

SOLEDAD ESTRELLA, SERGIO MORALES, MARITZA MÉNDEZ-REINA,
PEDRO VIDAL-SZABÓ, BRAHIAM RAMÍREZ, ALEJANDRA MONDACA-SAAVEDRA

DISEÑO DE UNA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE PARA INTRODUCIR LA INFERENCIA ESTADÍSTICA INFORMAL EN PRIMARIA

DESIGN OF A HYPOTHETICAL LEARNING TRAJECTORY TO INTRODUCE
INFORMAL STATISTICAL INFERENCE IN PRIMARY SCHOOL

RESUMEN

Mediante un estudio de diseño que desarrolla una trayectoria hipotética de aprendizaje para la inferencia estadística informal (ISI), se introdujo a estudiantes de grado 3 y 4 ($n=23$) en conceptos estadísticos clave, como variabilidad, muestreo repetido y distribución muestral empírica. La trayectoria de cinco pasos con un enfoque lúdico del experimento aleatorio del lanzamiento de dos monedas comprendía: obtener muestras; reconocer la incertidumbre y expresarla con lenguaje de posibilidades; contrastar predicciones mediante muestreo repetido; visualizar y reconocer la variabilidad entre muestras; asignar niveles de posibilidades considerando la distribución muestral empírica al generalizar más allá de los datos. Los resultados indican que los estudiantes de ambos grados pueden acceder a conceptos de la ISI, logrando hacer inferencias informales y presentando niveles sofisticados en el razonamiento propio de la ISI.

PALABRAS CLAVE:

- Estadística temprana
- Trayectoria hipotética de aprendizaje
- Inferencia estadística informal
- Muestreo repetido
- Educación primaria

ABSTRACT

Through a design study to develop a hypothetical learning trajectory for informal statistical inference (ISI), students in grades 3 and 4 ($n=23$) were introduced to key concepts of variability, repeated sampling, and empirical sampling distribution. The five-step trajectory, with a playful approach to the randomized two-coin toss experiment, included: obtaining samples; recognizing uncertainty and expressing it with possibility language; contrasting predictions through repeated sampling; visualizing and recognizing variability among samples; assigning levels of possibilities, considering the empirical sampling distribution, when generalizing beyond the data. The results indicate that students at both grade levels can access ISI concepts, make informal inferences, and present sophisticated levels of ISI reasoning.

KEY WORDS:

- Early statistics
- Hypothetical learning trajectory
- Informal statistical inference
- Repeated sampling
- Primary education



RESUMO

Através de um estudo de desenho que desenvolveu uma trajetória de aprendizagem hipotética para a inferência estatística informal (ISI), os alunos do 3.º e 4.º anos ($n=23$) foram introduzidos nos conceitos-chave de variabilidade, amostragem repetida e distribuição empírica da amostragem. A trajetória em cinco etapas, com uma abordagem lúdica à experiência aleatória do lançamento de duas moedas, incluía: obter amostras; reconhecer a incerteza e expressá-la com linguagem de possibilidades; contrastar previsões através de amostragem repetida; visualizar e reconhecer a variabilidade entre amostras; atribuir níveis de possibilidades, considerando a distribuição empírica da amostragem ao generalizar para além dos dados. Os resultados indicam que os alunos de ambos os graus de ensino conseguem aceder a conceitos ISI, fazendo inferências informais e mostrando níveis sofisticados de raciocínio ISI.

PALAVRAS CHAVE:

- *Estatística inicial*
- *Trajectoria hipotético de aprendizagem*
- *Inferência estatística informal*
- *Amostragem repetida*
- *Ensino básico*

RÉSUMÉ

Dans le cadre d'une étude de design développant une trajectoire d'apprentissage hypothétique pour l'inférence statistique informelle (ISI), des élèves de 3e et 4e année ($n=23$) ont été initiés aux concepts clés de la variabilité, de l'échantillonnage répété et de la distribution d'échantillonnage empirique. La trajectoire de cinq étapes avec une approche ludique de l'expérience aléatoire du lancer de deux pièces de monnaie comprenait : l'obtention d'échantillons ; la reconnaissance de l'incertitude et son expression avec le langage des possibilités ; le contraste des prédictions par l'échantillonnage répété ; la visualisation et la reconnaissance de la variabilité entre les échantillons ; l'attribution de niveaux de possibilités en tenant compte de la distribution d'échantillonnage empirique lors de la généralisation au-delà des données. Les résultats indiquent que les élèves des deux classes peuvent accéder aux concepts de ISI, en faisant des déductions informelles et en montrant des niveaux sophistiqués de raisonnement de ISI.

MOTS CLÉS:

- *Statistiques précoces*
- *Trajectoire d'apprentissage hypothétique*
- *Inférence statistique informelle*
- *Échantillonnage répété*
- *Enseignement primaire*

1. INTRODUCCIÓN

En la sociedad actual es esencial brindar a los estudiantes herramientas y habilidades para enfrentar con éxito los desafíos de la desinformación. La educación de la ciudadanía requiere superar los niveles tradicionales de alfabetización escolar y enfocarse en desarrollar habilidades críticas y

argumentativas que permitan a los estudiantes comprender y abordar fenómenos sociales que son relevantes para su vida cívica (Engel et al., 2021; Estrella, 2017). En este contexto, la educación estadística desempeña un papel vital al fomentar la toma de decisiones fundamentadas en situaciones de incertidumbre.

Por tales razones, es necesario que los estudiantes sean introducidos al estudio de la estadística desde edades tempranas, tanto para comprender el mundo que les rodea, como desarrollar competencias estadísticas básicas y fomentar su interés en esta disciplina (Estrella, 2018). Para ello, se torna crucial diseñar — desde la educación primaria— actividades y materiales didácticos adaptados a las características cognitivas y de desarrollo de los estudiantes, lo que les permitiría construir de manera significativa sus ideas y conceptos sobre la estadística.

Esta investigación se enfoca en la inferencia estadística, la cual permite establecer conclusiones más allá de los datos disponibles, extendiéndose a un universo más amplio (Moore, 2005). En el marco de la estadística temprana (Estrella, 2018; Estrella et al., 2020, 2021; Leavy et al., 2018), la inferencia permite hacer predicciones con cierto grado de confianza a partir de patrones revelados por los datos obtenidos de muestras representativas de la población. La inferencia estadística informal (ISI) y el razonamiento inferencial informal (IIR) son cada vez más relevantes en la educación estadística (Makar et al., 2011; Makar y Rubin, 2009, 2018). A diferencia de la promoción de la apropiación de métodos formales estadísticos, y comprendiendo que éstos están fuera de la zona de desarrollo próximo de los estudiantes, la ISI busca que los estudiantes se acerquen de manera informal a la generación de inferencias empleando su razonamiento a partir de distribuciones de datos muestrales y la comparación entre sí (Pfannkuch, 2006), y lleguen a comprender la esencia de la inferencia estadística.

Desarrollar el razonamiento inferencial estadístico implica comprender conceptos clave como la variabilidad, el muestreo repetido y la distribución muestral empírica asociada a un estadístico. En particular, este enfoque informal implica realizar generalizaciones probabilísticas con evidencia basada en los datos que se extienden más allá de los datos recolectados (Makar y Rubin, 2009; 2018; Méndez-Reina y Estrella, 2024). En ese sentido, el presente estudio describe una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) de cinco pasos que integra tales conceptos clave, y fomenta los procesos de aprendizaje de los estudiantes sobre la ISI. Como en Inzunza e Islas (2019), la secuenciación en las actividades sigue una trayectoria que tiene al muestreo como base conceptual y la interrelación con los conceptos clave en el desarrollo de un IIR.

Esta investigación busca brindar a los estudiantes oportunidades para expresar conclusiones sobre una población a partir de muestras, y su propósito es diseñar,

implementar y evaluar una trayectoria hipotética de aprendizaje destinada a estudiantes de 8 a 9 años de edad. Esta trayectoria se centra en el razonamiento inferencial informal y abarca conceptos estadísticos fundamentales: muestra, muestreo repetido, variabilidad muestral y distribución muestral empírica.

2. MARCO CONCEPTUAL

2.1. *Razonamiento inferencial informal*

Zieffler et al. (2008) señalaban que el IIR es “la forma en que los estudiantes usan sus conocimientos informales de estadística para crear argumentos basados en muestras observadas que sustenten las inferencias hechas sobre la población desconocida” (p.44).

El propósito de la ISI es establecer las bases para el desarrollo del razonamiento inferencial estadístico con datos (Ben-Zvi, 2016; Makar y Rubin, 2009). La ISI es importante en la enseñanza estadística y requiere una revisión de cómo se construye el razonamiento inferencial estadístico sobre los conceptos de inferencia y cómo se enseña (Garfield et al., 2015).

La ISI se ha consolidado como un paradigma educativo que integra aspectos del IIR: *usar datos como evidencia* para establecer argumentos relacionados con algún problema, priorizando la evidencia que ofrecen los datos por encima de las experiencias personales u opiniones (Makar y Rubin, 2009; Pfannkuch et al., 2015); *generalizar más allá de los datos* para comunicar conclusiones deducidas de datos particulares, lo que implica generar inferencias aplicables a un conjunto más amplio de casos (Rossman, 2008; Zieffler et al., 2008); *expresar la incertidumbre* para manifestar la falta de certeza en la generalización más allá de los datos, considerando que las afirmaciones no son seguras (Ben-Zvi et al., 2012); *considerar el agregado* para visualizar el conjunto de datos como un todo, enfocándose en características del comportamiento de los datos (Konold et al., 2015); e *integrar conocimiento contextual* para considerar posibles relaciones presentes en una situación, lo que permite profundizar en el razonamiento con datos en un contexto (Langrall et al., 2011).

