GERMÁN TORREGROSA y HUMBERTO QUESADA

COORDINACIÓN DE PROCESOS COGNITIVOS EN GEOMETRÍA

COORDINATION OF GONITIVE PROCESSES IN GEOMETRY

RESUMEN. Este estudio tiene como objetivo caracterizar procesos cognitivos que intervienen en la resolución de problemas de geometría y generar un modelo teórico que ayude a interpretar las interacciones de dichos procesos. Particularmente se centra en la caracterización de la coordinación de los procesos de visualización y los procesos de razonamiento que han sido propuestos por Duval (1998). El modelo teórico que se propone es resultado del análisis de las respuestas producidas por estudiantes para profesores a una colección de problemas de geometría.

PALABRAS CLAVE: Visualización, razonamiento, formación de profesores.

ABSTRACT. This study has as its objective to characterize the cognitive processes which intervene in the solution of geometrical problems and generate a theoretical model which helps to interpret the interactions of said processes. It centers particularly on the characterization of the coordination of visualization and reasoning processes proposed by Duval (1998). The theoretical model which is proposed results from the analysis of the answers given by students teachers to a collection of geometrical problems.

KEY WORDS: Visualization, reasoning, teacher development.

RESUMO**.** Este estudo tem como objetivo caracterizar processos cognitivos que intervém na resolução de problemas de Geometria e gerar um modelo teórico que ajude a interpretar as interações destes processos. Particularmente se centra na caracterização da coordenação dos processos de visualização e dos processos do raciocínio que foram propostos por Duval (1998). O modelo teórico que se propõe é resultado da análise das respostas produzidas por estudantes para professores primários a uma coleção de problemas de geometria.

PALAVRAS CHAVE: Visualização, raciocínio, formação de professores.

RÉSUMÉ. Cette étude a pour objectif de caractériser les processus cognitifs qui interviennent dans la résolution des problèmes de géométrie ainsi que de générer un modèle théorique pour interpréter leurs interactions. Ce modèle est particulièrement centré dans la caractérisation de la coordination des processus de visualisation et des processus de raisonnement proposée par Duval (1998). Celui ci est le résultat de l'analyse des réponses données par des futurs enseignants à un ensemble de problèmes de géométrie.

MOTS CLÉS : Visualisation, raisonnement, formation de enseignants

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2007) 10(2): 275-300
Recepción: Noviembre 28, 2006/Aceptación: Mayo 28, 2007

1. INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años, en el campo de la Didáctica de las Matemáticas han aparecido teorías cognitivas cuyos conceptos básicos no tienen el mismo significado, a pesar de que utilizan terminología parecida; esto sucede con nociones como *visualización*, *capacidad espacial*, *razonamiento geométrico*, *pensamiento espacial* o *visión espacial*. Este artículo pretende definir algunos conceptos empleados para caracterizar los procesos cognitivos que intervienen y se desarrollan cuando se resuelven problemas de geometría, tomando como base fundamental al modelo teórico propuesto por Duval (1998).

Así, nuestra investigación está ligada al análisis y estudio de lo que genéricamente podríamos llamar *capacidades geométricas*; particularmente, a los procesos cognitivos que evidencia el alumno al resolver un problema de geometría. El conocimiento de dichos procesos y sus relaciones va a servir para diagnosticar al estudiante y dirigir el desarrollo de las nociones y conceptos geométricos asociados; de igual manera, entender su desarrollo, evolución, tratamiento e integración en el currículo escolar puede ayudarnos a conocer el mapa cognitivo de los alumnos, facilitando el aprendizaje. Según Gutiérrez, "la principal dificultad está en la necesidad que tenemos de conocer lo que pasa por la cabeza de los estudiantes cuando están envueltos en una actividad matemática, cuáles son sus procesos de razonamiento, cómo analizan y transforman la información que les llega del exterior, cuándo y cómo toman decisiones, etc. Todo ello para tratar de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje" (2005, p. 28).

Por tal motivo, saber la caracterización de estos procesos es fundamental para el profesorado, que debe constantemente interpretar las producciones de los estudiantes y ofertar algunas pautas de actuación en aras de mejorar sus capacidades geométricas. Si somos capaces de aproximarnos a una interpretación sobre los procesos de resolución de los problemas geométricos, podemos intervenir mucho más eficazmente en el aprendizaje geométrico de los alumnos, y por ende en el matemático, pues contaremos con una mayor comprensión de sus respuestas, lo cual nos ayudará a establecer métodos de enseñanza ajustados a sus necesidades.

El caso de la geometría ha sido estudiado por varios autores. Una diversidad de modelos teóricos han servido para avanzar en esta línea de investigación, basada en el estudio de los procesos cognitivos que intervienen en el desarrollo de las capacidades geométricas; por ejemplo, los de Krutetskii (1976), donde se identifican distintas habilidades en la resolución de problemas. De manera general, los modelos de Fishbein, Presmeg y Dörfler se han centrado en dar una clasificación sobre las distintas imágenes mentales, atribuyéndoles ciertas acciones cognitivas; en concreto, Presmeg (1986a, 1986b) muestra una clasificación de imágenes mentales y un modelo *visual* y *analítico* en ejes ortogonales, mientras que Fishbein (1993) presenta la teoría de los conceptos figurales. Bishop (1983, 1989) distingue dos acciones cognitivas que han servido a otros autores para organizar un modelo integrador de imágenes mentales, representaciones externas, procesos y habilidades (Gutiérrez, 1996), en tanto que Zazkis et al. (1996) exponen el modelo analizador/visualizador. En este trabajo, a partir de la teoría cognitiva de Duval, proponemos un modelo para caracterizar las interacciones entre los procesos de visualización y razonamiento que intervienen en la resolución de problemas de geometría.

La definición y caracterización de los procesos de visualización y razonamiento es un avance en esta línea de conocimiento, ya que separa la acción cognitiva (proceso) de las distintas representaciones e imágenes mentales. En particular, consideramos que la caracterización de los procesos de visualización y razonamiento, al igual que el estudio de su coordinación como puerta de entrada hacia el razonamiento deductivo, resulta de gran importancia para resolver los problemas geométricos (Duval, 1998). Como consecuencia, la visualización no queda relegada a un simple papel ilustrativo de las afirmaciones geométricas. Según Arcavi (1999), la visualización no está solamente relacionada con la ilustración, sino también es reconocida como una componente clave del razonamiento (profundamente unida a lo conceptual y no meramente a lo perceptivo), a la resolución de problemas e incluso a la prueba. Por ello vemos a los procesos de visualización y de razonamiento, junto con su coordinación, como elementos esenciales de un modelo conceptual que nos permite conocer la actividad de los alumnos; en la línea abierta por Bishop (1983), para conocer en la medida de lo posible el interfaz de la actividad matemática cuando se enfrentan a la resolución de problemas en geometría.

