Relime Vol. 10, Núm. 1, marzo, 2007, pp. 97-116

Currículo de matemática no ensino básico: a importância do desenvolvimento dos pensamentos de alto nível

Claudia Lisete Oliveira Groenwald[1]
Giovanni da Silva Nunes[2]

RESUMEN

Este artículo reflexiona sobre el currículum de Matemáticas, desarrollado en las escuelas de Enseñanza Media. Objetiviza un análisis crítico de la enseñanza de las Matemáticas en el desarrollo de los contenidos: conceptos y hechos, procedimientos y actitudes, permitiendo así el desarrollo en los alumnos de pensamientos de alto nivel.

• **PALABRAS CLAVE:** Educación Matemática, currículum de matemáticas, pensamiento de alto nivel.

ABSTRACT

The aim of this article is to show some thoughts about the Mathematics' Curriculum developed by the High Schools. The goal is to make a critical analysis of the Mathematics' teaching to develop some contents like: concepts and facts, procedures and attitudes; also allowing the students' development of high level thoughts.

• **KEY WORDS:** Mathematics Education, Mathematics' Curriculum, High level thought.

RESUMO

Este artigo pretende oportunizar reflexões relacionadas ao currículo de Matemática desenvolvido nas escolas de Ensino Médio. Objetiva uma análise crítica de um ensino da Matemática para o desenvolvimento dos conteúdos: conceitos e fatos, procedi-

---

Fecha de recepción: 2 agosto de 2006/ Fecha de aceptación: 9 de enero de 2007

[1] Professora do Curso de Matemática e do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil.

[2] Professor do Curso de Matemática da Universidade Luterana do Brasil.

mentos e atitudes, permitindo, assim, o desenvolvimento, nos alunos, de pensamentos de alto nível.

• **PALAVRAS CHAVE**: Matemática Educativa, Currículo de Matemática, Pensamento de alto nível.

RÉSUMÉ

Dans cet article nous faisons une réflexion sur le programme des mathématiques, développé des institutions de niveau collège. Nous avons fait objectivement une analyse critique de l'enseignement des mathématiques dans le développement des contenus : concepts et faits, processus et attitudes, en permettant de cette manière le développement, chez les élèves, d'une pensée de haut niveau.

• **MOTS CLÉS** : Didactique des mathématiques, programme des mathématiques, pensée de haut niveau.

INTRODUÇÃO

O conhecimento matemático pode ser entendido como uma forma do pensamento a ser desenvolvido nos indivíduos. Constitui-se em um sistema de expressão através do qual podemos organizar, interpretar e dar significado a certos aspectos da realidade que nos rodeia.

A sociedade complexa em que vivemos exige, cada vez mais, tomada de decisões e opções feitas responsavelmente. Por isso a Matemática, no mundo das calculadoras sofisticadas, da automação, da informatização, passa a exercer funções mais importantes do que simples técnica de efetuar operações e medidas. É necessário organizar o pensamento, estruturar dados e informações, fazer previsões para decidir, avaliar riscos quantitativamente, relacionar os conhecimentos e aplicá-los em situações novas.

Segundo D'Ambrósio (1990), a matemática se justifica, nas escolas, por ser útil como instrumentador para a vida, para o trabalho, parte integrante de nossas raízes culturais, porque ajuda a pensar com clareza e a raciocinar melhor. Também por sua universalidade, sua beleza intrínseca como construção lógica, formal, etc. Afirma, ainda, D'Ambrósio (1985), que ''a Educação Matemática tem como fundamental objetivo desenvolver estratégias intelectuais que permitam a construção de uma Matemática como corpo de conhecimentos, de técnicas e procedimentos úteis para satisfazer as necessidades sociais'' (D'Ambrosio citado en Azcárate, 1997, p. 80).

Assim, torna-se evidente a utilidade social da Matemática para fornecer instrumentos para o homem/mulher atuarem no mundo de modo mais eficaz, formando gerações constituídas de homens e mulheres preparados. Segundo D'Ambrósio (1990, p. 16) ''Isso significa desenvolver a capacidade do aluno para manejar situações reais, que se apresentam a cada momento, de maneira distinta''.

De acordo com Bertoni (1994), a Matemática se justifica para formar uma base conceitual a partir da qual outras idéias matemáticas serão organizadas, desenvolvendo o raciocínio próprio, gerando autoconfiança, espírito crítico e criativo, capacidade de selecionar e aplicar o aprendido a situações novas, atitudes e crenças positivas perante a matemática, a percepção de seu valor, o reconhecimento das relações entre a Matemática e situações da realidade.

A Matemática, as Ciências e a tecnologia são ingredientes fundamentais da cultura, que existem e se desenvolvem em um meio social historicamente determinado, segundo Cantoral et al. (2000). Para os autores essas áreas do conhecimento constituem formas de interpretar o mundo e suas relações, fornecendo meios para transformá-lo. Nesse sentido a Matemática contribui para que se forme na população um pensamento científico e tecnológico.

É evidente que a vida moderna exige, cada vez mais, o desenvolvimento de habilidades como: lógica de raciocínio; saber transferir conhecimentos de uma área para outra; saber comunicar-se e entender o que lhe é comunicado; trabalhar em equipe; interpretar a realidade; buscar, analisar, tratar e organizar a informação; adotar uma postura crítica, sendo consciente de que o conhecimento não é algo terminado e deve ser construído constantemente; tomar decisões, ganhando em autonomia e criatividade. Logo, aprender Matemática é mais do que aprender técnicas de utilização imediata; é interpretar, construir ferramentas conceituais, criar significados, perceber problemas, preparar-se para equacioná-los ou resolvê-los, desenvolver o raciocínio lógico, a capacidade de compreender, imaginar e extrapolar (Groenwald, 1999).

Baseados nesses princípios, a escola e os professores devem refletir sobre a necessidade de um planejamento curricular em Matemática que esteja em sintonia com o progresso científico e tecnológico da sociedade atual.