2.2. *Inferencia informal en el currículo escolar chileno*

En las bases curriculares de los grados 1 a 6 de la asignatura Matemática (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2018), no se incluyen objetivos

de aprendizaje orientados a la elaboración de inferencias estadísticas informales. Aunque los contenidos asociados a ISI no se explicitan en este currículo escolar, es posible encontrar algunos contenidos relacionados con otras áreas curriculares, como Ciencias y Lenguaje, y explícitamente, en los estándares de formación inicial de profesores de primaria.

En los estándares actuales de formación inicial de profesores de primaria en el campo de las matemáticas (MINEDUC, 2022), se incluye el estándar «Datos y Probabilidades». En los estándares sobre conocimiento disciplinar estadístico, se señala “Recolecta datos para responder una pregunta del contexto escolar o comunitario, considerando toda la población o una muestra de ella, los organiza en tablas y/o gráficos, y discute su variabilidad, observando tendencias y realizando inferencias informales” (MINEDUC, 2022, p. 126). En el estándar de conocimiento didáctico del contenido estadístico, se señala “Secuencia actividades de aprendizaje que involucren la recolección de datos de una muestra o la totalidad del curso, su representación y análisis, para incentivar que sus estudiantes realicen inferencias informales y tomen decisiones basadas en la evidencia obtenida” (MINEDUC, 2022, p. 127).

2.3. *Conceptos estadísticos clave para la Inferencia Estadística Informal*

El IIR involucra una serie de conceptos estadísticos que respaldan las inferencias, requiriéndose varias experiencias con datos para llegar a realizar interrelaciones conceptuales (Makar et al., 2011). Considerando un experimento aleatorio no equiprobable como el lanzamiento de dos monedas, es plausible considerar conceptos clave como: muestra (asociados a otros conceptos como aleatoriedad, predicción, incertidumbre, y muestreo repetido), variabilidad muestral y distribución muestral empírica (asociados a frecuencia máxima y visualización).

En el experimento de lanzar dos monedas, la aleatoriedad se enmarca en la imprevisibilidad del resultado, en que cada lanzamiento es independiente del anterior y en cada uno existe una probabilidad asociada. Se ha considerado la predicción como una herramienta valiosa para estimar eventos, basándose en datos, aunque es importante tener en cuenta que la incertidumbre puede surgir debido a la complejidad del fenómeno que se está analizando y limitar la precisión de las estimaciones. También, la variabilidad, referida a cómo los datos están dispersos alrededor de una medida de tendencia central, puede afectar la precisión de las estimaciones y, por tanto, en la interpretación de los resultados.

La técnica de muestreo repetido permite obtener una muestra de una población e implica generar muestras bajo las mismas condiciones, con la repetición de este

proceso muchas veces se obtiene una distribución muestral empírica, lo que puede ayudar a comprender mejor la variabilidad en los datos y a reducir la incertidumbre en las estimaciones. Ben-Zvi et al. (2015) han señalado la importancia del proceso de construcción de la distribución muestral, pues los estudiantes pueden experimentar y comprender mejor el proceso involucrado, en lugar de simplemente presentarles el resultado final. La técnica de muestreo repetido simulado posibilita la generación de distribuciones muestrales empíricas, lo cual es clave para analizar y desarrollar el razonamiento inferencial estadístico desde un enfoque informal. En este sentido, la distribución muestral empírica generada a través del muestreo repetido simulado permitiría que los estudiantes dedujeran propiedades similares a las del concepto teórico, siendo así un modelo más concreto del concepto teórico de distribución muestral (Sánchez et al., 2024; Silvestre et al., 2022).

Estos aspectos ISI sustentan teóricamente rutas de aprendizaje que incluyen actividades para desarrollar el pensamiento estadístico (Estrella et al., 2023; Garfield y Ben-Zvi, 2008; Rubin et al., 2006). Van Dijke-Droogers et al. (2020) abordan el manejo de la variabilidad y la incertidumbre en un experimento aleatorio, considerando los conceptos de contraste de las predicciones, la observación de la variabilidad en las muestras, la visualización de la variabilidad en las frecuencias de datos, y la interpretación de la variabilidad mediante la distribución muestral empírica.

Existen diferentes énfasis en las tareas que fomentan el IIR, algunas de ellas implican la generación de inferencias sobre aspectos de una población (Pratt et al., 2008). En este sentido, los datos obtenidos de muestras se utilizan para hacer afirmaciones sobre una población finita a partir de la cual se extrajeron los datos, o sobre un proceso de muestreo que puede ser infinito en el caso de experimentos aleatorios. Estrella et al. (2023a, 2023b) argumentan que, a partir de las distribuciones empíricas representadas gráficamente para cada muestra, los estudiantes pueden identificar patrones, tendencias y agregados en los datos muestrales, tal como reportó Watson et al. (2013). En particular, tanto el muestreo aleatorio como el muestreo repetido otorgan un mayor grado de confianza en la generalización, siendo a menudo la variabilidad en los datos el resultado de la aleatoriedad, y la inferencia informal busca explicarla (Pratt et al., 2008; Watson et al., 2013).

Dada la importancia del IIR y los conceptos clave de la inferencia estadística, las preguntas abordadas en esta investigación son ¿Cómo manifiestan los estudiantes los conceptos ISI en los grados 3 y 4? ¿Cómo los pasos de THA fomentan los procesos de aprendizaje de los estudiantes sobre el IIR?

3. METODOLOGÍA

3.1. *Trayectoria hipotética como instrumento de investigación de diseño*

La THA es un concepto que se utiliza para diseñar la enseñanza de disciplinas escolares, como matemáticas o estadística. Consiste en un objetivo de aprendizaje, un conjunto de tareas y una progresión hipotética de aprendizaje. Una THA pretende describir una “posible ruta de aprendizaje compartida para la comunidad del aula” (Gravemeijer et al., 2003, p. 52) y entregar una secuencia de patrones de pensamiento cada vez más sofisticados, basados en la teoría y evidencia de la investigación, que se espera que la mayoría de los niños sigan hacia el logro del objetivo de aprendizaje. Este constructo se puede aplicar a diferentes unidades de enseñanza (una lección, una secuencia de lecciones, el aprendizaje de un concepto durante un período prolongado de tiempo) planificadas para el aprendizaje conceptual (Simon, 2020). Una THA busca una progresión de desarrollo que especifica niveles de razonamiento más sofisticados, a los cuales los estudiantes podrían llegar (Clements y Sarama, 2004; Lobato y Walters, 2017). Debido a que muchas de las ideas estadísticas que se están considerando en la ISI no se encuentran actualmente en todos los currículos escolares, varios educadores estadísticos han estudiado los procesos de razonamiento de los estudiantes mediante el uso de THA junto con métodos basados en el diseño, tanto con fines de investigación como de enseñanza (Arnold et al., 2018).

Mediante una investigación de diseño se realizó un experimento de enseñanza (Steffe y Thompson, 2000), que se caracterizó por un refinamiento progresivo del diseño de la THA, constantemente revisada en ciclos continuos de diseño, puesta en práctica, análisis y rediseño, basándose en evidencias obtenidas en el transcurso de la investigación, la colaboración con las profesoras y tomando registros sobre lo que los estudiantes aprenden. Si bien el diseño de la THA se ha implementado desde 2020 a 2022 en tres escuelas, en este escrito se da cuenta solo del último rediseño en una de las escuelas.

3.2. *Participantes*

Los casos seleccionados pertenecen a una muestra por conveniencia y corresponden a 23 estudiantes de 8 a 9 años de edad, de dos cursos de una misma escuela, —uno de grado 3 ($n=12$), y otro, de grado 4 ($n=11$)—, que vivieron el experimento de enseñanza a través de la THA, cuyas lecciones fueron implementadas por las profesoras del respectivo grado. Se contó con el consentimiento informado de la directora, profesores y de todos los apoderados de los estudiantes que participaron de las lecciones.

El consentimiento utilizado contenía seis elementos: 1) explicación del propósito del estudio, 2) información sobre la participación voluntaria en el estudio y que los participantes podían retirarse en cualquier momento, 3) garantía de que las respuestas proporcionadas no estaban relacionadas con ninguna calificación del curso, 4) no divulgación de información que pudiera identificar a los participantes, 5) descripción del proceso de almacenamiento de los datos recopilados, y 6) información de contacto para que los participantes o sus apoderados pudieran hacer preguntas vinculadas al desarrollo del estudio y sus alcances éticos.

3.3. Tarea

Corresponde a la situación central de la THA, que puede ser asociada al concepto de probabilidad, puesto que trata del experimento aleatorio no equiprobable del lanzamiento de dos monedas en un contexto lúdico, denominado la carrera de los conejos (ver Figura 1). Desde la perspectiva inferencial que orienta esta investigación, mediante esta tarea se obtienen muestras a través del uso del tablero de juego que permite registrar el avance de los conejos etiquetados como 1, 2 y 3. Cada tablero de un juego finalizado se considera una muestra, y se espera que cada estudiante obtenga tres muestras.