En este trabajo hemos adoptado la orientación de la investigación de Duval (1993, 1995, 1998, 1999a), la cual atiende a los procesos que intervienen en el aprendizaje de la geometría, manifestando su desacuerdo con la jerarquización de los procesos cognitivos (1998). Las hipótesis de las que partimos, surgidas por adaptaciones al marco de análisis propuesto por Duval (1998) cuando habla del problema básico de la enseñanza de la geometría, son:

- La actividad geométrica involucra tres clases de procesos cognitivos: la visualización, el razonamiento y la construcción.
- Las tres clases de procesos deben ser desarrollados separadamente.

- Es necesario realizar durante el currículo escolar un trabajo que reconozca los diferentes procesos de visualización y de razonamiento, pues no sólo hay varias formas de ver una figura, sino también de razonamiento.
- La coordinación entre visualización y razonamiento sólo puede ocurrir realmente tras este trabajo de diferenciación.

La diferencia entre dibujo y figura ha sido considerada en distintas caracterizaciones del proceso de visualización (Bishop, 1983; Fischbein, 1987; Hershkowitz, 1990, Hershkowitz et al., 1996, Alsina et al., 1997). Cuando estudiamos los procesos cognitivos involucrados en el estudio de la geometría debemos tener en cuenta la diferencia entre los conceptos de dibujo y figura, puesto que hay que distinguir el contenido de una representación y lo que representa (Duval, 1995). Si se habla de *figura*, entendemos la imagen mental de un objeto físico; el *dibujo* es la representación gráfica de una figura en sentido amplio, ya sea sobre un papel, el ordenador o un modelo físico. Sin embargo, en este artículo hemos numerado tradicionalmente las ilustraciones, como *Figura n*.

2. VISUALIZACIÓN

Zazkis et al. (1996) describen a la visualización como “el acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos” (p. 441). Un ejemplo lo ofrece Plasencia (2000): Imaginemos un paseo por la playa. Este paseo puede ser realizado o no, es decir, podemos construirlo mentalmente o recordar un paseo realizado. Imaginando el paseo, podemos:

- Sentir la arena en nuestros pies, el frescor del aire en la cara (sentido del tacto).
- Oír el sonido del mar (sentido auditivo).
- Oler una violeta (sentido del olfato).
- Ver la playa, las montañas, el paisaje (sentido visual).
- Saborear el pescado de un determinado bar (sentido del gusto).
- O el sabor y el olor de la imagen visual de una comida sabrosa (combinación de las anteriores).

Desde este punto de vista, la definición que plantean Zazkis et al. (1996) es más general que la utilizada por nosotros en este artículo, ya que puede considerarse como visualización a la conexión sugerida por un olor (de una tarta de chocolate recién hecha) o por un sonido (el avión al sobrevolarnos).

Por otra parte, Hershkowitz et al. (1996) indican: "entendemos por visualización la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa. Esto incluye también la transferencia de un tipo de representación visual a otra" (p. 163). En este sentido, se denomina visualización en el estudio de la geometría *al proceso o acción de transferencia de un dibujo a una imagen mental o viceversa*.

El significado que atribuimos a la visualización en este estudio se refiere a la transferencia que ocurre entre dibujo y figura, en la línea de Hershkowitz et al. (1996). Asimismo, debemos resaltar que si visualizamos un dibujo podemos obtener un objeto mental que no tiene por qué ser el mismo para todos los observadores, ya que el dibujo está unido a unas afirmaciones matemáticas (definiciones, propiedades o relaciones) que la figura no posee, sino le son atribuidas por el observador.

Así, una figura (imagen mental de un objeto físico) se puede representar mediante una configuración geométrica –dibujo– y se compone de otras figuras mostradas por subconfiguraciones geométricas más simples, de dimensión geométrica menor o igual que la original, las cuales también están vinculadas a afirmaciones matemáticas.

2.1. *Aprehensión*

Para llevar a cabo nuestro estudio sobre el papel del proceso de visualización en la resolución de problemas de geometría, es conveniente restringir el significado de *visualización*, distinguiendo las acepciones vinculadas a las características de la acción hecha por el sujeto sobre una configuración. De ahí que introduzcamos el término *aprehensión*, cuya definición, según el *Diccionario de la Real Academia Española* (2001), es "concebir las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin afirmar ni negar", mientras que la *aprehensión simple* se describe como "la que capta las formas de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin afirmar ni negar". De este modo tratamos de hacer operativa, para su estudio, la acción de *transferencia* de la descripción de visualización formulada por Hershkowitz et al. (1996), ya que al introducir características de dicha transferencia obtenemos formas de aprehender (de ver la figura matemáticamente). En palabras de Duval (1998):

> Lo que un dibujo nos deja ver es una o varias figuras 1D/2D (de dimensión 1 representada en 2 dimensiones) o 2D/2D (líneas rectas o curvas, la frontera cerrada de un triángulo, de un cuadrilátero, etc.) o bien figuras 3D/2D (cubos, esferas, etc.). La identificación visual de estas figuras se basa en leyes de organización perceptiva, y estas figuras se pueden usar para representar objetos reales u objetos matemáticos. (p. 39)

Por ejemplo, si vemos los siguientes dibujos:

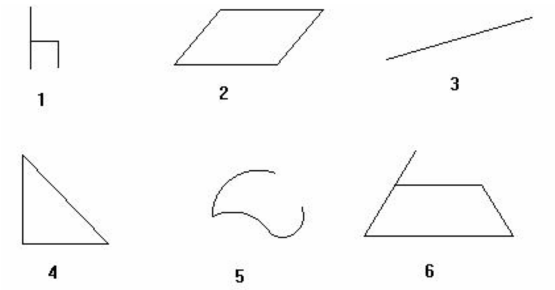


Figura 1

Podrían ser identificados, en virtud de las leyes de organización perceptiva, como silla (1), mesa (2), segmento (3), triángulo (4), línea curva (5) y dibujo de cuatro segmentos (6). Todos, salvo el número 5, están constituidos por líneas rectas, que pueden representar figuras 1D/2D; el 1 y el 2 se pueden ver como figuras 3D/2D, y el 4 puede representar una figura 2D/2D; el 5 sería como la representación de una figura 1D/2D y está formada por una línea curva. El 6 puede *verse* como una figura 2D/2D (trapecio) unida con una figura 1D/2D (segmento que prolonga un lado), pero también puede verse como una configuración (unión de cuatro segmentos de una manera imprecisa).

