La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio

Víctor Larios Osorio [1]

RESUMEN

La Geometría Dinámica ofrece la posibilidad de una aproximación al estudio de la Geometría que permite la manipulación dinámica de los objetos geométricos, abriendo así posibilidades que antes no estaban disponibles para los estudiantes del nivel medio. Sin embargo, algunos fenómenos cognitivos siguen presentes, como son la rigidez geométrica y el hecho de preferir algunas propiedades geométricas visualmente evidentes por encima de otras, y son de hecho influidos por la percepción que de los objetos geométricos se tienen debido principalmente a la característica dinámica del software y a la operación del *arrastre*. Es por ello que se realizó una investigación en el nivel medio para ahondar al respecto y, considerando la Teoría de los Conceptos Figurales, estudiar la presencia y manifestación de fenómenos como estos en un ambiente de Geometría Dinámica.

- **PALABRAS CLAVE:** Geometría Dinámica, rigidez geométrica, conceptos figurales.

ABSTRACT

The Dynamic Geometry offers the possibility of an approximation to the study of Geometry that permits the dynamic manipulation of the geometric objects, opening thus possibilities that before were not available for the students of the medium level. Nevertheless, some cognitive phenomena continue presents, like the geometric inflexibility and the fact to prefer some visually evident geometric properties over other, and in fact, they are influenced by the perception that the geometric objects they have due mainly to the dynamic characteristic of the software and to the dragging operation. For that reason the research was carried out to deepen on this issue and, considering the Theory Figural Concepts, to study the presence and sign of phenomena as these in a Dynamic Geometry environment.

- **KEY WORDS:** Dynamic geometry, geometric inflexibility, figural concepts.

Fecha de recepción: Abril de 2006 /Fecha de aceptación: Septiembre de 2006

1 Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado. Universidad Autónoma de Querétaro. México.

RESUMO

A Geometria Dinâmica oferece a possibilidade de uma aproximação ao estudo da Geometria que permite a manipulação dinâmica dos objetos geométricos, abrindo assim possibilidades que antes não estavam disponíveis para os estudantes do nível médio. Contudo, alguns fenômenos cognitivos seguem presentes, como a rigidez geométrica e o fato de preferir algumas propriedades geométricas visualmente evidentes acima de outras, e são de fato influenciados pela percepção que os objetos geométricos se tem devido principalmente a característica dinâmica do software e a operação de *arrastar*. É por isso que se realizou una investigação no nível médio para investigar ao respeito e, considerando a Teoria dos Conceitos Figurais, estudar a presença e manifestação de fenômenos como estes em um ambiente de Geometria Dinâmica.

- **PALAVRAS CHAVE:** Geometria Dinâmica, rigidez geométrica, conceitos figurais.

RÉSUMÉ

La Géométrie Dynamique propose la possibilité d'une approximation a l'étude de la Géométrie qui permet la manipulation dynamique des objets géométriques, permettant ainsi l'ouverture à des possibilités qui avant n'étaient pas disponibles pour les étudiants de niveau moyen. Toutefois, certains phénomènes cognitifs sont encore présents, tels la rigidité géométrique et le fait de préférer certaines propriétés géométriques visuellement évidentes par-dessus d'autres, et sont en fait influencés par la perception que des objets géométriques on a principalement du à la caractéristique dynamique du software et à l'opération du déplacement. C'est pour cela qu'une recherche a été réalisée dans le niveau moyen pour approfondir à ce sujet et, en considérant la Théorie des Concepts Figuraux, étudier la présence et la manifestation des phénomènes comme celui-ci dans une ambiance de Géométrie Dynamique.

- **MOTS CLÉS:** Géométrie dynamique, rigidité géométrique, concepts figuraux.

1. Introducción

La didáctica de las matemáticas es una disciplina en constante cambio, no sólo por la naturaleza y complejidad de sus objetos de estudio, sino porque se integran nuevos elementos o herramientas a los procesos involucrados. Algunas de estas herramientas son del tipo denominado *software para Matemática Dinámica* (SMD), donde un subtipo muy conocido se refiere a los ambientes geométricos. La presencia creciente del *Software para Geometría Dinámica* (SGD) ha motivado la aparición de propuestas didácticas –o recorridos didácticos–, pero también hace necesaria la investigación de sus implicaciones positivas y negativas para preparar al docente en su utilización adecuada como mediador semiótico (Vygotski, 1979) entre el conocimiento y el alumno.

Si bien es cierto que el SGD permite el diseño de ambientes útiles como campo de experimentación de las representaciones de los objetos geométricos, también ocurre que al igual que cualquier otra herramienta, resulta pertinente que el usuario —el alumno— interiorice sus rasgos característicos (por ejemplo, el caso del carácter dinámico de las construcciones que se pueden realizar) y que el profesor esté al tanto de las posibles dificultades que existen o que aparecen durante su uso en el aula de un curso de geometría.

Así pues, en este trabajo se reportan algunos resultados y consideraciones que surgieron durante la realización de un proyecto de investigación en el nivel secundaria con alumnos mexicanos de 14 y 15 años (Larios, 2005b). Dicho proyecto resultó más amplio que las consideraciones que aparecen a continuación, pero en este artículo nos hemos centrado básicamente en la problemática a la que se enfrentan los alumnos sobre las representaciones gráficas durante el aprendizaje de la geometría, así como la influencia que tiene el uso de la geometría dinámica.

Este interés deriva del hecho de que el software y las computadoras, al ser mediadores semióticos, influyen en las percepciones sobre las representaciones gráficas, así como en los significados del conocimiento geométrico que se aprende. Tal hecho introduce nuevas cuestiones a considerar en la enseñanza de la geometría, como las que plantean Goldenberg y Cuoco (1998), quienes muestran la manipulación de un cuadrilátero *ABCD* en un ambiente como este:

"¿Cómo interpretan los estudiantes el efecto de mover un punto? ¿Ven *ABCD* como una cosa que es deformada de varias maneras, o como muchas cosas diferentes, y cada una ocurre para formar cuatro puntos conectados? ¿Construyen la noción de un continuo de cuadriláteros? ¿Cómo manejan el hecho de que, al mover un solo punto, pueden crear también 'cuadriláteros monstruosos', como la configuración triángulo del cuadrilátero cruzado que se autointersecta? ¿Parece que fracasan en notar estos casos en su totalidad o los ignoran como si no existieran o fueran de alguna manera irrelevantes? ¿Piensan sobre éstos como productos interesantes, pero derivados de un conjunto separado de observaciones sobre los cuadriláteros? ¿O los estudiantes experimentan esto como un conflicto con sus nociones previas de 'cuadrilátero'?" (p. 357)

Por tal motivo, las preguntas que dieron origen a este trabajo se pueden plantear de la siguiente manera:

- *¿Qué fenómenos relacionados con la visualización se manifiestan al observar hechos geométricos y al construir sus justificaciones dentro de un ambiente de geometría dinámica?*
- *¿Cuál es la influencia del fenómeno llamado "rigidez geométrica" en la identificación de las figuras y propiedades geométricas?*
- *¿Cuál es la influencia que tiene en la percepción del rasgo característico del software para geometría dinámica llamado "arrastre"?*

Para ello, además de conocer el software, se hace necesario tener alguna referencia sobre los aspectos relacionados con los objetos geométricos y sus representaciones, lo cual se abordará en la siguiente sección.

2. Aspectos figurales y conceptuales de los objetos geométricos

Al considerar en la investigación el manejo de objetos geométricos es importante tomar en cuenta cuál puede ser su naturaleza y cómo son considerados por los alumnos, pues las representaciones de estos objetos no poseen las mismas características que tienen los de otras ramas de la matemática.