CARRERA DE LOS CONEJOS

Jugaremos "la carrera de los conejos" para esto necesitarás 2 monedas.
Se juega de la siguiente manera:

- Lanzar las dos monedas al mismo tiempo.
- Vamos a usar tableros como el que se muestra.
- Cada conejo avanza hacia las zanahorias de esta manera:

1






Avanza 1 espacio si salen dos sellos

2






Avanza 1 espacio si salen dos caras

3

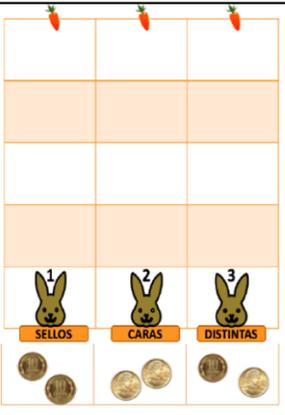





Avanza 1 espacio si salen diferentes

d) El conejo ganador es el que llega primero a la zanahoria.

Meta →



← Comienzo



Figura 1. Instrucciones del juego y tablero

3.4. Trayectoria hipotética de aprendizaje de ISI

El estudio busca obtener una THA con base teórica y empírica para iniciar a los estudiantes de grados 3 y 4 en la comprensión de conceptos clave de la inferencia estadística.

La THA propuesta comprende un refinamiento y ampliación de la anteriormente planteada por Estrella et al. (2023a) que consideraba solo 4 pasos. La nueva THA se amplía a cinco pasos, añadiendo un Paso 0 que introduce la incertidumbre de situaciones y su expresión mediante el lenguaje de probabilidad, antes del muestreo. Además, en esta THA que se propone, se amplían los conceptos, incorporando la distribución muestral empírica desde el Paso 3, donde los estudiantes asignan niveles de posibilidad basándose en la regularidad observada en las muestras y en la representación gráfica de las frecuencias máximas.

En el diseño teórico de la THA, se levantaron hipótesis sobre el aprendizaje de los conceptos variabilidad, muestreo repetido y distribución muestral empírica. Para ello, se consideraron cinco pasos en la THA, a saber: [Paso 0] Reconocer la incertidumbre y expresarla con un lenguaje natural de probabilidad, asociado a las posibilidades; [Paso 1] Contrastar predicciones con datos mediante el muestreo repetido; [Paso 2] Visualizar y reconocer la variabilidad entre muestras; [Paso 3] Asignar nivel de posibilidades a cada suceso considerando la regularidad en la distribución muestral empírica; [Paso 4] Generar afirmaciones más allá de los datos disponibles como evidencia, usando expresiones de incertidumbre (ver Tabla I).

Cada paso de la THA, basado en Estrella et al. (2023a), describe las actividades diseñadas, las hipótesis correspondientes e indicadores del comportamiento de aprendizaje de los estudiantes que respaldan dichas hipótesis. En lo que sigue, se detallan las hipótesis asociadas a las dos lecciones de la THA.

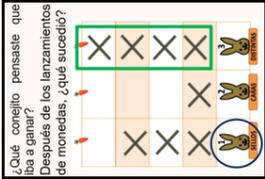
Lección 1

Paso 0: Reconocer la incertidumbre y expresarla con un lenguaje de posibilidades

El objetivo es fomentar en los estudiantes la expresión de la incertidumbre de situaciones a través de tipos específicos de tareas de pensamiento (Sannomiya et al., 2021), junto a imágenes asociadas al modelo de urnas. Para lograr este objetivo, se busca que los estudiantes se apropien y utilicen cualificadores modales (en el sentido toulminiano) expresando posibilidades de acuerdo con las condiciones de las situaciones en contexto.

La hipótesis asociada al “Paso 0” considera que los estudiantes manifiesten el nivel de posibilidades acerca de la ocurrencia de un suceso, mediante cualificadores como “imposible”, “poco posible”, “posible”, “muy posible”, “seguro”; pudiendo usarse otros adverbios de duda (quizá, quizás, acaso, probablemente, posiblemente, ojalá) o el uso de verbos modales (deber, querer, saber, poder, soler), distinguiendo las circunstancias, favorables o desfavorables, de una situación de incertidumbre. Esta hipótesis comprende el indicador:

TABLA I
Elementos de la trayectoria hipotética de aprendizaje de cinco pasos sobre la IIR

	Lección 2				
	Paso 0	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4
Tareas centrales	<p>¿Qué tan posible es..?</p> <p>[Indicando mediante paletas icónicas los niveles de la escala: <i>imposible, poco posible, posible, muy posible y seguro</i>]</p> 	<p>Antes de cada juego, ¿Cuál conejo piensas que ganará? ¿Por qué?</p> 	<p>Luego del registro en 4 tableros de juego (muestras), observamos los tableros (detectando la frecuencia máxima y categoría asociada)</p> <p><i>*¿Qué conejo pensaste que iba a ganar? Y después de jugar, ¿qué sucedió?*</i></p> <p><i>* Si jugáramos de nuevo, ¿Pasaría lo mismo?*</i></p> 	<p>Vistos los tableros de tus juegos y los de tus compañeros</p> <p><i>¿Qué tan probable es que gane (el conejo 1, 2, 3)?</i></p> 	<p>Si para ganar el juego, tuvieras que dar un consejo a un amigo, ¿Cuál conejo le aconsejarías que elija? ¿Por qué?</p> <p><i>¿Cuál conejo le aconsejarías?</i></p> <p><i>¿Por qué?</i></p> 
Actividad de enseñanza	<p>Promover el reconocimiento de la incertidumbre en la ocurrencia de situaciones inusuales o sucesos</p>	<p>Conducir el juego, registrando los datos resultantes en un tablero exhibido al curso (muestra). Permitir el registro y</p>	<p>Exhibir, al menos, un tablero completado (muestras) de cada uno de los estudiantes. Señalar el conejo elegido (predicción) y</p>	<p>Completar con la estimación de posibilidades que entrega cada estudiante, mediante la escala</p>	<p>Promover la inferencia informal sobre una decisión futura empleando niveles de posibilidad, y basándose en la regularidad detectada [en la</p>

probabilísticos asociados al modelo de urnas.

la visualización del comportamiento de los datos categóricos.

el conejo ganador (la categoría de la frecuencia máxima: moda).

Completar un pictograma de los conejos ganadores (moda) según las muestras consideradas.

con niveles de posibilidad (imposible, poco posible, posible, muy posible o seguro).

distribución muestral empírica de la moda].

Reconocer el patrón de variación en el pictograma [distribución muestral empírica de la moda]

Estimar y verbalizar el nivel de posibilidad.

Expresar en forma oral, escrita o icónica, la incertidumbre o nivel de posibilidad de una situación

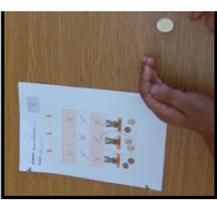
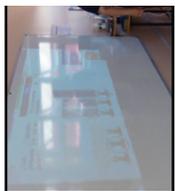
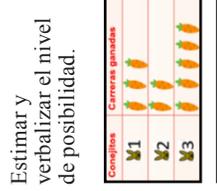
Predecir, realizar el juego y registrar los datos resultantes de acuerdo a cada categoría.

Visualizar la variación muestral y detectar una regularidad en las muestras propias y las de los demás, y en el pictograma que se va conformando.

Comunicar y justificar por escrito su inferencial informal.

Reconocer el patrón de variación en el pictograma [distribución muestral empírica de la moda]

Estimar y verbalizar el nivel de posibilidad.



Comparar sus predicciones con los datos resultantes entre las muestras propias.

Fuente: elaboración propia

- 0.a Expresa (o elige la expresión de) la posibilidad de ocurrencia de un suceso, a través de la escala imposible, poco posible, posible, muy posible, seguro.

Paso 1: *Contrastar predicciones con datos mediante el muestreo repetido*

Al inicio, y para introducir la obtención de muestras, la profesora realiza como ejemplo un juego grupal mediante un tablero proyectado en la pizarra (Figura 1) que todos observan, y antes de empezar a jugar, los estudiantes enmarcan el posible suceso ganador en un tablero de juego propio. Al iniciar este juego grupal y hasta terminarlo, la profesora, en conjunto con los estudiantes, van registrando con una X los resultados obtenidos al lanzar dos monedas. Al finalizar, —esto es, uno de los conejos avanzó cuatro casillas del tablero— los estudiantes contrastan las predicciones propias con lo ocurrido en el juego grupal completado.

Posteriormente, se transita a una etapa en que el estudiante predice el suceso ganador para cada uno de sus juegos, y va jugando hasta completar un total de tres tableros (tres muestras). Una vez completado cada tablero de juego, el estudiante contrasta los resultados empíricos con su predicción. Así, en la lección 1, entre juegos, cada estudiante podrá mantener o cambiar su predicción sobre el resultado en el próximo juego. Se considera que los estudiantes pueden: (1) expresar una conjetura acerca de la ocurrencia futura de un suceso; (2) registrar los datos de sus muestras, en un contexto lúdico y de incertidumbre en el que hay variabilidad; (3) contrastar las predicciones propias con los datos que obtienen en cada una de sus muestras; y (4) comparar las muestras propias e identificar alguna regularidad en estas.