También es claro que los dibujos 1, 2 y 4 pueden representar a figuras hechas por configuraciones que guardan alguna relación que las caracteriza como silla, mesa y triángulo, respectivamente. Por último, la configuración (dibujo) número 4 puede vincularse a una afirmación (la definición de triángulo), que fija algunas propiedades de la figura representada (triángulo), y esto da paso a la entrada de las matemáticas en la figura.

De acuerdo con el modelo de Duval (1998), se pueden distinguir tres tipos de aprehensión, que caracterizamos de la siguiente manera:

2.2. *Aprehensión perceptiva*

La aprehensión perceptiva se caracteriza como la identificación simple de una configuración. Es la primera en ser usada a lo largo de toda la etapa educativa y también la primera que aparece en el desarrollo cognitivo del alumno.

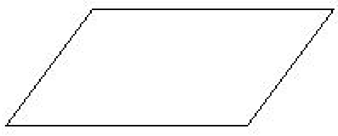


Figura 2

Por ejemplo, la Figura 2 puede ser vista como el tejado de una casa, la parte superior de una mesa, cuatro rayas dibujadas en el papel o la representación (dibujo) de una figura geométrica (objeto mental). Cada una de estas respuestas puede ser entendida como el resultado de una aprehensión perceptiva, al ser el proceso más intuitivo.

2.3. *Aprehensión discursiva*

Llamamos aprehensión discursiva a la acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas). Tal vínculo puede realizarse de dos maneras, según las direcciones de la transferencia realizada, a la que se le denomina *cambio de anclaje*:

a) *Del anclaje visual al anclaje discursivo*

Esto sucede por ejemplo, cuando al dibujo de la Figura 3 se le asocia la afirmación: “*ABC* es un triángulo rectángulo”, señalando sus vértices con las letras *A*, *B* y *C*. Para efectuar esta asociación con sentido, el observador debe haber identificado en el dibujo lo que caracteriza a un triángulo rectángulo; es decir, relacionar las características de una de las definiciones relativas al triángulo y al triángulo rectángulo.

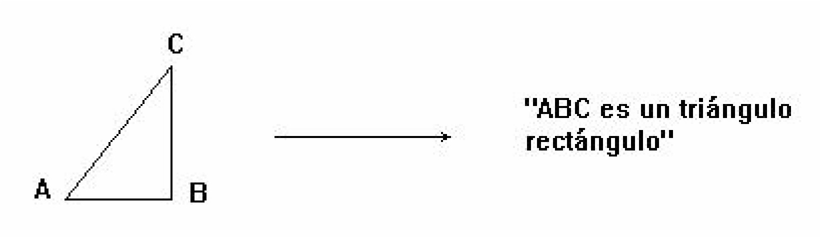


Figura 3

b) *Del anclaje discursivo al anclaje visual*

Por ejemplo, ante la afirmación "*ABC* es un triángulo rectángulo", el estudiante tiene la capacidad para realizar el dibujo de un polígono que cumpla las características de ser triángulo y rectángulo. Esta configuración no tiene por qué ser la misma para todos los alumnos, al igual que las afirmaciones matemáticas asociadas a las distintas configuraciones no han de coincidir necesariamente (como se da en el caso de la equivalencia de caracterizaciones-definiciones).

Figura 4

Veamos el siguiente ejemplo: *Un albañil apoya una escalera de 5 metros contra un muro vertical. El pie de la escalera está a 2 metros del muro. Calcula la altura a la que se encuentra la parte superior de la escalera* (Figura 5).

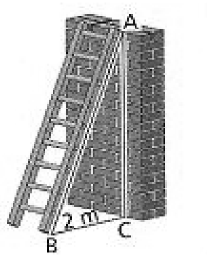


Figura 5

El cambio del enunciado del problema (texto) al dibujo de la escalera apoyada en el muro no implica la asociación con ninguna afirmación matemática. Sin embargo, identificar dicha situación con un triángulo rectángulo y asociar el Teorema de Pitágoras con la configuración es lo que llamamos *aprehensión discursiva*. En este caso, el sentido de la transferencia va de un anclaje visual a uno discursivo.

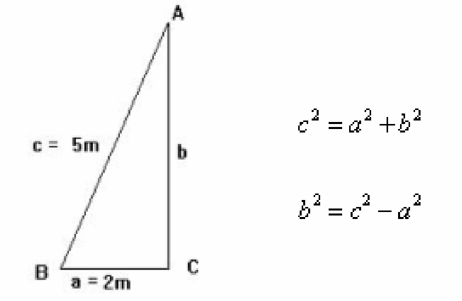


Figura 6

2.4. *Aprehensión operativa*

La aprehensión operativa se produce cuando el sujeto lleva a cabo alguna modificación a la configuración inicial para resolver un problema geométrico. Este cambio puede ser de dos tipos:

2.4.1 *Aprehensión operativa de cambio figural*

Cuando a la configuración inicial se le añaden (quitan) nuevos elementos geométricos (nuevas subconfiguraciones).

Ejemplo: En el dibujo de la Figura 7, $\overline{AD} \equiv \overline{EB}$ y $\overline{AB} \equiv \overline{ED}$, probar que $\hat{B} \equiv \hat{D}$.

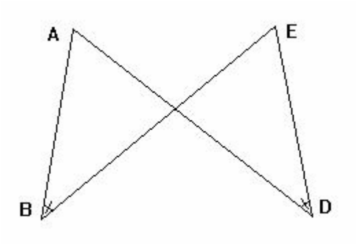


Figura 7

Una posible solución consiste en introducir un nuevo elemento geométrico en la configuración inicial: el segmento $\overline{AE}$ (Figura 8):

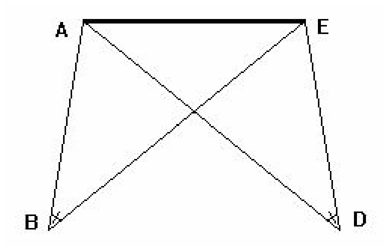


Figura 8

Al introducir el segmento $\overline{AE}$ es posible razonar utilizando el criterio de congruencia de triángulos *LLL* (sean $\overset{\Delta}{ABE}$ y $\overset{\Delta}{EDA}$ dos triángulos que tienen los lados correspondientes congruentes; entonces, $\overset{\Delta}{ABE} \equiv \overset{\Delta}{EDA}$), y deducir la congruencia de ángulos.

Al proceso de introducir un segmento, en este caso en la configuración inicial, lo llamamos *aprehensión operativa de cambio figural*.

2.4.2 *Aprehensión operativa de reconfiguración*

Cuando las subconfiguraciones iniciales se manipulan como las piezas de un puzzle.

