un material contenido en una charola rectangular (espacio delimitado), y se da en un tiempo teóricamente infinito.

Las condiciones que caracterizan al problema en dicha situación precisan que el fenómeno se desarrolla en el tiempo, como una operación de evolución que toma el estado inicial $\mathrm{T}(x,0)$. Ahora bien, la condición inicial se plantea para un tiempo de transferencia cero y una posición en el espesor dada por x, y se lleva a otra condición, a la que le corresponde el estado $\mathrm{T}(x,t)$, cuya descripción se representa mediante una serie de Fourier. De esta manera, el resultado de B_n se inserta en la expresión (3), con lo cual se obtiene la representación de la solución particular del problema en la situación correspondiente mediante la expresión (4):

$$\mathrm{T}(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \left[\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} \right] \exp \left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 k_g t}{4\ell^2} \right] \qquad (4)$$

La serie de Fourier que conforma a la expresión (4) predice el comportamiento en el equilibrio, debido al cambio de la propiedad de humedad por la transferencia de masa del agua contenida en el material. Dicho comportamiento lo establece una suma de funciones que integran la serie de Fourier, y siguen un patrón sinusoidal que se atenúa gradualmente hasta que el cambio es uniforme en todo el espacio. La suma da como resultado la función $f(t) = \mathrm{T}(x,t)$ en un intervalo $-\ell < x < \ell$, que corresponde al espesor completo del material a secar y al espacio total donde tiene lugar la transferencia.

Bajo este planteamiento, las representaciones formales que genera el problema ofrecen a los alumnos un conjunto de elementos que constituyen las siguientes invariantes operacionales, presentes en la situación problema.

a) Una serie de Fourier determina el cambio en la transferencia de masa que se sufre con el tiempo $\mathrm{T}(t)$ en la última etapa del proceso.

b) El cambio en la transferencia de masa debido a la posición muestra una función $\mathrm{T}(x)$ en la última etapa del proceso, que se encuentra determinada mediante una función periódica generada por una serie de Fourier.

c) La función periódica sigue un patrón sinusoidal que se atenúa gradualmente hasta que la transferencia de masa es uniforme en todo el sistema, determinando así el contenido de esta propiedad en equilibrio.
d) La serie de Fourier se conforma por una suma infinita de funciones.
e) La suma de la serie de Fourier converge a la función que representa al fenómeno en su última etapa.

A continuación, se muestra una de las situaciones problema aplicadas en la investigación, que enmarca la situación del significado de la serie de Fourier en el secado de un material. De igual manera, se presenta un conjunto de situaciones que la integran para realizar el análisis de las representaciones obtenidas de la actuación de los estudiantes.

Situación problema: significado de la serie de Fourier en el cambio de humedad en un material, en un instante t y una posición x:

El desglose de las situaciones que la integran es el siguiente:

1. Determinar la ecuación diferencial que representa el cambio de humedad en el material, en términos de la posición del líquido x que se transfiere a través del espesor ℓ del material en un tiempo de secado t.
2. Precisar la función general que representa la humedad del material en una posición x del espesor ℓ del sólido para un instante t.
3. Establecer la función particular que representa la humedad del material para una posición x en el espesor ℓ del sólido y del tiempo de secado t.
4. Construir el significado de la función hallada en la situación 3, con relación al cambio de humedad que se produce en el material en función de estas dos variables y determinar el equilibrio en el proceso.
5. Construir la gráfica de la función particular, dejando fija la posición x en el espesor de la muestra y variando el tiempo t. Determinar el límite de la función.
6. Construir la gráfica de la función particular, dejando fijo el tiempo t y variando la posición x en el espesor del material. Hallar el límite de la función.

7. Construir el significado de estos resultados en relación con el cambio de humedad que se produce en el material, en un tiempo t y una posición x.

Las situaciones establecidas contienen tareas que remiten a la actuación de los alumnos en anteriores situaciones, pues buscan el reconocimiento del vínculo entre la serie de Fourier y el cambio de humedad en un material. La resolución de las actividades requiere desde conocimientos en ecuaciones diferenciales parciales hasta conocimientos sobre la serie de Fourier como representación de la función que satisface a dicha ecuación. Para llegar a ello, es necesario establecer el comportamiento del proceso en los estados inestable y estable, así como identificar el equilibrio del proceso con el concepto matemático.