Logo, há necessidade de estruturar o currículo de Matemática onde o eixo central não seja a repetição de exercícios, mas ''aprender a interpretar problemas, desenvolver sistemas de ações, comparar idéias, métodos e soluções, saber comunicar idéias através da Matemática e concluir processos de forma clara, rigorosa e precisa, entre outras estratégias'' (Azcárate, 1997, p. 82).

Este artigo apresenta as reflexões dos autores sobre a necessidade de mudanças na forma de desenvolver o processo de ensino e aprendizagem da Matemática nas escolas do Ensino Básico, apontando as competências matemáticas exigidas no mundo moderno, no qual o conhecimento de regras e algoritmos não é suficiente para a resolução das situações problemas que se apresentam. Apresenta, também, os resultados da aplicação de um experimento com duas atividades, uma de decodificação de uma expressão algébrica em uma expressão aritmética (criptografia básica) e a outra de resolução de um problema, com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, objetivando evidenciar que o currículo desenvolvido em nossas escolas do Ensino Básico ainda está privilegiando somente a transmissão de conteúdos, sem preocupar-se em desenvolver procedimentos e atitudes (Coll, 1996), não possibilitando o desenvolvimento do pensamento matemático, necessário na sociedade atual.

CURRÍCULO DE MATEMÁTICA: NECESSIDADES E PERSPECTIVAS

A palavra currículo se origina do latim *curriculum* e significa o curso, a rota, o caminho da vida ou das atividades de uma pessoa ou grupo de pessoas. O currículo educacional representa a síntese dos conhecimentos e valores que caracterizam um processo social, expresso pelo trabalho pedagógico, desenvolvido nas escolas.

Coll (1996) afirma que o currículo é a explicação do projeto educacional necessário para o crescimento pessoal, como ajuda específica quando esse crescimento não é satisfatório somente com a participação, imitação ou observação dos adultos dentro da cultura de um grupo, servindo, assim, como um manual para aqueles que irão desenvolver esse projeto; levando-se em consideração a situação real de onde ele será aplicado. Em outras palavras:

> *[…] entendemos o currículo como sendo o projeto que preside as atividades educativas escolares, define suas intenções e proporciona guias de ação adequadas e úteis para os professores, que são diretamente responsáveis pela sua execução. Para isso, o currículo proporciona informações concretas sobre que ensinar, quando ensinar, como ensinar e que, como e quando avaliar* (Coll, 1996, p. 45).

Forquin descreve currículo como sendo ‘‘[...] o conjunto daquilo que se ensina e daquilo que se aprende, de acordo com uma ordem de progressão determinada, no quadro de um dado ciclo de estudos’’ (Forquin, 1995, p. 188). Para o autor, é um programa de estudos ou um programa de formação, mas considerado em sua globalidade, coerência didática e continuidade temporal, isto é, de acordo com a organização seqüencial das situações e das atividades de aprendizagem às quais dá lugar.

O currículo escolar é toda ação pedagógica refletida, que se realiza na escola e a partir dela, para que se concretize a aprendizagem. São as atividades dentro ou fora da sala de aula que contribuem para o desenvolvimento dos alunos. Portanto, é mais que uma simples grade de matérias ou uma lista de conteúdos. Contempla um conjunto de conhecimentos relacionados e interdependentes, com diversos níveis de complexidade e ampliação de conceitos. Através do currículo escolar, realiza-se a difusão do conhecimento científico, adquirido pela sociedade. Em seu funcionamento deve estar presente a realidade sócio-histórico-cultural da comunidade a que se destina, atribuindo, dessa forma, significado aos conhecimentos e saberes trabalhados na escola. Nas discussões cotidianas, quando refletimos sobre currículo, é comum pensarmos apenas em conhecimento neutro, escrito para ser seguido teoricamente, esquecendo-nos de que o conhecimento que o constitui está diretamente ligado à formação do indivíduo que será construído dentro da escola. Portanto o currículo escolar tem uma importância fundamental na construção da escola que queremos ter.

Direcionando o estudo para área de Matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) visam [...] à construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que toda a criança e jovem brasileiro tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite, de fato, sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura (Brasil, PCNs, 1998, p. 15).

Encontramos-nos PCNs a discussão das metodologias para resolução de problemas, história da Matemática, jogos e uso das tecnologias de comunicação, como forma de melhorar o ensino da Matemática, incluindo, também, temas transversais como: ética, pluralidade cultural, orientação sexual, meio ambiente, saúde, trabalho e consumo. Esses temas são necessários para que o aluno assuma uma posição crítica e consiga proteger-se, através do conhecimento, quando se deparar com certas situações durante a vida.

Finalmente, incluem discussões sobre a melhor forma de trabalhar os conteúdos que desenvolvem a estrutura cognitiva do aluno: [...] o estudo dos números e das operações (no campo da aritmética e da álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da aritmética, da álgebra, da geometria e de outros campos do conhecimento) (Brasil, PCNs, 1998, p.49). O objetivo é trabalhar esses conteúdos de uma forma que permita ao aluno, posteriormente, usar esse conhecimento para entender a Matemática que o rodeia, compreendendo a utilização de gráficos, dados estatísticos, probabilidade, etc.

A Matemática, segundo os PCNs do Ensino Médio (Brasil, 1999), permite o desenvolvimento de competências essenciais, envolvendo habilidades de caráter gráfico, geométrico, algébrico, estatístico e probabilístico, o que é claramente expresso nos objetivos educacionais da Resolução do CNE[3]/98.

A idéia básica do enfoque construtivista de ensino é a de que aprender e ensinar é mais do que um mero processo de repetição e acumulação de conhecimentos; implica transformar a mente de quem aprende, que deve reconstruir, em nível pessoal, os processos e produtos culturais com o fim de apropriar-se deles (Pozo & Crespo, 1998).