La hipótesis asociada al “paso 1” sostiene que al realizar predicciones y contrastarlas con los datos obtenidos mediante muestreo repetido, se prepara a los estudiantes para visualizar la variabilidad y regularidad de las muestras, así como la incertidumbre de la situación. Los indicadores del comportamiento de aprendizaje de los estudiantes que soportan la hipótesis:

- 1.a Elige uno de los sucesos de la experiencia aleatoria (predice).
- 1.b Efectúa acción iterativa de artefactos aleatorios concretos, identificando el suceso resultante.
- 1.c Registra la ocurrencia de cada uno de los sucesos (muestra).
- 1.d Establece la frecuencia máxima (o altura) de las ocurrencias de cada suceso en el tablero.

- 1.e Contrasta si su predicción se cumplió o no, respecto a los datos resultantes de la experiencia aleatoria, pudiendo mantener o cambiar predicción.
- 1.f Compara las muestras propias obtenidas de cada experiencia aleatoria y nota alguna regularidad.
- 1.g Vivencia de la incertidumbre presente en la experiencia aleatoria.

Lección 2

Paso 2: Visualizar y reconocer la variabilidad entre muestras

Se seleccionó una muestra (tablero completado) por cada estudiante en la lección 1, digitalizada para ser proyectada y analizada en el pleno en la lección 2. En esta lección, los estudiantes visualizan las muestras (una por estudiante), se inician en el reconocimiento de la variabilidad muestral y entre muestras. Al aumentar la cantidad de muestras y exhibirlas al pleno, visualizan que el comportamiento de los datos de su muestra no es necesariamente coincidente con otras muestras, pero pudiendo detectar cierta regularidad entre ellas. A su vez, los estudiantes observan el registro de las categorías asociadas a la frecuencia máxima (modas) en un pictograma, según cada muestra seleccionada. Así, tras el muestreo repetido, los estudiantes pueden comprender progresivamente que la mayoría de los resultados de las muestras dan cuenta de cierta tendencia al haber aumentado el número de muestras, y que la distribución muestral empírica de la moda (representada en el pictograma) les es útil para comprender la variabilidad asociada con la estimación de la moda.

La hipótesis del paso 2, sostiene que los estudiantes toman conciencia de la aleatoriedad en la experiencia, al observar distintas muestras y visualizar la variabilidad a medida que aumentan las muestras en la completación dinámica del pictograma, percibiendo cierta regularidad entre las categorías asociadas a la frecuencia máxima. Los indicadores para esta hipótesis son:

- 2.a Compara frecuencias y detecta la categoría que tiene frecuencia máxima en la muestra (variabilidad muestral, categoría modal).
- 2.b Compara frecuencias de las categorías tras varias repeticiones (variabilidad muestral).
- 2.c Compara las categorías de las frecuencias máximas representadas en el pictograma, observando el comportamiento de las modas en muestras tras varias repeticiones (distribución muestral empírica de la moda; aleatoriedad; visualización).

Paso 3: Asignar nivel de posibilidades a cada suceso considerando la regularidad en la distribución muestral empírica

A partir de los datos obtenidos tras el muestreo del Paso 2, los estudiantes visualizan el comportamiento de las frecuencias máximas obtenidas (suceso ganador) en cada muestra seleccionada (distribución muestral empírica). Posteriormente, se completa una tabla de posibilidades de ganar de cada uno de los conejos, según la asignación otorgada por cada estudiante del nivel de posibilidades (“imposible”, “poco posible”, “posible”, “muy posible” y “seguro”).

En este paso, la hipótesis sostiene que los estudiantes pueden interpretar la regularidad en la distribución muestral empírica y la aleatoriedad presente al observar que hay diferentes frecuencias por categoría según el tablero, siendo uno de ellos más frecuente que los demás. A partir de esto, pueden reconocer la variabilidad entre los sucesos y la frecuencia máxima muestral, lo que les permite asignar un nivel de posibilidades a cada suceso y determinar su posibilidad de ocurrencia utilizando un lenguaje.

Para sostener la hipótesis se han considerado los siguientes indicadores:

- 3.a Compara frecuencias tabuladas para visualizar el comportamiento regular de los sucesos en muestras tras varias repeticiones (distribución muestral empírica; variabilidad muestral; frecuencia máxima muestral; visualización).
- 3.b Asigna un nivel de posibilidades a cada suceso determinando su posibilidad de ocurrencia (aleatoriedad; incertidumbre).

Paso 4: Generar afirmaciones más allá de los datos disponibles como evidencia, usando expresiones de incertidumbre

A partir de la vivencia de los estudiantes en las actividades propuestas por cada lección, se esperaba que identificaran algún comportamiento regular pudiendo asignar un nivel de posibilidades mayor a una determinada categoría. Luego, para integrar los aprendizajes alcanzados, a los estudiantes se les pide generalizar más allá de los datos, interpretando la distribución muestral empírica para hacer una inferencia futura sobre el suceso que tiene más posibilidades de ganar; y se les pide bosquejar una posible distribución de frecuencias en una futura muestra.

Este paso considera como hipótesis, que los estudiantes en sus conclusiones reconocen el efecto del aumento de muestras, identifican el comportamiento regular en la variabilidad de los datos y la incertidumbre en lanzamientos potenciales de monedas; pudiendo expresar en esa conclusión la

confianza en las posibilidades del suceso ganador (regularidad) y bosquejar dicho comportamiento en una futura muestra hipotética.

Los siguientes indicadores se consideraron que soportaban las hipótesis:

- 4.a Concluye más allá de los datos sin justificar ni expresar nivel de posibilidades (predicción).
- 4.b Concluye más allá de los datos obtenidos, justificando a partir del comportamiento de las muestras sin expresar un nivel de posibilidades (distribución muestral empírica; variabilidad muestral; frecuencia máxima muestral).
- 4.c Concluye más allá de los datos obtenidos, sin explicitar justificaciones y expresa cierto nivel de posibilidades (aleatoriedad, incertidumbre).
- 4.d Concluye más allá de los datos obtenidos, justificando a partir del comportamiento de las muestras y expresando un cierto nivel de posibilidades (distribución muestral empírica; aleatoriedad; incertidumbre).
- 4.e Bosqueja una distribución de frecuencias imaginando el comportamiento de una próxima muestra (distribución muestral empírica; visualización; aleatoriedad).

3.5. *Indicadores de las hipótesis de la THA*

La puesta en escena de los cinco pasos de la THA incorporó el aumento de la complejidad de los conceptos clave y sus conexiones (ver Tabla II), aspectos que proveyeron las instancias de análisis de datos. La THA se compone de cinco pasos, los cuales permiten avanzar en los conceptos y sus interrelaciones, comenzando desde lo concreto e instando a los estudiantes a realizar predicciones basadas en su intuición. Luego, se establecen situaciones cuya resolución exige superar ciertos conflictos cognitivos previstos en la fase de diseño (dado el experimento aleatorio no equiprobable), se les anima a observar y buscar regularidades en los datos experimentales. En la Tabla II se presenta una descripción general del aumento de la complejidad de la THA en función de estos aspectos de ISI.

La Tabla II precisa los nueve conceptos asociados a ISI que abarca la THA. Para simplificar el análisis de los datos, se procedió a recategorizar de manera consensuada dichos conceptos: englobando en “muestras” (muestra, muestreo repetido) y “distribución muestral empírica” (frecuencia máxima muestral, distribución muestral empírica, visualización); conservándose las categorías conceptuales de predicción, incertidumbre, aleatoriedad y variabilidad muestral.

TABLA II
Indicadores asociados a conceptos ISI y a cada paso de la THA

Aumento de complejidad ☹	<i>Paso 0</i>	<i>Paso 1</i>	<i>Paso 2</i>	<i>Paso 3</i>	<i>Paso 4</i>
	Reconocer la incertidumbre y expresarla con lenguaje de posibilidades	Contrastar predicciones con datos mediante el muestreo repetido	Visualizar y reconocer la variación entre muestras	Asignar nivel de confianza a cada suceso considerando la regularidad en la distribución muestral empírica	Generar afirmaciones más allá de los datos disponibles como evidencia, usando expresiones de incertidumbre
Predicción		1a; 1e			4a
Incertidumbre	0a	1b; 1g		3b	4c; 4d
Muestra		1c; 1f			
Muestreo repetido		1f			
Variación muestral			2a; 2b	3a	4b
Frecuencia máxima muestral		1d; 1f		3a	4b
Distribución muestral empírica		1d; 1f		3a	4b
Visualización			2c	3a	4b; 4d; 4e
Aleatoriedad	0a	1e; 1f	2c	3b	4c; 4d; 4e

Fuente: Elaboración propia

A partir de la Tabla II, se puede apreciar la presencia de varios indicadores en dos conceptos fundamentales de la inferencia estadística: la incertidumbre y la aleatoriedad. Así se identificaron seis indicadores asociados a la incertidumbre y ocho indicadores que abarcan todos los pasos de la THA relacionados con la aleatoriedad. Es relevante destacar que, dado que el muestreo repetido es una técnica empleada por los estudiantes, solo se identifica un indicador en la tabla. Esto se debe a que los participantes no expresaban verbalmente esta técnica, en uso, durante el proceso.

