Andrea Vergara, Soledad Estrella, Pedro Vidal-Szabó

RELACIONES ENTRE PENSAMIENTO PROPORCIONAL Y PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO EN SITUACIONES DE TOMA DE DECISIONES

Relationships between proportional thinking and probabilistic thinking in decision-making situations

RESUMEN

Tomar decisiones es un acto cotidiano en el ser humano, a mayor incertidumbre más difícil es decidir. A partir de una situación de aprendizaje, consistente en decidir entre dos juegos aleatorios con dados, se estudia la relación entre el pensamiento proporcional y el pensamiento probabilístico, considerando tres estados para el pensamiento proporcional y tres tipos de pensamiento probabilístico. Bajo el enfoque de un estudio de casos instrumental, se analizan las decisiones y argumentos de estudiantes de secundaria chilenos. Los resultados indican que existen relaciones tanto beneficiosas como perjudiciales entre el pensamiento proporcional y el probabilístico, y que las dificultades en la determinación de probabilidades no necesariamente obedecen a la ausencia del uso de proporciones. Se recomienda una enseñanza que considere la argumentación y el aprendizaje del espacio muestral para encauzar el uso de recursos intuitivos.

PALABRAS CLAVE:

- *Pensamiento probabilístico*
- *Pensamiento proporcional*
- *Incertidumbre*
- *Heurística*
- *Toma de decisiones*

ABSTRACT

Making decisions is a daily act in the human being, to greater uncertainty more difficult it is to decide. From a learning situation, consisting of deciding between two random games with dices, the relationship between proportional thinking and probabilistic thinking is studied, considering three states for proportional thinking and three types of probabilistic thinking. Under the focus of an instrumental case study, the decisions and arguments of Chilean high school students are analyzed. The results indicate that there are both beneficial and harmful relationships between proportional and probabilistic thinking, and that the difficulties in determining probabilities are not necessarily due to the absence of the use of proportions. A teaching that considers argumentation and learning of the sample space is recommended to channel the use of intuitive resources.

KEYWORDS:

- *Probabilistic thinking*
- *Proportional thinking*
- *Uncertainty*
- *Heuristics*
- *Decision making*

CC BY NC

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2020) *23* (1): 7-36.
Recepción: Mayo 6, 2019 / Aceptación: Marzo 18, 2020. DOI: 10.12802/relime.20.2311

RESUMO

Tomar decisões é um ato diário no ser humano, quanto maior a incerteza, mais difícil é decidir. Em uma situação de aprendizado, que consiste em decidir entre dois jogos aleatórios com dados, estuda-se a relação entre pensamento proporcional e pensamento probabilístico, três estados específicos para pensamento proporcional e três tipos de pensamento probabilístico. Sob o foco de um estudo de caso instrumental, são analisados argumentos de estudantes chilenos do ensino médio. Os resultados indicam que existem relações benéficas e prejudiciais entre o pensamento proporcional e o probabilístico, e que as dificuldades na determinação das probabilidades não se devem necessariamente à ausência do uso de proporções. Recomenda-se o ensino que considera a argumentação e o aprendizado do espaço de amostra para canalizar o uso de recursos intuitivos.

PALAVRAS CHAVE:

- *Pensamento probabilístico*
- *Pensamento proporcional*
- *Incerteza*
- *Heurística*
- *Tomada de decisão*

RÉSUMÉ

Prendre des décisions est un acte quotidien de l'être humain, plus l'incertitude est grande est plus difficile décider. A partir d'une situation d'apprentissage, consistant à choisir entre deux jeux aléatoires avec dés, on étudie la relation entre la pensée proportionnelle et la pensée probabiliste, considérant trois états spécifiques de la pensée proportionnelle et trois types de pensée probabiliste. Sous l'approche d'une étude de cas instrumentale, on analyse les décisions et les arguments des lycéens chiliens. Les résultats indiquent qu'il existe des relations à la fois bénéfiques et néfastes entre la pensée proportionnelle et probabiliste, et que les difficultés à déterminer les probabilités ne sont pas nécessairement dues à l'absence d'utilisation des proportions. Nous recommandons un enseignement qui tient compte de l'argumentation et l'apprentissage de l'espace échantillon afin de canaliser l'utilisation des ressources intuitives.

MOTS CLÉS:

- *Pensée probabiliste*
- *Pensée proportionnelle*
- *Incertitude*
- *Heuristique*
- *Prise de décision*

1. Introducción

El pensamiento humano se rige por dos sistemas, uno racional, lógico, deductivo, estructurado y consciente; y otro, automático, práctico, intuitivo, emocional e inconsciente (Kahneman, 2012). Desde estas ideas, toda expresión de pensamiento tiene una base racional y otra intuitiva. No obstante, la intuición ha sido uno de los aspectos más complejos de abordar en su relación con la construcción de conceptos probabilísticos (Gandhi, 2018). Al respecto, existe una temática abierta en situaciones contraintuitivas, en que la base racional se opone a la base intuitiva, y el vínculo entre el pensamiento proporcional y pensamiento probabilístico es difuso. Con el fin de abordar la relación entre dichos pensamientos, este estudio considera al razonamiento como la manifestación del sistema racional, a la intuición como la manifestación del sistema intuitivo, y al pensamiento como la coordinación entre ambos.

Hace más de 40 años las dificultades asociadas a la presencia de intuiciones en el pensamiento probabilístico han constituido un tema de interés. Fischbein (1975) es quien inicia la determinación de los tipos de intuiciones asociadas al desarrollo del pensamiento probabilístico. Actualmente, se estudia la influencia de la intuición sobre el razonamiento probabilístico, especialmente en contextos en los que es necesario elaborar juicios y realizar elecciones en juegos que involucran incertidumbre (e.g., Engel y Orthwein, 2018; Gandhi, 2018).

La noción de incertidumbre es amplia e incluye una gran variedad de fenómenos asociados a la aleatoriedad, y cada vez que existe necesidad de enfrentar situaciones que presentan incertidumbre se activa el pensamiento probabilístico para medir qué tan incierta es una situación (Pratt y Kazak, 2018). Enfrentar este tipo de situaciones demanda una enseñanza escolar enfocada en el desarrollo de un pensamiento probabilístico que contribuya a la formación del ciudadano crítico del siglo XXI, en que el estudio de la probabilidad proporcione herramientas para modelar y cuantificar la incertidumbre.

En relación a la enseñanza de la probabilidad, las pruebas internacionales proponen que estudiantes de 15 años puedan llegar a convertirse en ciudadanos capaces de emitir juicios y tomar decisiones bien fundadas (OECD, 2016). Particularmente en Chile, las bases curriculares para la enseñanza secundaria, postulan respecto de la probabilidad, que todos los estudiantes "estimen de manera intuitiva y que calculen de manera precisa la probabilidad de ocurrencia de eventos; […] en forma experimental y teórica, y que construyan modelos probabilísticos basados en situaciones aleatorias" (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2015, p. 100). Así, aunque el currículo chileno establece objetivos de aprendizaje en torno a la probabilidad para estudiantes de 12 a 15 años, no propone enfrentar problemas en escenarios de incertidumbre como un medio para construir significados.

Por otra parte, las relaciones conceptuales entre lo proporcional y la probabilidad son exiguas en el currículo chileno. Si bien se contempla que los estudiantes sean capaces de explicar probabilidades de eventos, a través de fracciones, razones y porcentajes (MINEDUC, 2015, p. 109), la acción de expresar una probabilidad como fracción o razón no implica, por sí sola, el uso de proporciones. Sin embargo, los conceptos de fracción y razón son parte de las mismas estructuras cognitivas que permiten pensar en proporciones, a saber,

 BY-NC

las estructuras multiplicativas (Cf., Vergnaud, 1997). El cálculo de probabilidades no es suficiente para que emerja pensamiento proporcional, hace falta que el estudiante tenga la necesidad de comparar, pues la esencia del pensamiento proporcional reside en la comparación de razones entre magnitudes elegidas convenientemente (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2016). Una buena forma de promover la comparación de probabilidades es presentando experimentos aleatorios a modo de juegos, que involucren tomar decisiones para ganar por medio de la probabilidad.

Esta investigación tiene como foco las argumentaciones de estudiantes de secundaria, quienes enfrentaron dos experimentos aleatorios con dados y decidieron sobre cuál ofrece mayor oportunidad de ganar en un contexto de juego. Se caracteriza así la relación entre el pensamiento probabilístico, el pensamiento proporcional y la naturaleza de los posibles conflictos entre estos. Para ello, se levanta un marco conceptual que articula la noción de pensamiento proporcional (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2016; Vergnaud, 1997) con aquellas características y nociones claves del pensamiento probabilístico (Borovcnik, 2011). De este modo, se busca responder ¿cuáles son las posibles relaciones entre el pensamiento proporcional y el pensamiento probabilístico activadas en una situación de juego con dados, que involucra la toma de decisiones en un escenario de incertidumbre?

2. Antecedentes

Las formas en que los seres humanos elaboran conjeturas, concluyen o toman decisiones están determinadas tanto por razonamientos conscientes como por intuiciones inconscientes, aunque estos estén en constante confrontación (Gigerenzer, 2011; Kahneman, 2012). Esta diferenciación no obedece a considerar sólo a los razonamientos como formas de pensar correctas, ya que pueden existir razonamientos erróneos e intuiciones acertadas.

