Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
RELIME
eISSN 2007-6819
Vol. 28, e435

Artículo
https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e435

# Função afim e a construção do cenário animado Balão: dialéticas artefato-instrumento e instrumentação-instrumentalização

## Affine function and the construction of the animated scenario Air Ballon: artifact-instrument and instrumentation-instrumentalization dialectics

*Adrieli Cristine, Bueno*
Universidade Estadual do Paraná, Brasil.
*Maria Ivete, Basniak*
Universidade Estadual do Paraná, Brasil.
*Daysi Julissa, García-Cuéllar*
Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

**Resumen**

Esta investigación cualitativa, tiene como objetivo investigar elementos de la función afín que son manifestados por un estudiante de Enseñanza Fundamental en la construcción de un escenario animado en GeoGebra. Se presenta y analiza la construcción del escenario animado Globo aerostático, mediante el Aproximación Instrumental, desarrollado por un estudiante de 8º año de la Enseñanza Fundamental (13 años) y se analiza considerando las dialécticas artefacto-instrumento e instrumentación-instrumentalización. A través de los invariantes operativos, se evidenciaron manifestaciones de elementos matemáticos relacionados a la función afín creciente, decreciente y constante durante la construcción del escenario. Además, se identificó que, para el estudiante, el artefacto GeoGebra se transformó en diferentes instrumentos, pues él usó el software para construir, limitar y unir funciones que componen las partes del camino del recorrido del globo aerostático y, luego, para animar la construcción.

**Palabras clave:**

- *Educación Matemática*
- *Aproximación Instrumental*
- *Función afín*
- *Escenarios animados*

Cómo citar:

Bueno, A. C., Basniak, M. I., García-Cuéllar, D. J. (2025). Função afim e a construção do cenário animado Balão: dialéticas artefato-instrumento e instrumentação-instrumentalização. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 28,* e435. https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e435



Recepción: 13/09/2024 Aceptación: 18/12/2025 Publicación: 19/12/2025

**Abstract**

This qualitative research aims to investigate the characteristics of the affine function manifested by an Elementary School student in the construction of an animated scenario in GeoGebra, from the artefact-instrument and instrumentation-instrumentalization dialectics. In this way, the construction is presented and analyzed through the Instrumental Approach of the animated scenario Balloon, developed by an 8th-grade elementary school student (13 years old). Through the operative invariants, manifestations of mathematical elements related to increasing, decreasing, and constant affine functions were identified during the construction of the scenario. Additionally, it was noted that for the student, the artifact GeoGebra transformed into different instruments, as he utilized the software to build, limit, and unite functions that comprise the parts of the balloon path, and then animate the construction.

**Keywords**

- *Mathematics Education*
- *Instrumental Approach*
- *Affine Function*
- *Animated scenario*

**Resumo**

Esta pesquisa, de cunho qualitativo, tem por objetivo investigar elementos da função afim manifestados por um estudante do Ensino Fundamental na construção de um cenário animado no GeoGebra, a partir das dialéticas artefato-instrumento e instrumentação-instrumentalização. Dessa forma, é apresentada e analisada, por meio da Aproximação Instrumental, a construção do cenário animado Balão, desenvolvido por um estudante do 8º ano do Ensino Fundamental (13 anos). Por meio dos invariantes operatórios, foram evidenciadas manifestações de elementos matemáticos relacionados à função afim crescente, decrescente e constante durante a construção do cenário. Além disso, foi identificado que, para o estudante, o artefato GeoGebra se transformou em diferentes instrumentos, pois ele usou o software para construir, limitar e unir funções que compõem as partes do caminho do balão e, em seguida, animar a construção.

**Palavras-chave**

- *Educação Matemática*
- *Aproximação Instrumental*
- *Função afim*
- *Cenários animados*

**Résumé**

Cette recherche qualitative, vise à étudier les éléments de la fonction affine manifestés par un élève du cycle des études fondamentales lors de la construction d'un scénario animé dans GeoGebra, à partir des dialectiques artefact-instrument et instrumentation-instrumentalisation. Ainsi, nous présentons et analysons, par l'Approche Instrumentale, la construction du scénario animé Ballon, développé par un élève de 8ème année du cycle des études fondamentales (13 ans). Au moyen des invariants opératoires, nous avons mis en évidence des manifestations d'éléments mathématiques liés aux fonctions linéaires croissantes, décroissantes et constantes durant la construction du scénario. De plus, nous avons identifié que, pour l'élève, l'artefact GeoGebra s'est transformé en différents instruments, car il a utilisé le logiciel pour construire, limiter et unir les fonctions qui composent les parties du trajet du ballon et, ensuite, animer la construction.

**Most Clés**

- *Mathématiques Éducatives*
- *Approche Instrumentale*
- *Fonction affine*
- *Scénarios animés*

## 1. Introdução

Desde quando as tecnologias digitais começaram a serem inseridas em sala de aula, no final da década de 1960, discutir sobre a integração de las como uma ferramenta para o ensino e a aprendizagem tornou-se necessário, pois matemáticos e educadores sentiram que, de alguma forma, seu uso geraria efeitos significativos sobre como o conteúdo poderia ser abordado (Drijvers et al., 2010).

Assim, é necessário olhar para o sujeito que interage e usa a tecnologia. Nesse contexto, a Aproximação Instrumental (AI), constituída a partir da articulação entre a Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1999) e a abordagem instrumental (Rabardel, 1995), tem auxiliado nessas análises (Artigue, 2011).