Atualmente, no Brasil, a escola possui, muito arraigada em seus pressupostos, a transmissão de conhecimentos, com aulas teóricas e exercícios repetitivos, como forma de aprender a fazer, não privilegiando a compreensão e o desenvolvimento do pensamento abstrato.

Logo, um novo currículo se faz necessário nas escolas, a fim de mudar essa concepção dominante de educação e considerar a formação de atitudes, valores e competências, permitindo ao aluno a aplicação dos conhecimentos aprendi-

[3] Resolução do Conselho Nacional de Educação do ano de 1998.

dos em situações novas. Esse currículo deve privilegiar o agir do aluno e o professor como mediador do processo de ensino e aprendizagem.

Porém, os conteúdos matemáticos devem possuir um valor importante na construção do saber. As metodologias aplicadas em sala de aula também são fundamentais para um ensino significativo, no qual os alunos possam construir significados e atribuir sentido àquilo que aprendem. Para Coll et al. (1998), somente na medida em que produzimos esse processo de construção de significados e de atribuição de sentido, conseguimos que a aprendizagem de conteúdos específicos cumpra a função que lhe é determinada e que justifica a sua importância: contribuir para o crescimento pessoal dos alunos, favorecendo e promovendo o seu desenvolvimento e socialização.

É necessário salientar que não pretendemos que os conteúdos (fatos e conceitos) tenham um peso excessivo, mas que sejam desenvolvidos, na escola, todos os tipos de conteúdos, que são: os fatos e conceitos; os procedimentos e as atitudes. Coll et al. (1998) sugerem o planejamento e o desenvolvimento de atividades que permitam trabalhar, de forma interrelacionada, os três tipos de conteúdos.

Um currículo dinâmico[4] torna-se evidente quando entendemos educação para todos ou educação de massa, como forma de desenvolver uma nação. O grande objetivo da educação brasileira, nesse momento, é fazer com aqueles que estão na escola permaneçam nela e consigam aplicar os conhecimentos adquiridos em situações da sua vida futura.

Portanto, a Matemática escolar não pode limitar-se a ensinar os conceitos que estão nos programas dessa disciplina. Deve possibilitar o desenvolvimento dos pensamentos colocados em funcionamento, como abstração, demonstração, raciocínio através de hipóteses, resolução e elaboração de problemas.

A aprendizagem matemática, segundo D'Amore (2005), não se constitui apenas da construção de conceitos, mas envolve três tipologias de aprendizagens distintas, possuindo alguma intersecção: aprendizagem conceitual, aprendizagem de estratégias (resolver, demonstrar, ...), aprendizagem algorítmica (calcular, operar, ...). Considera, ainda, que a operacionalização (o saber fazer) engloba tanto o uso dos conceitos quanto das estratégias (o saber demonstrar, saber resolver), bem como as atividades algorítmicas (saber calcular, saber operar).

Cantoral et al. (2000) também entendem que a Matemática escolar não se limita à parte do currículo que trata dos conteúdos e temas de estudo, mas trata, também, dos processos do pensamento que os alunos põem em funcionamento, como a abstração, demonstração, raciocínios através de hipótesis resolução e planejamento de problemas.

Segundo os PCNs do Ensino Médio (Brasil, 1999) a Matemática, com seus processos de construção e validação de conceitos, argumentações, procedimentos de generalizar, relacionar e concluir, que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações, possibilitando ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos.

[4] Uma concepção dinâmica de currículo é construída quando se pensam, conjuntamente, currículo e sociedade.

Conforme Cantoral et al. (2000), o pensamento matemático inclui, por um lado, reflexão sobre tópicos matemáticos e, por outro, processos avançados do pensamento, como abstração, justificação, visualização, estimação e raciocínios através da formulação de hipóteses. Deve operar sobre uma rede complexa de conceitos, uns avançados e outros mais elementares.

Logo, torna-se evidente que o currículo de Matemática trabalhado, nas escolas, necessita além do desenvolvimento de conteúdos, que sejam desenvolvidos procedimentos adequados, proporcionando aos alunos a construção de raciocínios de alto nível.

A IMPORTÂNCIA DO DESENVOLVIMENTO DE PENSAMENTOS MATEMÁTICOS DE ALTO NÍVEL

A matemática, como ciência, é um exemplo de abstração, uma vez que, como regra, não estuda o mundo real, e sim modelos, que são abstrações do mundo real. Logo, entendemos que, ao trabalhar com os conteúdos matemáticos, devemos ter em mente a criação de atividades que permitam o desenvolvimento do pensamento abstrato, possibilitando raciocínios de alto nível.

Raciocínio de alto nível, segundo Resnick citado por Lins & Gimenez (1997), é aquele que estabelece relações. Não é imediato, e faz com que o sujeito estabeleça processos não-algorítmicos. Exige um nível de abstração mais elevado, o qual permite relações entre os conhecimentos já adquiridos, exigindo mais que a aplicação de algoritmos e regras. Normalmente, a resolução de problemas, em Matemática, exige do resolvente raciocínios de alto nível, ou seja, é necessário relacionar os conhecimentos prévios e aplicá-los em uma situação nova.

Para melhor entender o pensamento abstrato, é importante conceituar ‘‘pensamento’’ e ‘‘abstrato’’. Pensamento, segundo o Dicionário Aurélio, ‘‘é um processo mental que se concentra nas idéias’’ e ‘‘o poder de formular conceitos’’. Conforme Oxford Desk Dictionary and Thesaurus, ‘‘é a faculdade da razão’’.

Para Oliveira & Amaral (2001), ‘‘pensamento é a capacidade que tem o ser de, através de três operações mentais distintas: a formação de idéias, o juízo sobre as relações de conveniência entre essas idéias e o raciocínio, que estabelece relações entre os juízos, compreender o significado das coisas concretas e das abstrações, bem como das relações que elas guardam entre si’’.