Las heurísticas poseen una base racional y también intuitiva, y pueden entenderse como atajos mentales, estas ayudan a hacer inferencias en situaciones con tiempo limitado, conocimiento limitado y capacidad de cómputo restringida, siendo una de las características de las heurísticas la reducción del procesamiento de información (Hoffrage, Krauss, Martignon y Gigerenzer, 2015). Desde otra mirada, Kahneman y Tversky (1982) estudiaron la emergencia de heurísticas como sesgos sistemáticos de razonamiento en el ámbito de las probabilidades. Otros estudios han reportado la persistencia de sesgos o errores en el razonamiento asociado a la resolución de problemas probabilísticos en estudiantes de primaria y secundaria (e.g., Chiesi y Primi, 2014; Garfield y Ahlgren, 1988). Los sesgos pueden observarse en distintos niveles educativos y se caracterizan por ser

BY-NC

difíciles de cambiar, incluso después de procesos adecuadamente intencionados de enseñanza (Alvarado, Estrella, Retamal y Galindo, 2018; Chiesi y Primi, 2010; Garfield y Ben-Zvi, 2007).

Debido a las dificultades que tiene la conformación del pensamiento probabilístico, existen diversas perspectivas de su aprendizaje, que incluyen enfoques cognitivos, y también enfoques ecológicos, socioculturales y afectivos, entre otros (Van Dooren, 2014). Asimismo, se ha estudiado cómo opera el razonamiento de la probabilidad en procesos de toma de decisiones bajo incertidumbre (e.g., Bennett, 2014; Eriksson y Simpson, 2010; Kahneman, 2012), evidenciándose que la relación entre el desarrollo de pensamiento probabilístico y la elaboración de estrategias para decidir en escenarios de incertidumbre es compleja y, a veces, contradictoria (e.g., Bennett, 2014; Kruger, Wirtz y Miller, 2005). Esta relación permite explicar las tensiones posibles entre pensar probabilísticamente y tomar decisiones.

Dada la complejidad que involucra el desarrollo de pensamiento probabilístico, se hace necesaria una enseñanza de la probabilidad a nivel escolar, que permita considerar diversos factores, tales como conceptos, actitudes, contextos, creencias e incluso sentimientos (Gal, 2005). Conceptualmente, la probabilidad se vincula fuertemente con el pensamiento proporcional (Van Dooren, 2014), dado que históricamente la primera definición de probabilidad es concebida como una medida basada en razones[1] (Laplace, 1814). La razón suele entenderse como relación parte-todo y relación entre partes, esta última estudiada por Fischbein y Gazit (1984), quienes reconocieron esta relación como la manera más intuitiva de comparar probabilidades desde los primeros años de escolaridad. Actualmente, persiste la controversia sobre si el pensamiento proporcional contribuye u obstaculiza el desarrollo de pensamiento probabilístico (Pratt y Kazak, 2018) y las posturas varían según si se prescinde o no del cálculo correcto de probabilidades para tomar decisiones en incertidumbre.

Existen posturas opuestas sobre el rol de las proporciones para comparar probabilidades. Por un lado, se defiende el uso de frecuencias absolutas en vez de razones para facilitar la comprensión, pues tanto niños como adultos son mucho más propensos a estimar probabilidades si la información básica es entregada como frecuencia absoluta, sosteniendo que las personas prefieren comparar valores aproximados de las partes, en vez de determinar cada probabilidad, al estilo de la regla de Laplace (Zhu y Gigerenzer, 2006). Por otro lado, se demuestra empíricamente que usando razones es posible mejorar la comprensión formal de la probabilidad a través de adecuados procesos de enseñanza; y que ciertos sesgos cognitivos, como la falacia de la conjunción y la confusión entre causalidad

1 "Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles, est la mesure de cette probabilité qui n'est ainsi qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles." (Laplace, 1814, p. 7)

 CC BY-NC

y condicionalidad, persisten a pesar del uso de frecuencias absolutas en la presentación de los problemas probabilísticos (Díaz y Batanero, 2009).

Asimismo, hay estudios que manifiestan una relación beneficiosa entre el pensamiento probabilístico y el pensamiento proporcional. Watson y Shaughnessy (2004) reportan conexiones explícitas entre posibilidades y proporciones al resolver problemas contextualizados en niños de 9 y 10 años, mientras que Martignon (2014) muestra que niños menores de 11 años pueden dar inicio al pensamiento probabilístico desde el razonamiento con proporciones en un contexto lúdico. Sin embargo, otras investigaciones dan cuenta de obstáculos entre el razonamiento basado en proporciones y el desarrollo del pensamiento probabilístico, puesto que la cuantificación de la probabilidad como razón es difícil en sí misma y porque lograr este razonamiento basado en proporciones no supera necesariamente las dificultades propias referidas a la conceptualización de la probabilidad (e.g., Ashline y Frantz, 2009; Bryant y Nunes, 2012).

3. Marco conceptual

A continuación, se presentan elementos conceptuales que permiten construir indicadores suficientes para caracterizar distintas formas en las que se pueden manifestar los pensamientos probabilístico y proporcional en sujetos que deben tomar decisiones comparando experimentos aleatorios con dados.

3.1. *Pensamiento Proporcional*

El pensamiento proporcional concierne a las estructuras multiplicativas como también al concepto específico de función lineal (Reyes-Gasperini, 2016; Vergnaud, 1997). Vergnaud (1997) define a las estructuras multiplicativas como el conjunto de situaciones, cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones, junto con el manejo de conceptos y teoremas que permiten analizar estos tipos de situaciones. Los problemas de proporciones que involucran estructuras multiplicativas son de naturaleza compleja porque se apoyan en relaciones entre cuatro magnitudes y devienen en la proporción entre dos variables (Vergnaud, 1983).

Reyes-Gasperini (2016) modela el desarrollo del pensamiento proporcional mediante etapas distintas; inicialmente, existe una situación en la cual debe realizarse una medición sobre dos variables, pero estas no son conmensurables bajo un criterio directo; luego, surge la necesidad de construir una unidad de medida pertinente al contexto; posteriormente, se eligen magnitudes que representan a las variables, vinculándolas intuitivamente para establecer algún tipo de relación; y por último, se realiza una comparación, la cual puede ampliarse a la acción de conmensurar, al argumentar y establecer relaciones de equivalencia. Reyes-Gasperini y Cantoral (2016) sostienen que la raíz epistémica del surgimiento de las proporciones, como relaciones entre magnitudes desde el ámbito de lo variacional, se encuentra en el problema de medir magnitudes inconmensurables, problema que fue enfrentado a través de la comparación.

Para efectos de este estudio, se entiende pensamiento proporcional como las intuiciones y los razonamientos que guían las acciones de relacionar o comparar razones mediante una proporción, implícita o explícitamente, pudiendo ser este cualitativo o bien cuantitativo, según se caracteriza en la Tabla I.

TABLA I
Características y manifestación de los tipos de pensamiento proporcional

	Tipos de Pensamiento Proporcional	
	Cualitativo	*Cuantitativo*
Características	Es aquel que tiene una base intuitiva y permite contextualizar una relación entre magnitudes o cantidades mediante el uso del lenguaje informal. Se caracteriza por estar restringido a situaciones que determinan implícitamente una constante de proporcionalidad positiva.	Es aquel que tiene una base en el razonamiento, permite reconocer relaciones proporcionales de manera numérica y varias propiedades. Se caracteriza por considerar una proporción entre cuatro cantidades y dos magnitudes, de tal modo que la cantidad reporta numéricamente a la magnitud.
Manifestación	Suele expresarse mediante lenguaje informal, utilizando expresiones del tipo “a más - más… a menos-menos…”.	Suele manifestarse de distintas maneras, según el tipo de regularidad numérica que se identifique, por ejemplo, expresiones como “si uno aumenta al doble, el otro también”.

Nota: adaptado de Reyes-Gasperini y Cantoral (2016).

3.2. *Pensamiento Probabilístico*

Estudios epistemológicos e históricos de la probabilidad han categorizado su tratamiento a través de los enfoques intuitivo, frecuentista, clásico, lógico, tendencial, subjetivo y axiomático (Cf., Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez, 2016). También, es posible analizar la información que utiliza una persona para elaborar un argumento probabilístico, considerando dos tipos de información sobre la

 CC BY-NC

probabilidad (Borovcnik, 2011). El tipo de información objetivista, que describe la probabilidad recurriendo a algún tipo de garantía cuantitativa expresada de distintas maneras —escala de 0 a 1, fracciones, porcentajes o razones—. Y el tipo de información subjetivista, que usa el conocimiento personal en torno a la ocurrencia de un evento y la valoración cualitativa de esta.

Respecto a la información objetivista, Borovcnik (2011) establece dos tipos: razones de casos equiprobables y frecuencias de un evento en repeticiones idénticas e independientes de un experimento aleatorio dado, ambas requieren de algún mecanismo de cuantificación. Por su parte, la información subjetivista está fuertemente vinculada a afirmaciones que pretenden comunicar con lenguaje informal el grado de verosimilitud de un hecho o evento, mediante expresiones tales como "sin duda", "casi seguro", "tal vez", "tan cierto como", entre otras.

En base a lo anterior se han considerado tres tipos de pensamiento probabilístico, los que se caracterizan en la Tabla II.