A AI aborda diferentes noções, como artefato e instrumento, instrumentação e instrumentalização, esquema e técnica, as quais Drijvers et al. (2013) propõem discutir em termos dialéticos, por estarem relacionadas.

Considerando que essas relações dialéticas são estabelecidas durante a interação com ferramentas digitais, neste trabalho, damos atenção à construção de cenários animados no GeoGebra. Os cenários animados são construções em que elementos matemáticos são conectados à ferramenta controle deslizante e, ao final, são animados (Bueno & Basniak, 2020). Esses cenários podem ter personagens, representar situações reais ou imaginárias, mas os elementos devem ser programados para que, ao final da construção, por meio da animação do controle ou comando dos botões, se movam sozinhos e constituam uma cena animada. Para a construção de um cenário animado, diferentes conteúdos matemáticos podem ser usados e diversas técnicas podem ser empregadas no software. Entre os conteúdos está o de função afim (Bueno et al., 2023).

Por meio de uma investigação realizada com estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental, Martinez e Brizuela (2006) analisaram como uma estudante, Marisa, aprendeu álgebra a partir de uma perspectiva funcional, trabalhando com informações em tabelas. No processo de resolução de um problema, a estudante elaborou uma fórmula correspondente a uma função linear. Essa aprendizagem ocorreu no contexto de um projeto inicial de álgebra, em que foram propostos problemas extramatemáticos (situações externas ao campo da matemática) que apresentavam a mesma estrutura matemática subjacente às funções lineares e que focavam no uso de tabelas de funções (Martinez & Brizuela, 2006).

Avançando para investigações com estudantes de anos posteriores, Hattikudur et al. (2012) examinaram como 180 estudantes estadunidenses do 6º, 7º e 8º ano constroem gráficos de funções lineares, analisando as dificuldades na representação da inclinação e do coeficiente linear. Conforme o currículo Connected Mathematics Program, os estudantes do 6º ano tinham recebido algumas informações sobre os gráficos, mas não formalmente; os do 7º ano tinham interpretado e construído tabelas e gráficos; e os do 8º ano tinham trabalhado com padrões lineares e não lineares por meio de tabelas, gráficos e representações algébricas (Hattikudur et al., 2012).

Os resultados da pesquisa mostraram que os estudantes do 6º e 7º ano tiveram sucesso na representação gráfica da inclinação, mas não apresentaram desempenho satisfatório em relação ao coeficiente linear. Já os estudantes do 8º ano apresentaram melhor desenvolvimento em ambas as representações se comparados com anos anteriores, mas ainda revelaram dificuldades com o coeficiente linear (Hattikudur et al., 2012). Isso evidencia dificuldades em relação à compreensão de um conceito fundamental para o estudo das funções. Assim, os autores recomendam que o ensino proporcione oportunidades para que os estudantes desenvolvam a compreensão desse conceito (Hattikudur et al., 2012).

Em consonância com essas discussões, Birgin (2012), investigou as dificuldades de estudantes turcos do 8º ano (14 e 15 anos) em relação à inclinação de funções lineares. Após aulas tradicionais de matemática (expositivas e centradas no professor), 115 estudantes responderam a questões (elaboradas considerando o currículo de matemática do Ensino Fundamental na Turquia) e seis participaram de entrevistas. Os resultados revelaram que, apesar dos estudantes apresentarem bom desempenho em relação à determinação da inclinação do gráfico por meio da representação algébrica, tiveram dificuldades para determinar a inclinação transitando da representação algébrica para a gráfica e vice-versa (Birgin, 2012).

Os estudantes também confundiram o coeficiente de inclinação e interseção com os eixos $x$ e $y$, revelando que "[...] não compreenderam a estrutura do conceito de função" (Birgin, 2012, p. 155). O autor atribui essas dificuldades ao ensino expositivo e recomenda o uso de recursos tecnológicos, como o GeoGebra, que, além de fornecer as representações de forma instantânea e otimizar o trabalho dos estudantes, pode favorecer a visualização e a aprendizagem conceitual das funções lineares (Birgin, 2012).

Em uma perspectiva complementar, a pesquisa conduzida por Hines (2002) examinou os processos utilizados por um estudante do 8º ano para interpretar funções lineares originadas em modelos físicos dinâmicos e os processos que ele utilizou para conectar suas interpretações simbólicas. A partir de um teste diagnóstico proposto antes do início da investigação, foi verificado que o estudante tinha pouco entendimento de funções, como

Vol. 28, e435 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e435

processos generalizados, pois não conseguiu interpretar variáveis simbólicas, equações ou gráficos como representações de funções. No entanto, após observações em um sistema de elevação de bobinas e o trabalho com gráficos, tabelas e equações simbólicas, o estudante desenvolveu uma visão mais abrangente que lhe "[...] permitiu compreender funções lineares como processos que envolvem covariância sistemática entre duas variáveis relacionadas [...] à medida que operava o sistema" (Hines, 2002, p. 358).

Ainda nesse contexto, foi possível verificar, por meio de gráficos, que alterações na relação linear implicavam mudanças na inclinação gráfica. Dessa forma, a autora sugere que o uso de diferentes representações pode favorecer a construção do conhecimento sobre funções lineares.