La Figura 9 ilustra una prueba del Teorema de Pitágoras, realizada por Bhaskara en el siglo XII: *en un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa* ($a^2 + b^2 = c^2$). Aquí, se ponen de manifiesto la aprehensión operativa de cambio figural y la aprehensión operativa de reconfiguración.

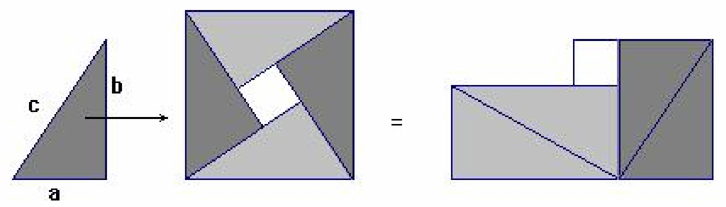


Figura 9. Tomada de Nelsen, R. (1993). *Proofs without words: Exercises invisual thinking*. Washington, USA: The Mathematical Association of America, p. 4.

En las modificaciones hechas, el triángulo rectángulo inicial se incluye en una configuración más amplia, un cuadrado de lado *c*, con lo que hay una *aprehensión operativa de cambio figural.* Una vez identificadas las subconfiguraciones formadas por los triángulos, sus lados y el cuadrado situado entre ellos, podemos cambiar la configuración moviéndolos como piezas de un puzzle para obtener otra figura, que da pie a la *aprehensión operativa de reconfiguración*. Dicha acción está precedida de otras, en las que a cada subconfiguración le asociamos afirmaciones matemáticas, es decir, realizamos distintas aprehensiones discursivas con cambio de anclaje visual a discursivo. Por ejemplo, que el lado del cuadrado central mide *b-a* y que el lado del cuadrado grande mide *c*.

Si analizamos los pasos descritos en la Figura 9, podemos generar el discurso $c^2 = 2ab + (b-a)^2$, que desarrollado algebraicamente resulta:

$$c^2 = 2ab + b^2 + a^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

En esta descripción debemos resaltar el proceso de identificación de subconfiguraciones de dimensión diferente a la de la configuración inicial, lo cual se nota, por ejemplo, en los lados del cuadrado grande y del cuadrado central. Tal identificación surge como consecuencia del *cambio dimensional.*

3. INTERACCIÓN ENTRE LOS DISTINTOS TIPOS DE APREHENSIÓN

El *cambio dimensional*, al que definimos como el proceso de identificación de configuraciones de dimensión diferente a la inicial, es fundamental en el desarrollo de las capacidades geométricas. Asimismo, en el currículo la aprehensión perceptiva debe ser desarrollada en relación con el cambio dimensional, ya que este concepto debe ser observado y diferenciado por el alumno desde sus primeras etapas educativas. Además, hay que considerar que la mayor parte de la información ofrecida por los problemas de geometría es bidimensional, y el cambio dimensional se hace necesario para poder analizar la información desde una perspectiva unidimensional o tridimensional.

Pensemos en una fotografía de algún paisaje cuya percepción es, en líneas generales, tridimensional, como identificamos la realidad. Sin embargo, como dicha información se transmite en dos dimensiones (sobre el papel o la pantalla del ordenador), puede ser complicado identificar algunos elementos. Veamos la Figura 10.

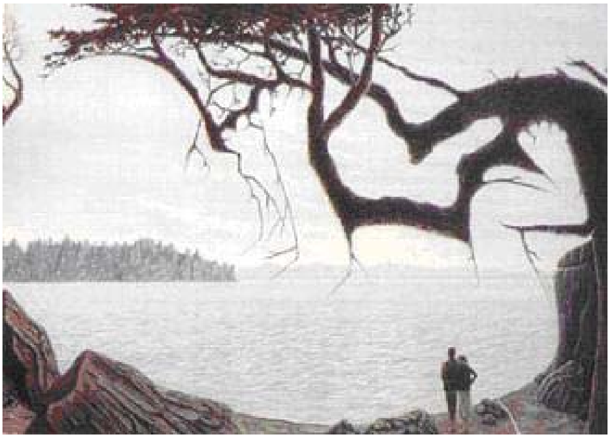


Figura 10

¿Se distingue la silueta del bebé? Reconocer esta silueta supone un esfuerzo a la hora de *ver* la Figura 10 porque estamos acostumbrados a visualizar fotografías, que tienen perspectiva bidimensional y hay que cambiar a la tridimensional para apreciar la silueta del bebé. Esto ocurre en los problemas de geometría donde suelen identificarse elementos bidimensionales porque la información es dada en papel o la pantalla del ordenador, y supone un mayor esfuerzo distinguir objetos geométricos unidimensionales o tridimensionales.

Hay tres tipos de cambios asociados a los procesos de visualización: el *cambio dimensional*, el *cambio de anclaje* y el *cambio configural*. El cambio configural, como ha quedado establecido consiste en modificar la configuración inicial, pero no debemos confundir el cambio dimensional con el cambio de anclaje. Al primero no le concierne la asociación de afirmaciones matemáticas; el segundo es propio de una aprehensión discursiva y tiene una fuerte relación con la manera de entender el dibujo (la configuración), a través de las propiedades matemáticas de la figura. El cambio dimensional puede darse en cualquier tipo de aprehensión.

En cuanto a los tipos de aprehensión, la *perceptiva* está conectada con la *discursiva* y la *operativa*. La Figura 11 muestra que la aprehensión perceptiva es la base para el desenvolvimiento de las otras. A medida que se desarrollan la aprehensión operativa y la discursiva, queda más atenuada la acción en la que subyace la aprehensión perceptiva como mero nexo entre ellas. Desde este punto de vista, la aprehensión perceptiva y el cambio dimensional se consideran básicos para el aprendizaje de la geometría.

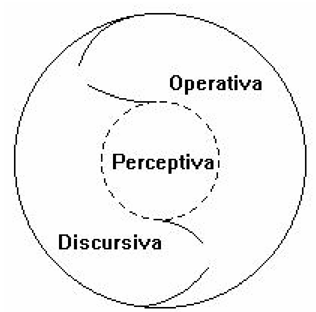


Figura 11. Importancia de la aprehensión perceptiva.

4. APREHENSIÓN Y REPRESENTACIÓN

La caracterización de las distintas aprehensiones –perceptiva, discursiva y operativa– puede facilitar, por un lado, el análisis de las respuestas a los problemas de geometría; por otro, a mostrar los cambios que manifieste el alumno. Por ejemplo, una aprehensión discursiva está caracterizada por el uso que hace el alumno de un cambio de anclaje, y una aprehensión operativa por el cambio configural (ya sea de reconfiguración o de cambio figural). Sin embargo, un cambio dimensional no define a una aprehensión perceptiva.