TABLA II
Características y manifestación de los tipos de pensamiento probabilístico

	Tipo de Pensamiento Probabilístico		
	Basado en información objetivista laplaciana	*Basado en información objetivista empírica*	*Basado en información subjetivista interpretativa*
Características	Evoca un conjunto de referencia a modo de espacio muestral, pero no necesariamente un conjunto de eventos elementales; y ocupa la definición laplaciana de la probabilidad, esto es, "sólo una razón cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador es el número de todos los casos posibles" (Laplace, 1814, p. 7).	Toma en cuenta los datos cuantitativos basados en la experiencia propia o de otros, y comunicable por medio de frecuencias de eventos. Ocupa la experimentación como fuente de validación, sin considerar necesariamente la estabilización de las frecuencias relativas para un gran número de ensayos.	Recurre a las creencias personales frente a la incertidumbre, y su base es más intuitiva que racional. Recurre a información cualitativa de diversas fuentes, con el propósito de facilitar y agilizar la toma de decisiones.

Manifestación	Expresa la probabilidad como una medida cuantitativa de la posibilidad de ocurrencia, la que puede ser representada de varias maneras, como decimal, fracción, razón o porcentaje.	Expresa la probabilidad como frecuencia absoluta o relativa, comparando número de casos favorables con desfavorables o favorables con totales, desde el registro de la ocurrencia de los eventos.	Expresa estimaciones en lenguaje informal de las posibilidades de los eventos, las que se realizan sin comunicar un resultado numérico y expresadas como expectativas o creencias.

Nota: adaptado de Borovcnik (2011).

4. Metodología

Esta investigación se enmarca en un paradigma cualitativo-interpretativo, llevándose a cabo mediante un estudio de casos de tipo instrumental (Stake, 2007). La unidad de análisis son los argumentos escritos de los sujetos sobre su elección entre dos experimentos aleatorios con dados, lo cual permite comprender en profundidad tanto la relación entre el pensamiento probabilístico y el pensamiento proporcional como la naturaleza de los posibles conflictos entre estos.

4.1. *Casos y criterio de selección*

Los sujetos partícipes fueron 54 estudiantes, 30 hombres y 24 mujeres, del grado 11 (16 a 17 años de edad) de dos cursos de un establecimiento educacional mixto de secundaria de la región de Valparaíso de Chile, clasificado en el grupo socioeconómico medio alto según la Agencia de Calidad de la Educación, que se encontraban en la categoría de desempeño alto[2], de acuerdo a los resultados obtenidos en el grado anterior correspondientes al año 2017. Estos cursos participaron de una secuencia de cuatro clases, diseñadas para la promoción del pensamiento probabilístico, a través de procesos de toma de decisiones. Esta escuela fue elegida por resultar accesible a los investigadores y tener un desempeño académico sobre la media nacional.

2 Esta categoría de clasificación es la más alta entre cuatro y agrupa a establecimientos cuyos estudiantes obtienen resultados que sobresalen respecto de la media nacional de su grupo socioeconómico en la prueba SIMCE, Sistema de Medición de la Calidad de la Educación en Chile, (MINEDUC, 2014).

 CC BY-NC

El criterio de selección también consideró además el nivel escolar y los conocimientos previos relativos a la probabilidad. Según el currículo implementado, los estudiantes conocían los conceptos de experimento aleatorio, espacio muestral y regla de Laplace, pero en el momento de la investigación, aún no conocían los conceptos de variable aleatoria y distribución de probabilidad.

Los casos de esta investigación corresponden a las producciones escritas, realizadas por los estudiantes trabajando en parejas, que expresan una decisión y un argumento para la misma. Se constituyen parejas de trabajo con el propósito de favorecer la elaboración de argumentos y consolidar así el uso de estos como unidad de análisis. Las parejas son definidas por los propios estudiantes, principalmente según afinidad. Estos 27 casos fueron asignados como P1, P2, …, P27, respectivamente. Para profundizar los resultados del análisis general fueron seleccionadas 6 producciones del total de 27.

4.2. *Situación de Aprendizaje y su aplicación*

La situación de aprendizaje utilizada para recolectar datos es parte de la segunda clase de una secuencia de cuatro clases de 90 minutos, creadas, diseñadas e implementadas por un docente del equipo de investigadores. En todas las clases, la motivación fue tomar una decisión y argumentarla, en las dos primeras, a partir de juegos de apuestas con dados y, en las dos siguientes, a partir de problemas cruciales, cercanos a la vida cotidiana de los estudiantes. En las clases de juegos de apuestas los estudiantes trabajaron en parejas con el propósito de vivir la experiencia de la apuesta, para luego discutir y consensuar con el compañero o compañera de juego, tanto la decisión como la redacción de la argumentación. En las clases asociadas a problemas cruciales, los estudiantes trabajaron de manera individual. En todas las clases los estudiantes recibieron una hoja de trabajo que describió la situación, un cuestionamiento principal y otros cuestionamientos secundarios de profundización. El trabajo realizado por los estudiantes se monitoreó constantemente por el docente, mediante notas de campo, las que facilitaron concluir cada clase con un plenario. La secuencia de aprendizaje fue diseñada para propiciar la reflexión y argumentación en la toma de decisiones en escenarios de incertidumbre, antes que la enseñanza explícita del concepto probabilidad.

Se seleccionó la situación de la segunda clase, la cual se basa en dos experimentos aleatorios con dados equilibrados reales de 6 caras. La comprensión de los experimentos está facilitada por las experiencias lúdicas previas de los sujetos, debido a que el uso de experimentos aleatorios con artefactos, tales como dados, monedas y cartas, son comunes en el currículo chileno. A partir de la presentación de estos experimentos aleatorios como juegos (ver figura 1), los sujetos debían justificar de forma escrita su decisión respecto a la conveniencia de uno de los juegos para ganar. La implementación de la situación consideró 45 minutos, que contempló un primer momento para que los estudiantes efectivamente experimentaran ambos juegos con dados, y un segundo momento, para llegar a consenso, argumentar la decisión y registrarla en forma escrita.

Se tienen dos juegos de dados. JUEGO 1: consiste en lanzar *un dado* no cargado de seis caras y observar *si sale un número par o impar en la cara superior*. Se gana el doble de lo apostado si sale par, si no, pierde todo lo apostado. JUEGO 2: consiste en lanzar *dos dados* no cargados de seis caras y observar *si la suma de los números de las caras superiores resulta par o impar*. Se gana el doble de lo apostado si sale par, si no, pierde todo lo apostado. ¿En qué juego conviene apostar para ganar? Justifica tu respuesta.

Figura 1. Hoja de trabajo del estudiante que describe la situación.

4.3. *Procedimiento de Análisis*

Para llevar a cabo el análisis de los datos, se procedió en tres etapas, todas con el 100% de consenso entre investigadores. En la primera etapa, dos investigadores clasificaron los argumentos de los estudiantes, en relación a la elección realizada. En la segunda etapa, dos investigadores evaluaron el estado del pensamiento proporcional, a través de la presencia o ausencia de su manifestación (Cf., Tabla I), y se codificaron los 27 casos, considerando las seis combinaciones posibles entre la decisión tomada y el estado del pensamiento proporcional. Y en la última etapa, tres investigadores clasificaron los casos de acuerdo a la manifestación de los tipos de pensamiento probabilístico (Cf., Tabla II).

4.3.1. *Espacios muestrales de la situación de aprendizaje*

Para tomar una decisión sobre la conveniencia de elegir un juego u otro, los estudiantes debían comparar las probabilidades de ganar en ambos juegos, esto es, que salga par o la suma sea par. Varios son los estudios que señalan que el espacio muestral es una construcción clave en el desarrollo del pensamiento probabilístico (e.g., Chernoff y Zazkis, 2011; Jones, Langrall, Thornton y Mogill, 1999; Nikiforidou, 2019). Dado que la definición escolar de espacio muestral hace alusión al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio, es común que surjan distintos tipos de conjuntos, no necesariamente equiprobables, según qué elementos se consideren de interés (Chernoff y Zazkis, 2011). Así, los estudiantes suelen describir espacios muestrales no convencionales, es decir, listas o conjuntos de muestras que se componen de eventos no elementales. Previniendo lo anterior, se realizó un análisis a priori de la situación, estableciendo algunos posibles conjuntos que podrían ser referidos por los estudiantes como espacios muestrales.

(cc) BY-NC

Para el juego 1, lanzar un dado y observar si sale par o impar, es posible anticipar dos espacios muestrales, A_1={1,2,3,4,5,6} de eventos elementales, y A_2={{2,4,6}; {1,3,5}} de subconjuntos de eventos, ambos equiprobables. El conjunto A_2 también podría ser descrito en lenguaje natural como par e impar.

El juego 2, lanzar dos dados y observar si la suma es par o impar, proviene de un experimento compuesto y podrían determinarse los espacios muestrales de distintas maneras. A continuación, se presentan los espacios muestrales en lenguaje conjuntista junto a la cardinalidad, descripción y consideración del orden al lanzar el dado, en cada uno de ellos (véase Tabla III).