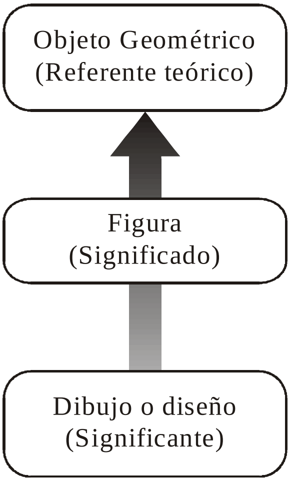
Estas consideraciones resultan necesarias cuando se abordan conductas de los estudiantes que a primera vista podrían ser vinculadas con la incomprensión de conceptos o definiciones. Sin embargo, pueden ser explicados a partir del hecho de que los objetos geométricos tienen, básicamente, dos componentes, el *figural* y el *conceptual* (Fischbein, 1993), que por estar íntimamente ligados entre sí hacen necesario distinguir entre *figuras* y *dibujos* (Parzysz, 1988; Laborde y Capponi, 1994; Hölzl, 1995; Goldenberg y Cuoco, 1998; Maracci, 2001). Y dado que esta distinción "es enfatizada fuertemente por programas como *Cabri*" (Hölzl, 1995, p. 118), la trataremos a continuación.

Como resulta evidente, la geometría está íntimamente ligada con las representaciones gráficas que se utilizan no sólo para ejemplificar algunas proposiciones (axiomas, teoremas, etcétera), sino también para representarlas, al igual que a los objetos manejados. Incluso algunos geómetras, como Félix Klein, expresaron la necesidad de utilizar dibujos o diagramas para el estudio de la geometría, o bien, como menciona Mariotti, "no es posible presentar un concepto geométrico sin ejemplos proporcionados, lo que significa dibujar figuras o mostrar modelos" (1995, p. 101).

Esto quiere decir que los objetos geométricos y sus combinaciones, que llamamos *construcciones geométricas* o *figuras geométricas*, no sólo son objetos con propiedades conceptuales que rigen de una manera lógica su comportamiento y sus relaciones, sino también están íntimamente ligados con su representación, que puede estar en un nivel mental (una imagen) o plasmada en un medio físico (hoja de papel o pantalla de una computadora).

Fischbein, en su *teoría de los conceptos figurales*, establece que las figuras geométricas poseen ambos aspectos: los *conceptuales* y los *figurales*. No tienen únicamente de uno u otro, sino que *conviven* los tipos de propiedades: "Los objetos de investigación y manipulación en el razonamiento geométrico son entonces entidades mentales, llamadas por nosotros *conceptos figurales*, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición y tamaño). Al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales, como idealidad, abstracción, generalidad y perfección." (1993, p. 143).

Para ampliar lo que menciona Fischbein, comúnmente las propiedades espaciales en los alumnos incluyen también consideraciones; por ejemplo, el tamaño de la representación gráfica (es decir, el de la mancha que representa a un punto), o la posibilidad de considerar a los objetos geométricos como objetos reales, y así "tomarlos" y manipularlos. Hay que decir que en estos casos se confunde lo que es el objeto matemático con su representación. En este momento resulta conveniente establecer la diferencia entre las nociones de *dibujo*, *figura* y *objeto geométrico* como la plantean Laborde y Capponi (1994), para lo cual podemos utilizar uno de los diagramas empleado en las teorías semióticas:



El *dibujo* es una representación gráfica y material, como los trazos sobre un papel o los píxeles en una pantalla (Hölzl, 1995). Hace referencia a un *objeto geométrico*, que funge como su referente teórico y está restringido o "controlado" por las definiciones y limitantes lógicas. Un dibujo incluye información figural que ocasionalmente puede resultar innecesaria: desde los elementos que no tienen relación con el objeto geométrico, y sí con el aspecto general (color, grosor), hasta los que pueden influenciar en la apreciación del dibujo (por ejemplo, la orientación). Ahora bien, debido a que no se puede acceder directamente a los objetos geométricos, se les representa por medio de dibujos a los que se asignan *significados*, entendidos como las relaciones que el individuo establece entre el objeto y su representación.

Estos significados corresponden, por un lado, a la noción de *concepto figural* de Fischbein, ya que en ella se entrelazan los aspectos figurales que están relacionados con los dibujos atribuidos a una figura geométrica en particular, junto con los limitantes conceptuales dados por el objeto geométrico desde su naturaleza teórica. Por otro lado, corresponden a las llamadas *figuras*, pues cada una es vista como "el representante de una clase de objetos que comparten el conjunto de propiedades geométricas con el que se construyó la figura" (Sánchez, 2003, p. 31). Además, la figura geométrica "consiste en el emparejamiento de un referente dado a todos sus dibujos; es entonces definida como el conjunto de parejas formadas por dos términos: el primer término es el referente, el segundo uno de los dibujos que lo representan, tomado del universo de todos los dibujos posibles del referente" (Laborde y Capponi, 1994, p. 168).

Por su parte, la característica dinámica del software para geometría dinámica hace necesario que la diferencia entre *dibujo* y *figura* se destaque, pues en este ambiente las construcciones geométricas están hechas con base en las relaciones lógicas entre los objetos, no sólo sobre los aspectos figurales de las mismas.

Goldenberg y Cuoco manifiestan su interés al respecto:

> *¿Por qué nos deberíamos preocupar por las taxonomías tripartitas y otras teorías de la mente? Por una cosa, los ambientes de Geometría Dinámica están construidos con los mismos principios: El usuario especifica a la computadora las relaciones subyacentes (los objetos matemáticos), y la computadora debe preservar ese objeto mientras que deja las características superficiales (el dibujo) completamente maleables" (1998, p. 355)*

Sin embargo, ambos aspectos ejercen una influencia en el individuo que está supeditada a su desarrollo cognitivo, por lo que no necesariamente se encuentra "balanceada" adecuadamente. En efecto, si bien es pertinente que haya una fusión entre los aspectos figurales y conceptuales para que el manejo de los objetos geométricos sea apropiado, tal hecho sólo parece existir en una situación ideal y extrema (Maracci, 2001). Como Fischbein (1993) afirma: "lo que sucede es que las propiedades conceptuales y figurales permanecen bajo la influencia de los sistemas respectivos, el conceptual y el figural" (p. 150).

No obstante, parece que los alumnos buscan dicha fusión de una u otra manera (incluso no consciente) al tratar de construir dibujos que les resulten *satisfactorios*, es decir, que cumplan con las siguientes condiciones:

- "Un dibujo debería representar 'correctamente' la situación geométrica descrita en el problema; esto significa que la comprensión del estudiante de una situación dada y su interpretación del dibujo producido debería ser consistente.
- "Un dibujo debe ser reconocido como suficientemente genérico (...).
- "Un dibujo debería poseer una buena gestalt, debería satisfacer las leyes fundamentales que controlan los procesos básicos de percepción." (Maracci, 2001, p. 481)

Empero, se puede notar que dicha satisfacción no necesariamente está relacionada con las limitantes lógicas o conceptuales de las figuras, pues la segunda y la tercera condición tienen que ver más con las limitantes figurales, como la forma (negarse a usar triángulos rectángulos como ejemplos genéricos de los triángulos) o la orientación (utilizar diagramas con segmentos o lados de polígonos alineados obligatoriamente con los bordes de la hoja).

Las tensiones que se generan entre ambos aspectos pueden transformarse en un obstáculo durante el razonamiento geométrico, especialmente cuando se inclina hacia la dirección de la preeminencia de los aspectos figurales.

Esta aproximación dual nos permitió realizar un análisis de los comportamientos de los alumnos durante el proceso de investigación realizado.

3. Algunas consideraciones sobre el software para geometría dinámica

El software utilizado para la investigación es el programa de origen francés *Cabri-Géomètre* [2], que ofrece la oportunidad de trabajar con construcciones geométricas bajo un "espíritu" euclidiano que tiene una correspondencia con la geometría euclidiana (Mariotti, 2000, p. 28). Sin embargo, las características que diferencian una aproximación a la geometría utilizando este software con respecto a la tecnología de papel y lápiz son:

- La posibilidad de definir rutinas o cadenas de construcciones bajo el nombre de macros.
- La posibilidad de construir lugares geométricos.