Destacamos que el cambio de anclaje es de gran importancia para coordinar los distintos modos de representación al solucionar problemas geométricos. Con respecto a los modos de representación se puede señalar que, debido a las características del contenido geométrico, gran cantidad de tareas vienen dadas en el modo figurativo y demandan traslaciones al modo numérico/simbólico y viceversa (Escudero, 2003). Asimismo, es necesario describir cuál es la aportación de la figura en la resolución de las tareas (Mesquita, 1989).

Creemos que es pertinente ahondar en los trabajos que estudian el problema de las representaciones semióticas y en cómo se pueden coordinar los distintos registros de representación en geometría (Duval, 1995, 1998). Si la formación de conceptos implica una coordinación de sistemas de representación, entonces es importante en el aprendizaje de las matemáticas no solo la automatización de ciertas técnicas operatorias (cálculo) sino también aprender la coordinación de los diferentes sistemas de representación (Penalva y Torregrosa 2001).

El significado dado a la palabra coordinación es “acto o efecto de concertar medios, esfuerzos, etc. para una acción común” (Real Academia Española, 2001).

En este trabajo, la coordinación atañe al efecto de concertar medios y la interacción entre distintos procesos –entendida como *concertar medios*– a fin de resolver un problema. Como consecuencia, se deriva la gran importancia de la coordinación entre los distintos procesos de visualización y los cambios de representación en la actividad matemática y, particularmente, en la resolución de problemas de geometría.

5. RAZONAMIENTO

Casi todas las investigaciones de corte psicológico están interesadas en observar los procesos de razonamiento (Gutiérrez, 1998; Presmeg, 2006). Ahora bien, debido al creciente interés en las ideas geométricas es importante aclarar los aspectos sobre la naturaleza del razonamiento [...] y cómo se desarrolla (Jones, 1998). Los procesos de razonamiento son considerados hoy día como una variedad de acciones que toman los alumnos para comunicarse y explicar a otros, tanto como a ellos mismos, lo que ven, descubren, piensan y concluyen (Hershkowitz, 1998). En este artículo entendemos por razonamiento a cualquier procedimiento que nos permita desprender nueva información de informaciones previas, ya sean aportadas por el problema o derivadas del conocimiento anterior.

Se pueden diferenciar al menos tres tipos de razonamiento en relación con los procesos discursivos desarrollados (Duval, 1998, p. 45): el *proceso configural*, que se identifica con la aprehensión operativa; el *proceso discursivo natural*, que es espontáneamente realizado en el acto de la comunicación ordinaria a través de la descripción, explicación y argumentación, y el *proceso discursivo teórico,* que se caracteriza por un desarrollo del discurso mediante la deducción y puede ser hecho en un registro estrictamente simbólico o en el del lenguaje natural.

Estos tipos de razonamiento los tomamos en cuenta para este estudio, que ha tratado de identificar sus características, infiriéndolas de los análisis sobre los registros escritos de las respuestas que elaboran los alumnos cuando se enfrentan a tareas donde se resuelven problemas de geometría. A continuación, caracterizaremos el razonamiento *proceso configural*, mostrando cómo los procesos de resolución de los estudiantes algunas veces dan evidencias de interacción –coordinación– entre las aprehensiones discursiva y operativa. Distinguiremos los casos en que dicha coordinación lleva al sujeto a resolver el problema de aquellos en que no lo logra al entrar en un *bucle* sin salida aparente. Posteriormente, describiremos los razonamientos *discursivo natural* y *discursivo teórico*.

5.1. *El razonamiento como un proceso configural: coordinación de la aprehensión discursiva y operativa*

Cuando se plantea un problema de geometría, en algunos casos el enunciado viene acompañado de un dibujo que representa la situación geométrica inicial; en otros, el estudiante tiene que representarla. En ambas situaciones, el alumno lleva a cabo una *aprehensión discursiva* para asociar una o varias afirmaciones matemáticas del enunciado, a la configuración de puntos que lo acompaña o se construye. A continuación, analiza la información y, con cierta frecuencia, le hace modificaciones a la configuración inicial; es decir, realiza una *aprehensión operativa*. Como consecuencia, se pueden necesitar nuevas asociaciones que, a su vez, pueden implicar nuevos cambios, repitiéndose el ciclo *aprehensión discursiva/aprehensión operativa* de manera coordinada, hasta que se alcanza la solución o se abandona la estrategia seguida.

Entendemos el proceso configural como el desarrollo de la acción coordinada *aprehensión discursiva/aprehensión operativa* que efectúa el estudiante, cuando resuelve un problema de geometría, lo cual genera una interacción entre la configuración inicial y sus posibles modificaciones con las afirmaciones matemáticas adecuadas. Para representar gráficamente tal interacción, usamos el gráfico de la Figura 12.

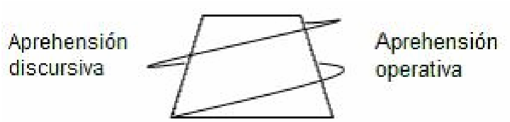


Figura 12. Coordinación de la aprehensión discursiva y operativa en la resolución de problemas de geometría.

La coordinación entre la aprehensión operativa y la discursiva (*proceso configural*) puede desembocar en dos situaciones:

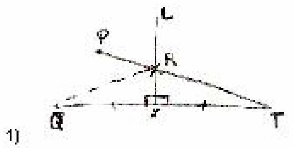
1. La coordinación da una solución al problema. Aquí distinguimos dos clases de procesos:
   - Truncamiento: Cuando la coordinación proporciona la "idea" para resolver deductivamente el problema. Es decir, el proceso configural permite conjeturar afirmaciones que se prueban a través de la deducción.
   - Conjetura sin demostración: El proceso configural permite resolver el problema aceptando las conjeturas mediante percepción simple.

2. La coordinación no consigue ninguna solución. En este caso, denominamos al proceso *bucle*:
   - Un bucle es el proceso configural en el que se ha llegado a una situación de bloqueo que no permite el avance hacia la solución y, por tanto, hay un estancamiento del razonamiento producido.

Ejemplo de truncamiento

La Figura 13 incluye la trascripción de un fragmento de la respuesta de un estudiante para maestro al siguiente problema de geometría, donde se identifica la característica específica del *truncamiento*:

Problema 1. En un plano, la recta *L* es mediatriz de $\overline{QT}$. Sea *P* un punto del mismo semiplano, de recta borde *L*, que *Q*. La recta *PT* corta a L en el punto *R*. Probar que $m\overline{PT} = m\overline{PR} + m\overline{RQ}$.

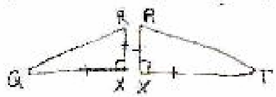


1)

2) La mediatriz L es perpendicular a QT (forma ángulos rectos)

3) Hay que demostrar que la distancia RQ es la misma que la de RT .