No Dicionário Aurélio, ‘‘abstrato é o que expressa uma qualidade ou característica separada do objeto a que pertence ou a que está ligada’’. No Oxford Desk Dictionary and Thesaurus ‘‘abstrato é o que existe no pensamento ou na teoria e não na matéria ou na prática’’.

Ainda, citando Oliveira & Amaral (2001), a abstração é um conceito no qual não levamos em conta um valor específico determinado e sim qualquer entre todos os valores possíveis daquilo com que estamos lidando ou ao que estamos nos referindo. Por exemplo, em álgebra, quando dizemos que x é uma variável, desconsideramos o seu valor atual, mas consideramos todos os possíveis valores de x como sendo números, os quais não são objetos físicos e sim objetos lingüísticos, formados pela abstração durante o ato de contar.

Os pensamentos abstratos representam idéias ou sentimentos, não dimensionáveis, desprovidos de forma, tamanho ou cor, como amor, paixão, ódio ou tristeza (abstrações límbicas), ou algo assim como sentido ético e moral, música ou matemática (abstrações neocorticais). Também consistem na habilidade que tem a mente de selecionar novas rotas ou novos meios para alcançar um determinado objetivo, algo que, certamente, tem a ver com o pensamento abstrato (Oliveira & Amaral, 2001).

Para os mesmos autores, o pensamento abstrato proporciona algo mais: quando envolvido num processo de criatividade, adquire tal magnitude, que acaba por se constituir em forte estímulo, capaz de promover a proliferação dendrito-axonial[5], criando novas sinapses, tornando-se um poderoso estimulador do aprendizado, do conhecimento e da potencialidade de memorização.

Quando nos referimos às operações de pensamento, falamos na busca de suposições, classificação, codificação, comparação, planejamento de projetos (traçar um lação de hipóteses, imaginação, interpreplano de ação para solucionar uma situação conflitiva), formulação de críticas, formulação de hipóteses, imaginação, interpretação, resumo, reunião e organização de dados, tomada de decisões.

O que nos preocupa é que a escola não está desenvolvendo esse tipo de pensamento nos alunos, fato o qual nos leva a questionar a necessidade de um ensino dentro da nossa realidade, com situações problemas que desencadeiem raciocínios lógicos matemáticos, que os motivem e interessem.

UMA EXPERIÊNCIA COM FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Com o objetivo de encontrar evidências sobre as questões discutidas no referencial teórico sobre a necessidade de um currículo de Matemática que busque o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e não privilegie o simples desenvolvimento de conteúdos matemáticos, foi realizado um experimento com alunos que estão cursando Matemática, futuros professores dessa disciplina no Ensino Básico.

O experimento objetivou investigar se alunos que já concluíram o Ensino Básico e estão cursando uma Licenciatura em Matemática possuem a capacidade de desenvolver atividades que exijam raciocínios de alto nível. Foi aplicado um experimento que previa a realização de duas atividades didáticas com alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Luterana do Brasil, ULBRA, no município do Canoas, no estado do Rio Grande do Sul, Brasil.

O experimento foi aplicado em 63 alunos, que estão no quarto semestre do curso

[5] Os nervos são estruturas especializadas em conduzir impulsos para o sistema nervoso central e para o sistema nervoso periférico. São formados por células altamente especializadas, os neurônios, possuindo um corpo celular com projeções denominadas dendritos e um prolongamento principal, o axônio. O impulso nervoso propaga-se no sentido dendrito-axônio.

de licenciatura em Matemática, o qual possui, no total, oito semestres. O experimento foi realizado em três etapas: a primeira, em um grupo de 18 alunos, para o desenvolvimento da primeira atividade em grupos; a segunda foi aplicada em 36 alunos para o desenvolvimento individual da mesma atividade aplicada na etapa 1; a terceira foi aplicada em 9 alunos com o desenvolvimento de uma situação problema.

A primeira etapa de aplicação da primeira atividade foi realizada em grupos. Essa atividade foi desenvolvida pelos grupos sem explicações prévias. Foi solicitada aos grupos a realização da atividade utilizando os conhecimentos que já possuíam em Matemática, sendo aplicada em 18 alunos que se agruparam em 5 grupos com 4 grupos de 4 pessoas e um grupo de 2 pessoas. Os 18 alunos eram da disciplina de Prática de Ensino, do 4º semestre do curso de Matemática Licenciatura da ULBRA.

Na segunda etapa, a mesma atividade da etapa um foi desenvolvida individualmente. Também não foi realizada nenhuma explicação prévia, apenas solicitado aos alunos que a realizassem com base nos conhecimentos que já possuíam em Matemática. A atividade foi aplicada em 36 alunos da disciplina de Álgebra II, do 4º semestre do curso de Licenciatura em Matemática, da ULBRA.

A terceira etapa foi realizada com 9 alunos voluntários, também cursando o quarto semestre do curso de Licenciatura em Matemática da ULBRA, com o objetivo de investigar a capacidade dos alunos do ensino superior, para resolver problemas que envolvem conhecimento dos conteúdos do Ensino Básico, aplicado a uma situação nova.

A atividade visou investigar-se os alunos, futuros professores de Matemática, aplicam, na resolução problemas, raciocínios aritméticos de alto nível. Segundo Lins & Gimenez (1997), os raciocínios aritméticos de alto nível estão relacionados ao estabelecimento de relações, generalização e dedução de regras com base em observações de padrões numéricos.

É importante ressaltar que o problema, primeiramente, foi resolvido individualmente e, em seguida, os alunos foram distribuídos em pequenos grupos, para discutir as estratégias desenvolvidas na resolução do problema.

DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DIDÁTICAS APLICADAS NO EXPERIMENTO

1. Sabendo que cada letra representa um algarismo distinto e que existe apenas uma resposta, que adição é essa?

$$\mathrm{AMOR} + \mathrm{AMOR} + \mathrm{AMOR} = \mathrm{ÓDIO}$$

Para a realização dessa atividade, é necessário que o aluno procure sistematizar as informações relevantes, formular hipóteses, prever os resultados e elaborar estratégias de enfrentamento das questões.