3.6. *Recolección de datos*

Se videograbaron dos lecciones impartidas a estudiantes de grados 3 y 4, correspondientes a las lecciones 1 y 2 de la THA, con una duración total de seis horas. La recolección de datos incluyó la transcripción completa de las lecciones, así como el registro fotográfico de momentos relevantes y producciones de los estudiantes. Además, se consideraron interacciones entre el profesor - investigador (observador participante) con estudiantes.

El análisis de la transcripción de las lecciones se enfocó en la identificación de los indicadores de IIR asociados a las hipótesis de la THA, y en la selección de episodios clave para describir la caracterización sistemática del razonamiento inferencial informal. La unidad de análisis corresponde a cada intervención de los estudiantes. El criterio de selección de episodios clave consideró la manifestación de las hipótesis a través de los indicadores definidos y la riqueza de las producciones orales y escritas de los estudiantes durante interacciones de aula (profesora - estudiante, y estudiante - estudiante).

Se emplearon técnicas de triangulación para el análisis de datos: la triangulación por investigadores y de fuentes de datos. En la primera, cuatro investigadores identificaron de manera independiente los indicadores de la THA en la transcripción de las lecciones, compararon sus resultados y llegaron a un consenso total sobre los episodios seleccionados para el análisis. Por otro lado, la triangulación de fuentes de datos consistió en analizar las transcripciones de los videos y los registros de datos en los tableros de los estudiantes para estudiar el comportamiento de los indicadores de las hipótesis de la THA según grado. Esta técnica permitió cuantificar las intervenciones asociadas a los indicadores y relatar episodios que evidencian la sofisticación del razonamiento de algunos estudiantes.

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

Primeramente, se presentan manifestaciones de los conceptos ISI por parte de los estudiantes. Asumimos que el aprendizaje es esencialmente mental y ocurre a lo largo de un extenso período de tiempo y tras una diversidad de experiencias, teniendo en cuenta que su manifestación está restringida por el lenguaje y las acciones de algunos estudiantes. Luego, se presentan evidencias de indicadores de las hipótesis de la THA en las dos lecciones impartidas en los grados 3 y 4 (la primera lección consideraba los Pasos 0 y 1; y la segunda lección abarcaba los Pasos 2, 3 y 4 de la THA). Estas perspectivas de análisis proporcionan un panorama más completo y detallado del proceso de enseñanza y aprendizaje en el marco de la THA.

4.1. *Manifestación de conceptos asociados a ISI*

Durante el análisis de las videograbaciones de las lecciones que componen los cinco pasos de la THA, se identificaron algunos conceptos asociados a ISI (predicción, incertidumbre, muestra, variabilidad muestral, distribución muestral empírica y aleatoriedad). Las intervenciones realizadas por los estudiantes en las lecciones permitieron detectar la manifestación de todos los conceptos ISI propuestos en la THA (Tabla III). En cada grado, se observa que tales conceptos clave se manifestaron en las intervenciones de los estudiantes, existiendo una estabilidad de estas manifestaciones entre los grados. Esto sugiere que hubo un comportamiento similar en ambos grados en cuanto a la comprensión y aplicación de conceptos, manifestándolos de forma oral o escrita.

TABLA III
Manifestación de categorías conceptuales asociadas a ISI según las intervenciones de estudiantes de los grados 3 y 4 en las lecciones asociadas a la THA

<i>Categorías conceptuales</i>	<i>predicción</i>	<i>incertidumbre</i>	<i>muestras</i>	<i>variabilidad muestral</i>	<i>distribución muestral empírica</i>	<i>aleatoriedad</i>
grado 3	7%	23%	7%	12%	26%	25%
grado 4	9%	25%	8%	11%	22%	25%

Nota. En las transcripciones fueron identificadas 276 intervenciones de indicadores asociados a los conceptos en el grado 3; y 216 intervenciones en el grado 4.

4.2. *Manifestación de indicadores de la THA*

Para analizar el comportamiento de los indicadores de las hipótesis de la THA, se cuantificaron las intervenciones de los estudiantes asociadas a estos. La Tabla IV resume la manifestación de los indicadores de la trayectoria en relación con el total de intervenciones realizadas por los estudiantes en cada paso. Los resultados confirman las hipótesis respecto a la evidencia de estos indicadores.

TABLA IV
Manifestación de indicadores de los Pasos de la THA en los grados 3 y 4

<i>THA</i>	<i>Paso 0</i>	<i>Paso 1</i>	<i>Paso 2</i>	<i>Paso 3</i>	<i>Paso 4</i>
grado 3	15%	31%	14%	18%	22%
grado 4	15%	43%	18%	7%	17%

A continuación, se precisan los indicadores, y se analizan dos lecciones, relatando episodios que ilustran la sofisticación del razonamiento de algunos estudiantes (la primera lección, que consideraba los Pasos 0 y 1; y la segunda, los Pasos 2, 3 y 4 de la THA).

4.2.1. Análisis de Paso 0 y Paso 1 de la THA

En el Paso 0 de la THA, los estudiantes pudieron expresar la incertidumbre de las situaciones, confirmándose la hipótesis asociada; esto es, manifiestan el nivel de posibilidades acerca de la ocurrencia de un suceso, mediante los calificadores “imposible”, “poco posible”, “posible”, “muy posible” y “seguro”; pudiendo distinguir las circunstancias, favorables o desfavorables, de una situación de incertidumbre. En la Tabla V (ver Anexo 1), se muestran los resultados que dan cuenta de la manifestación del indicador en ambos grados, observándose una manifestación similar en estudiantes, en las intervenciones como en el uso de la escala de incertidumbre.

A continuación, se presentan cinco episodios, uno por cada Paso de la THA. El primer episodio referido a la evaluación de situaciones usuales o inusuales (Sannomiya et al., 2021) y la estrategia docente de sistemáticamente formular preguntas que respaldan la manifestación del indicador.

Episodio Paso 0. La profesora ilustra dos situaciones mediante una lámina (ver Figura 2) y pregunta al curso ¿qué tan posible es que...? Los estudiantes responden eligiendo las paletas con íconos para expresar la posibilidad de ocurrencia de aquel suceso. En este episodio, estudiantes de grado 3 y 4 reconocen las situaciones contextuales presentadas y asocian un nivel de posibilidad asociada a la incertidumbre de la situación, confirmándose la hipótesis del Paso 0.

Figure 2 consists of two panels, each representing a different situation and a student's response using a scale of uncertainty. Both panels feature the title "¿Qué tan posible es que.." and a set of five response options: IMPOSIBLE (sad face), POCO POSIBLE (frowny face), POSIBLE (neutral face), MUY POSIBLE (happy face), and SEGURO (smiling face). The "POCO POSIBLE" option is highlighted with a red box in both panels.

Panel 1 (Left): The situation is "Rodrigo utilice un [spoon] para tomarse la sopa?". The student response is: "Respuesta: niño de grado 3, 'poco posible porque no puede agarrar la sopa [con tenedor]'".

Panel 2 (Right): The situation is "Ana salga vestida así de casa?". The student response is: "Respuesta: niña de grado 4, 'poco posible porque cómo va a salir así, con lluvia, ¡se va a resfriar! Es poco posible'".

Figura 2. Ejemplo de dos situaciones inusuales y expresiones de la posibilidad de ocurrencia con uso de escala de incertidumbre, por dos estudiantes de grado 3 y 4.

En el Paso 1 de la THA, y a través del muestreo repetido, los estudiantes pudieron contrastar predicciones con los datos obtenidos, observándose manifestaciones de indicadores y confirmándose la hipótesis del Paso 1.

En ambos grados se observó una manifestación de todos los indicadores del Paso 1, con un 31% de intervenciones de los estudiantes del grado 3 y un 43% del grado 4 del Paso correspondiente. Desde el análisis de los tableros individuales se observa que la totalidad de los estudiantes registraron la elección de un suceso y los datos en ellos (Anexo 1, Tabla V).

Episodio Paso 1. Los estudiantes realizan la predicción y comienzan el lanzamiento de monedas, registrando el resultado en cada tablero numerado (muestras), luego contrastan su elección con las muestras obtenidas. Catalina interactúa con la profesora B respecto a su siguiente predicción y argumenta según su experiencia en tableros previos.

Profesora B: Catalina, ¿cuál elegiste? [Catalina lanza monedas y señala el conejo 3]

Profesora B: el tres y ¿por qué?

Catalina: porque es el [conejo] que más gana.

Profesora B: y ¿tú crees que va a ganar de nuevo?

Catalina: Sí.

Profesora B: ¿por qué?

Catalina: porque siempre salen esos números.

Profesora B: ¿va a salir siempre así? [lanzan las monedas y obtienen varias veces cara-sello].

Profesora B: [nuevamente lanza las monedas] ¿ahí qué dio?

Catalina: cara-cara.

Profesora B: ¿siempre sale cara-sello?, ¿o no siempre?

Catalina: No siempre.