[2] *Cabri* es el acrónimo de "Cahier de brouillon interactif", que significa literalmente "Cuaderno de bosquejo interactivo", mientras que "Géomètre" es "Geómetra". Hay otros programas para geometría dinámica, como el norteamericano *The Geometer's Sketchpad*, que pueden ser utilizados también.

- Como característica más relevante: “la transformación continua en tiempo real llamada comúnmente *arrastre*” (Goldenberg y Cuoco, 1998, p. 351).

La operación de *arrastre* permite al usuario la modificación directa de la forma o posición de los objetos geométricos construidos mediante el uso del ratón (o algún otro periférico de la computadora), sin que se dejen de preservar las relaciones geométricas con las que fueron construidos.

Esta operación tiene consecuencias en la apreciación de la geometría, pues el software se constituye en un mediador semiótico entre el conocimiento geométrico y el usuario, ya que las funciones del arrastre pueden ser diversas y no necesariamente coinciden en todos los individuos.

Por ejemplo, Olivero (2003, pp. 5960),desde un punto de vista fenomenológico, hace una clasificación de las funciones del arrastre:

- El arrastre como *retroalimentación de las acciones* que realiza el usuario, permitiéndole tener el control sobre la construcción.
- El arrastre como *mediador entre la figura y el dibujo*, permitiéndole al usuario hacer una distinción entre ambas nociones.
- El arrastre como *modo de examen* o *modo de búsqueda*, que le permite al usuario examinar su construcción y buscar propiedades invariantes.

Por otro lado, un grupo de investigadores de Turín, Italia (Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2002), han realizado un análisis sobre las modalidades cognitivas del arrastre que alumnos del nivel medio utilizan para resolver problemas geométricos. Observaron que incluso mantienen cierta jerarquía en la obtención del control sobre el proceso de arrastre y durante el proceso de construcción de la demostración. Dichas modalidades son las siguientes:

- *Arrastre errante*: Mover los puntos básicos en la pantalla de manera aleatoria, sin un plan, a fin de descubrir configuraciones o regularidades interesantes.
- *Arrastre de borde*: Mover un punto semi-arrastrable [3] que ya está ligado a un objeto.
- *Arrastre guiado*: Arrastre de puntos básicos de una figura, a fin de darle una forma particular.
- *Arrastre de lieu muet* [4]: Mover un punto básico, de tal manera que la figura mantenga una propiedad descubierta; esto significa que sigue una trayectoria oculta (*lieu muet*), incluso sin ser consciente de esto.
- *Arrastre en línea*: Dibujar nuevos puntos en los que se mantiene la regularidad de la figura.
- *Arrastre ligado*: Ligar un punto a un objeto y moverlo en él.
- *Examen de arrastre*: Mover puntos arrastrables o semi-arrastrables, a fin de ver si la figura mantiene las propiedades iniciales” (Olivero, 2003, p. 66).

En cuanto a la posibilidad de validación se puede recurrir a la última modalidad, la

3 “Un punto semi-arrastrable es un punto en un objeto que puede ser movido, pero sólo sobre el objeto al que pertenece”.

4 *Lieu muet* significa literalmente “lugar mudo”, término que utiliza la autora (y otros autores) porque se refiere a una trayectoria que no “dice” explícitamente cuál es su forma, pues es desconocida.

de *examen de arrastre*, ya que el arrastre explota la capacidad del software para mantener las relaciones geométricas entre los elementos de una construcción y así es posible verificar si está construida correctamente (Mariotti, 2000).

La capacidad para manipular directamente las construcciones podría permitir que el alumno comience a diferenciar entre lo que se denomina el *dibujo*, como representación gráfica de un objeto geométrico, y *figura*, como relación entre el objeto geométrico y sus dibujos o representaciones gráficas (lo cual se comentó en la sección anterior). Esto se relaciona con la capacidad del individuo de "ver" más allá de la representación gráfica que tiene enfrente y llegar a un grado de abstracción mayor (Hoyles y Jones, 1998, p. 124). Sin embargo, no sólo es necesario que el usuario se percate de esa diferencia para poder explotar efectivamente el carácter dinámico del software, sino también que considere las dependencias establecidas entre los diversos objetos geométricos que intervienen en una cierta construcción, como lo expresa Straesser: *"Uno tiene que pagar por esta facilidad y estructura al considerar cuidadosamente los rasgos característicos que no están presentes en la geometría tradicional de papel y lápiz"* (2001, p. 323).

De esta manera, el *Cabri-Géomètre* se puede convertir en un ambiente que propicie la exploración de la geometría por parte del usuario, abriéndole la posibilidad de que generalice situaciones y busque casos particulares para construcciones realizadas. Sin embargo, puede provocar también situaciones que modifiquen la percepción clásica de papel y lápiz, de la geometría escolar e introducir nuevas cuestiones que, a su vez, generen nuevos problemas para ser considerados en la labor docente y en la investigación de didáctica de las matemáticas.

4. Metodología

El proceso de investigación se realizó con alumnos de tercero de secundaria (14 y 15 años) en una localidad semi-urbana cercana a la ciudad de Querétaro, México. Este proceso duró dos semanas, es decir, diez sesiones de 50 minutos cada una.

Los alumnos participaron en la realización de doce actividades diseñadas en tres conjuntos: el primero constó de cinco ejercicios relativos a triángulos, el segundo abarcó cinco sobre cuadriláteros, y el último dos con hexágonos. En todos se trabajó básicamente de acuerdo al siguiente esquema:

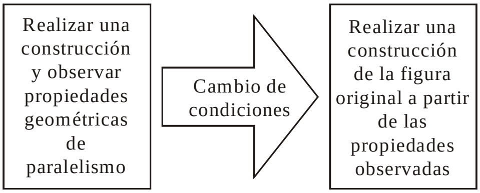


Figura 1.

Al inicio de cada una de las partes del experimento se hicieron construcciones geométricas, a fin de que los alumnos observaran el paralelismo de los lados de las figuras en las construcciones solicitadas. Este trabajo se realizó bajo la dirección del investigador, por medio de las hojas de trabajo. Luego se dio un *cambio en las condiciones*, pues se pretendía que, bajo el supuesto de que habían hecho una asociación entre una construcción original y una secundaria apoyada por el paralelismo entre los lados, los estudiantes pudiesen recuperar la original a partir de la secundaria, elaborando así construcciones inversas a partir de las propiedades observadas.

Con la finalidad de lograr esto, se diseñaron actividades basadas en la construcción de *polígonos de los puntos medios* [5] y la observación de propiedades geométricas, retomando las que Acuña (s.f.) propone como material de estudio de geometría para la actualización de profesores del nivel medio. Sólo se utilizaron como polígonos a triángulos, cuadriláteros y hexágonos, utilizando sus respectivos *polígonos de los puntos medios*: en el caso de las actividades con triángulos se emplean *triángulos de los puntos medios*; en el de los cuadriláteros, *cuadriláteros de los puntos medios*, y en el de los hexágonos, *hexágonos de los puntos medios* (ver la Figura 2 para algunos ejemplos al respecto).

Durante este proceso, en términos generales los alumnos miden las construcciones, especialmente en la primera etapa de la construcción de las figuras y las de las respectivas figuras de los puntos medios, ocupan la función de arrastre para explorar la hechura de las construcciones y luego dan argumentos que justifiquen las observaciones obtenidas al construir la figura original y la secundaria (la *de los puntos medios*). Además, formulan conjeturas que permitirían detectar condiciones necesarias y suficientes, las cuales tenderían idealmente a la deducción.