El conjunto de tareas a desarrollar para las situaciones anteriores son las siguientes:

1. Según el comportamiento de la curva que representa la cantidad de humedad del material en un tiempo t, dada por $\mathrm{T}(t)$, proponer la expresión matemática que corresponde a dicha función.
2. Vincular el cambio de humedad que se presenta en el secado para un intervalo de tiempo mediante decrementos de humedad e incrementos de tiempo.
3. Expresar matemáticamente la relación anterior.
4. Relacionar la constante física k_g, específica del agua que contiene el material, con la expresión que se ha escrito en el punto 3.
5. Expresar la ecuación diferencial que representa el comportamiento del cambio de humedad del material, en función del tiempo en que es sometido al proceso de secado.
6. Identificar el tipo de ecuación diferencial.
7. Encontrar la función general que satisface a la ecuación diferencial.
8. Hallar la función particular que satisface la ecuación diferencial, utilizando el dato de la cantidad de humedad inicial del coloide en la muestra antes de someterse a secado.
9. Graficar la función particular y describir sus características.
10. Comparar la gráfica con la curva obtenida experimentalmente de $\mathrm{T}(t)$.

11. A partir de la función particular obtenida en 8, encontrar el contenido de humedad en equilibrio y comparar el valor logrado experimentalmente y el que resulta de la curva de $\mathrm{T}(t)$.
12. A partir de la función particular obtenida en 8, hallar el límite en el contenido de humedad en equilibrio.

Los resultados que arrojan en forma general las representaciones de los estudiantes se pueden categorizar de la siguiente manera:

a) *Representaciones canónicas no algorítmicas*, asociadas al entendimiento de la serie de Fourier en relación con el fenómeno. Los estudiantes muestran conocimiento acerca de que la relación entre la serie y el fenómeno existe, pero no saben cómo expresarla matemáticamente.
b) *Representaciones no canónicas*, que atañen al entendimiento de la serie de Fourier en relación con el fenómeno y su variación con la posición. Los estudiantes no comprenden el vínculo de la serie de Fourier con el fenómeno en el estado estable, pues conciben que el proceso de secado termina cuando ya no hay registro de cambio de humedad en el material al terminar el estado inestable y, por ende, hay carencia de asociación con la serie.

Los detalles de la evolución en las representaciones se explican a continuación:

1. Representación canónica no algorítmica

Esquema de entendimiento canónico: Muestra la comprensión de que existe una relación que describe el cambio en la transferencia de masa con el tiempo y la posición, lo cual se ilustra en la Figura 1. El propósito es encontrar una expresión matemática que represente el cambio de T en términos de dos variables t, x, y su solución.

Esquema de solución no algorítmico: El grupo relaciona el cambio de T en t y el de T en x mediante una figura que trata de asociar ambos cambios, dando una posición y un tiempo en que el fenómeno alcanza el equilibrio; sin embargo, no proporciona la ecuación diferencial correspondiente y no establece la solución del problema que se formula en la tarea.

Invariantes: Relación del cambio que se define con respecto a dos variables en la ecuación diferencial parcial; de esa manera hay que encontrar la función T en términos de x y de t.

2. Representación no canónica-algorítmica

Esquema de entendimiento no canónico: Refleja la intención de obtener la ecuación diferencial que relaciona el comportamiento del fenómeno con las variables descritas. Las ecuaciones que propone son lineales. El objetivo es obtener la ecuación diferencial parcial de segundo orden que representa el cambio de la función $T(x,t)$ en el equilibrio.

Esquema de solución algorítmico: Se plantean ecuaciones diferenciales lineales de primer orden para cada variable, y se trata de hacer operaciones con ellas a fin de establecer la expresión buscada (ver Figura 2).

Invariantes: Relación del cambio que se define con respecto a dos variables en la ecuación diferencial parcial; de esa forma hay que encontrar la función T en términos de x y de t.

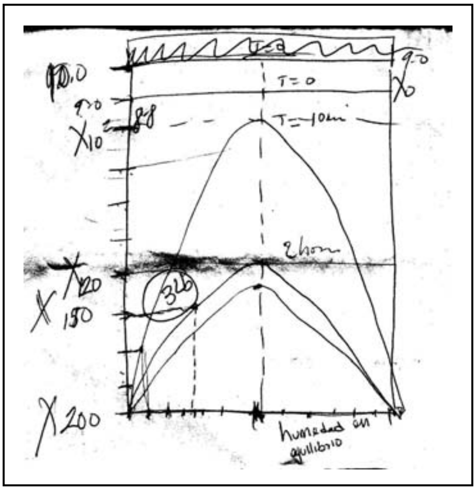

Figura 1. Representación canónica no algorítmica.