4) Determino los triángulos $Q\overset{\triangle}{R}X$ y $T\overset{\triangle}{R}X$ y tengo:



5) congruencia LAL

6) Lado RX ?XR (lado común)

7) ángulo $R\hat{X}Q$?$R\hat{X}T$ (La mediatriz es perpendicular y forma ángulos rectos: $R\hat{X}Q$ =90º $R\hat{X}T$ =90º)

8) Lado QX ?TX (la mediatriz divide al segmento en partes iguales, es perpendicular y pasa por el punto medio).

9) La distancia de RQ ?RT

Figura 13. Fragmento de la trascripción de una solución.

Observamos que en el punto 1) hay un cambio de representación del texto discursivo hacia una configuración inicial (aprehensión discursiva que indica un cambio de anclaje discursivo a visual). El texto en el punto 2) denota otra aprehensión discursiva, ya que el estudiante asocia la definición de mediatriz a la configuración y añade las marcas de ángulo recto; modifica la configuración inicial. En el punto 3) identifica la igualdad a demostrar (aprehensión discursiva que proporciona la "idea" que lleva a la solución), mientras que en el punto 4) extrae de la configuración inicial los dos triángulos $\overset{\Delta}{QRX}$ y $\overset{\Delta}{TRX}$ (aprehensión operativa de reconfiguración). Conjetura que puede aplicarse la congruencia LAL en el punto5), lo cual aparentemente es una aprehensión discursiva; en los puntos 6), 7) y 8) verifica las hipótesis de esta congruencia, obteniendo la tesis de la afirmación en el punto 9), con lo que realiza un discurso teórico.

Parece claro que el alumno hizo en varias ocasiones el ciclo *aprehensión discursiva/aprehensión operativa* hasta que encontró la "idea" que resolvía el problema. Una vez obtenida esta idea el proceso configural se trunca; no es necesario seguirlo porque se tienen las nociones que permiten desarrollar el proceso deductivo.

En principio, no consideramos el orden de actuación de las aprehensiones. Es decir, ¿piensa el alumno que los dos triángulos, que surgieron por la modificación a la configuración inicial –*aprehensión operativa*–, son consecuencia de haber asociado la situación geométrica con el criterio LAL (*aprehensión discursiva*), o el cambio de la configuración inicial lleva a la asociación? Lo que distinguimos como importante, en relación con el proceso de razonamiento, es la acción de desarrollar la coordinación entre ambos tipos de aprehensión mediante el ciclo *aprehensión discursiva/aprehensión operativa*. Por otra parte, no es posible asegurar el orden seguido por el estudiante con base en el análisis de sus respuestas escritas.

Ejemplo de conjetura sin demostración

Problema 2. Sea el cuadrado *ACDF*, que tiene de área 1 m^2. *B* y *E* son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{FD}$, respectivamente. Calcula el área del paralelogramo *BCEF*.

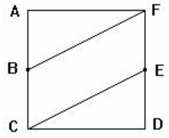


Figura 14

Solución:

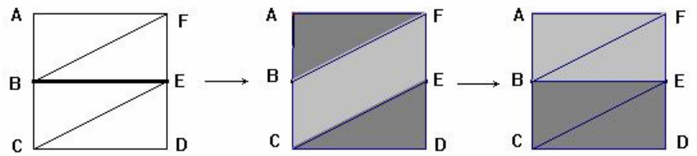


Figura 15

Este problema puede resolverse de manera perceptiva a través de una *aprehensión operativa de cambio figural*. Se añade a la configuración inicial algún elemento geométrico (en este caso, el segmento $\overline{BE}$ de la configuración de la izquierda) y se manipula la configuración central como las piezas de un puzzle (*aprehensión operativa de reconfiguración*) para obtener una configuración (a la derecha), donde se note que el área del paralelogramo es la mitad del área del cuadrado. En este caso las distintas conjeturas (por ejemplo, considerar que los cuatros triángulos son semejantes) no son probadas, sino admitidas visualmente, mediante la percepción simple de la configuración.

También en este ejemplo se puede distinguir la realización del ciclo aprehensión discursiva/aprehensión operativa, si bien en este caso las asociaciones realizadas (por ejemplo, las dos mitades ABEF y BCDE tienen áreas iguales) no sean estrictamente con afirmaciones matemáticas. Igualmente aquí la "idea" que resuelve el problema es aceptar por simple percepción la igualdad de las áreas de ABEF y BCDE.

Ejemplo de bucle

Para ilustrar el concepto de *bucle*, en la Figura 16 transcribimos la solución dada por otro estudiante para maestro al Problema 1.

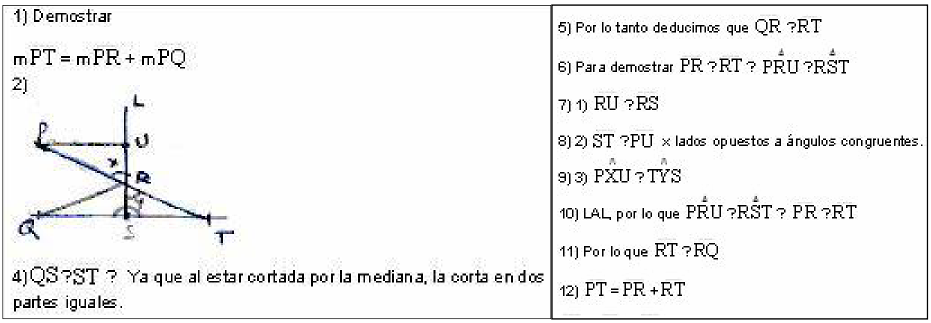


Figura 16

En el punto 1), el alumno identifica la tesis que debe demostrarse, cometiendo un error. En el punto 2) construye la representación de la situación geométrica planteada en el enunciado; aquí, en la configuración inicial introduce algunos elementos geométricos "nuevos", como los segmentos $\overline{QR}$ y $\overline{PU}$, además de los ángulos $\hat{X}$, $\hat{Y}$, con lo que efectúa una aprehensión operativa de cambio figural. En el punto 4) usa la definición de mediatriz, aunque la nombra *mediana*; con ello realiza una aprehensión discursiva para deducir impropiamente en el punto 5) que $\overline{QR} \equiv \overline{RT}$.

En los puntos anteriores, dejando aparte las inexactitudes o errores, observamos una coordinación entre la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa (lo cual hemos llamado *proceso configural*). Asimismo, en el punto 6) se conjetura que para demostrar $\overline{PR} \equiv \overline{RT}$ hay que realizar $\overset{\Delta}{PRU} \equiv \overset{\Delta}{RST}$ (congruencia LAL). Sin embargo, dicha congruencia no tiene interés para la resolución del problema, ya que puede ser cierta en este caso particular por la forma que ha tomado la configuración, pero no en el caso general que demanda el problema. Lógicamente, la verificación de hipótesis no es posible al ser una conjetura indemostrable, con lo que de aquí en adelante se entra en una situación de bloqueo que no permite el avance hacia la solución y, por tanto, ocurre un estancamiento del razonamiento producido.