Hay diversos tipos de requerimientos que se les hacen a los alumnos. Algunos tienen que ver con el hecho de que construyan objetos para que observen e identifiquen propiedades. Estas dos acciones les permiten a los alumnos, en cierto momento, tomar decisiones sobre las acciones a seguir o bien verificar, principalmente por el *arrastre*, lo correcto de sus construcciones, las propiedades que se puedan observar o las relaciones que se establecen.

En términos generales, las actividades de los triángulos fueron:

T1. Preguntas y actividades tendientes a que los alumnos expresen algunas de sus concepciones respecto a los triángulos y así tengan información para iniciar con las construcciones en la computadora.

T2. Construcción de un triángulo y de su *triángulo de los puntos medios*, así como la observación del paralelismo entre los lados de ambos triángulos.

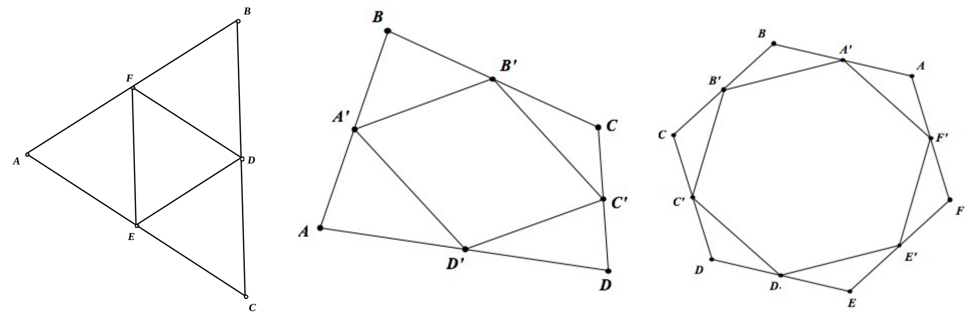


Figura 2. Triángulo, cuadrilátero y hexágono con sus respectivos polígonos de sus puntos medios.

---

5 En términos generales, se puede decir que el *polígono de los puntos medios* de otro polígono dado es el que se obtiene al considerar como vértices los puntos medios de los lados del polígono original (Figura 2).

T3. Construcción de un triángulo y su *triángulo de los puntos medios* a partir de las propiedades de paralelismo entre los lados del triángulo (la situación recíproca a la de la actividad anterior). Los alumnos exponen sus observaciones y las preguntas planteadas en las hojas de trabajo llevan la intención de que estén seguros que la reciprocidad de las situaciones es válida. De esta manera, se hace hincapié en que la relación de dependencia entre la figura original y la de los puntos medios se apoya en el paralelismo de los lados respectivos.

T4. Propuesta de un procedimiento para construir el triángulo original a partir de su *triángulo de los puntos medios*.

T5. Aplicación del procedimiento de la actividad anterior, así como su verificación y justificación. En esta actividad se les proporciona a los alumnos un archivo de *Cabri* que contiene un triángulo escaleno (en el cual ninguno de sus lados es paralelo a los lados de la pantalla), que fungirá como *triángulo de los puntos medios* de aquel que deben reconstruir, para lo cual es necesario que tomen en cuenta las condiciones iniciales observadas en las actividades anteriores. En caso de que la construcción o el procedimiento propuesto fallen, entonces viene una exploración que permita determinar cuál fue el error.

Las actividades de los cuadriláteros fueron:

C1. Construcción de un cuadrilátero, de su *cuadrilátero de los puntos medios* y observación de las propiedades de este último. Durante tal exploración, se pretende que los alumnos identifiquen el tipo de cuadrilátero que es el *de los puntos medios* a partir de sus propiedades, el cual a la sazón resulta ser un paralelogramo.

C2. Exploración de las relaciones entre las diagonales del cuadrilátero y de su *cuadrilátero de los puntos medios*, a fin de justificar el paralelismo entre los lados del segundo, al considerar las propiedades observadas en la actividad 2 de triángulos (*T2*).

C2a y *C3*. Se retoman las propiedades observadas para determinar qué propiedades debe cumplir un cuadrilátero dado, a fin de que su *cuadrilátero de los puntos medios* sea un rectángulo (definido como un paralelogramo de ángulos internos congruentes).

C4. Propuesta de un procedimiento para construir un cuadrilátero a partir de su *cuadrilátero de los puntos medios*. A los alumnos se les da un archivo de *Cabri* con un paralelogramo (que no es ni rectángulo ni rombo, y ninguno de sus lados es paralelo a las orillas del monitor), el cual fungirá como *cuadrilátero de los puntos medios* para que intenten la construcción. Nuevamente, los estudiantes deben considerar como condiciones iniciales las propiedades observadas previamente.

Finalmente, las actividades de hexágonos fueron:

H1. Con un hexágono regular proporcionado en un archivo de *Cabri*, los alumnos observan el paralelismo entre dos de sus lados opuestos a partir de que usan la diagonal paralela a ambos lados, construyendo la prolongación de los lados adyacentes a uno de los lados considerados y la diagonal construida, relacionándolo con lo observado en las actividades 2 y 3 con triángulos (*T2* y *T3*).

H2. De nuevo, iniciando con un hexágono regular en un archivo de *Cabri*, se pide la construcción de su *hexágono de los puntos medios* y la observación de sus propiedades para determinar si este último es un hexágono regular a partir de lo observado en las actividades con triángulos.

Por lo general, en cada una de estas últimas actividades se les proporciona a los alumnos una situación, se les pide que observen y finalmente justifiquen, utilizando las propiedades percibidas en las partes anteriores de actividades.

Cabe mencionar que las actividades de los alumnos se hicieron en equipos de dos integrantes, proporcionándoles una hoja de trabajo con instrucciones, preguntas y espacios para las respuestas. Los alumnos trabajaron con la computadora o sin ella, dependiendo de la actividad, platicaron entre ellos y contestaron las preguntas, entregando al final de cada sesión sus hojas de trabajo al investigador.

Así, la información obtenida se recabó a partir de las hojas de trabajo de los alumnos (protocolos), de grabaciones de algunas conversaciones que se tuvieron con ellos y de los archivos de *Cabri* que generaron. Es pertinente mencionar que esta posibilidad del programa deja revisar la construcción guardada previamente en alguna sesión y así puede considerarse como una *ventana* del pensamiento del alumno (en un sentido como el que plantean Noss y Hoyles, 1996), pues permite rastrear y analizar el proceso de la construcción que se realizó, como reflejo de los razonamientos y procesos puestos en marcha para la resolución de las situaciones planteadas. [6]

5. Resultados y discusión

Los equipos se pudieron identificar de acuerdo con su nombre de pila. Al final de los trabajos se recabaron 22 conjuntos de protocolos e igual cantidad de archivos, hechos en *Cabri*. A esto, como ya se comentó, se le añadió como fuente de información las grabaciones de algunas conversaciones entabladas con los alumnos cuando sus respuestas en los protocolos o las construcciones en la pantalla llamaban la atención.

En esta parte del trabajo se mostrarán algunas respuestas y ejemplos de los archivos que proporcionaron los alumnos, a fin de iniciar un análisis sobre sus acciones.

5.1. Sobre la preferencia en la apreciación de propiedades geométricas

Durante las actividades se les pidió a los alumnos que observaran algunas propiedades relacionadas con el paralelismo surgido a consecuencia del uso de los puntos medios en los triángulos, los cuadriláteros y los hexágonos, debido a que esta propiedad resultaba relevante. Sin embargo, los alumnos no la consideraron, pues notaron propiedades que aparentemente podrían estar más cercanas a su experiencia directa, a su percepción visual y sus trabajos previos.

Así pues, cuando en la tercera actividad con triángulos (*T3*) se les pregunta (ver la

6 Desafortunadamente, hasta la versión utilizada (*CabriGéomètre II*, versión 1.0 para *MSWindows* de 1998) los objetos que son borrados antes de guardar la construcción en el archivo, y que quizá representarían posibles intentos fallidos o descartados, no quedan registrados y no pueden ser recuperados.