1. Informação relevante:

$$3A \leq 9 \Rightarrow A \leq 3.$$

2. Hipóteses: $A = 1$ ou $A = 2$ ou $A = 3$.

3. Prevendo resultados:

i) se $A = 1$, então $O = 3$ ou $O = 4$ ou $O = 5$;

ii) se $A = 2$, então $O = 6$ ou $O = 7$ ou $O = 8$;

iii) se $A = 3$, então $O = 9$.

4. Verificação das hipóteses (enfrentamento das questões).

O raciocínio lógico leva a testar "iii" primeiramente, porque dado $A = 3$ só há uma possibilidade para O, a saber, $O = 9$.

Verificamos que essa possibilidade é falsa: se $A = 3$, então $3R = 9$ ou $3R = 19$.

$3R = 9 \Rightarrow R = 3$: é falso, porque R deve ser um valor diferente de A;

$3R = 19$ é falso, porque R é um valor inteiro.

Além disso, é importante que o aluno se dê conta de que $3R > 27$ não ocorre; logo, não é possível $29, 39$, etc.

Todas as hipóteses devem ser verificadas com esse tipo de raciocínio. Por exemplo, a hipótese de que $A = 1$ e $O = 3$ é facilmente descartada, porque leva a concluir que $3R = 3$ implicando $R = 1$, o que é impossível, porque A não é igual a R.

Passemos, então, para a verificação da hipótese verdadeira: se $A = 2$ e $O = 8$, então $3R = 18$, pois é o único múltiplo de 3 entre 0 e 27 que termina em 8; logo, $R = 6$. Sabemos que $3O = 24$, então $I = 5$ e $M = 7$ e $D = 3$. Logo, a conta esperada é: $3 \quad 2786 = 8358$.

2. Um programa de computador foi desenvolvido para listar os números inteiros na tela, em quatro colunas, de forma que, em cada coluna, apareça a soma do número com seu sucessor, consecutivamente:

$1 \quad 1+2 \quad 2+3 \quad 3+4:$
$4+5 \quad 5+6 \quad ...$

Sabendo que o algoritmo está programado para parar no primeiro primo maior que 625, perguntamos:

a) Qual será o último número que aparecerá na lista?

b) Qual coluna receberá o último valor programado?

c) Qual a soma dos números recebidos pela coluna onde está o último número?

d) Em qual coluna aparecerão os números que são quadrados perfeitos?

e) Se no programa for inserido um acumulador, que armazena a soma de todos os números que já apareceram na tela, que resultado estaria armazenado após n iterações?

A resolução dessa atividade exige que os alunos apliquem os conhecimentos do Ensino Básico que possuem e os relacionem a uma situação nova.

A resolução desse problema está apresentada a seguir:

a) Utilizamos o Crivo de Erastóstenes para verificar qual é primeiro inteiro maior que 625, que não é múltiplo de números primos entre 2 e 25. Excluímos, então, os números 626, 628, 630, 632, pois são múltiplos de 2. Excluimos o 627, pois é múltiplo de 3 e o 629, pois é múltiplo de 17.

Analisando o número 631, verificamos que ele não é divisível por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Logo, 631 é o número procurado.

b) Observamos que a primeira coluna possui os números 1, 9, 17, ..., $8k+1$, ...; a segunda coluna po-ssui os números 3, 11, 19, ..., $8k+3$, ...; a terceira coluna possui os números 5, 13, 21, ..., $8k+5$, ...; a quarta coluna possui os números 7, 15, 23, ...,$8k+7$, ...

Para descobrir em qual coluna aparecerá o número 631, é necessário descobrir qual é o resto da divisão euclidiana de 631 por 8. Como $631 = 8.78 + 7$, temos que o número 631 aparecerá na quarta coluna.

c) Na quarta coluna, encontram-se os números 7, 15, 23, ..., $8k+7$, ... Seus termos formam uma progressão aritmética. A soma finita dos termos de uma progressão aritmética é dada por:

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

onde $a_1 = 7$, $a_n = 631$ e n é a quantidade de termos de a_1 até a_n.

Daí $n = \frac{a_n - a_1}{8} + 1$, ou seja, $n = \frac{631-7}{8} + 1$ o que significa que $n = 79$ e $S = \frac{79(7+631)}{2}$. Portanto, temos que: $S = 79(319) = 25201$.

d) Os quadrados perfeitos que aparecem na lista resultam de números ímpares ao quadrado e, além disso, todos deixam resto 1, quando divididos por 4, pois:

$$(2n+1)^2 = 4(n^2+n) + 1,$$

onde $n^2 + n$ é um inteiro par. Assim, analisando as colunas, temos: na primeira coluna,

$$8q+1=4(2q)+1;$$

na segunda coluna,

$$8q+3=4(2q)+3;$$

na terceira coluna

$$8q+5 = 4(2q+1) + 1;$$

finalmente, na quarta coluna, temos $8q + 7 = 4(2q+1) + 3$. Então, vemos que a única coluna que deixa resto 1, quando dividida por 4, e cujo quociente é um número par é a primeira coluna. Logo, todos os números quadrados perfeitos aparecerão na 1ª coluna.

e) A soma dos números que aparecem na tela é dada por:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 1) = n^2,$$

fato que pode ser demonstrado por indução finita.