La estudiante predice el conejo que puede ganar en su tercer tablero justificando que el conejo 3 ha ganado en los tableros anteriores. Este episodio hace evidente que la estudiante compara sus muestras de cada experiencia aleatoria y nota la regularidad en ellas, y la intervención de la profesora provoca que vivencie la incertidumbre y observe la variabilidad del comportamiento de los datos.

4.2.2. *Análisis de Paso 2, Paso 3 y Paso 4 de la THA*

En el Paso 2 de la THA los estudiantes pudieron visualizar y reconocer la variabilidad entre muestras, confirmándose la hipótesis del Paso 2. En ambos grados se observó una manifestación de todos los indicadores del Paso 2, con un 14% de intervenciones de los estudiantes del grado 3 y un 18% del grado 4 del Paso correspondiente (Anexo 2, Tabla VI).

Episodio del Paso 2, discusión del curso. Finalizado el juego individual, la profesora pregunta al pleno: “el conejo que les ganó en esta ocasión (tablero 3) ¿creen que volverá a ganar?”. En esta instancia varios estudiantes comentan el comportamiento de los datos.

Profesora: Isidora dice que primero eligió al [conejo] 2 y luego se cambió al [conejo] 3 porque siempre, siempre ganó. ¿Alguien vivió una experiencia diferente, no ganó el [conejo] 3?

Daniela: No, porque cuando yo jugué al último juego [tablero III], llegó el [conejo] 1 y ganó el [conejo] 1.

Profesora: y ¿tú habías elegido cuál?

Catalina: el [conejo] 3.

Profesora: ¿por qué habías escogido el [conejo] 3?

Catalina: Porque es el mejor.

Profesora: ¿Por qué piensas que es el mejor?

Benjamín: Porque siempre gana.

Profesora: y ¿por qué siempre gana?

Daniela: Porque las [caras de las] monedas no se eligen.

Benjamín: Puede salir cara-cara, sello-sello o los dos [diferentes].

En este episodio los estudiantes expresan la tendencia de los resultados de la experiencia, indicando que el conejo 3 es “el mejor” [Catalina] o “porque siempre gana” [Benjamín]. La discusión integra la variabilidad de los resultados del experimento aleatorio, conjuntamente con la impredecibilidad de un resultado próximo debido a las características del artefacto aleatorio, pues “las monedas no se eligen” [Daniela] y “puede salir cara-cara, sello-sello o los dos [Benjamín].

En el Paso 3 de la THA los estudiantes asignaron un nivel de posibilidades a cada suceso considerando la regularidad en la distribución muestral empírica, confirmándose la hipótesis del Paso 3. En ambos grados se observa una manifestación de todos los indicadores del Paso 3, con un 18% de intervenciones de los estudiantes del grado 3 y un 7% del grado 4 del Paso correspondiente. Desde el análisis de los tableros individuales se observa que la totalidad de los estudiantes asignan un nivel de posibilidades a cada suceso determinando su posibilidad de ocurrencia (Anexo 3 Tabla VII).

Episodio del Paso 3, discusión del curso. Tras el muestreo repetido los estudiantes comparan los resultados registrados en la tabla de frecuencias de los sucesos ganadores, con ese conocimiento asignan niveles de posibilidades a cada suceso.

Profesora: Recuerden que estamos tomando en cuenta el resultado general del curso. Mateo, ¿sigues pensando que puede ser imposible que el conejo 2 gane?

Mateo: [Hace gestos con la mano indicando poco posible]

Profesora: Ah, poco posible...

Profesora: ¿Entonces será imposible?

- Mateo: Poco [posible]
 Profesora: Ya, poco posible. ¿Y Judith?
 Judith: El mío lo quiero cambiar [había señalado anteriormente imposible].
 Profesora: ¿A cuál lo quieres cambiar?
 Judith: A poco posible.



Figura 3. Asignación de niveles de posibilidades de los sucesos elegidas por los estudiantes

En este episodio, la profesora enfoca a los estudiantes en la tabla de frecuencia que representa la distribución muestral empírica obtenida del muestreo repetido. Así, los estudiantes asignan un nivel de posibilidades a cada suceso por medio de lenguaje con escala de posibilidad (Figura 3). Mateo expresa su nivel de posibilidades de manera gestual y luego oralmente; y Judith comparando los resultados reconoce cierta posibilidad, cambiando el nivel de posibilidades asignado previamente al conejo 2. En consecuencia, la experiencia de registro de datos en los tableros y su visualización, ha contribuido a que los estudiantes lleguen a verlos como un agregado, permitiéndoles enfocarse en el comportamiento de los datos.

En el Paso 4 de la THA, los estudiantes generan afirmaciones más allá de los datos disponibles como evidencia, usando expresiones de incertidumbre, confirmándose la hipótesis. En ambos grados se observó una manifestación de todos los indicadores del Paso 4, con un 22% de intervenciones de los estudiantes del grado 3 y un 17% del grado 4 (ver Tabla IV). Desde el análisis de los tableros individuales se observan distintas afirmaciones y asignaciones de niveles de posibilidades (Anexo 4, Tabla VIII).

Episodio del Paso 4, interacción profesor-estudiante. Los estudiantes bosquejan un tablero imaginario (sin lanzar las monedas) y escriben un consejo sobre el juego, respecto a la ocurrencia de un suceso futuro que tiene más posibilidades de ganar, empleando lenguaje de incertidumbre (ejemplo, Figura 4).

Profesor 2: ¿Qué pusiste al final en tu consejo?

Benjamín: Que es muy posible que gane el [conejo] tres, que siga ganando.

Profesor 2: ¿Por qué?, ¿cómo lo sabes?

Benjamín: Porque ha ganado muchas veces, así que es muy posible que siga ganando.

Profesor 2: ¿Te acuerdas que en la clase anterior tú apostabas mucho por el [conejo] 1?, ¿o el [conejo] 2 también?, ¿cuál era tú número [de conejo] favorito?

Benjamín: El conejo 1 [lo indica en su tablero].

Profesor 2: ¿Por qué cambiaste de opción? Ahora cambiaste del [conejo] 1 al 3.

Benjamín: Porque el [conejo] 3 ha ganado más veces.

Profesor 2: ¿Y cuál es el consejo [para este juego] que le dirías a tu mejor amigo?

Benjamín: Que es muy probable que el 3 siga ganando [que elija el conejo 3].

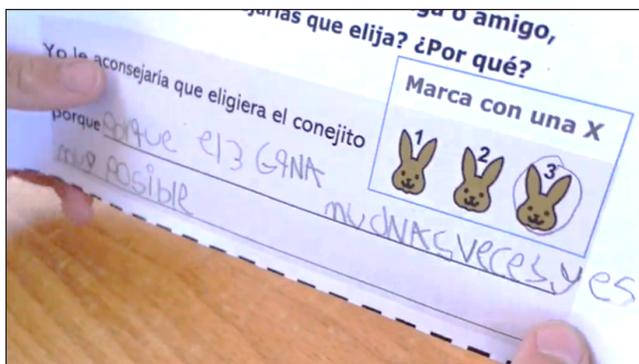


Figura 4. Inferencia a modo de consejo acerca de la ocurrencia futura del suceso ganador

En este episodio, Benjamín [tercer grado] escribe su inferencia al identificar que el conejo 3 ha ganado más veces. Benjamín, al comprender el comportamiento regular de las muestras, ha modificado su elección de los juegos previos, en los cuales prefería el conejo 1, para aconsejar que se debe elegir el conejo 3 pues “es muy probable” que siga ganando en un próximo juego, otorgando un nivel de posibilidades de “muy posible” (Figura 4).

Desde el registro de los tableros individuales (Anexo 4, Tabla VIII), se observa que todos los estudiantes de los grados 3 y 4, generalizan más allá de los datos. En el grado 3, el 82% es capaz de justificar desde el comportamiento de las muestras previas empleando un lenguaje de incertidumbre. Sin embargo, los estudiantes de ambos grados muestran dificultades en el uso de lenguaje de incertidumbre, con un 18% en grado 3 y un 33% en grado 4. Al parecer, el 22% de los estudiantes del grado 4, aún no logran expresar informalmente sus inferencias a partir del comportamiento de las muestras.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este estudio, tanto con fines de investigación como de enseñanza, indagó en cómo estudiantes de los grados 3 y 4 manifiestan los conceptos de inferencia estadística informal y cómo los pasos de la trayectoria hipotética de aprendizaje propuesta fomentan los procesos de aprendizaje de los estudiantes sobre el razonamiento inferencial informal. Para lograr este objetivo, se describió una THA compuesta por cinco pasos que integra conceptos clave para fomentar los procesos de aprendizaje sobre la ISI. La THA diseñada fue analizada tanto teórica como empíricamente, introduciendo la inferencia estadística informal en los grados 3 y 4.