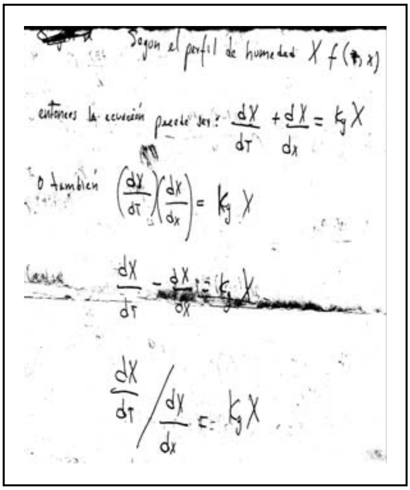

Figura 2. Representación no canónica algorítmica.

3. Representación canónica-algorítmica

Esquema de entendimiento canónico: Expresa la obtención de diferentes series a través del desarrollo de una sumatoria para obtener $T(t)$ y la representación gráfica de dichas series, que aparece en la Figura 3. El propósito es obtener series y su representación gráfica para identificar a la función $\mathrm{T}(t)$ en función del tiempo t.

Esquema de solución algorítmico: El grupo sustituye valores de x para encontrar $\mathrm{T}(t)$ a través de la conformación de la serie, cuyos términos resultan al desarrollar la sumatoria con valores de $n=0$ hasta $n=25$. De esa manera se tiene que hallar su suma, considerando que es aproximadamente igual o igual cuando n va de 0 hasta ∞.

Invariantes: Desarrollo de una sumatoria, conformación de una serie de funciones, suma de funciones, gráfica de una suma de funciones y obtención de una suma infinita de funciones.

4. Representación canónica asociada a la serie de Fourier

Esquema de entendimiento canónico: El grupo muestra un entendimiento canónico al representar la serie como una suma de funciones, cuyo resultado es una gráfica que corresponde a una cierta porción de la curva $\mathrm{T}(t)$, lo cual se nota en la Figura 4. El propósito es obtener la suma de la serie, su gráfica y la relación que atañe a la curva $\mathrm{T}(t)$.

Esquema de solución no algorítmico: Se presenta cuando el grupo no asocia la convergencia de la serie con su suma, aunque es congruente con el esquema de entendimiento canónico.

Invariantes. Suma de una serie de funciones y su convergencia.

5. Representación canónica de la serie de Fourier asociada al fenómeno de transferencia de masa

Esquema de entendimiento canónico: El grupo atribuye el comportamiento de la suma de la serie al fenómeno, al representar a $\mathrm{T}(t)$ en la última etapa de secado, en la que se llega al equilibrio. El objetivo es identificar la suma de la serie en la última etapa del proceso correspondiente al equilibrio.

Esquema de solución no algorítmico. Aparece cuando el grupo no asocia la convergencia de la serie con el equilibrio del fenómeno, Si bien es congruente con el esquema de entendimiento en el comportamiento del proceso en dicha etapa, desconoce el término matemático y su relación con el contexto.

Invariantes: Suma de una serie de funciones, equilibrio en el proceso de secado.

A lo largo de las sesiones, el desempeño de los alumnos estuvo limitado a entender el cambio de la humedad con respecto a la posición x. En la mayoría de las preguntas que abordaban esta relación, los estudiantes mostraron entendimientos no canónicos. Cuando se hablaba de este tipo de cambio eran capaces de referirse a las curvas de perfil de transferencia de masa, pero no pudieron relacionar dicho perfil con una función $\mathrm{T}(x)$, representada por una serie de Fourier.

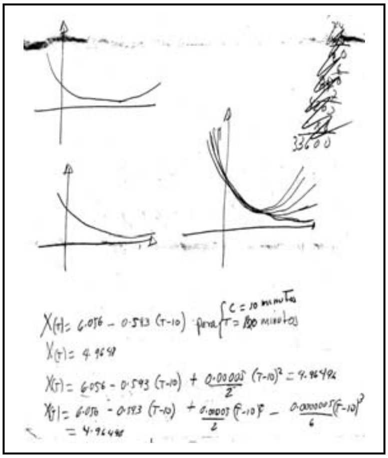

Figura 3. Representación no canónica no algorítmica.

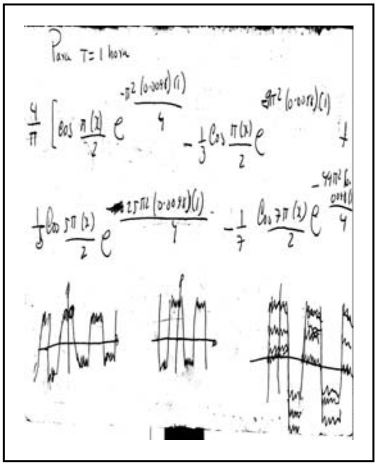

Figura 4. Representación canónica algorítmica.