TABLA III
Espacios Muestrales previstos para el juego 2

Tipos de Espacios muestrales en juego 2	*Espacio Muestral*	*Cardinalidad y/o Descripción*
Conjunto de eventos elementales	E_1 = {(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (2,1); (2,2); …; (6,6)}	36 eventos descritos como pares ordenados, considerando el orden.
	E_2 = {(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6); (3,4); (3,5); (3,6); (4,5); (4,6); (5,6)}	21 eventos descritos como pares ordenados, sin considerar el orden.
	E_3 = {(1_a,1_b); (1_b,1_a); (1_a,2_b); (1_b,2_a); ...; (6_a,6_b); 6_b,6_a)}	42 eventos descritos como pares ordenados, que distinguen el primer del segundo lanzamiento, sin considerar el orden.
	E_4 = {(1_a,1_b); (1_b,1_a); (1_a,2_b); (1_b,2_a); (2_a,1_b); (2_b,1_a); …; (6_a,6_b); (6_b,6_a)},	72 eventos descritos como pares ordenados, que distinguen el primer del segundo lanzamiento, considerando el orden.
Conjuntos de eventos no elementales	E_5 = {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12},	11 eventos descritos como los resultados posibles de la suma.
	E_6 = {(par, par); (impar, impar); (par, impar)}	3 eventos descritos según paridad de los resultados posibles de cada dado, sin considerar el orden.
	E_7 = {(par, par); (par, impar); (impar, par); (impar, impar)}	4 eventos descritos según paridad de los resultados posibles de cada dado, considerando el orden.
	E_8 = {par, impar}	2 eventos descritos como los posibles resultados para la suma, según paridad.

BY-NC

<table>
<tr><td>Registros de resultados en tablas o listas</td><td>E_9<table><tr><td>D1</td><td>2</td><td>1</td><td></td><td>…</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>D2</td><td>3</td><td>5</td><td></td><td>…</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td><td>obtenidos al lanzar varias veces ambos dados, consignando el valor numérico de cada dado (D1, D2) para cada lanzamiento.</td></tr>
<tr><td></td><td>E_{10}<table><tr><td>S</td><td>2</td><td>3</td><td>10</td><td>…</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td><td>obtenidos al lanzar varias veces ambos dados, consignando la suma (S) de los valores de los dados para cada lanzamiento.</td></tr>
<tr><td></td><td>E_{11}<table><tr><td>D1</td><td>p</td><td>p</td><td></td><td>…</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>D2</td><td>i</td><td>p</td><td></td><td>…</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td><td>obtenidos al lanzar varias veces ambos dados, distinguiendo y registrando par de impar (p, i) para cada dado (D1, D2) en cada lanzamiento.</td></tr>
<tr><td></td><td>E_{12}<table><tr><td>S</td><td>p</td><td>p</td><td>i</td><td>…</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td><td>obtenidos al lanzar varias veces ambos dados, registrando par e impar (p, i) para los resultados de las sumas en cada lanzamiento.</td></tr>
</table>

5. Resultados

Se recolectaron los datos de las decisiones y respectivas argumentaciones de las parejas de estudiantes en forma de respuestas escritas, las que fueron analizadas de acuerdo a los tres criterios principales definidos en el marco conceptual: estado del pensamiento proporcional, decisión respecto a la oportunidad de ganar que brindan ambos juegos y estados del pensamiento probabilístico (ver Tabla IV).

De todos los casos clasificados en la Tabla IV (véase página siguiente), el 56% de estos (15) argumentan que ambos juegos dan la misma oportunidad de ganar, presentando mayormente un pensamiento proporcional cuantitativo y un tipo de pensamiento probabilístico objetivista laplaciano. Los que tomaron la decisión contraria, esto es, que los juegos no dan la misma oportunidad de ganar, presentan una mayor variabilidad en los argumentos, respecto al estado del pensamiento proporcional y al tipo de pensamiento probabilístico.

 BY-NC

TABLA IV
Clasificación de los 27 casos, según tipo de pensamiento probabilístico
y el estado de pensamiento proporcional en relación a la decisión

Tipo de pensamiento probabilístico	*Estado de pensamiento proporcional en relación a la decisión*						
Tipo de pensamiento probabilístico	*Estado de pensamiento proporcional en relación a la decisión*						
	los juegos dan la misma oportunidad de ganar			*los juegos no dan la misma oportunidad de ganar*			
	ausente	*cualitativo*	*cuantitativo*	*ausente*	*cualitativo*	*cuantitativo*	*Total*
objetivista laplaciano	0	0	10	0	1	4	15
objetivista empírico	1	0	2	1	0	1	5
subjetivista interpretativo	2	0	-	2	3	-	7
Total	3	0	12	3	4	5	27

Nota: El signo - denota que la combinación es inviable.

Las argumentaciones predominantes corresponden a aquellas que conjugan el pensamiento probabilístico basado en información objetiva laplaciana y el pensamiento proporcional cuantitativo. Además, ocho de las combinaciones no presentaron casos, dos de ellas habían sido previstas como inviables.

La presencia de pensamiento probabilístico basado en información objetivista empírica no resultó compatible con el pensamiento proporcional cualitativo, ya que los estudiantes que obtenían resultados de manera experimental usaban estos para comparar cuantitativamente o bien no los usaban para tomar la decisión. En los 5 casos que presentaron este tipo de pensamiento probabilístico, la noción frecuentista de la probabilidad fue más bien intuitiva, los estudiantes llevaron la cuenta del número de veces que se perdía y que se ganaba sin reparar en la necesidad de realizar un gran número de experimentos.

En cuanto al pensamiento probabilístico subjetivista interpretativo, este se presenta unido tanto al pensamiento proporcional cualitativo como a la ausencia de pensamiento proporcional, siendo las expresiones cualitativas las que permitieron comprender el razonamiento subyacente.

Finalmente, y de acuerdo a lo previsto en la sección 4.3.1., fue posible identificar distintos espacios muestrales referidos al juego 2. La siguiente sección presenta el análisis de los tipos de espacios muestrales referenciados por los estudiantes y cómo se vinculan con los tipos de pensamiento probabilístico y los estados de pensamiento proporcional.

5.1. *Relación entre tipos de pensamiento probabilístico y estados de pensamiento proporcional que manifiestan espacios muestrales explícitos para el juego 2*

5.1.1. *Caso P23: Relación entre el pensamiento probabilístico objetivista laplaciano y pensamiento proporcional cuantitativo sobre un espacio muestral de eventos elementales*

La pareja de estudiantes P23 determina los espacios muestrales de los experimentos aleatorios: juego 1 y juego 2 (ver figura 2). Para el juego 1, expresa el espacio muestral como una lista y enmarca con un círculo los números impares 1, 3 y 5 (tres casos de seis), calcula la probabilidad de perder mediante la relación $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Mientras que para el juego 2, construye una tabla de doble entrada, y enmarca con un círculo los números impares 3, 5, 7, 9 y 11 (18 casos de 36), calculando también la probabilidad de perder como $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Estos estudiantes determinan que “en ambos [juegos] existe la misma probabilidad [de perder]”.

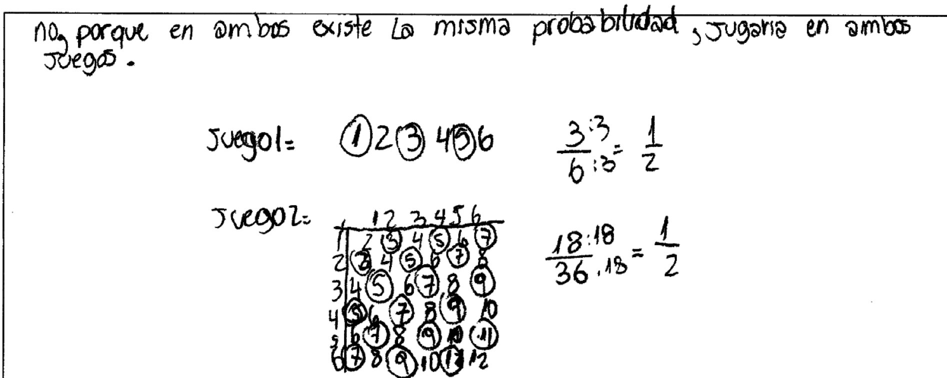

Figura 2. Argumento escrito de la pareja de estudiantes P23, que evidencia un pensamiento probabilista objetivista laplaciano y un pensamiento proporcional cuantitativo, en un espacio muestral tipo E_1

 CC BY-NC

P23 evidencia un pensamiento probabilístico basado en información objetivista laplaciana, manifestando la probabilidad como una medida cuantitativa de la posibilidad de ocurrencia, al determinar todos los eventos del espacio muestral de cada experimento aleatorio $\frac{3}{6}$ y $\frac{18}{36}$ respectivamente. A su vez, P23 evidencia un correcto pensamiento proporcional cuantitativo, pues compara la opción de perder a través de los resultados del cálculo de la probabilidad de ambos casos y, mediante las magnitudes resultantes, encuentra una regularidad numérica cuya expresión es $\frac{1}{2}$.

Este caso da cuenta de una relación favorable entre el pensamiento probabilístico y el pensamiento proporcional cuantitativo, lo que permitió a P23 tomar una decisión correcta respecto a la situación propuesta.

5.1.2. *Caso P26: Relación entre el pensamiento probabilístico objetivista laplaciano y pensamiento proporcional cuantitativo sobre un espacio muestral descrito como resultados posibles para la suma*

La pareja P26 determina los espacios muestrales del juego 1 y 2, rotulándolos como J1 y J2 (ver figura 3). Para J1 describe eventos elementales separados en dos casos, el caso en que se pierde, {1,3,5} y el caso en que se gana, {2,4,6}, y en ambos calcula la probabilidad mediante la regla de Laplace como $\frac{3}{6}$. Para J2 determina el conjunto correspondiente al recorrido de la variable aleatoria suma de dos números del 1 al 6 y también lo separa según el criterio de ganar y perder, esto es, {2,4,6,8,10,12} y {3,5,7,9,11} respectivamente, lo cual hace que calcule una probabilidad de $\frac{6}{11}$ para el primero y $\frac{5}{11}$ para el segundo. En consecuencia, P26 responde que el juego 1 tiene "la misma probabilidad de ganar y perder...", mientras que para el juego 2 indica que "tiene más probabilidad de ganar que perder."