Por fim, Bardini et al. (2004) analisaram as consequências da adoção de uma abordagem funcional no ensino de álgebra em uma turma de estudantes australianos do 8º ano (13 anos). Os autores destacaram que, antes dos testes, os estudantes resolviam problemas por meio de tentativa-erro, não tinham experiência com calculadoras gráficas, não utilizavam álgebra em contextos reais, não empregavam letras para representar variáveis e não elaboravam gráficos. Depois da proposição de problemas baseados em contextos reais e da disponibilização de calculadoras gráficas, os estudantes demonstraram avanços no uso da álgebra simbólica e gráfica (Bardini et al., 2004).

Como resultado dessa experiência, os estudantes "aprenderam a escrever regras algébricas de maneira convencional e, [por meio do] [...] trabalho contextualizado, rapidamente passaram a utilizar símbolos de maneira coerente e a compreender funções como expressões que relacionam uma variável a outra" (Bardini et al., 2004, p. 374). Os autores ressaltam que, embora a notação de função tenha sido utilizada, não foi realizado um estudo formal sobre funções, nem ocorreram discussões sobre a definição.

Considerando o contexto deste trabalho, as pesquisadoras tinham a intenção de propor a construção de cenários animados a estudantes brasileiros que ainda não tivessem estudado formalmente sobre o conteúdo de função afim nas aulas de Matemática, mas que já tivessem algum desenvolvimento no campo da álgebra, para verificar o que eles iriam mobilizar antes da formalização. Então, foi determinado que as construções dos cenários animados no GeoGebra deveriam ser propostas aos estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental (13 anos).

Nesse sentido, este trabalho assume pressupostos qualitativos e busca investigar elementos da função afim manifestados por um estudante do Ensino Fundamental na construção de um cenário animado no GeoGebra, a partir das dialéticas artefato-instrumento e instrumentação-instrumentalização.

Na seção a seguir, discutimos brevemente a teoria que envolve essas duas dialéticas.

## 2. Dialéticas artefato-instrumento e instrumentação-instrumentalização

Dentro da AI, Drijvers et al. (2013) discutem três dialéticas, denominadas artefato-instrumento, instrumentação-instrumentalização e esquema-técnica. No caso deste texto, damos atenção às duas primeiras dialéticas.

A dialética artefato-instrumento trata da diferença e relação entre artefato e instrumento (Rabardel, 2002). Conforme a abordagem instrumental, o artefato, objeto material ou simbólico, medeia a ação humana para o desenvolvimento de determinada tarefa. Ele pode ser "[...] um martelo, um piano, uma calculadora ou um sistema de geometria dinâmica" no computador (Drijvers et al., 2013, p. 26), por exemplo.

No início, o artefato não tem valor instrumental (Artigue, 2011) e a forma como é usado não é trivial (Drijvers et al., 2013). Como exemplo, os autores citam que enquanto não "tivermos ideia do que significam as letras, uma caneta é um artefato inútil para escrever. Assim que aprendemos a escrever, a caneta torna-se mais do que um artefato para desenhar, e transforma-se em um artefato que também usamos para escrever" (Drijvers et al., 2013, p. 26).

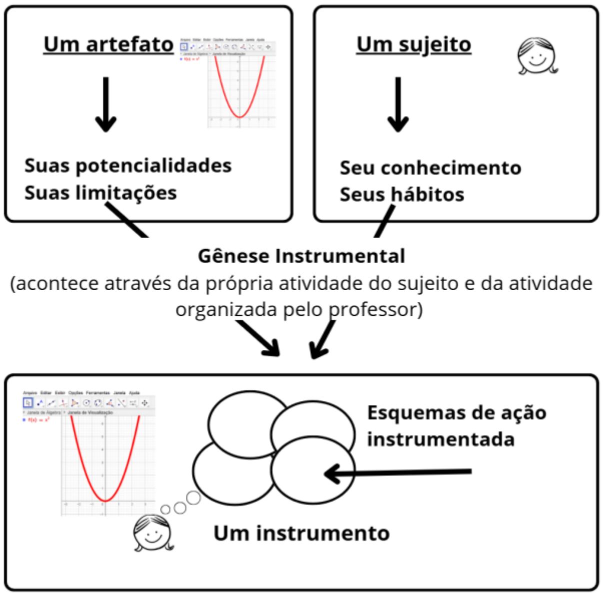
Já o instrumento só existe se há uma relação estabelecida entre o usuário e o artefato para determinada tarefa. Na abordagem instrumental, o instrumento é formado pelo artefato e por um ou diversos esquemas de utilização (Rabardel, 2002), e conforme os esquemas que são desenvolvidos, diferentes instrumentos serão construídos pelo sujeito (Drijvers et al., 2013).

Conforme Rabardel (1995), os esquemas de utilização são definidos por dois níveis: de uso e de ação instrumentada. Os esquemas de uso são relacionados a tarefas secundárias correspondentes às ações e atividades específicas, ligadas diretamente ao uso ou funcionamento do artefato (Rabardel, 1995; 2002). Ainda, os esquemas de ação instrumentada (mediada por instrumentos) são referentes às tarefas primárias, ligadas ao objeto, e com o objetivo de realizar transformações no objeto da atividade (Rabardel, 1995; 2002).

Considerando os esquemas de ação instrumentada e a relação entre artefato e instrumento, apresentamos uma representação (Figura 1) baseada no que Guin e Trouche (1999) propõem.