Figura 2 a la izquierda para el nombre de los vértices):

> *a)* ¿Cómo son los lados *BC* y *EF* entre sí? ____________________________

Nueve equipos dan como referencia a que son iguales los segmentos, seis aluden a la diferencia de los tamaños y dos a la forma, entre otros tipos de referencia. En total, el 80% de las referencias que hicieron los alumnos tuvieron que ver con la forma o el tamaño de los lados; sólo el 20% atendió al hecho de que ambos lados eran paralelos.

En la siguiente pregunta, donde se les pide a los alumnos que expliquen porqué ocurre lo que describieron, solamente un equipo (el de Bibiana y Mariana) justifica mencionando al paralelismo, pero en su respuesta anterior no hizo referencia a dicha propiedad:

> *a)* ¿Cómo son los lados BC y EF entre sí? Son dos líneas iguales [7].
> *b)* ¿Por qué? Porque son paralelas

Es interesante observar que sólo cinco equipos contestaron que los lados de los triángulos son paralelos en el inciso *a)*, lo cual justifican con argumentos empíricos y visuales, que tienen que ver con el hecho de que no se juntan, o haciendo referencia a que se consideraron los puntos medios.

Al solicitarles en la actividad *T4* que elaboren un procedimiento para obtener el triángulo *ABC* a partir del que fungirá como su *triángulo de los puntos medios*, los alumnos debieron echar mano de las propiedades que observaron, discriminando aquello que no les sirve de lo que les puede ayudar, como el paralelismo. No obstante, seis equipos hicieron referencia en sus procedimientos al tamaño de los lados; seis al acomodo de los vértices previendo la utilización del software; cuatro mencionaron la necesidad de buscar los puntos medios y tres aludieron a la forma, como fue el caso del equipo de Catalina y Patricia: Pusimos los puntos (d e f) y como el chico siempre es para abajo unimos las vértices, luego pusimos los puntos para hacer el triángulo grande y nos salieron al todo tres triángulos grandes y uno chico. En otras palabras, el 77% de las referencias que se hicieron en estos procedimientos indican el movimiento o a propiedades que se aprehenden visualmente, mientras que sólo cinco se fijaron en el uso de la propiedad del paralelismo.

Por otro lado, con la finalidad de que los alumnos previeran las propiedades de los lados de los triángulos, lo cual les serviría para organizar la información vista previamente en la misma actividad, se les preguntó:

> *d)* ¿Cómo van a ser los lados del triángulo grande con relación a los del triángulo chico? ¿Por qué?________

Resultó que 17 equipos aluden a la diferencia en los tamaños de los lados y ninguno al paralelismo (los cinco equipos restantes dieron referencias relativas a la igualdad de los lados, la posición y los vértices).

Como pregunta relacionada, luego de la construcción se les planteó lo siguiente en

[7] Las preguntas de los protocolos que se reproducen están en recuadros y las respuestas de los alumnos se han trascrito utilizando un tipo de letra diferente al del resto del texto, a fin de facilitar la identificación de lo que escribieron. Es importante mencionar que sólo los errores ortográficos de los alumnos fueron corregidos (para darle claridad al texto), pero los errores de redacción no.

la actividad 5 de triángulos:

a) ¿Cómo quedan los lados del triángulo *ABC* con respecto a los del triángulo *DEF*? ________________

Nuevamente, la mayoría mencionó el tamaño de los lados (13 equipos) y sólo tres indicaron el paralelismo entre los lados. El resto de los equipos dijo cosas como el cambio en la posición, que "van en sentidos contrarios" –refiriéndose a que los triángulos señalan en dos direcciones distintas– o que eran "simétricos". Dichas respuestas también están relacionadas directamente como referencias visuales.

Se puede mencionar que en general 16 equipos mantuvieron cierta congruencia en las respuestas de estas dos preguntas y sólo cinco manifestaron algún cambio (el cual, hay que decirlo, no siempre fue para considerar propiedades geométricas).

Por ejemplo, el equipo conformado por Sandra y Cynthia contestó:

Actividad T4. Pregunta 3.
d) ¿Cómo van a ser los lados del triángulo grande con relación a los del triángulo chico? ¿Por qué? Inclinados porque al hacer los triángulos quedan triángulos inclinados
Actividad T5. Pregunta 3. *a)* ¿Cómo quedan los lados del triángulo *ABC* con respecto a los del triángulo *DEF*? Quedan los lados del triángulo paralelos

El equipo integrado por Sonia y Stephany afirmó:

Actividad T4. Pregunta 3.
d) ¿Cómo van a ser los lados del triángulo grande con relación a los del triángulo chico? ¿Por qué? Que los del triángulo grande van hacer lo doble del triángulo chico

Actividad T5. Pregunta 3. *a)* ¿Cómo quedan los lados del triángulo *ABC* con respecto a los del triángulo *DEF*? Los lados del triángulo son paralelos

Otra oportunidad para observar este aspecto se encuentra en las primeras actividades con cuadriláteros, particularmente en la actividad *C1*, donde se les pide a los alumnos que al final escriban en un párrafo y a manera de síntesis lo que observaron:

9. Hasta ahora han construido un cuadrilátero y su *cuadrilátero de los puntos medios*, y han observado algunas propiedades del *cuadrilátero de los puntos medios* (algunas de las cuales han escrito antes, en esta hoja). En los siguientes renglones anoten como resumen los hechos que observaron (completen a partir de las primeras palabras escritas):

Si tenemos un cuadrilátero y se construyen los puntos medios de sus lados y luego se unen entre sí ocurre que... ____________________

Resultó que doce de los veintidós equipos hicieron una referencia explícita a la forma, las medidas, la posición o, incluso, a las áreas del cuadrilátero original o del que se forma. Por el contrario, sólo dos equipos expresaron como propiedad relevante del *cuadrilátero de los puntos medios* el paralelismo de sus lados opuestos. El resto de los equipos (ocho) observaron que se formó una figura geométrica que no tiene alguna propiedad en particular (el equipo formado por Diego y Lorena escribió: Se puede formar unos triángulos o rectángulos.

En la actividad 2a de cuadriláteros, donde se espera que los alumnos utilicen su imaginación y capacidad para manipular mentalmente figuras, así como las propiedades de los rectángulos para que piensen lo que necesita un cuadrilátero a fin de “convertirlo” en un rectángulo, se pueden considerar dos preguntas (la **3** y la **4**): una relativa a los lados del cuadrilátero, la otra a sus ángulos.

Aquí, ocho equipos consideraron el movimiento de los vértices (como si se estuviese utilizando *Cabri*), diez hicieron referencia a la modificación del tamaño de los lados, uno a utilizar puntos medios, otro mencionó unir los vértices y sólo un equipo dijo que se necesita que los lados opuestos sean de la misma medida (no mencionaron el paralelismo). En resumen, ocurrió que el 95% de los equipos recurrieron a procesos basados en el movimiento de los vértices o en el dibujo que tenían enfrente.

En la siguiente pregunta, relativa a los ángulos, cinco equipos afirmaron que hay que mover los vértices (al igual que en el caso anterior), dos que los ángulos deben ser iguales a los que ya están en el dibujo, cinco hablaron sobre la necesidad de modificar el tamaño, cuatro dijeron que tienen que hacer los ángulos de la misma medida y tres equipos hicieron una referencia similar, sólo que dan la medida a obtener: 90°. En otras palabras, poco más de la mitad de los equipos atendió a procesos que involucran el movimiento o el acomodo del dibujo, o bien hacen referencia a los aspectos figurales de los cuadriláteros.