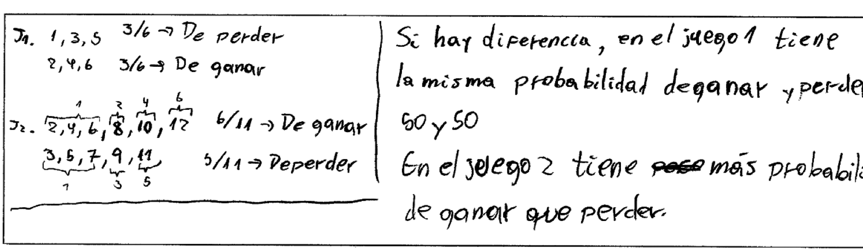

Figura 3. Argumento escrito de la pareja de estudiantes P26, que evidencia un pensamiento probabilista objetivista laplaciano y un pensamiento proporcional cuantitativo, sobre el espacio muestral tipo E_5

La pareja P26 da cuenta de un pensamiento probabilístico basado en información objetivista laplaciana, pues expresa la probabilidad tanto de ganar como de perder como una medida cuantitativa a través de la razón entre casos favorables y casos totales. A partir de la argumentación, puede interpretarse que implícitamente se considera una proporción cuyos cuatro términos están constituidos por fracciones, pues para cada juego se compara la probabilidad de ganar contra la probabilidad de perder, así P26 manifiesta un pensamiento proporcional cuantitativo.

En este caso, tanto el pensamiento probabilístico como el pensamiento proporcional se muestran sostenidos por elementos cuantitativos, logrando concordancia. Sin embargo, el cálculo de la probabilidad resulta incorrecto. Las causas de este error no obedecen a las dificultades en elaborar un pensamiento basado en proporciones, sino en asumir erróneamente la equiprobabilidad de los eventos que constituyen el espacio muestral establecido para el juego 2.

5.1.3. *Caso P16: Relación entre el pensamiento probabilístico objetivista empírico y pensamiento proporcional cuantitativo sobre un espacio muestral descrito como registro de resultados del experimento*

La pareja P16 realizó 14 veces ambos experimentos aleatorios (ver figura 4). Para el juego 1 obtuvieron siete resultados en que el número observado en la cara superior del dado era impar y siete en que era par, rotulando como $I = 7$ y $P = 7$, respectivamente. De igual forma procedieron para el juego 2. Para cada juego, registran los resultados en una lista vertical, cuyas secuencias son distintas, pero las cantidades resultantes para los resultados par e impar son las mismas. En base a dicha experiencia, P16 concluye que ambos juegos tienen la misma probabilidad de ganar "... la frecuencia de que salga par o impar no influye en el resultado ya sea tirando uno o dos dados...".

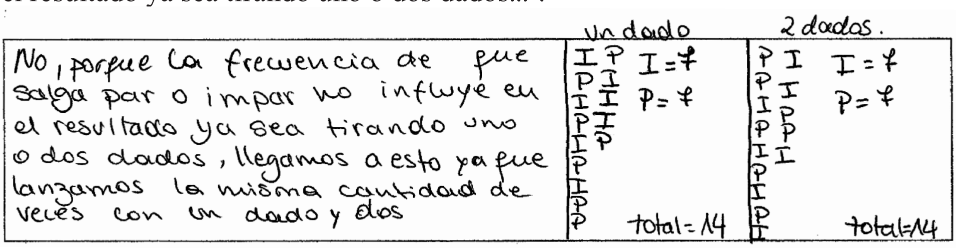

Figura 4. Argumento escrito de la pareja de estudiantes P16, que evidencia un pensamiento probabilista objetivista empírico y un pensamiento proporcional cuantitativo, sobre el espacio muestral tipo E_{11}

 CC BY-NC

La pareja P16 manifiesta un pensamiento probabilístico objetivista empírico porque expresa la probabilidad como frecuencia absoluta, registrando el número de casos en que se obtiene par e impar en ambos juegos, a partir del lanzamiento de los dados. La comparación implícita, es de carácter cuantitativa, pues se realiza un cómputo de los resultados y se establece una base común para comparar, a saber, el mismo número de ensayos. Lo anterior es evidencia de un pensamiento proporcional cuantitativo, el cual permite a los estudiantes comparar directamente las frecuencias absolutas de los resultados pares e impares en cada juego.

En este caso, la evaluación de la probabilidad del juego 2 es plausible, no obstante, el hecho de que el experimento se realice una cantidad arbitraria y pocas veces es indicador de la ausencia de un adecuado significado frecuentista de la probabilidad. Luego, la decisión se ve influenciada por la coincidencia afortunada de los resultados obtenidos, los cuales hacen que el pensamiento objetivista empírico guíe el pensamiento proporcional cuantitativo, aún sin contar con información suficiente.

5.1.4. *Caso P9: Relación entre el pensamiento probabilístico subjetivista y el pensamiento proporcional cualitativo sobre un espacio muestral descrito según paridad de los resultados posibles de cada dado*

La pareja P9 argumenta que “los juegos no son equivalentes”, ya que la suma entre dos pares o entre dos impares es par, siendo esta la opción que permite ganar (ver figura 5). Esto se relaciona con un espacio muestral conformado por tres tipos de sumas como eventos, descritos de la forma *par* + *par*, *par* + *impar*, *impar* + *impar*, en el que las posibilidades de obtener par son más que las posibilidades de obtener impar.

Los juegos no son equivalentes, ya que esta vez la probabilidad de que salga par es mayor a que sea impar, ya que si ambos números son pares, la suma será par, y si ambos son impares, la suma también será par, mientras que sólo si uno es par y el otro impar, la suma será impar.

2n = número par
n = número impar

$\left.\begin{array}{l} 2n + 2n = 4n \\ n + n = 2n \end{array}\right\}$ par.

$2n + n = \underbrace{3n}_{\text{impar}}$

Figura 5. Argumento escrito de la pareja de estudiantes P9, que evidencian un pensamiento probabilístico objetivista laplaciano y un pensamiento proporcional cualitativo, en el espacio muestral E_6

(cc) BY-NC

La pareja P9 manifiesta un pensamiento proporcional cualitativo, pues relaciona, a través del uso del lenguaje matemático escolar, los posibles tipos de sumas de ambos juegos bajo el criterio de la paridad. De esta manera, en el juego 2 se advierte que al haber más tipos de sumas que dan par, hay más probabilidad de ganar. Por otra parte, P9 activa un pensamiento probabilístico subjetivista interpretativo, pues ocupa una fuente de información algebraica y expresa posibilidades haciendo uso de lenguaje tanto natural como simbólico. Así, la elección entre los juegos se realiza sin recurrir a un resultado numérico. Este caso da cuenta de una relación adversa entre el pensamiento probabilístico subjetivista interpretativo y el pensamiento proporcional cualitativo, puesto que la necesidad de eludir el cálculo lleva a P9 a realizar una sobreestimación de la probabilidad de ganar en el juego 2, lo que conduce a tomar una decisión incorrecta.

En la Tabla V se sintetizan los tipos de espacios muestrales asociados al juego 2, que surgieron como parte de las argumentaciones y su relación con las combinaciones entre pensamiento proporcional y pensamiento probabilístico.

TABLA V
Tipos de espacio muestral y pensamientos asociados para el juego 2, desde las argumentaciones de los cuatro casos (P23, P26, P16 y P9)

Espacio Muestral	*Caracterización de la argumentación*	*Pensamientos asociados*
E_1	Se construye E_1 y cuentan los casos favorables {(1,1); (1,3); (1,5); … (6,6)} directamente desde el espacio muestral. Se decide que tanto el juego 1 como el juego 2 ofrecen las mismas oportunidades de ganar, pues en ambos juegos las posibilidades de obtener valores pares corresponden a la mitad de los casos totales, 1 de 2 y 18 de 36, respectivamente.	Pensamientos proporcional cuantitativo y probabilístico objetivista laplaciano.
E_5	Se construye un conjunto simplificado de las posibilidades resultantes en función de la paridad. Se decide que los juegos no son equivalentes pues al apostar por obtener una suma par, hay más opciones de ganar en el juego 2, porque 2 de 3 combinaciones ofrecen una suma par (*par* + *par* = *par*; *impar* + *impar* = *par*).	Pensamientos proporcional cualitativo y probabilístico subjetivista interpretativo

 CC BY-NC

E_6	Se considera de forma implícita el recorrido de la variable aleatoria suma de los números obtenidos en el juego 2 como conjunto referencia. Se identifican así todos los resultados posibles para la suma, desde el 2 hasta el 12. Se decide que los juegos no ofrecen la misma oportunidad de ganar, pues en el juego 2 hay más de la mitad de opciones favorables para obtener un valor par, esto es, 6 de 11.	Pensamientos proporcional cuantitativo y probabilístico objetivista laplaciano.
E_{10} y E_{11}	Se registran los resultados obtenidos al lanzar varias veces ambos dados, en listas o tablas, ya sea el resultado numérico de la suma o la posibilidad par - impar para cada dado. Se puede decidir que los juegos ofrecen igual o distinta oportunidad de ganar, según el conteo de casos favorables y casos totales.	Pensamientos proporcional cuantitativo y probabilístico objetivista frecuentista.