**Figura 1**

*Relação entre artefato-instrumento*




*Nota*. Adaptada de Guin e Trouche (1999).

Para Vergnaud (1990), o esquema é composto por regras de ação, antecipações, invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) e inferências. Apoiando-se nesse conceito, para discutir os esquemas de ação instrumentada, Trouche (2005) discorre que são formados pelos invariantes operatórios e esquemas de uso (atividades relacionadas ao uso do artefato). Além disso, para Trouche (2005), os esquemas de ação instrumentada são referentes à parte implícita na ação do sujeito e são desenvolvidos durante as situações que envolvem o uso de um artefato.

Para descrever os teoremas-em-ação e conceitos-em-ação, Trouche (2005) recorre a Vergnaud (1996) e destaca que os invariantes operatórios são o "[...] conhecimento implícito contido nos esquemas, que podem ser conceitos-em-ação, ou seja, conceitos considerados implicitamente relevantes e teoremas-em-ação, [...] proposições consideradas verdadeiras" (Trouche, 2005, p. 152) para o sujeito. Quando são analisados de acordo com alguma área de conhecimento, os teoremas-em-ação podem ser verdadeiros ou falsos, mas os conceitos-em-ação, por serem objetos e não

Vol. 28, e435 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e435

afirmações/proposições, não podem ser classificados dessa forma (Couto, 2018). Assim, os teoremas-em-ação e conceitos-em-ação são relacionados e não há um sem o outro (Trouche, 2005), pois os conceitos-em-ação são necessários para a elaboração de proposições — teoremas-em-ação (Couto, 2018).

Rocha (2019, p. 42), tomando como base Vergnaud e Récopé (2000), exemplifica esses elementos da seguinte forma:

> As palavras "*céu*", "*nuvens negras*" e "*está cheio de*" podem ser usadas para representar um objeto. Se criarmos a proposição "*o céu está cheio de nuvens negras*", expressamos uma relação usando nosso conhecimento. As palavras que compõem a proposição são *conceitos-em-ação*. Os *conceitos-em-ação* nos permitem identificar objetos, suas propriedades e relações. [...] [E], se formularmos a frase "*o céu está cheio de nuvens negras, portanto é provável que chova*", essa proposição pode ser verdadeira ou falsa, tendo assim o status de um teorema-em-ação.

Já Couto (2018), ao propor a acadêmicos a construção de um boneco no GeoGebra, descreve teoremas-em-ação e conceitos-em-ação mobilizados pelos estudantes conforme pode ser observado nas figuras 2 e 3.

**Figura 2**

*Tentativa de construção da cabeça do boneco*

| Teoremas em ação | Conceitos em ação |
|---|---|
| $EA_1/EA_2$: a circunferência representa a forma de uma cabeça. | – Forma;<br>– circunferência. |
| $EA_1/EA_2$: os círculos são sempre figuras semelhantes (eles utilizam a palavra proporcional). | – Semelhança. |
| $EA_1$: a ferramenta *"Círculo com centro e um de seus pontos"* tem a medida do raio definida pelo software. | – Variável;<br>– Medida. |

*Nota*. Tomado de Couto (2018, p. 221).

**Figura 3**

*Tentativa de construção do controle deslizantes sem o uso da variável*

| Teoremas em ação | Conceitos em ação |
|---|---|
| $EA_2$: a construção do controle deslizante antes da circunferência permite relacionar os dois objetos. | – Controle deslizante;<br>– intervalo. |
| $EA_1/EA_2$: ao definir como medida para o raio, um valor compreendido no intervalo determinado, o controle deslizante estará integrado ao círculo. | – Medida. |

*Nota.* Tomado de Couto (2018, p. 225).

Por meio desses exemplos, pode-se verificar que um conceito-em-ação é um conceito implícito e operatório que o sujeito mobiliza ao agir em uma situação, mesmo sem conseguir nomeá-lo ou defini-lo formalmente. E um teorema-em-ação é uma proposição implícita que um sujeito considera verdadeira e que orienta sua ação ao resolver uma situação-problema.

Drijvers et al. (2010, p. 108), olhando para a relação entre o sujeito e o artefato discutida por Rabardel, propõem que "Instrumento = Artefato + Esquemas e Técnicas, para um determinado tipo de tarefa". Nesse sentido, para os autores, o instrumento é constituído também pelas técnicas.

Trouche (2005, p. 151) descreve que a atividade humana pode ser descrita em termos de técnicas e as compreende como "[...] conjuntos de ações realizadas por um sujeito para realizar uma determinada tarefa". No caso em que a técnica envolve ao menos um artefato, ela passa a ser denominada técnica instrumentada e remete à "[...] parte observável de um esquema de ação instrumentado" (Trouche, 2005, p. 151).

O processo, contínuo e demorado, em que um artefato se torna um instrumento para o sujeito, é conhecido como gênese instrumental (Rabardel, 2002; Drijvers et al., 2013). A dialética instrumentação-instrumentalização aborda as duas dimensões da gênese instrumental e olha para a relação entre artefato e sujeito que desenvolve esquemas e enriquece o artefato (Drijvers et al., 2013).

De acordo com Rabardel (2002) e Drijvers et al. (2013), a instrumentação refere-se a como o pensamento e as ações do sujeito podem ser afetados e moldados pelo artefato. Também, o processo de instrumentalização refere-se a como o pensamento e o conhecimento do usuário podem moldar e dirigir o uso do artefato (Rabardel, 2002; Drijvers et al., 2013).