Base de Indução:

P(1) é verdadeira

$2*1 - 1 = 1^2$

$2 - 1 = 1$

Conclusão: $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução

Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira para $k \geq 1$, ou seja,

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2k - 1) = k^2$$

Tese de Indução

Queremos mostrar que $P(k + 1)$ é verdadeira, ou seja,

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2$$

Demonstração:

Sabemos que:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2k - 1) = k^2$$

Queremos mostrar que:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Temos:

$$k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)(k + 1) = (k + 1)^2.$$

O desenvolvimento dessas atividade exigem operações de pensamento. Para formulá-las necessitamos da capacidade de abstração matemática, indo além do conhecimento de conteúdos matemáticos, ou seja, o resolvente tem que aplicar seus conhecimentos aritméticos em uma situação desconhe-cida. Na atividade um, solicitamos a decodificação de uma expressão literal para uma situação numérica e, na atividade dois, são exigidos pensamentos elaborados para a construção e resolução do problema. Para Cantoral et al. (2000), o pensamento matemático, que deve ser desenvolvido nos estudantes, inclui conhecimento de tópicos matemáticos e processos avançados de pensamento,como justificação, formulação de hipóteses e conclusão.

O que esperamos de um estudante que tenha concluído o Ensino Básico é que tenha desenvolvido estratégias de pensamento que permitam a resolução dessas atividades, sem o uso de tentativas aleatórias, mas usando os conhecimentos adquiridos em aritmética e raciocínio lógico, ou seja, elaborando raciocínios de alto nível.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na primeira etapa de aplicação da atividade, quando os alunos agruparam-se em 5 grupos e resolveram a atividade nos grupos, foi delimitado o tempo de duas horas aulas para a realização da atividade.

Apenas um grupo chegou à resposta correta, porém, o resultado foi obtido por tentativa e erro, como é possível observar na descrição da resposta pelo grupo ‘‘*somados os três R do amor, o resultado deve ser grande o bastante, pois o resultado é a letra O, que inicia e termina a palavra ÓDIO e o valor de O também está no AMOR. A letra O é a única em comum entre as duas palavras. A partir daí, to as as outras letras somadas teriam que ter valores diferentes, formando um jogo algébrico de tentativa e erro, baseado no fato de que os valores das letras diferentes seriam diferentes também*’’.

O grupo formado por dois alunos formulou duas hipóteses. Primeiro, $A = 1$ $O = 3 \Rightarrow I = 9$, mas $R + R + R = 3 \Rightarrow R = A$; logo, essa proposição é falsa.

Na segunda hipótese, partiram de $R=7$. Então, concluíram que $A=0$, o que os levou a uma conclusão errada. As hipóteses elaboradas são pensamentos muito pouco elaborados, o que nos evidencia que a Matemática que conhecem do Ensino Básico não foi aplicada em uma situação nova. Afirmaram os alunos desse grupo: ‘‘*Não sabemos como conseguir números diferentes com letras diferentes, pois sempre chegamos a letras com valores iguais.*’’

Os outros três grupos não chegaram a nenhuma resposta e também não conseguiram formular nenhuma hipótese lógica. Por exemplo, um dos grupos escreveu ‘‘*chegamos à conclusão que devemos achar um número de 4 algarismos distintos que, ao serem multiplicados por 3, resultarão em outro número de 4 algarismos*’’.

A segunda etapa, na qual a atividade foi desenvolvida individualmente, também no período de duas horas aulas, foi aplicada em 36 alunos, dentre os quais 21 não formularam nenhuma hipótese e não conseguiram escrever nenhuma resposta, 10 consideraram o $A = 0$, por isso não encontraram a resposta correta e 5 escreveram a resposta correta.

Dos alunos que encontraram a resposta correta, todos afirmaram que utilizaram o raciocínio por tentativa e erro. Apenas um aluno apresentou um pensamento mais elaborado, apesar de representar um pensamento elementar: ‘‘*Concluí que o algarismo da dezena teria que ser igual às unidades e igual à unidade de milhar*’’.

Dos que concluíram que o A valia zero, nenhum levou em consideração que a palavra $AMOR$ deveria representar um número de quatro algarismos. Dois alunos atribuíram valores para as letras do alfabeto, considerando o $A = 0, B = 1$, e assim sucessivamente. Consideramos esse tipo de raciocínio muito elementar, pois os alunos não consideraram que um código não pode ser criado aleatoriamente.

Dos 21 alunos que erraram a resposta, cinco não apresentaram nenhum tipo de raciocínio; oito alunos não levaram em consideração a hipótese de que cada letra representava um algarismo distinto, apresentando soluções do tipo:

$$1031 + 1031 + 1031 = 3093,$$
$$\text{logo } M = 0 \text{ e } D = 0.$$

Seis alunos fizeram relações do tipo: $3*AMOR = ÓDIO$, porém, não levaram em consideração os valores relativos dos algarismos que cada letra representava e chegaram a conclusões erradas.

Outro tipo de pensamento equivocado foi apresentado por dois alunos: $A = 3, M = 2, O = 1$ e $R = 0$.

Então $A + M + O + R = 6,$ ou seja, $AMOR+AMOR+AMOR = 6 + 6 + 6 = 18$; logo, a palavra ódio vale *18*, como $O = 1,$ $D + I = 16.$ Então, $D = 16 – I$, concluindo que, se $I = 9$, então $D = 7$.

Esse raciocínio é equivocado, por não estabelecer nenhum tipo de relação com seus conhecimentos prévios, ou seja, esses alunos não conseguiram relacionar e aplicar seus conhecimentos de aritmética a uma situação nova.

Ao serem questionados sobre a maneira que resolveram a atividade, os alunos afirmaram que foi por tentativa e erro; nenhum aluno propôs um plano de ação, nem na situação de trabalho em grupo nem individualmente. Também o levantamento das hipóteses foi dos mais elementares. Nenhum aluno propôs hipóteses e fez o enfrentamento dessas hipóteses.

Na terceira etapa do experimento, o problema aborda vários conteúdos do Ensino Básico: números primos, quadrados perfeitos, divisibilidade, seqüências e progressão aritmética. Os participantes tiveram dificuldade para reconhecer esses conceitos ao longo da resolução do problema. A seguir apresentamos os resultados desses alunos.

Na resposta ao primeiro item, onde é perguntado qual será o último número que aparecerá na lista, as respostas individuais dos alunos estão categorizados, na Tabela 1, e as respostas realizadas em grupo, na Tabela 2.