Nota: Elaboración propia.

Los espacios muestrales si bien fueron descritos y representados de distintas maneras por los estudiantes, se manifestaron de acuerdo a lo previsto (ver Tabla IV), según se indica en la Tabla V. Los espacios muestrales E_1, E_5 y E_6 son válidos, aunque varían en cardinalidad y notación. No obstante, la forma en la que se visualiza el conteo de posibilidades a partir de dichos espacios muestrales puede afectar significativamente en la asignación de probabilidades específicas para cada evento y, por tanto, en la decisión sobre la conveniencia de un juego sobre el otro. En los casos P26 y P9, las dificultades evidenciadas en la estimación de la probabilidad de ganar en el juego 2, obedecen al supuesto de la equiprobabilidad de los espacios muestrales referenciados y no necesariamente a la interpretación y descripción de los conjuntos asociados a los espacios muestrales. De ahí que las reflexiones relativas a la conveniencia por apostar en el juego 1 o en el juego 2 varían incluso si la base común es el pensamiento probabilístico basado en información objetivista.

5.2. *Relación entre tipos de pensamiento probabilístico y estados de pensamiento proporcional que no manifiestan espacios muestrales explícitos para el juego 2*

Los siguientes dos casos, permiten profundizar —dada la legibilidad de la redacción— en la relación entre los tipos de pensamiento probabilístico y estados de pensamiento proporcional que no manifiestan espacios muestrales explícitos.

5.2.1. *Caso P24: Relación entre el pensamiento probabilístico objetivista laplaciano y pensamiento proporcional cualitativo, sin espacio muestral explícito*

La pareja P24 argumentó que el primer juego "tiene menos probabilidad porque tiene menos opciones", [esto es, {1,2,3,4,5,6}] tiene cardinalidad 6 y "solo 3 son pares", mientras, para el segundo juego, "hay un mayor número de combinaciones [entonces hay mayor probabilidad de ganar]", pues si se tienen "ambos dados con números impares..., la suma puede ser par" (ver figura 6).

Sí, ya que en el primer juego el jugador tiene menos probabilidad de ganar, porque tiene menos opciones: de los 6 números que pueden salir, sólo 3 son pares, en cambio en el segundo juego hay un mayor número de combinaciones, ya que pueden salir ambos dados con números impares, sin embargo la suma puede ser par.

Figura 6. Argumento escrito de la pareja de estudiantes P24, que evidencian un pensamiento probabilístico objetivista laplaciano y un pensamiento proporcional cualitativo, sin explicitar espacio muestral para el juego 2

P24 activa un pensamiento proporcional en estado cualitativo, pues al comparar ambos juegos, asocia a más posibilidades mayor probabilidad de ganar. La pareja P24 entrega elementos del espacio muestral para el juego 1, y un espacio muestral implícito para el juego 2. Es posible interpretar que considera el conjunto {(*par*, *par*), (*par*, *impar*), (*impar*, *impar*)}, desde el cual se infiere que hay más posibilidades de que la suma sea *par* que *impar,* pues *par* + *par* = *impar* + *impar* = *par.* P24 manifiesta un estado de pensamiento probabilístico laplaciano, de acuerdo a cómo concibe la probabilidad para el juego 1. Si bien en el juego 2 no se calcula numéricamente la probabilidad de ganar, igualmente se insinúa la relación entre casos favorables y casos totales, al intentar conceptualizar las combinaciones que arrojan resultados pares para la suma y las posibles combinaciones.

Este caso evidencia dos dificultades, por una parte, se cambia el tipo de espacio muestral de referencia, de uno de eventos elementales a otro de eventos descritos según paridad del resultado de cada dado y, por otra, el análisis de los resultados posibles para el juego 2 no distingue el evento par - impar del evento impar - par. Junto con lo anterior, el recuento de los resultados posibles realizado para el juego 2 manifiesta un sesgo de equiprobabilidad.

 (cc) BY-NC

5.2.2. *Caso P19: Relación entre el pensamiento probabilístico subjetivista interpretativo y ausencia de pensamiento proporcional, sin espacio muestral explícito*

La pareja P19 reconoce la existencia de diferencias entre ambos juegos, pero la argumentación se reduce a repetir las características de cada uno, como el número de dados que se usa en cada caso y las condiciones que permiten ganar (ver figura 7). El argumento expresa que la diferencia está en las probabilidades de obtener par en cada juego, que es finalmente lo que permite ganar.

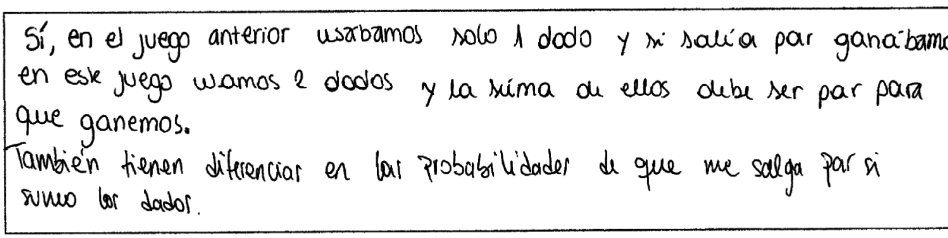
Sí, en el juego anterior usabamos solo 1 dado y si salía par ganábamos
en este juego usamos 2 dados y la suma de ellos debe ser par para
que ganemos.
También tienen diferencias en las probabilidades de que me salga par si
sumo los dados.

Figura 7. Argumento escrito de la pareja de estudiantes P19, que evidencia ausencia de pensamiento proporcional y pensamiento probabilístico subjetivista interpretativo, sin espacio muestral explícito

La pareja P19 manifiesta ausencia de pensamiento proporcional, pues no realiza ningún tipo de comparación en base a razones, como tampoco expresa un pensamiento proporcional cualitativo, ya que no relaciona, por ejemplo, el aumento de posibilidades con el aumento de probabilidades. Además, P19 manifiesta un pensamiento probabilístico subjetivista interpretativo, dado que argumenta que existen diferencias en las probabilidades de ganar, pero sin comunicar un resultado numérico ni justificar las fuentes de información.

En este caso la relación entre la ausencia de pensamiento proporcional y el pensamiento probabilístico subjetivista interpretativo obstaculizó la concreción de una decisión respecto de la conveniencia de un juego por sobre otro.

6. Discusión

Los resultados generales evidencian que el pensamiento proporcional puede jugar un doble rol al estar en interacción con el pensamiento probabilístico. En ocasiones ambos pensamientos se muestran en una relación beneficiosa, pero en otros casos el pensamiento proporcional predomina sobre el pensamiento probabilístico, generando ideas sesgadas acerca de la probabilidad. Específicamente, la relación explícita entre el pensamiento probabilístico basado en información objetivista laplaciana y el pensamiento proporcional cuantitativo brindan señales sobre cómo influye la construcción del espacio muestral en la determinación de probabilidades. De las 15 argumentaciones que sugirieron una lógica laplaciana, sólo 10 de ellas ofrecieron argumentos correctos respecto de las probabilidades involucradas, que son justamente aquellas que definieron el espacio muestral de eventos elementales. Por su parte, el pensamiento proporcional cuantitativo, presente en 17 de los 27 casos, manifestaron el proceso de plantear probabilidades como razones cuando existía acceso a espacios muestrales, ello se contrapone a lo señalado por Sedlmeier (1999), quien manifiesta que uno de los factores que explican las dificultades para razonar o comparar probabilidades está precisamente en el uso de razones.

Aquellos casos que evaluaron su decisión sobre el espacio muestral de eventos elementales, determinado por el juego 2, lograron identificar que la razón entre casos favorables *versus* casos totales era la misma en ambos juegos, pero esto se debió a que los eventos compuestos fueron distinguidos claramente, al igual que el orden de la aparición de los resultados. De esta manera, las decisiones que acertaron en relación a las probabilidades de los juegos no responden necesariamente a un mejor desempeño del razonamiento proporcional, porque algunos argumentos utilizan la misma base proporcional, pero llegan a conclusiones distintas, al considerar distintos conjuntos de resultados posibles. De este modo, los cálculos probabilísticos, que no coinciden con la probabilidad laplaciana, no se debieron a la ausencia de pensamiento proporcional, puesto que la mayoría de los casos evidencia que evaluar una probabilidad activa la necesidad de establecer una unidad de medida mediante comparación constante entre magnitudes, que es la base del pensamiento proporcional (Reyes-Gasperini, 2016). Al parecer, los argumentos incorrectos tienen relación con la convicción de que dos posibilidades que se componen de iguales elementos, pero en distinto orden son indistinguibles entre sí, fenómeno conocido históricamente por el caso de d'Alembert (d'Alembert, 1784). En este mismo sentido, determinar el espacio muestral al lanzar dos dados de seis caras, presenta dificultades epistemológicas constatables en la historia. Por ejemplo, en el poema De Vetula, un escrito medieval de mediados del siglo XIII (Bellhouse, 2000), se establece que, en vez de 36, hay 21 formas de lanzar dos dados —quince combinaciones de parejas del 1 al 6, más seis parejas de la forma (h, h)—, conteo que se realiza precisamente para evaluar las opciones de ganar en un juego.