Drijvers et al. (2013, p. 26), apoiando-se em Hoyles e Noss (2003), discutem que "a dupla natureza da instrumentação e da instrumentalização, na gênese instrumental, resume-se ao fato de o pensamento do estudante ser moldado pelo artefato, mas também moldar o artefato".

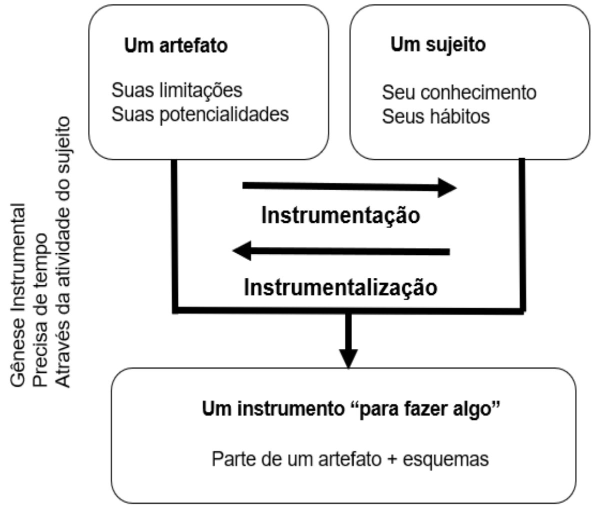
Como exemplo, Drijvers et al. (2013, p. 26), apoiando-se em Drijvers (2003) e Trouche e Drijvers (2010), apresentam o seguinte exemplo:

> Se tomarmos a calculadora gráfica como um artefato exemplar, sua opção de menu "Calcular Interseção" resolve equações calculando as coordenadas dos pontos de interseção dos gráficos. Por um lado, isso orienta o pensamento dos estudantes para ver as soluções como pontos de interseção (instrumentação). Se, por outro lado, um estudante programa a calculadora para que ela dê soluções em formas exatas e radicais, isso seria um exemplo de instrumentalização.

Assim, pode-se observar que instrumentalização e instrumentação são entrelaçadas, mas para diferenciá-las, de acordo com Rabardel (1995, p. 12-13), na "instrumentação, a atividade está direcionada para o sujeito"; e na "instrumentalização, a atividade é orientada para o componente artefato do instrumento", como pode ser observado na Figura 4.

**Figura 4**

*De artefato para instrumento*




*Nota.* Tomado de Trouche (2005, p. 144).

Dessa forma, ao integrar o uso de tecnologias digitais durante o desenvolvimento de tarefas matemáticas, é preciso atenção às várias e complexas dimensões que estão presentes nesse processo.

## 3. Função Afim

O conteúdo de função está presente em diversas áreas do conhecimento além da matemática e permite descrever o comportamento de fenômenos naturais ou situações do cotidiano (Santana; et al., 2024; Brasil, 2018). Para isso, dispõe de diversas representações como tabelas, gráficos e expressões algébricas.

No entanto, geralmente, quando é abordado em sala de aula, é dada maior atenção às representações algébricas e ao processo de resolução por meio de técnicas/algoritmos (Merli & Nogueira, 2024). Segundo Santana et al. (2024, p. 344), "essas práticas favorecem a reprodução 'mecânica' de cálculos por parte dos estudantes, sem que haja compreensão das relações e conceitos que envolvem tais procedimentos".

Assim, é necessário que os estudantes tenham condições para que estabeleçam leis matemáticas que manifestem relações entre duas grandezas, criem, interpretem e transitem entre as diferentes formas de representação das funções (Brasil, 2018).

Considerando as diversas definições de função, neste trabalho nos apoiamos na definição estabelecida por Caraça (1951, p. 129):

> Sejam $x$ e $y$ duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que $y$ é uma função de $x$ e escreve-se $y = f(x)$, se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \to y$. A $x$ chama-se variável independente, a $y$ variável dependente.

A partir dessa relação funcional entre dois conjuntos, $X$ e $Y$, Lima et al. (2006) definem que o conjunto $X$ é o domínio e o conjunto $Y$ é o contradomínio da função. Segundo essa definição, o conjunto domínio é formado por todos os valores que podem ser atribuídos a variável independente, e o conjunto contradomínio pelos valores que a variável independente pode assumir.

Considerando que existem diversos tipos de função, nos concentramos na função afim. Lima et al. (2006, p. 87) a definem como: "uma função $f$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a$, $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$". Os elementos a e b são denominados, respectivamente, coeficiente angular e linear da função afim.

Destacamos que o elemento $a$ na lei de formação da função neste trabalho é tratado como coeficiente angular e não como taxa de variação. Mesmo que Lima et al. (2006) discutam

Vol. 28, e435 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e435

que esse termo é equivocado, foi optado por esse termo porque normalmente é usado nos livros didáticos e está presente nas transcrições das falas dos estudantes na seção Análise e resultados.

Conforme os autores, quando os coeficientes da função afim assumem determinados valores tem-se alguns casos particulares: se $b = 0$ a função é linear; se $a = 1$ e $b = 0$ tem-se a função identidade; se $a > 0$ a função é caracterizada como crescente; se $a < 0$ a função é caracterizada como decrescente; se $a = 0$, a função é caracterizada como constante (Lima et al. 2006).