De todo esto se puede decir brevemente que, para la mayoría de los alumnos, el paralelismo no es una propiedad tan evidente y relevante como la longitud de los lados (segmentos) y la forma de los cuadriláteros. Tal parece que para los alumnos hay propiedades que tienen más preferencia que otras, se fijan en los aspectos figurales que en los conceptuales, incluso en este caso donde se insistió reiteradamente en el paralelismo como propiedad que fungió como eje rector de las actividades.

5.2. La rigidez geométrica y la orientación de las construcciones

Otro de los aspectos donde hubo interés por observar fue la denominada *rigidez geométrica* como fenómeno relacionado con la visualización de las figuras geométricas, el cual está influenciado fuertemente por la orientación de las representaciones gráficas, pues es muy común que el individuo no pueda manejar mentalmente una figura geométrica cuando no tiene una cierta orientación, o bien imaginarse el resultado de alguna traslación o deformación.

A continuación, se presentan observaciones sobre las respuestas y archivos hechos por equipos.

El equipo de Bibiana y Mariana

En la primera actividad de los cuadriláteros, este equipo hizo una referencia directa sobre la forma de los objetos geométricos. Al preguntarle sobre la posibilidad de que tenga una propiedad el *cuadrilátero de los puntos medios* (el resaltado es añadido), sus integrantes afirmaron:

> *g)* ¿Tiene alguna propiedad en especial? Sí. Que aunque el cuadrilátero grande esté **chueco** el chico sigue teniendo dos lados iguales.

En la misma actividad, al solicitarles que expresaran sus observaciones en la forma de una afirmación, ignoraron las observaciones sobre paralelismo o incluso sobre las mediciones realizadas, haciendo sólo referencia a la forma:

9. (Afirmación) **Si tenemos un cuadrilátero y se construyen los puntos medios de sus lados y luego se unen entre sí ocurre que...** los unimos y se forma cuadrilátero menor, donde cada vértice es punto medio del cuadrilátero mayor.

Además, en las ocasiones cuando necesitaron hacer uso del paralelismo, sus justificaciones aludieron a la forma de los segmentos, como ocurrió en la primera actividad con hexágonos:

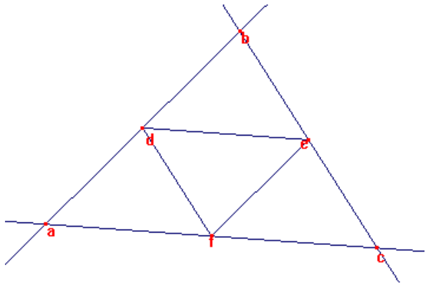
4. Consideren el cuadrilátero *ABCF* y prolonguen los lados *FA* y *BC* para formar un triángulo. Al tercer vértice llámenle *M*. ¿Cómo es este triángulo? Tiene dos lados iguales y uno desigual. *b)* ¿Por qué? Son dos líneas iguales que son iguales están inclinadas pero no se juntan.

Y también en la segunda:

a) ¿Las diagonales trazadas son paralelas entre sí? Si.
b) ¿Por qué sí o por qué no? Son dos líneas rectas que no se juntan.
c) ¿Los lados opuestos del *hexágono de los puntos medios* (del chico) son paralelos entre sí (por ejemplo, *A'B'* con respecto a *D'E'*, *B'C'* con respecto a *E'F'* y *C'D'* con respecto a *F'A'*)? Si.
d) ¿Por qué sí o por qué no? Son rectas, están inclinadas y no se juntan.

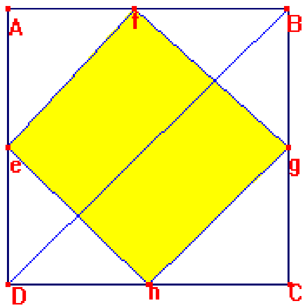
Adicionalmente, en las construcciones de los archivos generados se evidencia la preferencia por utilizar construcciones en posición y forma estándar. Resulta ilustrativa la actividad *T3*, donde incluso previeron la posición final del triángulo *ABC* y así construyeron “adecuadamente” su triángulo *DEF* (como se puede ver más adelante):

b) El triángulo chico (con el que van a empezar), ¿necesita tener alguna propiedad especial? Sí. Porque tiene que tener los lados del mismo tamaño.
c) ¿Puedes usar cualquier triángulo como *triángulo de los puntos medios*? Sí.



De manera similar, en la tercera actividad con cuadriláteros, al buscar las propiedades del cuadrilátero *ABCD* para que su *cuadrilátero de los puntos medios* sea un rectángulo, recurrieron a un cuadrado:

a)¿Es necesario que el cuadrilátero *ABCD* tenga alguna propiedad especial? ¿Sí o no? ¿Cuál? Sí.
b) Si tiene una propiedad especial, ¿por qué será? Que sea cuadrado.



El equipo de Roberto y Ricardo

Para estos dos alumnos, el uso de figuras de forma y posición estándar estuvieron presentes de una manera más bien ocasional, mas ello no impidió la generación de conflictos en sus respuestas. Por ejemplo, al momento de reconstruir[8] el triángulo *ABC* a partir del triángulo *DEF*, en la cuarta actividad de triángulos apareció una contradicción entre las respuestas del inciso *b)* y de la pregunta **4** contra la del inciso *c*):

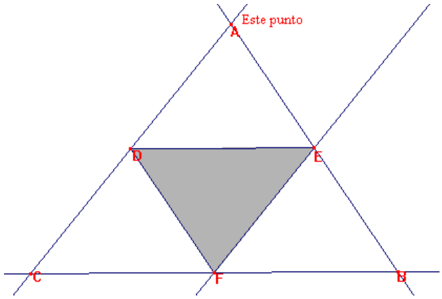
a) ¿Cuál sería el primer paso para la construcción? Colocar 3 puntos.

b) El triángulo chico (con el que van a empezar), ¿necesita tener alguna propiedad especial? Lo más parecido a un equilátero.

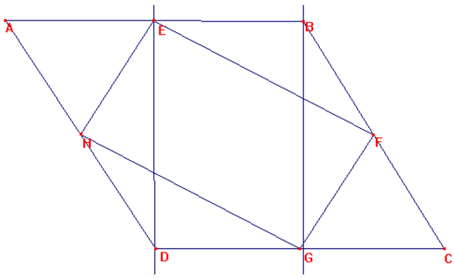
c) ¿Puedes usar cualquier triángulo como *triángulo de los puntos medios*? Sí.

4. Escriban el procedimiento en el que pensaron para construir el triángulo grande: 1. Colocar 3 puntos con forma lo más aproximada a un equilátero. 2. Ponerles nombre. 3. Sacar líneas paralelas a los lados del triángulo chico 4. Colocar vértices donde se intersectan las líneas 5. Poner nombres a los nuevos vértices.