 (cc) BY-NC

Los hallazgos evidencian que enfrentar a los estudiantes a situaciones que involucran incertidumbre, como los juegos de apuestas basados en experimentos aleatorios, promueven el desarrollo de argumentaciones probabilísticas, aun cuando el concepto de probabilidad no es intencionado como objeto de enseñanza. Además, dado que los estudiantes son interpelados a tomar una decisión antes que realizar cálculos, la situación resultó propicia para identificar cómo el pensamiento probabilístico recurre o descarta, de manera natural, el uso de proporciones. En el análisis de las relaciones entre el pensamiento probabilístico y el pensamiento proporcional, el espacio muestral desempeñó un rol fundamental, pues permitió determinar que las dificultades en el desarrollo del pensamiento probabilístico no obedecían necesariamente a la ausencia de pensamiento proporcional como lo ha indicado la literatura especializada, sino más bien a una consideración uniforme de los elementos que conformaban dichos espacios muestrales.

Todos los estudiantes asumieron la equiprobabilidad de los espacios muestrales. Este fenómeno, conocido como el sesgo de la equiprobabilidad, es uno de los sesgos más comunes, altamente resistente a la enseñanza y transversal en diversos niveles educativos (Lecoutre, Durand y Cordier, 1990). Los espacios muestrales $E_5 = \{par\text{-}par, par\text{-}impar, impar\text{-}impar\}$ y $E_6 = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, por ejemplo, son ponderados naturalmente como equiprobables por los estudiantes, sin notar que no todos los eventos tienen la misma cantidad de posibilidades. Esta creencia sobre el azar, que conduce a intuir que en general los fenómenos aleatorios se comportan de manera uniforme o equiprobable ha sido largamente documentada (e.g., Anway y Bennett, 2004; Fielding-Wells, 2014; Morsanyi, Primi, Chiesi, y Handley, 2009).

El sesgo de la equiprobabilidad también puede explicarse porque en el juego 2 la variable no uniforme (la suma de los dos dados) está determinada por variables uniformes (el resultado del lanzamiento de cada dado). Concordamos con Gauvrit y Morsanyi (2014) que la dificultad puede emerger al tratar de cuantificar la probabilidad de ganar, al creer que la uniformidad de cada experimento simple será heredada al espacio muestral compuesto. Por otra parte, la idea de equiprobabilidad es una hipótesis frecuente, cuya naturalidad puede ser explicada como parte de un contrato didáctico implícito, corroborado por la predominancia del uso de artefactos aleatorios equiprobables (dados equilibrados, monedas, mazos de cartas, entre otros) y de la llamada regla laplaciana, cuya hipótesis requiere que los resultados de un experimento aleatorio sean equiprobables.

Si bien el pensamiento proporcional, en su manifestación cuantitativa, permitió apoyar la argumentación de los procesos de toma de decisiones bajo incertidumbre, también condujo a la prevalencia de una concepción determinística.

Este mismo fenómeno es corroborado por Gandhi (2018), quien explica que formular proporcionalmente la relación entre el evento deseado y el tamaño del espacio muestral tiene como base un enfoque determinista, el que podría ser la causa de la persistencia del sesgo de equiprobabilidad. Asimismo, en tres de los casos analizados, el pensamiento proporcional jugó un papel en una dirección distinta. Estos estudiantes juzgaron que "a mayor cantidad de posibilidades mayor probabilidad de ganar", lo que los llevó a tomar una decisión sin recurrir a la elaboración de un espacio muestral como conjunto ni a la cuantificación explícita de sus elementos. Hemos nombrado a este tipo de creencias como *heurística de lo proporcional*, la cual impulsó a los estudiantes a tomar una decisión, prescindiendo de la probabilidad como razón. Y como heurística, podría ser útil para decidir de forma rápida cuando el acceso a datos es incompleto o parcial, o simplemente cuando no se cuenta con técnicas directas para calcular probabilidades.

En relación con las limitaciones del estudio, por razones de extensión, no fueron analizados los argumentos que tuvieron lugar en el plenario de la clase seleccionada, sólo se consideraron los argumentos escritos. Dado lo anterior, con el propósito de aclarar específicamente cómo los estudiantes evocan espacios muestrales al momento de tomar una decisión, los procedimientos de trabajo de campo de futuras investigaciones podrían incluir entrevistas o grupos focales. Asimismo, el hecho de considerar experimentos aleatorios, a partir de artefactos de uso común en el aula de clase, restringe la incertidumbre a escenarios artificiosos de juegos de apuestas. De ahí que uno de los desafíos para la extensión del estudio, esté en la creación de situaciones cercanas a la vida cotidiana del estudiante que, al igual que las situaciones de juegos, permitan la experimentación o la simulación para evaluar los resultados de la decisión en varios intentos, modelar y cuantificar la incertidumbre.

7. Conclusiones

Esta investigación indagó en las posibles relaciones entre el pensamiento proporcional y el pensamiento probabilístico, que involucraba tomar una decisión bajo incertidumbre. Para ello se propuso una situación con artefactos aleatorios reconocidos por los estudiantes, que implicaba decidir entre dos juegos con dados respecto a la mejor oportunidad para ganar, y argumentar tal decisión. El análisis se fundamentó en un marco conceptual que permitió establecer las relaciones entre el pensamiento probabilístico y el pensamiento proporcional, y

 CC BY-NC

se enfocó en los argumentos que podían o no incluir procedimientos calculatorios de probabilidad. Para el análisis se elaboraron categorías orientadas por la conceptualización del pensamiento proporcional de Reyes-Gasperni y Cantoral (2016), y las características del pensamiento probabilístico de Borovcnik (2011). Los casos fueron clasificados de acuerdo a la presencia de tres tipos de pensamiento probabilístico y tres estados del pensamiento proporcional, las que se manifestaron al argumentar la decisión por uno de los juegos. En particular, se profundizó en algunos casos para evidenciar el análisis de los datos, organizándolos según la presencia explícita e implícita del espacio muestral. De este modo, por una parte, fue posible determinar cómo los procesos de toma de decisiones pueden contribuir al uso natural de la noción de probabilidad para evaluar una decisión; y, por otra parte, se profundizó en el rol del pensamiento proporcional en la comparación de probabilidades. En aquellos casos en los que no se realizaron comparaciones, cualitativas o cuantitativas, la decisión perdió consistencia y claridad.

Los hallazgos demostraron que los procesos de toma de decisiones en escenarios de incertidumbre activan tanto el pensamiento proporcional como el pensamiento probabilístico siempre que se establezca algún fundamento. La relación entre estos pensamientos puede ser beneficiosa o no, según cómo se produzca la coordinación. Es beneficiosa si el sujeto compara probabilidades, elaborando proporciones desde el espacio muestral explícito de eventos elementales; y se torna desfavorable, si el sujeto considera que las probabilidades siempre son igualmente proporcionales a las posibilidades, o bien, si evalúa probabilidades como razones entre el número de eventos favorables y el número de eventos totales, sin distinguir si estos corresponden o no a eventos elementales. Así, el pensamiento proporcional cuantitativo puede coordinarse positivamente con el pensamiento probabilístico objetivista laplaciano si el espacio muestral es un conjunto de eventos elementales, pero negativamente si el espacio muestral está constituido por algún(os) evento(s) no elemental(es), pues esto último podría derivar en el sesgo de equiprobabildad. De un modo similar, el pensamiento proporcional cuantitativo se relaciona beneficiosamente con el pensamiento probabilístico objetivista empírico solo si el experimento se realiza una cantidad suficiente de veces. Además, el pensamiento proporcional cualitativo se coordina desfavorablemente con el pensamiento probabilístico basado en información subjetivista interpretativa al prescindir de un espacio muestral.

A la luz de los resultados, surge la necesidad de discutir con los estudiantes las formas en las que conciben los espacios muestrales, orientando la enseñanza de la probabilidad hacia el análisis argumentado de las diferencias entre las medidas de las razones según el espacio muestral que se tenga como referencia. La explicitación de los eventos elementales, ya sea teórica o empírica, adquiere relevancia en la articulación del pensamiento probabilístico y el pensamiento proporcional, pues favorece la comparación proporcional a partir del conteo. El pensamiento proporcional, aunque responda a un paradigma determinístico, es necesario para construir pensamiento probabilístico, pues permite medir y comparar en escenarios de incertidumbre. La comparación asociada al pensamiento proporcional debe ser llevada a un siguiente nivel, de modo que los estudiantes puedan contrastar una distribución uniforme con una distribución no uniforme, mediante la visualización simultánea, por ejemplo, numérica y gráfica del espacio muestral. De esta forma, los estudiantes podrían asociar la no uniformidad con la no equiprobabilidad, lo cual contribuiría a subsanar las dificultades persistentes en el aprendizaje de la probabilidad.

Las proyecciones de la investigación apuntan a elaborar secuencias de aprendizaje que aborden la relación entre los pensamientos probabilístico y proporcional con nuevos artefactos aleatorios y visualizaciones, en escenarios de incertidumbre auténticamente realistas; e investigar las coordinaciones más predominantes entre los dos pensamientos estudiados. Asimismo, es necesario profundizar en el sesgo de equiprobabilidad, el cuál se manifestó en la asignación indiscriminada de dar a cada posibilidad la misma probabilidad, revelándose una nueva heurística, que hemos denominado *heurística de lo proporcional*, la que emergió al evitar el cálculo de probabilidades y tomar una decisión simple con base intuitiva, conduciendo a percepciones incorrectas respecto de la probabilidad.