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), o conteúdo de função está previsto para ser formalizado apenas no 9º ano do Ensino Fundamental (14 anos). Mas noções que fazem parte do conceito de função, como regularidade e correspondência, devem ser trabalhadas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, quando se iniciam as ideias algébricas (Brasil, 2018).

Rebelo (2011) e José (2015) destacam que, ao abordar esse conteúdo com estudantes do 7º e 8º ano (entre 12 e 16 anos), verificaram dificuldades, como, por exemplo, usar símbolos matemáticos e nomenclatura correta, interpretar as representações gráficas e algébricas, bem como transitar entre elas. Em outra pesquisa, com estudantes do Ensino Médio, foram verificadas dificuldades em relação à função, sua representação gráfica e lei de formação (Tenório et al., 2015).

Nesse sentido, constata-se que o conceito de função é importante, mas de difícil compreensão (Brasil, 2018). Logo, é necessário e importante oferecer condições e situações em que os estudantes tenham acesso às funções, compreendam a noção de variável e transitem entre as suas diversas representações (Santana et al., 2024).

Na seção a seguir, apresentamos o contexto e os pressupostos metodológicos da pesquisa.

## 4. Contexto e pressupostos metodológicos

Os cenários animados são construções no GeoGebra que podem representar diferentes situações, reais ou não, e envolver personagens. Ao final, o conteúdo ou objetos matemáticos usados durante/para a construção não precisam ser exibidos. Para que a construção se constitua como um cenário animado, é necessário que a cena tenha movimento e que não haja interferência do usuário sobre ela, além de clicar nos botões ou colocar o controle deslizante para animar.

Vol. 28, e435 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e435

O principal conteúdo abordado por meio das construções dos cenários animados nesta pesquisa foi função afim.

Considerando a colaboração de seis pessoas, foram formadas equipes assistentes (EA) e foram desenvolvidos nove encontros[1] para propor a construção de cenários animados a estudantes de uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola, no interior do Paraná - Brasil, que funciona no mesmo prédio da UNESPAR *campus* União da Vitória.

Os encontros com os estudantes eram semanais, com duração de duas horas/aula (1h40min), e aconteciam em dois laboratórios de informática da universidade. Cada estudante tinha um computador ou notebook à sua disposição para realizar as construções, mas era incentivado a colaborar com os colegas.

Na Tabela 1 consta a organização dos encontros.

**Tabela 1**

*Informações sobre os encontros*

| *Encontro(s)* | *Cenário Animado* | *O que foi feito no encontro* | *Principais conteúdos matemáticos envolvidos* |
|---|---|---|---|
| 1° e 2° | Barco e chuva | Estudantes se ambientaram com as construções. | Plano cartesiano, coordenadas de um ponto, distância entre dois pontos e expressões algébricas. |
| 2° ao 6° | A Princesa e o Sapo | Estudantes construíram o cenário e tiveram o primeiro contato com função afim. | Função afim caracterizada como crecente ou decrescente, domínio da função, função por partes e ponto(s) que pertence(m) a função. |
| 6° e 7° | Abelha simples | Estudantes usaram a função afim para a construção. | Função afim caracterizada como crecente, decrescente ou constante, domínio da função, função por partes e ponto(s) que pertence(m) a função. |
| 8° | Questões sobre as característica s da função afim | Estudantes responderam questões sobre as características de função afim com base no cenário animado Abelha simples. | Função afim caracterizada como crecente, decrescente ou constante, pontos que pertencem a função, variável dependente e independente, lei de formação da função afim e definição de função. |

Vol. 28, e435 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e435

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9° | Cenário próprio | Estudantes construíram um cenário animado próprio utilizando o conteúdo de função afim. | Possíveis: função afim caracterizada como crescente, decrescente ou constante, dominio da função, função por partes e ponto(s) que pertence(m) a função. |

Até o sétimo encontro a dinâmica das aulas seguiram da seguinte forma: um integrante da equipe ficou responsável por conduzir a construção dos cenários animados seguindo um roteiro, outro ficou responsável por mediar as discussões dos conteúdos matemáticos envolvidos na construção e o terceiro ficou responsável por ajudar no desenvolvimento da aula, estando à disposição para atender a dúvidas pontuais e problemas técnicos. Todos auxiliaram e incentivaram os estudantes, fazendo questionamentos individuais e, antes de seguir para as próximas etapas da construção, verificavam se todos haviam feito os passos anteriores para dar continuidade.

No oitavo encontro, os estudantes receberam as questões impressas e tiveram acesso ao cenário animado para responder às questões.

No início do nono encontro, foi explicado que os estudantes deveriam criar um cenário animado próprio e foram orientados a usar o conteúdo de função afim. Para isso, poderiam tomar como base o que foi construído anteriormente ou poderiam criar algo novo. Também foram mostrados aos estudantes outros cenários animados, além dos que construíram nos encontros anteriores, para inspirá-los, mas nenhum arquivo foi disponibilizado para eles.

O objetivo de propor essa construção foi incentivar os estudantes a criarem seus próprios cenários animados utilizando, principalmente, o conteúdo de função afim e o que foi abordado nos encontros anteriores. Foi avisado que as EA estariam disponíveis o tempo todo para auxiliá-los durante o processo de construção individual, mas que a ideia e execução do cenário animado próprio seriam de responsabilidade de cada um. Além disso, caso algum deles quisesse, poderia apresentar sua construção aos demais.