Esta contradicción surge por el posible conflicto entre los aspectos figurales y conceptuales, ya que si bien parece que buscan un dibujo que los convenza (Maracci, 2001), no evitan incluir la referencia a un polígono regular. En su archivo, los alumnos modificaron la forma del triángulo proporcionado para darle una forma más cercana al que parece ser su ejemplo genérico de triángulo, el equilátero:



Otro ejemplo apareció en el archivo generado durante la tercera actividad de cuadriláteros (*C4*), en la cual, para descubrir las propiedades que necesita *ABCD* para que *EFGH* sea un rectángulo, recurrieron al uso de un paralelogramo orientado horizontalmente y al de dos rectas aparentemente verticales (en realidad, las rectas *ED* y *BG* están posicionadas de esa manera “a mano alzada”, sin ninguna propiedad geométrica en particular):



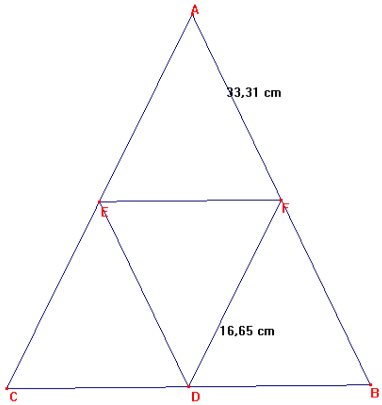
El equipo de Celene y Marissa

Estas dos alumnas mostraron una tendencia en el uso de figuras en posición y forma estándar, aunque a veces la imagen creada en la computadora no coincide completamente. Por ejemplo, en la segunda actividad con triángulos respondieron:

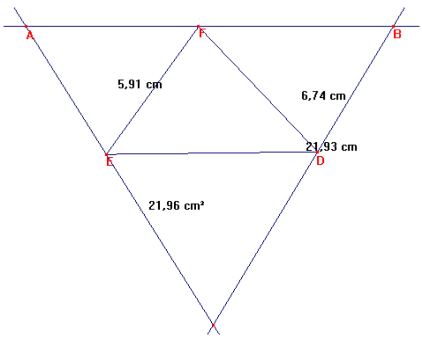
8 Con el término “re-construir” quiero hacer énfasis en el hecho de que no sólo tienen que construir el triángulo *ABC*, sino que tienen que recuperar las propiedades observadas e idear una construcción que las tome en cuenta para recuperarlo.

> *o)* ¿Hay alguna relación entre los perímetros de los dos triángulos? Sí, que todos los lados miden lo mismo, el chico mide 16.65 cm y el grande 33.31 cm.

Aunque para la construcción que realizaron no utilizaron triángulos equiláteros, sí recurrieron al típico triángulo con un lado horizontal, "apuntando" hacia arriba y casi isósceles:



Por otra parte, en la última actividad de triángulos (*T5*) modificaron la forma del triángulo proporcionado con tal de tener y obtener triángulos con una orientación y una forma aparentemente más cómoda (un lado horizontal y, de nuevo, casi isósceles):



El equipo de Beatriz y Maribel

Las respuestas de este equipo mostraron una preferencia por el uso de referencias a la forma que perciben en la pantalla de la computadora, lo cual se muestra en sus respuestas; por ejemplo, en las de la primera actividad con cuadriláteros:

> *b)* Después de que movieron alguno de los vértices, ¿ocurre que el punto medio del lado (por ejemplo) *AB* que se llama *E* sigue siendo el mismo punto? ¿Por qué sí o por qué no? Sí, lo único que cambia es el tamaño de los lados. no el punto medio.
> *c)* ¿Es el punto medio?, ¿Por qué sí o por qué no? Sí, porque lo único que cambia es el tamaño.

Esto hizo que Beatriz y Maribel incurrieran en una tensión entre los aspectos figurales y los conceptuales, pues mientras en unas preguntas contestaban utilizando la información visual (y empírica), en otras adyacentes empleaban las propiedades geométricas (las siguientes respuestas son de la misma actividad):

> **8.** *h)* Suponiendo que el cuadrilátero de los puntos medios tiene una forma especial, ¿que característica o propiedad tiene? Que dos lados miden 8.18 cm y los otros 7.58 cm. y son paralelos.
> *i)* Si suponemos que tiene alguna característica especial ese cuadrilátero, ¿cuál sería un nombre adecuado para él? Es decir, ¿es un cuadrilátero con nombre especial? ¿Cuál es? Paralelogramo
> *j)* ¿Cómo son entre sí los lados opuestos del *cuadrilátero de los puntos medios*? 2 más grandes y 2 más chicos.

E incluso recurrieron a propiedades irrelevantes que contradicen a otras, con tal de utilizar figuras familiares para ellas, como es el caso de la cuarta actividad con los triángulos:

> *b)* El triángulo chico (con el que van a empezar), ¿necesita tener alguna propiedad especial? Sí, de tener sus lados iguales, para que el grande tenga sus puntos medios.
> *c)* ¿Puedes usar cualquier triángulo como *triángulo de los puntos medios*? Sí, todo triángulo tiene puntos medios.

El equipo de Luis y Fernando

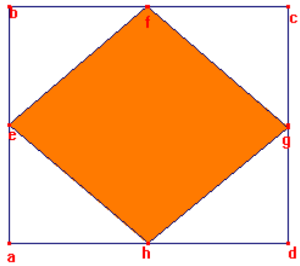
En la primera actividad con cuadriláteros, al momento de resumir las observaciones realizadas durante la actividad, estos dos alumnos se preocuparon más por los aspectos figurales de la construcción más que por la información geométricamente relevante:

> **9.** (Afirmación) **Si tenemos un cuadrilátero y se construyen los puntos medios de sus lados y luego se unen entre sí ocurre que...** Quedarán unidos de cualquier forma siempre que se muevan.

Además, presentaron una tendencia recurrente en sus archivos al uso de figuras en posición y forma estándar con orientaciones horizontal-vertical. Por ejemplo, en la cuarta actividad con triángulos respondieron lo siguiente (a pesar de que en ese momento no generaron ningún archivo):

> *b)* El triángulo chico (con el que van a empezar), ¿necesita tener alguna propiedad especial? Ser equilátero o cualquiera.

Pero en la primera actividad con cuadriláteros dejaron su archivo, como se muestra a continuación (nótese la orientación del cuadrilátero *abcd* y el parecido a un rombo del cuadrilátero *efgh*):



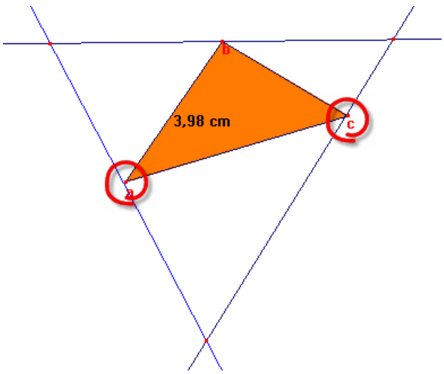
Además, en la tercera actividad con cuadriláteros recurrieron a un cuadrilátero *ABCD* con una forma casi de cuadrado y así lo describieron:

> **5.** Si ahora tuvieran que investigar además lo que necesita el cuadrilátero *ABCD* para que su *cuadrilátero de los puntos medios* fuera un cuadrado, ¿cómo le harían? ¿Qué propiedades necesitaría ese cuadrilátero? Hacer de un cuadrado la base para que el cuadrilátero basado haga lo mismo.

Por otro lado, en la actividad 1 de hexágonos evidenciaron una dificultad en la reconfiguración (Sánchez, 2003), pues consideran que un punto que es vértice en un hexágono no puede tomar el papel de punto medio en un triángulo:

> **5.** ¿*A* y *B* son los puntos medios de los lados *FM* y *CM* del triángulo que se acaba de formar? ¿Por qué? No, sólo son los vértices.

También se puede mencionar que en la actividad *T5* hicieron una construcción en la cual los vértices del triángulo *DEF* dado ni siquiera están sobre los lados del triángulo *ABC* a reconstruir. En la siguiente figura aparece la construcción de los alumnos y se puede observar, tras un análisis minucioso (lo cual se facilita si se tiene a la mano el archivo de *Cabri* generado por ellos), que los puntos señalados con círculos rojos no están sobre los lados del triángulo grande:



Al respecto hay dos observaciones pertinentes. Primera, a pesar de la forma del triángulo chico, el grande tiene una clara forma estándar de tener un lado casi horizontal y una forma parecida a un triángulo isósceles. Segunda, se nota que los alumnos cambiaron las etiquetas de los puntos del triángulo chico, pues deberían ser *D*, *E* y *F*, pero ahora son *a*, *b* y *c*, mientras que los vértices del triángulo grande no tienen etiquetas.