Agradecimientos

Se agradece el financiamiento otorgado por Beca CONICYT-PCHA / Doctorado Nacional: 2016-21160151 y 2016-21161569; Proyecto CONICYT FONDECYT N° 1200346; ANID / PIA / Fondos Basales para Centros de Excelencia FB0003; y por Proyecto VRIE-PUCV 039.439/2020

Referencias bibliográficas

Alvarado, H., Estrella, S., Retamal, L., & Galindo, M. (2018). Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *21*(2), 131-156. DOI: https://doi.org/10.12802/relime.18.2121.

 (cc) BY-NC

Anway, D., & Bennett, E. (2004, August). Common misperceptions in probability among students in an Elementary Statistics class. En B. Chance (Conference chair), *ARTIST Roundtable Conference on Assessment in Statistics held at Lawrence University* (pp. 1-4). Recuperado desde http://www.rossmanchance.com/artist/proceedings/AnwayBennett.pdf

Ashline, G., & Frantz, M. (2009). Proportional reasoning and probability. *Synergy Learning Nov / Dec,* 8-10. Recuperado desde https://web.archive.org/web/20071010023424/http://cf.synergylearning.org/displaygrade.cfm?selectedgrade=1

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H., & Sánchez, E. (2016). Research on Teaching and Learning Probability. En *Research on Teaching and Learning Probability*. ICME-13 Topical Surveys. Cham: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3_1

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En Graham A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 16-42). Boston, MA: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_2

Bellhouse, D. (2000). De Vetula: a medieval manuscript containing probability calculations. *International Statistical Review, 68*(2), 123-136. DOI: https://doi.org/10.2307/1403664

Bennett, D. (2014). Sticking to your guns: a flawed heuristic for probabilistic decision-making. En E.J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking* (pp. 261-281). Dordrecht: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_14

Borovcnik, M. (2011). Strengthening the role of probability within statistics curricula. En C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education. A joint ICMI/IASE study: the 18th ICMI study (Vol. 14)* (pp. 71-83). Dordrecht: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_11

Bryant, P., & Nunes, T. (2012). *Children's Understanding of Probability: A Literature Review (summary Report)*. London: Nuffield Foundation.

Chernoff, E. J., & Zazkis, R. (2011). From personal to conventional probabilities: from sample set to sample space. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(1), 15-33. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-010-9288-8

Chiesi, F., & Primi, C. (2010). Cognitive and non-cognitive factors related to students' statistics achievement. *Statistics Education Research Journal*, *9*(1), 6–26. Recuperado desde http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ9%281%29_Chiesi_Primi.pdf

Chiesi, F., & Primi, C. (2014). The interplay among knowledge, cognitive abilities and thinking styles in probabilistic reasoning: a test of a model. En E.J. Chernoff & B. Sriraman, B. (Eds.), *Probabilistic thinking* (pp. 195-214). Dordrecht : Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_11

D'Alembert, J. (1784). Croix ou Pile. Dans *Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonne des Sciences, des Arts et des Metiers*, Vol. 4, pp. 512-513. Paris: Societe des Gens de Lettres. Recuperado desde https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k505351/f1.item.r=alembert

Díaz, C., & Batanero, C. (2009). University student's knowledge and biases in conditional probability reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 4*(3), 131-162. Recuperado desde http://www.iejme.com/article/university-students-knowledge-and-biases-in-conditional-probability-reasoning

Engel, J., & Orthwein, A. (2018). The Six Loses: Risky Decisions Between Probabilistic Reasoning and Gut Feeling. En C., Batanero & E., Chernoff (Eds.), Teaching and Learning Stochastics, *Advances in Probability Education Research, ICME-13 Monograph* (pp. 261-274). Cham: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_15

Eriksson, K., & Simpson, B. (2010). Emotional reactions to losing explain gender differences in entering a risky lottery. *Judgment and Decision Making, 5*(3), 159. Recuperado desde http://journal.sjdm.org/10/10601/jdm10601.html

(cc) BY-NC

Fielding-Wells, J. (2014). Where's your evidence? Challenging young students' equiprobability bias through argumentation. En T. Dunne (Conference chair), *The 9th International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1-6). Recuperado desde https://iase-web.org/icots/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_2B2_FIELDINGWELLS.pdf

Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 1-24. DOI: https://doi.org/10.1007/bf00380436

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel Publishing. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-010-1858-6

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En Graham A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Boston, MA: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3

Gandhi, H. (2018). Understanding Children's Meanings of Randomness in Relation to Random Generators. En C., Batanero & E., Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics, Advances in Probability Education Research, ICME-13 Monograph* (pp. 181-200). Cham: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_11

Garfield, J., & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(1), 44–63. DOI: https://doi.org/10.2307/749110

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International Statistical Review*, *75*(3), 372-396. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2007.00029.x

Gauvrit, N., & Morsanyi, K. (2014). The equiprobability bias from a mathematical and psychological perspective. *Advances in cognitive psychology, 10*(4), 119-130. Recuperado desde https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4310748/

Gigerenzer, G. (2011). *Decisiones Instintivas: la inteligencia del inconsciente*. Barcelona: Editorial Ariel.

Hoffrage, U., Krauss, S., Martignon, L., & Gigerenzer, G. (2015). Natural frequencies improve Bayesian reasoning in simple and complex inference tasks. *Frontiers in psych*ology, 6, 1473. DOI: https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.01473

Jones, G., Langrall, C., Thornton, C., & Mogill, A. (1999). Students' probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(5), 487–519. DOI: https://doi.org/10.2307/749771

Kahneman, D. (2012). *Pensar rápido, pensar despacio*. Barcelona: Penguin Random House.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1982). The psychology of preferences. *Scientific American, 246*(1), 160-173. DOI: http://dx.doi.org/10.1038/scientificamerican0182-160

Kruger, J., Wirtz, D., & Miller, D. (2005). Counterfactual thinking and the first instinct fallacy. *Journal of personality and social psychology, 88*(5), 725-735. DOI: https://doi.org/10.1037/e413812005-243

Laplace, P. (1814). *Essai philosophique sur les probabilités.* Paris: Mme Ve Courcier. Recuperado desde de https://www.e-rara.ch/zut/doi/10.3931/e-rara-3684.

Lecoutre, M., Durand, J., & Cordier, J. (1990). A study of two biases in probabilistic judgments: Representativeness and equiprobability. En J. P. Caverni, J. M. Fabre & M. González (Eds.), Advances *in Psychology: Cognitive Biases* (pp. 563-575). Amsterdam: Elsevier. DOI: https://doi.org/10.1016/s0166-4115(08)61343-6

Martignon, L. (2014). Fostering children's probabilistic reasoning and first elements of risk evaluation. En E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking* (pp. 149-160). Dordrecht: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_9

Ministerio de Educación de Chile (2014). Comprender la categoría de desempeño. En Autor (Ed.), *Guía para comprender la categoría de desempeño y orientar las rutas de mejora* (pp. 13-26). Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/guia_para_comprender_categoria_de_desempeno.pdf

 CC BY-NC

Ministerio de Educación de Chile (2015). Matemática. En Autor (Ed.), *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio* (pp. 93-106). Recuperado de http://www.curriculumnacional.cl/614/articles-37136_bases.pdf

Morsanyi, K., Primi, C., Chiesi, F., & Handley, S. (2009). The effects and side-effects of statistics education: Psychology students'(mis-) conceptions of probability. *Contemporary Educational Psychology, 34*(3), 210-220. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2009.05.001

Nikiforidou, Z. (2019). Probabilities and Preschoolers: Do Tangible Versus Virtual Manipulatives, Sample Space, and Repetition Matter?. *Early Childhood Education Journal*, *47*(6), 769-777. DOI: https://doi.org/10.1007/s10643-019-00964-2

OECD (2016). *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education*. Paris: OECD Publishing. DOI: https://doi.org/10.1787/9789264266490-en

Pratt, D., & Kazak, S. (2018). Research on Uncertainty. En Ben-Zvi, D., Makar, K., & Garfield, J. (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 193-227), Cham: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_6

Reyes-Gasperini, D., & Cantoral, R. (2016). Empoderamiento docente: la práctica docente más allá de la didáctica… ¿qué papel juega el saber en una transformación educativa? *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación, 2(11), 155-176*. Recuperado de http://www.revistacseducacion.unr.edu.ar/ojs/index.php/educacion/article/viewFile/265/248

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. México: Gedisa.

Sedlmeier, P. (1999). *Improving statistical reasoning: Theoretical models and practical implications*. New York: Psychology Press. DOI: https://doi.org/10.4324/9781410601247

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Van Dooren, W. (2014). Probabilistic thinking: analyses from a psychological perspective. En E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking* (pp. 123-126). Springer, Dordrecht. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_7

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Orlando, FL: Academic Press.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. En T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 5-28). Hove, England: Psychology Press.

Watson, J., & Shaughnessy, M. (2004). Proportional Reasoning: Lessons from Research in Data and Chance. *Mathematics Teaching in the Middle School, 10*(2), 104-109. Recuperado desde https://www.researchgate.net/publication/234667935_Proportional_Reasoning_Lessons_from_Research_in_Data_and_Chance

Zhu, L., & Gigerenzer, G. (2006). Children can solve Bayesian problems: The role of representation in mental computation. *Cognition, 98*(3), 287-308. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cognition.2004.12.003

Autores

Andrea Vergara. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. andrea.vergara@pucv.cl

Soledad Estrella. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. soledad.estrella@pucv.cl

Pedro Vidal-Szabó. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. pedro.vidal@pucv.cl