En este caso, el alumno *maquilla* su bloqueo para dar una apariencia de solución simbólica, mas no demuestra las conjeturas realizadas ni cumple con las condiciones del *razonamiento deductivo*. La situación de *bucle*, donde el estudiante entra durante el proceso de resolución, pero sin encontrar una salida viable, podría ejemplificarse con la Figura 12, ya que el alumno se mueve en un plano paralelo a la base del cono truncado y cuando la coordinación acaba en solución, asciende en espiral por dicho cono.

5.2. *El razonamiento como un proceso discursivo natural*

El proceso discursivo natural se lleva a cabo de manera espontánea en el lenguaje natural a través de descripciones, explicaciones o argumentaciones[1]. Para poder

[1] En nuestro campo de estudio, la designación de objetos, el hecho de expresar alguna característica de la configuración –enunciar una propiedad–, de tal forma que tenga un valor epistémico (las propiedades están relacionadas con la manera en que se ha interpretado la configuración) y generar propiedades a partir de otras conocidas son, respectivamente, distintas expresiones del discurso

identificarlo es necesario distinguir las operaciones discursivas básicas, como los conectores “y”, “o”, además de los símbolos verbales abreviados (“=” significa “produce”; “-” indica “quitar de”) que puedan aparecer en la descripción, la explicación o la argumentación utilizada en la resolución de problemas de geometría.

Un proceso configural no sólo permite distinguir todas las posibles configuraciones, sino también identificar las que son relevantes en el contexto del problema. Pero esto puede no ser suficiente para resolver el problema, de ahí que sea necesario distinguir operaciones de otra naturaleza (las *discursivas básicas* y símbolos verbales abreviados).

En ocasiones podemos encontrar un proceso discursivo natural que contiene un proceso configural. Por ejemplo:

Problema 3. Comprueba que los paralelogramos de la figura tienen la misma área.

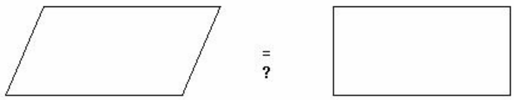


Figura 17

Posible solución:

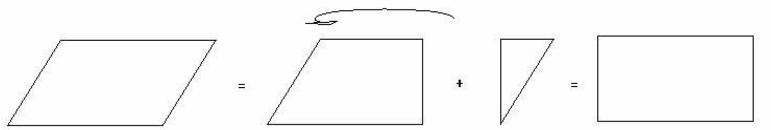


Figura 18

En la solución de la Figura 18 debemos darle sentido a los conectores (la flecha, los signos “igual” y “suma”) y describir las *manipulaciones* hechas a la configuración inicial. La superficie del paralelogramo es la misma que la suma de la superficie del trapecio rectángulo y el triángulo; por ello, dividimos la configuración inicial en dos subconfiguraciones que visualmente pueden reorganizarse para formar el rectángulo. Los conectores (signos “igual” y “suma”, así como la flecha) dan sentido a la reorganización como proceso discursivo.

natural, y hay un salto estructural entre la descripción, la explicación y la argumentación con el proceso de deducción (Duval, 1999b).

Resulta evidente que se pueden manejar otros argumentos para este problema, pero estaremos hablando del mismo tipo de razonamiento.

5.3. *El razonamiento como un proceso discursivo teórico*

El proceso discursivo teórico utiliza sólo teoremas, axiomas o definiciones para llegar a la conclusión, está estructurado deductivamente y ocurre en un registro estrictamente simbólico o en lenguaje natural. Presentamos un problema cuya solución nos permite identificar las características del proceso discursivo teórico y, al mismo tiempo, ofrece un nuevo ejemplo donde se ven las posibles relaciones que puede tener el proceso configural, como la coordinación entre la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa con el proceso discursivo teórico.

Problema 4. En la figura se tiene que *AB, BC, CD* y *DA* son tangentes a la circunferencia. Probar que *AB* + *CD* = *BC* + *DA.*

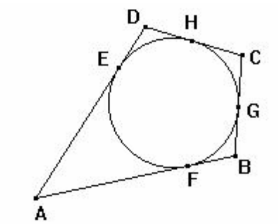


Figura 19. Tomada del libro *Geometría práctica y agrimensura* (1952). Segundo grado. Zaragoza, España: Ed. Luis Vives, p. 50.

Una forma de resolver el problema es identificar o cambiar la configuración inicial por la siguiente subconfiguración:

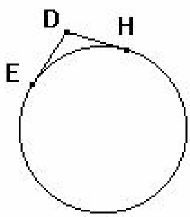


Figura 20

Una vez que se identifica la subconfiguración, la prueba se puede realizar mediante un cambio de anclaje (de visual a discursivo), asociando a la subconfiguración la siguiente proposición: *Dada una circunferencia y un punto exterior a ella, los segmentos tangentes a la circunferencia que pasan por dicho punto son congruentes*. Con ello podemos identificar 8 segmentos, iguales dos a dos: $DE = DH$, $AE = AF$, $BF = BG$, y $CG = CH$. Finalmente, al sumar adecuadamente las igualdades, llegamos a la igualdad pedida.

Tal razonamiento atañe a un proceso configural que da pie a un razonamiento teórico. El proceso configural provoca la "idea" que resuelve el problema, cuando se identifica la subconfiguración de la Figura 20 (aprehensión operativa) y se asocia la proposición enunciada (aprehensión discursiva con cambio de anclaje de visual a discursivo). Aquí se acaba el proceso configural y empieza el proceso discursivo teórico –lo que hemos llamado *truncamiento*–; ya no tenemos necesidad del dibujo más que para organizar nuestro discurso. La solución ocupa afirmaciones matemáticas, adopta una estructura deductiva y, en este caso, se expresa en lenguaje natural:

- Los segmentos AB, BC, CD y DA son tangentes a la circunferencia dada.
- Los segmentos tangentes a una circunferencia por un punto exterior a ella son congruentes.
- Luego, DE = DH, AE = AF, BF = BG, y CG = CH.
- Al sumar ordenadamente estas igualdades demostramos la igualdad pedida.

6. CONSIDERACIONES SOBRE LA COORDINACIÓN DE LOS PROCESOS DE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO

El proceso configural, entendido como la coordinación entre la aprehensión operativa y la aprehensión discursiva en la resolución de problemas de geometría, es un proceso de razonamiento derivado de la interacción entre dos procesos de visualización que el alumno genera con frecuencia para resolver y transmitir la solución de un problema.