Estratégia utilizada na resolução individual do item a do problema	nº de participantes
Encontrou o número 631, por tentativa.	3
Encontrou o número 629, por tentativa.	5
Encontrou o número 627, por tentativa.	1

***Tabela 1*:** Resolução individual do primeiro item do problema.

Estratégia utilizada na resolução do item a do problema, em grupos	nº de grupos
Encontrou o número 631, por tentativa.	2
Encontrou o número 627, por tentativa.	1

Tabela 2: Resolução dos grupos relativos ao primeiro item do problema.

O item ‘‘*a*’’ é bastante simples, porém, cinco participantes afirmaram que o primeiro número primo maior que 625 é o número 629, sem considerar que esse número é divisível por 17 e um participante encontrou o número 627, sem perceber que esse número é divisível por 3. As respostas categorizadas nas Tabelas 3 e 4 mostram a resolução do item *b*, que pergunta qual coluna receberá o último valor programado.

Estratégia utilizada na resolução individual do item *b* do problema	nº de participantes
A quarta coluna, por tentativa.	2
A terceira coluna, por tentativa.	3
A Segunda coluna, por tentativa.	1
Não resolveu o problema.	3

Tabela 3: Resolução Individual do item *b* do problema

Estratégia utilizada na resolução do item *b* do problema	n.º de grupos
A quarta coluna, por tentativa.	2
A terceira coluna, por tentativa.	1

Tabela 4: Resolução dos grupos do item *b* do problema

Apenas dois participantes acertaram essa questão, mas ambos tiveram dificuldades para justificar a sua resposta. Os resultados das Tabelas 5 e 6 mostram a resolução do item *c*, que pergunta qual a soma dos números recebidos pela coluna onde está o último número.

Estratégia utilizada na resolução individual do item *c* do problema	nº de participantes
Utilizou a fórmula da soma dos termos de uma P.A.,mas cometeu um pequeno erro nos cálculo não encontrando o valor correto .	1
Não registrou a estratégia utilizada e não encontrou o resultado correto.	4
Não resolveu o problema.	4

Tabela 5: Resolução Individual do item *c* do problema

Estratégia utilizada em grupos na resolução do item *c* do problema	nº de grupos
Utilizou a fórmula da soma dos termos de uma P.A.	1
Somou, apenas, os dois últimos números da seqüência.	1
Não resolveu o problema.	1

Tabela 6: Resolução dos grupos do item *c* do problema.

Quanto ao item ‘‘*c*’’, apenas 1 aluno utilizou a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, porém cometeu um erro no cálculo. Logo, não encontrou a resposta correta. Dois participantes somaram os dois últimos números da coluna. Os restantes somaram os quatro números da última linha e não identificaram a existência de uma progressão aritmética. As respostas do item d, que pergunta em qual coluna aparecerão os números que são quadrados perfeitos, estão apresentadas nas Tabelas 7 e 8.

Estratégia utilizada individual na resolução do item *d* do problema	nº de participantes
Não registrou a estratégia utilizada, mas encontrou o resultado correto.	4
Não resolveu o problema.	5

Tabela 7: Resolução individual do item *d* do problema

Estratégia utilizada na resolução do item *d*, em grupo, do problema	nº grupos
Não registrou a estratégia utilizada, mas encontrou o resultado correto.	2
Não resolveu o problema.	1

Tabela 8: Resolução dos grupos do item *d* do problema

Nessa questão, apenas cinco alunos observaram que os números quadrados perfeitos aparecerão sempre na primeira coluna e somente um deles percebeu que aparecerão somente quadrados de números ímpares.

As respostas categorizadas nas Tabelas 9 e 10 mostram o desenvolvimento do item e, que pergunta: se no programa for inserido um acumulador, que armazena a soma de todos os números que já apareceram na tela, que resultado estaria armazenado após "n" iterações?

Sete alunos não resolveram essa questão e os dois que resolveram não acertaram, ou seja, nenhum dos nove alunos que estavam presentes neste encontro conseguiram resolver a questão.

As atividades propostas eram Situações desconhecidas que necessitavam, na sua resolução, da aplicação de conhecimentos prévios do Ensino Básico e do relacionamento e aplicação do conhecimento prévio a uma nova situação. Isso não aconteceu no experimento realizado.

Estratégia utilizada na resolu do item *e* do problema	nº de participantes
Utilizou fórmulas relacionadas a P.A *e* encontrou $S_n = \frac{n+n^2}{2}$	1
Não registrou a estratégia utilizada e encontrou "$n+1$"	1
Não resolveu o problema.	7

Tabela 9: Resolução individual do item *e* do problema

Estratégia utilizada, pelos grupos, na resolução do item e do problema	nº de grupos
Utilizou fórmulas relacionadas a P.A e encontrou $S_n = \frac{a_1 + a_1 n + n^2 r - nr}{2}$	1
Não registrou a estratégia utilizada e encontrou "$n + 1$"	1
Não resolveu o problema.	1

Tabela 10: Resolução dos grupos do item *e* do problema

Assim, os alunos que participaram do experimento, demonstraram que não foi realizado nenhum raciocínio de alto nível. Eles simplesmente se utilizaram de pensamentos elementares (tentativae erro), elementares (tentativa e erro), o que evidencia que o currículo de Matemática do Ensino Básico necessita de mudanças e de uma reflexão profunda em relação ao que é ensinado e como é ensinado. Ou seja, há necessidade de um currículo que desenvolva mais competências matemáticas, como as já referidas no referencial teórico desse artigo.

Os conteúdos desenvolvidos em uma visão tradicional de ensino não está permitindo que os estudantes utilizem a Matemática ensinada na escola em situações novas.

CONCLUSÃO

As respostas apresentadas pelos alunos, nas atividades propostas, são raciocínios matemáticos elementares. O mais preocupante é que eles não conseguem relacionar seus conhecimentos prévios em uma situação nova.