Um dos estudantes, Tiago, tomando como inspiração o cenário animado *Balão*[2], que foi mostrado no início do nono encontro, construiu seu cenário usando o conteúdo de função afim e dispôs-se a apresentá-lo aos colegas. Em momento posterior às intervenções, o estudante também apresentou sua construção para duas professoras da Educação Básica[3].

O cenário animado Balão consiste numa animação em que um balão sobe (função caracterizada como crescente), sobrevoa (função afim caracterizada como constante) e desce (função afim caracterizada como decrescente).

Considerando o contexto da pesquisa, para coletar os dados, as telas dos computadores/notebooks foram gravadas em vídeo e algumas em áudio e vídeo. Também foi usado um gravador de mesa em cada ambiente. As gravações, tanto em áudio como em vídeo, são de todo o processo de construção dos estudantes. Nas duas apresentações do estudante Tiago foi usada uma câmera para a filmagem.

Dessa forma, os dados coletados são: arquivos com os cenários animados produzidos pelos estudantes, material escrito (oitavo encontro), áudio dos ambientes, vídeos de todo o processo de construção dos cenários animados e das apresentações de Tiago.

Dentre todos os encontros, decidimos olhar especialmente para o que foi desenvolvido no nono encontro, pois com a dinâmica proposta, que partiria dos estudantes (ideia e execução), poderíamos verificar se o artefato GeoGebra se tornou um instrumento para eles. Também conseguiríamos identificar quais elementos relacionados à função afim os estudantes utilizaram na construção.

Assim, após as intervenções, para selecionar o episódio descrito neste artigo, levamos em consideração: a participação dos estudantes durante as aulas; as anotações/relatos dos integrantes das EA que estavam em cada ambiente; se a gravação da tela do computador era composta por imagem e áudio; e se a construção havia sido finalizada pelo estudante.

Entre as construções dos 20 estudantes que compareceram no nono encontro e construíram o cenário animado, optamos por analisar a construção de um estudante, Tiago (nome fictício para preservar sua identidade), porque ele: desenvolveu grande parte da construção do cenário sozinho, solicitando ajuda apenas em alguns momentos - nesse sentido, houve pouca interferência dos integrantes da EA durante a construção; e apresentou seu cenário animado tanto para a turma como para professoras da Educação Básica.

Nenhuma das autoras deste trabalho fazia parte da EA que atendia o estudante. Quem conduziu os encontros com os estudantes do LIM foram: P. Clara, colega de mestrado, P. Bianca e P. Eduardo, ambos integrantes do USF.

Assim, os dados produzidos pelo estudante que foram considerados para as análises são: o arquivo no GeoGebra, a gravação da tela do computador no nono encontro (1), a gravação da apresentação para a turma (2) e a gravação da apresentação para as professoras (3). As gravações 1 e 2 foram transcritas integralmente, enquanto a 3 parcialmente, visto que os processos de construção apresentados em 2 e 3 foram semelhantes.

A partir das transcrições, principalmente da tela do computador do estudante, percebeu-se que alguns procedimentos de construção eram semelhantes e relacionados a conteúdos matemáticos específicos. Dessa forma, a seção a seguir foi organizada em quatro subseções, de maneira que cada uma delas foca em tais procedimentos e conteúdos.

Além disso, optamos por deixar as análises junto com os resultados em cada subseção, de forma sequencial, evidenciando a relação entre ambos. A sequência apresentada em cada subseção não é linear, pois intercala construção e apresentação(ões). Para isso, as organizamos de acordo com os tópicos a seguir.

i) elencamos os elementos da função afim ou relacionados com o conteúdo/construção que eram esperados a priori;

ii) descrevemos e realizamos as análises do episódio apresentando o que o estudante desenvolveu em seu computador e, em seguida, as discussões que ocorreram no momento de sua(s) apresentação(ões).

iii) por fim, explicitamos, a partir das análises, os resultados.

Nesta pesquisa, ressaltamos que tomamos como base o que Trouche (2005) propõe sobre os esquemas de ação instrumentada, visto que nosso olhar está voltado para os invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) e esquemas de uso, porque temos interesse em dar atenção às técnicas instrumentadas. Dessa forma, na seção a seguir é realizada a:

a) descrição das ações do estudante no GeoGebra, após a

b) inferência dos teoremas-em-ação (proposições) e conceitos-em-ação nessas ações, seguidos da

c) identificação dos conhecimentos manifestados por meio dos invariantes operatórios apontados.

Na primeira subseção temos por objetivo verificar o reconhecimento e diferenciação, algébrica e gráfica, da função afim caracterizada como crescente, decrescente ou constante; na segunda subseção buscamos verificar a determinação do domínio de cada função; na terceira subseção analisamos a construção da função por partes; e na quarta subseção buscamos verificar a relação estabelecida entre função, controle deslizante e os pontos da figura para gerar a animação.

Para as análises, como apontado no item ii) e com base nas transcrições das três gravações, em cada subseção foram descritos detalhadamente os processos de construção do cenário animado desenvolvido pelo estudante. Também foram selecionados excertos que apontam e corroboram com as discussões relacionadas principalmente aos elementos matemáticos que têm relação com o conteúdo de função afim e que foram mobilizadas durante a construção do cenário animado Balão. Tais excertos são momentos em que o estudante: descreve processos de construção usando/relacionados com elementos matemáticos (função afim, domínio, coeficiente angular e linear, por exemplo), explica o que pretende fazer, pede auxílio e/ou indica exemplos. Assim, as descrições e excertos revelam como função afim, domínio, função por partes e pontos que pertencem à função foram usados no processo de construção.