Dicho proceso suele organizar la respuesta del alumno, es decir, puede encontrarse inmerso en un discurso natural que lo explique o dé la "idea" para organizar un proceso discursivo teórico. Esto parece indicar que constituye el punto de apoyo sólido desde el cual el estudiante puede enfrentar la resolución de problemas en muchas situaciones geométricas. Consideramos que el proceso configural, en particular su manifestación a través del truncamiento, permite explicar la conducta de los estudiantes al solucionar problemas de geometría, siendo un posible nexo entre la visualización y el razonamiento. Si aceptamos la relevancia del proceso configural, entonces podemos entender el papel importante que desempeña el desarrollo de los procesos de visualización en los estudiantes.

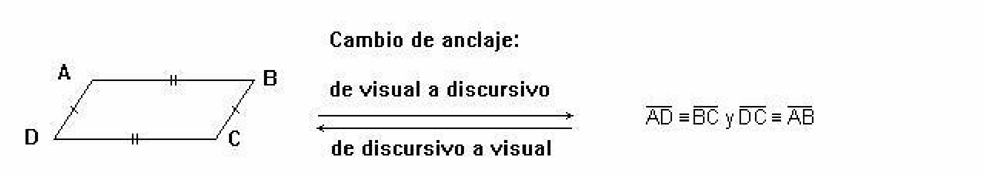


Figura 21

En este artículo presentamos un modelo para caracterizar el comportamiento durante la resolución de problemas de geometría, que se basa en los distintos procesos de visualización y de razonamiento, con el fin de exponer los elementos de una estructura general sobre los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de problemas de geometría. El modelo trata de integrar términos diferentes, adoptando significados amplios, para seguir la línea descrita en la introducción de este trabajo.

Asimismo, el modelo ofrece una aproximación de la coordinación entre los procesos visuales y de razonamiento, caracterizada mediante instantáneas o fotos fijas del proceso cognitivo que siguen teóricamente los alumnos desde que sólo hacen un uso intuitivo de la visualización hasta que son capaces de coordinar con habilidad la visualización y su razonamiento. Dentro del modelo es destacable el "momento" que representa lo que hemos llamado *razonamiento configural*, al ser una evidencia de que se ha alcanzado o al menos iniciado la coordinación que pretendemos caracterizar.

Durante el estudio realizado para esta investigación se constató que hay alumnos que logran desarrollar aceptablemente esa coordinación, lo cual parece confirmar la hipótesis de que *la coordinación se puede conseguir tras el trabajo de diferenciación de los procesos durante el desarrollo curricular*. Quizás ahora lo interesante sería averiguar las causas por las que no todos los estudiantes consiguen dar este paso. Parece obvio indicar que esta línea de investigación necesita seguir desarrollándose para confirmar o reafirmar la validez del modelo presentado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C.; Fortuna, J. M. y Pérez, R. (1997). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid, España: Síntesis.

Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME, Cuernavaca, México* (pp. 55-80). Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications-The Ohio State University.

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In Lesh & Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 125-203). New York, USA: Academic Press.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics 11* (1), 7-16.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher 37* (6), 14-20.

Dörfler, W. (1991). Meaning: image schemata and protocols. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth Annual of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp.17-32). Italy: Assisi.

Duval, R. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x, 3*. Grenoble, France: IREM.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Suisse: Peter Lang [traducción española, *Semiosis y pensamiento humano* (1999). Cali, Colombia: Universidad del Valle].

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana & V.Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999a). Representation, vision and visualisation: cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME, Cuernavaca, México* (pp. 3-26). Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications-The Ohio State University.

Duval, R. (1999b). Algunas cuestiones relativas a la argumentación. *La Lettre de la Preuve*, noviembre/diciembre 1999. Obtenido en marzo 30, 2007, de http://www.lettredelapreuve .it/index.html.

Escudero, I. (2003). La semejanza como objeto de enseñanza y aprendizaje en la relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica. Ponencia presentada en el *7o. Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Obtenido en abril 2, 2007, del sitio web personal http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/marcotex.html.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht, Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics 24* (2), 139-162.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. In L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Matematics Education* (Vol 1, pp. 3-19). Valencia, España: Universidad de Valencia.

Gutiérrez, A. (1998). *Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización.* Texto de la ponencia invitada en el *Encuentro de Investigación en Educación Matemática, TIEM98*. Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, España. Documento manuscrito, obtenido en abril 2, 2007, del sitio web personal http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut98b.pdf.

Gutiérrez, A. (2005). *Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica* [Versión Electrónica]. Obtenido en abril 2, 2007, del sitio web personal http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/marcotex.html.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In Nesher & Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 70-95). Cambridge, England: Cambridge University Press.

Hershkowitz, R.; Parzysz, B. & Van Dermolen, J. (1996). Space and shape. In Bishop & others (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Part 1, pp.161-204). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Plublishers.

Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century* (pp. 29-37). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Plublishers.

Jones, K. (1998). *Geometry working group*. Informe del encuentro en King's College, University of London, febrero 28, 1998. Obtenido en abril 2, 2007, del sitio web de la British Society for Research into Learning Mathematics: http://www.bsrlm.org.uk.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago, EE.UU: The University of Chicago Press.

VV. AA. (1952). *Geometría práctica y agrimensura. Segundo grado*. Zaragoza, España: Editorial Luis Vives.

Mesquita, A. (1989). *L' influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie: Elements pour une typologie*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strabourg, France.

Nelsen, R. (1993). *Proofs without word: Exercises in visual thinking*. Washington D.C., USA: The Mathematical Association of America.

Penalva, C. y Torregrosa, G. (2001). Representación y aprendizaje de las matemáticas. En E. Tonda y A. Mula (Eds.), *Scripta in Memoria* (pp. 649-658). Alicante, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alicante.

Plasencia, I. (2000). *Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos.* Tesis de doctorado, Universidad de la Laguna, Las Palmas de Gran Canaria, España.

Presmeg, N. C. (1986a). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics 17* (3), 297-311.

Presmeg, N. C. (1986b). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics 6* (3), 42-46.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 205-235). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Real Academia Española (2001). *Diccionario de la lengua española.* Madrid, España: Espasa Calpe.

Zazkis, R.; Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analitic strategies: a student's understanding of the group D_4. *Journal for Research in Mathematic Education 27* (4), 435-457.

Autores

Germán Torregrosa. Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Facultad de Educación. Universidad de Alicante, España; german.torregrosa@ua.es

Humberto Quesada. Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Facultad de Educación. Universidad de Alicante, España; hqv@alu.ua.es