Observamos, na resolução da atividade um, que existe uma total ausência de conjeturas, raros levantamentos de hipóteses e enfrentamento dessas hipóteses. Mesmo o aluno que levantou uma hipótese não conseguiu deduzir se era verdadeira ou falsa sua suposição; logo, existe, nesses alunos, uma dificuldade grande na competência de organizar o pensamento matemático na busca da solução de uma atividade desconhecida.

Também percebemos que os alunos não realizaram um plano de ação; foram simplesmente escrevendo as idéias que surgiam aleatoriamente, o que os levou a pensamentos improdutivos.

Lins & Gimenez (1997) afirmam que a aritmética do século XX oferece respostas a problemas teóricos muito recentes, como a criptografia, os problemas de minimização e maximização, a análise numérica, os problemas de interação, entre outros, não podendo ser reduzida a regras escolares. Para os autores, a aritmética a ser desenvolvida nas escolas deve servir para resolver problemas, reconhecendo o seu valor social e suas novas competências: diversidade de métodos, capacidade de interpretar informações, competência de cálculo aproximado e mental mínima para enfrentar situações cotidianas de compra-venda, entre outras, o que não foi observado no experimento realizado. Não foi utilizado opensamento aritmético. Esses estudantes conhecem as regras e algoritmos, porém, esse conhecimento não foi aplicado na resolução de uma situação desconhecida.

Ainda citando Lins & Gimenez (1997), devemos observar a aritmética em sua capacidade de desenvolvimento comunicativo, utilizando códigos, promovendo situações do tipo discreto, deixando de pôr toda a ênfase na função de contar e reconhecer as funções de ordenar e medir dos sistemas numéricos. O que fica evidenciado, na atividade desenvolvida, que não é esse tipo de pensamento que está sendo desenvolvido nas escolas do Ensino Básico. Os alunos não conseguem utilizar o pensamento aritmético em uma situação que exige abstração e aplicação de pensamentos elaborados (pensamentos de alto nível).

O trabalho matemático desenvolvido nas escolas deve ser útil para a vida e o currículo é fundamental para um ensino significativo, capaz de formar competências que permitam atuar na sociedade. Assim, uma conclusão lógica e importante é que o currículo de Matemática desenvolvido nas escolas do Ensino Básico necessita de uma reformulação urgente, que permita desenvolvero pensamento matemático, não se limitando, apenas, a repassar conteúdos matemáticos.

Ensinar Matemática pode e deve ser compatível com formar pessoas. Os professores devem ser capazes de selecionar e organizar atividades adequadas, a fim de contribuir para o desenvolvimento dos alunos e de um currículo de Matemática acessível a todos.

Os cursos para formação de professores de Licenciatura em Matemática necessitam, urgentemente, apresentar propostas que possibilitem formar profissionais capazes de realizar a transposição didática adequada, no Ensino Básico, do desenvolvido na Universidade, e desenvolver o currículo de Matemática de acordo com as necessidades atuais.

BIBLIOGRAFÍA

Abate, F. R. (Ed.) (1997). *The Oxford Desk Dictionary and Thesaurus. American Edition.* (1ª Ed.) Berkley, USA: Oxford University Press.

Azcárate, P. (1997). ¿Qué matemáticas necesitamos para comprender el mundo actual? *Investigación en la Escuela*, 32, 77-85.

Bertoni, N. E. (1994). Por que mudar o ensino da Matemática?, *Temas e Debates,* 7, 14-20.

Brasil. (1999). *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio*. Brasília, Brasil: MEC.

Buarque de Holanda, F. A. (Ed.). (1998) *Novo Dicionário da Língua Portuguesa*. (3ª. ed.) São Paulo, Brasil: Nova Fronteira.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Cordero, F., Rodríguez, R. A. & Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.

Coll, C. (1996). *Psicología e Currículo*. São Paulo, Brasil: Ática.

Coll, C., Pozo, J. I., Sarabia, B. & Valls, E. (1998). *Os conteúdos na reforma*. São Paulo, Brasil: ArtMed.

D'Ambrósio, U. (1985). Environmental Influences. En R. Morris (Ed.) *Studies in Mathematics Education*. (pp. 22-46). Paris, Francia: Unesco.

D'Ambrósio, U. (1990). *Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade.* São Paulo, Brasil: Ática.

D'Amore, B. (2005). *Epistemologia e didática da Matemática.* São Paulo, Brasil: Escrituras.

Forquin, J. C. (1995). *Sociologia da Educação: Dez Anos de Pesquisa*, (De Freitas, G. Trad.). Petrópolis, Brasil: Vozes. (Trabajo original publicado en 1985).

Groenwald, C. L. (1999). A Matemática e o desenvolvimento do raciocínio lógico. *Educação Matemática em Revista – RS*. *1*(1), 23-30.

Groenwald, C. L., Sauer, L. de O. & Frankie, R. F. (2005). Desenvolvendo o pensamento aritmético utilizando os conceitos da Teoria dos Números. *Acta Scientiae*, *Canoas, 7*(1), 93-101.

Lins, R. C. & Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* São Paulo, Brasil: PAPIRUS.

Oliveira. J. M. & Amaral, J. R. (2001). O Pensamento Abstrato. *Cérebro & Mente.* 12, São Paulo, Brasil: Universidade Estadual de Campinas. Recuperado de: http://www.cerebromente.org.br/n12/opiniao/pensamento.html

Pozo, J. I. M. & Crespo, M. A. G. (1998). *Aprender y enseñar ciencia: del conocimiento cotidiano al conocimiento científico*. Madrid, España: Morata.

Rico, L. (1997). Reflexiones Sobre los Fines de a Educación Matemática. *Suma*, 24, 5-20.

Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Claudia Lisete Oliveira Groenwald
Universidade Luterana do Brasil
Brasil

E-mail: claudiag@ulbra.br

Giovanni da Silva Nunes
Universidade Luterana do Brasil
Brasil

E-mail: gsnunes@portoweb.com.br