6. Conclusiones

Como se ha mencionado antes, al hablar de los fenómenos cognitivos relacionados con aspectos figurales presentes en las respuestas de los alumnos, me referiré en un primer momento a la rigidez geométrica, que está ligada al uso de figuras en posición "estándar" o prototipo[9] y con otros fenómenos, como es el uso de justificaciones empíricas y el del *arrastre* (en el software) como herramienta externa.

La rigidez geométrica es un fenómeno relacionado con la visualización de las figuras geométricas. Ocurre cuando hay una incapacidad del individuo para manejar mentalmente una figura geométrica al no estar en ciertas posiciones "estándares", o no pueden imaginarla cuando se mueve (bajo una traslación) o cambia su forma; es decir, cuando sus lados cambian de posición o sus ángulos se modifican (Larios, 2003). Como se mencionó en la sección anterior, tal fenómeno aparece con los alumnos estudiados en varias ocasiones y, de hecho, en más casos de los reportados en este artículo.

Este fenómeno puede ser relacionado con los conflictos que aparecen entre los aspectos figurales y conceptuales de los objetos geométricos, así como con la necesidad que establece Maracci (2001) de que los alumnos buscan dibujos satisfactorios, como ocurrió en los casos de los equipos formados por Bibiana y Mariana, y por Roberto y Ricardo. En efecto, algunos estudiantes necesitan utilizar dibujos hechos en posiciones estándar para poder detectar a las figuras y sus relaciones espaciales y así poder trabajarlas; al mismo tiempo, se evidencia la incapacidad de interpretar el "movimiento" de una figura o de un diagrama realizado en la pantalla de la computadora, es decir, de percibir la característica dinámica del software. Por ejemplo, Celene y Marissa cambiaron la forma del triángulo que les fue dado en la última actividad con triángulos para que el triángulo *ABC* que hicieron tuviera una forma y una orientación más cómoda con un lado horizontal y siendo casi isósceles, recuperando así una figura geométrica conocida, rígida y considerada como correcta.

9 Especialmente las orientadas de manera horizontal-vertical respecto a la hoja de papel.

La orientación es considerada por los alumnos como un atributo importante de la figura, a pesar de que no aparece en las definiciones de los objetos geométricos que entran en juego durante las construcciones.

Por otro lado, durante el uso de la operación de *arrastre*, al modificar las construcciones o las figuras también apareció en ocasiones la incapacidad de algunos alumnos por visualizar todos los momentos intermedios de esta transformación y considerarlos como casos particulares de la figura o la construcción. Se observó que los alumnos percibieron algo que he llamado *arrastre inicio-fin* (Larios, 2003) y que Olivero (2003, p. 141) denomina *photo-dragging*, ya que solo se lograban considerar dos casos: la construcción hecha antes de la operación de modificación por arrastre y aquella obtenida al terminar de mover el ratón. Los casos intermedios parecen no ser considerados como otros casos posibles de la construcción, sino como diagramas intermedios que no tienen el mismo status geométrico que las construcciones inicial y final, posiblemente porque son provisionales. Hemos considerado este fenómeno como otra forma de rigidez geométrica (Larios, 2005b), pues la que hasta ahora se había reportado en la literatura habla de la incapacidad para imaginar las figuras en movimiento, mientras que en este caso, a partir de la figura en movimiento, no se puede imaginarla en cada punto intermedio como una figura determinada.

En general, se percibe una preponderancia de las observaciones basadas en los aspectos figurales de los alumnos que dificultan la identificación de las figuras y, por tanto, el trabajo de observación de propiedades geométricas. En efecto, el uso de figuras con formas o posiciones “estándares” limita las opciones para la exploración de posibilidades y de la amplitud de las propiedades que se pueden observar. Con ello se pierde la posibilidad de explorar sobre otras posibles configuraciones de las construcciones que cumplan con los requisitos planteados, restringiendo así las posibilidades de observar libremente cuáles pueden ser las propiedades o condiciones necesarias para hacer actividades relacionadas con la construcción.

Estos fenómenos muestran que, desde nuestro punto de vista, los conceptos figurales correspondientes no han sido aprehendidos por los estudiantes, ya que el aspecto figural no es usado como recurso heurístico, sino como recurso referencial, mientras que el aspecto conceptual en los estudiantes se ve restringido en su aplicación, debido a que no ven la necesidad de apoyarse en las propiedades geométricas al desarrollar sus tareas de construcción y explicación. Así, no hay todavía una fusión entre los aspectos conceptuales y figurales, a pesar de los diversos intentos de los alumnos por construir dibujos satisfactorios a la vista (en el sentido de Maracci, 2001).

Por otro lado, aunque muy ligado, está el fenómeno al que se hace referencia al inicio de la sección anterior, el cual tiene que ver con el hecho de que los estudiantes les atribuyen una mayor preponderancia a algunas propiedades que a otras, e incluso algunas las consideran y otras no. También en otros trabajos (Larios, 2005a, 2005b) se ha hecho mención no sólo de que los alumnos presentan un mejor manejo de las propiedades geométricas si las figuras están visualmente orientadas en posición estándar o en actividades derivadas de la medición y el cálculo, sino que se utilizan como criterios de validación del paralelismo el tamaño y la orientación de los segmentos, pero no la propiedad en sí. En otras palabras, hay propiedades visualmente más evidentes para los alumnos que "merecen" ser consideradas, mientras que otras no. Algunas propiedades o situaciones observadas sobre el tamaño de los objetos geométricos, su forma, el hecho de que dos o más rectas o circunferencias concurran parecen tener mayor posibilidad de ser tomadas en cuenta y aprehendidas que otras menos evidentes visualmente como, en este caso, el paralelismo.

7. Referencias

Acuña S., C. M. (s.f.). *Algo sobre puntos medios*. México: Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas y Cinvestav.

Arzarello, F.; Olivero, F.; Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 34* (3), 6672.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics 24*, 139-162.

Goldenberg, E. P. y Cuoco, A. A. (1998). What is dynamic geometry? En R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 351-367). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Hölzl, R. (1995). Between drawing and figure. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 117-124). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Hoyles, C., y Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 121-128). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Laborde, C. y Capponi, B. (1994). Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14* (1-2), 165210.

Larios O., V. (2003). Geometrical rigidity: an obstacle in using dynamic geometry software in a geometry course. En M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research on Mathematics Education*. Bellaria, Italia: Edizione Plus, Pisa University Press.

Larios O., V. (2005a).). La construcción de la prueba geométrica en un ambiente de geometría dinámica en secundaria. En J. Lezama, M. Sánchez y J.G. Molina, J.G (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 18, pp. 765-770). México: Clame.

Larios O., V. (2005b). *Fenómenos cognitivos presentes en la construcción de argumentos en un ambiente de Geometría Dinámica*. Tesis de doctorado, Cinvestav, México.

Maracci, M. (2001). Drawing in the problem solving process. En J. Novotná (Ed.), *Proceedings of 2nd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 478-488). Praga, República Checa: Charles University.

Mariotti, M. A. (1995). Images and concepts in geometrical reasoning. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 97-116). Berlín, Alemania: SpringerVerlag.

Mariotti, M.A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics 44*, 2553.

Noss, R. y Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings*. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Olivero, F. (2003). *The proving process within a dynamic geometry environment*. Tesis de doctorado, University of Bristol, Graduate School of Education, England.

Parzysz, B. (1988). «Knowing» vs «seeing». Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics 19*, 79-92.

Sánchez S., E. (2003). La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración. *Educación Matemática 15* (2), 27-54.

Simon, M. A. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: The search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics 30*, 197-210.

Straesser, R. (2001). *Cabri-Géométre*: does dynamic geometry software change geometry and its teaching and learning? *International Journal of Computer for Mathematical Learning 6* (3), 319-333.

Vygotski, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona, España: Crítica.

Víctor Larios Osorio
Fac. de Ingeniería (Div. de Estudios de Posgrado e Investigación)
Universidad Autónoma de Querétaro
México

E-mail: vil@uaq.mx