En respuesta a la primera pregunta de investigación, los estudiantes manifestaron los conceptos clave de la ISI (variabilidad, muestreo repetido y distribución muestral empírica), identificando características de una muestra e interpretando la distribución muestral empírica como una descripción de valores obtenidos de las frecuencias en todas las repeticiones posibles de una muestra. En cada grado, algunos estudiantes en sus intervenciones manifestaron todos los conceptos asociados a ISI (predicción, incertidumbre, muestra, variabilidad muestral, distribución muestral empírica y aleatoriedad); y al comparar entre los grados, se apreció una estabilidad en el comportamiento similar de las manifestaciones de tales conceptos. Varios estudiantes pudieron distinguir el modelo de distribución tras los resultados obtenidos, y el muestreo repetido les permitió explorar la variabilidad muestral y la incertidumbre. Algunos estudiantes demostraron cierto sentido del dato (Estrella, 2018), ya que, al resolver problemas basados en datos, comprendieron cómo obtener datos y reconocieron la variabilidad en el fenómeno. Además, utilizaron la evidencia del comportamiento de los datos para realizar estimaciones e inferencias estadísticas informales, todo ello sin necesidad de hacer cálculos complejos (Cf., Estrella et al., 2021).

La segunda pregunta del estudio buscaba indagar cómo los pasos de la THA fomentaban los procesos de aprendizaje acerca del IIR, considerando que la THA comprendía: (i) reconocer la incertidumbre y expresarla en un lenguaje de posibilidades, (ii) contrastar predicciones mediante muestreo repetido, (iii) visualizar y reconocer la variabilidad entre muestras, (iv) asignar niveles de posibilidades considerando la distribución, y (v) generar afirmaciones más allá de los datos disponibles. Se pudo observar que el razonamiento inferencial estadístico manifestado por los estudiantes evidencia que la THA les permitió trabajar de manera efectiva con datos y conceptos propios de la inferencia estadística. Lo que va en concordancia con investigaciones que señalan que participar en actividades que involucran inferencias informales en los primeros años escolares, facilitaría la comprensión de conceptos y el aprendizaje más complejo sobre inferencia estadística formal en niveles escolares posteriores (Makar y Rubin, 2009; Van Dijke-Droogers et al., 2021).

Los resultados indican que la THA diseñada fue efectiva, ya que los estudiantes experimentaron la incertidumbre y aleatoriedad del juego de lanzamiento de monedas; dicho experimento permitió la obtención de muestras a través del uso del registro de datos en tableros de juego asociados a un juego finalizado, cada uno de los cuales se consideró una muestra. A través de episodios cuidadosamente seleccionados, se pudo apreciar el cumplimiento de las hipótesis planteadas sobre el IIR en cada paso de la THA, lo que reflejó el progreso de los estudiantes hacia mayores niveles de sofisticación en el IIR. Estos avances incluyen aspectos clave del razonamiento, como la evidencia basada en los datos, el lenguaje de incertidumbre, la generalización, el agregado y el contexto de los datos.

Una de las fortalezas de la THA propuesta fue el enfoque lúdico del experimento aleatorio que resultó de interés para los estudiantes, quienes crearon, recolectaron y analizaron exploratoriamente datos auténticos. Realizar el experimento aleatorio simple (lanzamiento de dos monedas) de carácter probabilístico como medio para permitir la obtención de muestras, ha permitido desde una perspectiva inferencial que los estudiantes progresen en su comprensión de la aleatoriedad, conectando la observación de un comportamiento aleatorio que tiende a regularizarse después de muchas repeticiones (muestreo repetido), así como también, evidenciar la variabilidad de los resultados obtenidos después de unas pocas repeticiones. La reiterada formulación de preguntas por parte de las docentes, orientó el cuestionamiento sobre los datos y estimuló la curiosidad intelectual de los niños permitiéndoles que pudieran expresar su razonamiento inferencial informal.

Esta trayectoria hipotética de aprendizaje promueve formas más sofisticadas de IIR, como se ha observado durante su aplicación y según se refleja en los argumentos inferenciales orales de estudiantes, quienes pudieron generalizar desde el comportamiento de las muestras empleando un lenguaje de incertidumbre. Este escrito contribuye a superar niveles tradicionales de alfabetización escolar, y difundir aspectos teóricos y prácticos de una educación estadística temprana adecuada a los desafíos del siglo XXI, que busca promover el aprendizaje desde la interacción social en el aula y desde los primeros años escolares, la formación de una ciudadanía crítica, participativa y consciente, capaz de tomar decisiones fundamentadas en escenarios de incertidumbre.

AGRADECIMIENTOS

ANID/Exploración 13240075; ANID/FONDEF IT23i0067; ANID/Fondecyt 1200346; ANID/PIA/Fondos Basales para Centros de Excelencia FB0003; VRID N°2023000813INI; VINCI 039.493/2024; ANID Becas / Doctorado-Nacional 21210862; 21231116; 21241378; y Grupo de Investigación en Estadística Temprana GIET.

DECLARACIÓN DE CONTRIBUCIÓN Y AUTORÍA

Soledad, Estrella, Conceptualización, Metodología, Investigación, Análisis formal, Redacción en borrador original, Redacción - Revisión y Edición.

Sergio, Morales, Investigación, Análisis formal, Supervisión, Redacción en Borrador original.

Maritza, Méndez-Reina, Conceptualización, Análisis formal, Investigación, Redacción en Borrador original.

Pedro, Vidal-Szabó, Metodología, Investigación, Análisis formal, Redacción en Borrador original.

Brahiam, Ramírez, Investigación, Análisis formal, Supervisión, Curación de datos.

Alejandra, Mondaca-Saavedra, Investigación, Análisis formal, Curación de datos.

REFERENCIAS

- Arnold, P., Confrey, J., Jones, R., Lee, H. y Pfannkuch, M. (2018). Statistics Learning Trajectories. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 295–326). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_9
- Ben-Zvi, D., Aridor, K. y Makar, K. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM Mathematics Education*, 44(1), 913–925. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0420-3>
- Ben-Zvi, D. (2016). Three paradigms in developing student's statistical reasoning. En S. Estrella, et al. (Eds.), *XX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 13–22). SOCHIEM - Universidad Católica de Valparaíso, Chile. <https://www.sochiem.cl/documentos/actas-jnem/2016-valparaiso-xx-pucv.pdf>
- Clements, D. y Sarama, J. (2004). Learning Trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81–89. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_1
- Engel, J., Ridgway, J. y Weber Stein, F. (2021). Educación Estadística, Democracia y Empoderamiento de los Ciudadanos. *PARADIGMA*, 41(e1), 01–31. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p01-31.id1016>
- Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En A. Salcedo (Ed.), *Alternativas pedagógicas para la educación matemática del siglo XXI* (pp. 173-194). Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación y Universidad Central de Venezuela.
- Estrella, S. (2018). Data representations in Early Statistics: data sense, meta-representational competence and transnumeration. En A. Leavy, A., M. Meletiou y E. Papanastasiou (Eds.), *Statistics in Early Childhood and Primary Education – Supporting early statistical and probabilistic thinking* (pp. 239–256). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_14
- Estrella, S., Zakaryan, D., Olfos, R. y Espinoza, G. (2020). How teachers learn to maintain the cognitive demand of tasks through Lesson Study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23(1), 293–310. <https://doi.org/10.1007/s10857-018-09423-y>

- Estrella, S., Vergara, A. y Gonzalez, O. (2021). Developing data sense: Making inferences from variability in tsunamis at primary school. *Statistics Education Research Journal*, 20(2), 16–16. <https://doi.org/10.52041/serj.v20i2.413>
- Estrella, S., Méndez-Reina, M. y Vidal-Szabó, P. (2023a). Exploring informal statistical inference in early statistics: a learning trajectory for third-grade students. *Statistics Education Research Journal*, 22(2), 1–16. <https://doi.org/10.52041/serj.v22i2.426>
- Estrella, S., Méndez-Reina, M., Salinas, R. y Rojas, T. (2023b). The Mystery of the Black Box: An Experience of Informal Inferential Reasoning. En G. Burrill, L. De Oliveira y E. Reston (Eds.), *Research on Reasoning with Data and Statistical Thinking: International Perspectives. Advances in Mathematics Education* (pp. 191–210). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29459-4_16
- Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). Preparing school teachers to develop students' statistical reasoning. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE study: teaching statistics in school mathematics*. Proceedings ICMI Study 18 and 2008 IASE. ICMI y IASE.
- Gravemeijer, K., Bowers, J. y Stephan, M. (2003). A hypothetical learning trajectory on measurement and flexible arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 12, 51–66.
- Inzunza, S. e Islas, E. (2019). Diseño y Evaluación de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para intervalos de confianza basada en simulación y datos reales. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(63), 1-26. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a01>
- Konold, C., Higgins, T., Russell, S. J. y Khalil, K. (2015). Data seen through different lenses. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 305–325. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9529-8>
- Langrall, C., Nisbet, S., Mooney, E. y Jansem, S. (2011). The Role of Context Expertise When Comparing Data. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1), 47–67. <https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538620>
- Leavy, A., Meletiou-Mavrotheris, M. y Paparistodemou, E. (Eds.). (2018). *Statistics in early childhood and primary education: Supporting early statistical and probabilistic thinking*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7>
- Lobato, L. y Walters, C. (2017). A taxonomy of approaches to learning progressions. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 74–101). NCTM.
- Makar, K. y Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82–105. <https://doi.org/10.52041/serj.v8i1.457>
- Makar, K., Bakker, A. y Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1), 152–173. <https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538301>
- Makar, K. y Rubin, A. (2018). Learning about statistical inference. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 261–294). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_8
- Méndez-Reina, M., y Estrella, S. (2024). Razonamiento inferencial en Estadística Temprana: aspectos estructurales desde tipos de razonamiento de Peirce y estructura argumental de Toulmin. En S. Estrella, M. Parraguez y R. Olfos (Eds.), *Pensamiento Matemático: Aportes a la práctica docente desde la didáctica de la matemática*. Editorial GRAO.
- Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2018). *Bases Curriculares Primero a Sexto básico*. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-22394_bases.pdf
- Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2022). *Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Educación General Básica*. https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2023/05/basica_2023_digital.pdf