6. Conclusión

En el seguimiento a la actuación del grupo se identifica que hay un entendimiento sobre el concepto de la serie de Fourier, atribuido al comportamiento del fenómeno, sin que se haya reconocido que se trata de este concepto matemático ni los aspectos que lo definen. Tal es el caso del reconocimiento que ocurre acerca de la suma de funciones que proviene de la serie y converge a $\mathrm{T}(t)$. En suma, el grupo refleja un entendimiento sobre una serie, mas no identifica que es la serie de Fourier.

Acerca del fenómeno, el grupo tiene conocimiento sobre el equilibrio del proceso como el límite del estado inestable del fenómeno. Sin embargo, no reconoce que el estado estable se define por el movimiento molecular únicamente en el espacio o lugar de transferencia. Entonces, la vinculación y el significado que la serie de Fourier provee al fenómeno de transporte de masa en una situación de secado no se logra construir. Por tanto, es necesario determinar nuevas situaciones y tareas que apoyen a los estudiantes a construir el significado del concepto de la convergencia de la serie de Fourier en tal contexto.

Finalmente, se precisa el alcance del planteamiento de Vergnaud, al enmarcar el conocimiento matemático del niño para resolver situaciones de adición y sustracción hacia la descripción de un entendimiento también matemático, pero que concierne a un grupo de estudiantes del nivel superior en el área de ingeniería, acerca de conceptos cuyo significado deriva de situaciones que ofrece un problema complejo ligado con su realidad.

En este sentido, los resultados obtenidos en los trabajos de Vergnaud han contribuido a vislumbrar el conocimiento de un niño de educación primaria en situaciones propias de su nivel de enseñanza. Ahora bien, los resultados de este trabajo pueden ser útiles para identificar la jerarquía en el nivel de dificultad al asociar el significado de la convergencia de la serie de Fourier en las situaciones descritas; analizar el tipo de errores que se cometen en la solución de los problemas relacionados con tal concepto, así como para identificar los procedimientos formales y pragmáticos que los estudiantes utilizan, precisando cuáles recursos formales determinan el acceso a una solución canónica algorítmica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bonilla R., E.; Block, D. y Waldegg, G. (1993). La investigación educativa en los ochenta, perspectiva para los noventa. En Elisa Rius Bonilla, David Block Sevilla y Guillermina Waldegg (Coord.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (pp. 20-21). México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa-SNTE.

Camarena, P. (1993). *Curso de análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctricas*, México: Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del IPN.

Farfán, R. (1995). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Flores, R. (2003). *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación.* Tesis de doctorado publicada, Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Guerrero, A. (1997). *El proceso de enseñanza del aprendizaje de las operaciones elementales*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Autónoma de México.

Muro, C. (2000). *La significación de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa.* Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Muro, C. (2004). *Análisis del conocimiento del estudiante relativo al campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa.* Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Muñoz, G. (1997). Un aspecto del enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral: Un ejemplo en la cinemática. En R. Farfán (Ed.), *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 64-68). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3* (2), 131-170.

Nunes, T. & Bryant, P. (1998). *Las matemáticas y su aplicación la perspectiva del niño.* México: Siglo XXI Editores.

Vargas, S. J. y López, L. A**.** (1988). *La adquisición de las operaciones aritméticas mentales en los niños de primaria,* México: DGEE-SEP/OEA.

Vergnaud, G**.** (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: a research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 14-30). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Vergnaud, G**.** (1996). The theory of conceptual fields. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldín & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 219-240). Mahwah NJ: Lawrence Eribaum Associates Publishers.

Vergnaud, G. (1997). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.

Vergnaud, G**.** (2000). Constructivisme et apprentissage des mathématiques. *Trabajo presentado en la Conferencia sobre Constructivismo,* Ginebra, Suiza.

Vergnaud, G., Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue Francaise de Pédagogie 3* (6), 28-43.

Ulín, C. (1984). *Análisis histórico critico de la difusión del calor: el trabajo de Fourier.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Autores

Claudia Rosario Muro. Instituto Tecnológico de Toluca. México; claudiamuro@hotmail.com

Patricia Camarena. Instituto Politécnico Nacional. México, D. F. México; patypoli@prodigy.net.mx

Rosa del Carmen Flores. Universidad Autónoma de México. México; rcfm@servidor.unam.mx