- Moore, D. S. (2005). *Estadística aplicada básica*. Antoni Bosch.
- Pfannkuch, M. (2006). Informal inferential reasoning. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Working Cooperatively in Statistics Education. Proceedings ICOTS7: Working cooperatively in statistics education*. ISI.
- Pfannkuch, M., Arnold, P. y Wild, C. (2015). What I see is not quite the way it really is: students' emergent reasoning about sampling variability. *Educational Studies in Mathematics*, 88, 343–360. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9539-1>
- Pratt, D., Johnston-Wilder, P., Ainley, J. y Mason, J. (2008). Local and global thinking in statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 107–129. <https://doi.org/10.52041/serj.v7i2.472>
- Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: A statistician's view. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 5–19. <https://doi.org/10.52041/serj.v7i2.467>
- Rubin, A., Hammerman, J. y Konold, C. (2006). Exploring informal inference with interactive visualization software. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Working Cooperatively in Statistics Education. Proceedings ICOTS7: Working cooperatively in statistics education*. ISI.
- Sánchez, E., García-Ríos, V. N. y Sepúlveda, F. (2024). Development of high school students' conceptions of sampling distribution in the context of learning significance tests with technology. *Educational Studies in Mathematics*, 117(2), 215–238. <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10330-8>
- Sannomiya, M., Mashimo, T. y Yamaguchi, Y. (2021). Creativity training for multifaceted inferences of reason behind others' behaviors. *Thinking Skills and Creativity*, 39, 100757. <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2020.100757>
- Silvestre, E., Sánchez, E. A. e Inzunza, S. (2022). El razonamiento de estudiantes de bachillerato sobre el muestreo repetido y la distribución muestral empírica. *Educación Matemática*, 34(1), 100–130. <https://doi.org/10.24844/EM3401.04>
- Simon, M. (2020). Hypothetical Learning Trajectories in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_72
- Soto, C., Gutiérrez de Blume, A., Jacovina, M., McNamara, D., Benson, N. y Riffo, B. (2019). Reading comprehension and metacognition: The importance of inferential skills. *Cogent Education*, 6(1), 1–20. <https://doi.org/10.1080/2331186X.2019.1565067>
- Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267–306). Lawrence Erlbaum Associates.
- van Dijke-Droogers, M., Drijvers, P. y Bakker, A. (2020). Repeated sampling with a black box to e informal statistical inference accessible. *Mathematical Thinking and Learning*, 22(2), 116–138. <https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1617025>
- van Dijke-Droogers, M., Drijvers, P. y Bakker, A. (2021). Introducing Statistical Inference: Design of a Theoretically and Empirically Based Learning Trajectory. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(4), 1743–1766. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10208-8>
- Watson, J., Fitzallen, N. y Carter, P. (2013). *Top Drawer Teachers: Statistics*. Education Services Australia.
- Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R. y Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistic Education Research Journal*, 7(2), 40–58. <https://doi.org/10.52041/serj.v7i2.469>

ANEXOS

ANEXO 1

TABLA V
 Manifestación de indicadores del Paso 1 de la THA en los grados 3 y 4

<i>Paso 1: Contrastar predicciones con datos mediante el muestreo repetido</i>	<i>Registro en tableros individuales</i>	<i>Intervenciones de estudiantes en videos</i>
1.a Elige uno de los sucesos de la experiencia aleatoria	Tercero: 100% Cuarto: 100%	Tercero: 7% Cuarto: 8%
1.b Efectúa una acción iterativa sobre objetos concretos identificando el suceso resultante	Tercero: 100% Cuarto: 100%	Tercero: 4% Cuarto: 9%
1.c Registra la ocurrencia de cada uno de los sucesos	Tercero: 100% Cuarto: 100%	Tercero: 8% Cuarto: 11%
1.d Establece frecuencia máxima o alturas de las ocurrencias de cada suceso en el tablero	N/A	Tercero: 3% Cuarto: 6%
1.e Contrasta si su predicción se cumplió o no, respecto a los datos resultantes de la experiencia aleatoria, pudiendo mantener o cambiar predicción	N/A	Tercero: 2% Cuarto: 5%
1.f Compara las muestras propias obtenidas de cada experiencia aleatoria y nota alguna regularidad	N/A	Tercero: 3% Cuarto: 2%
1.g Vivencia la incertidumbre presente en la experiencia aleatoria	N/A	Tercero: 4% Cuarto: 3%
TOTAL		Tercero: 31% Cuarto: 43%

Nota. En las transcripciones de las videgrabaciones se cuantificaron las intervenciones asociadas a los indicadores con respecto al total de intervenciones hechas por estudiantes en el Paso correspondiente; mientras que desde los registros de tableros individuales se verificó la presencia del indicador.

ANEXO 2

TABLA VI
Resultados del Paso 2 de la THA

<i>Paso 2: Visualizar y reconocer la variación entre muestras</i>	<i>Registro en tableros individuales</i>	<i>Intervenciones de estudiantes en videos</i>
2.a Compara frecuencias y detecta el suceso que tiene frecuencia máxima en la muestra (variación muestral)	N/A	Tercero: 7% Cuarto: 7%
2.b Compara frecuencias de los sucesos tras varias repeticiones (variación muestral)	N/A	Tercero: 3% Cuarto: 6%
2.c Compara frecuencias que se van tabulando observando el comportamiento de los sucesos en muestras tras varias repeticiones (distribución muestral empírica; aleatoriedad; visualización)	N/A	Tercero: 3% Cuarto: 5%
TOTAL		Tercero: 14% Cuarto: 18%

ANEXO 3

TABLA VII
Resultados del Paso 3 de la THA

<i>Paso 3: Asignar nivel de confianza a cada suceso considerando la regularidad en la distribución muestral empírica</i>	<i>Registro en tableros individuales</i>	<i>Intervenciones de estudiantes en videos</i>
3.a Compara frecuencias tabuladas para visualizar el comportamiento regular de los sucesos en muestras tras varias repeticiones (distribución muestral empírica; variación máxima muestral; visualización)	N/A	Tercero: 4% Cuarto: 1%
3.b Asigna un nivel de confianza a cada suceso determinando su posibilidad de ocurrencia (aleatoriedad; lenguaje de incertidumbre)	Tercero: 100% Cuarto: 100%	Tercero: 14% Cuarto: 6%
TOTAL		Tercero: 18% Cuarto: 7%

ANEXO 4

TABLA VIII
Resultados del Paso 4 de la THA

<i>Paso 4: Generar afirmaciones más allá de los datos disponibles como evidencia, usando expresiones de incertidumbre</i>	<i>Registro en tableros individuales</i>	<i>Intervenciones de estudiantes en videos</i>
4.a Concluye más allá de los datos sin justificar ni expresar niveles de confianza (predicción)	Tercero: 100% Cuarto: 100%	Tercero: 4% Cuarto: 2%
4.b Concluye más allá de los datos obtenidos, justificando a partir del comportamiento de las muestras sin expresar un nivel de confianza (distribución muestral empírica; variación muestral; frecuencia máxima muestral)	Tercero: 100% Cuarto: 100%	Tercero: 9% Cuarto: 5%
4.c Concluye más allá de los datos obtenidos, sin explicitar justificaciones y expresa cierto nivel de confianza (aleatoriedad, lenguaje de incertidumbre)	Tercero: 100% Cuarto: 100%	Tercero: 1% Cuarto: 4%
4.d Concluye más allá de los datos obtenidos, justificando a partir del comportamiento de las muestras y expresando un cierto nivel de confianza (distribución muestral empírica; aleatoriedad; lenguaje de incertidumbre)	Tercero: 100% Cuarto: 100%	Tercero: 3% Cuarto: 2%
4.e Bosqueja una distribución de frecuencias imaginando el comportamiento de una próxima muestra (distribución muestral empírica; visualización; aleatoriedad)	Tercero: 100% Cuarto: 100%	Tercero: 5% Cuarto: 5%
TOTAL		Tercero: 22% Cuarto: 17%

Autores

Soledad Estrella. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.
soledad.estrella@pucv.cl

 <https://orcid.org/0000-0002-4567-2914>

Sergio Morales. Universidad de Concepción. Los Ángeles, Chile. sergmorales@udec.cl

 <https://orcid.org/0000-0001-5980-6816>

Maritza Méndez-Reina. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.
maritzamendez@pensadoresmaticos.com

 <https://orcid.org/0000-0003-0830-0924>

Pedro Vidal-Szabó. Universidad del Desarrollo. Santiago, Chile. pfvidal@udd.cl

 <https://orcid.org/0000-0002-3320-9789>

Brahiam Ramírez. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.
brahiam.ramirez@pucv.cl

 <https://orcid.org/0000-0002-7482-4067>

Alejandra Mondaca-Saavedra. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.
alejandra.mondaca@pucv.cl

 <https://orcid.org/0000-0001-5403-9646>