Para isso, além dos excertos das aulas, também disponibilizamos recortes (em formato de vídeos) da gravação da tela do computador usado pelo estudante durante a construção do cenário animado *Balão*. Para acessar os vídeos sobre as situações descritas no decorrer do texto, pode ser acessado com o link na nota que leva o leitor ao vídeo. Para não identificar o estudante, o áudio dos vídeos que estão disponíveis neste trabalho foi retirado.

Na seção a seguir, apresentamos a construção e apresentação do cenário *Balão*, desenvolvido por Tiago, e buscamos identificar os dois processos dialéticos (artefato-instrumento e instrumentação-instrumentalização).

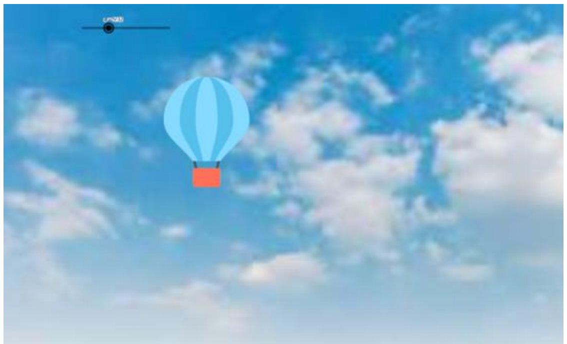
## 5. Análise e resultados da construção do cenário animado Balão

Depois que os professores da EA explicaram aos estudantes o que eles deveriam fazer, mostraram exemplos de outros cenários animados não construídos durante os encontros. Nesse momento, a parte matemática das construções não foi mostrada aos estudantes, apenas a cena final, como na Figura 5.

Vol. 28, e435 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e435

**Figura 5**

*Cenário Balão*



*Nota*. O vídeo pode ser acessado em: https://youtu.be/23yWU4wmHdM

Tiago deu início à construção da sua versão do cenário animado *Balão*[4]. Esse cenário em questão consiste em um balão que sobe, sobrevoa e retorna ao chão.

### 5.1. Construindo a base do percurso do balão

Conforme o planejamento realizado, esperávamos que Tiago, ao construir o seu cenário animado, identificasse que: o valor do coeficiente angular deve ser maior do que zero para que a função afim seja caracterizada como crescente; o valor do coeficiente angular deve ser menor do que zero para que a função afim seja caracterizada como decrescente; o valor do coeficiente angular deve ser igual a zero para que a função afim seja caracterizada como constante; e o valor do coeficiente linear indica o valor em que o gráfico da função intercepta o eixo $y$. Tiago iniciou a construção criando o trajeto que o balão percorre. Considerando que o balão deveria subir, ele digitou, na caixa de entrada, a função $f(x) = 5x$, e observou sua inclinação para o lado que ele desejava, mas para mudar um pouco a inclinação, passou a alterar o valor do coeficiente angular, sem alterar o seu sinal, e observou o que aconteceu. Ele mudou o 5 para 6, 1, 2, e apertou *Enter*.

Por meio dessas ações, evidenciamos o teorema-em-ação: se insiro um valor positivo na frente do $x$ na lei de formação da função afim, então a representação gráfica da função terá inclinação entre 0º e 90º com o eixo $x$, pois o coeficiente angular é positivo, e os conceitos-em-ação: gráfico da função e números naturais. Assim, identificamos que o estudante reconhece a lei de formação e a representação gráfica de uma função afim caracterizada como crescente.

Além disso, as alterações que o estudante realizou na parte algébrica da função geraram mudanças na inclinação da representação gráfica (Hines, 2002), e isso pode ser visualizado instantaneamente na janela de visualização do software.

Tiago chamou a P. Clara para mostrar o que construiu.

> *Tiago: Eu criei uma função aqui, ó, professora.*
>
> *P. Clara: Qual é a característica dessa função?*
>
> *Tiago: A função é $f(x)$, o coeficiente angular é o 2,* [...] *e o linear é quando tem tipo +10, que vai alterar ele* [gráfico da função] *no plano.*

Para complementar sua resposta, Tiago alterou, na janela de álgebra, a lei de formação da função, adicionando o valor 12 como coeficiente linear. Em seguida, Tiago relatou que *ele* [gráfico da função] *mudou de lugar*, ou seja, não estava passando pelo ponto $(0{,}0)$. Nesse caso, por meio dessas ações, evidenciamos o teorema-em-ação: se adiciono um valor na lei de formação da função afim, então o gráfico não cruza a origem do plano cartesiano e os conceitos-em-ação: gráfico da função, coeficiente linear e plano cartesiano, que fazem parte do esquema de ação instrumentada. Assim, identificamos que ele reconhece que o valor do coeficiente linear interfere na posição do gráfico da função no plano cartesiano.

Para que, em uma parte do percurso, o balão sobrevoe após subir, Tiago digitou outra função na caixa de entrada, $j(x) = 0$. Em seguida, ainda na caixa de entrada, ele fez alterações no valor da constante, mudando 0 para 1, 2, 3 e 8, e apertou *Enter*. Enquanto estava alterando o valor, observou as alterações da representação gráfica da função na tela.

Ao selecionar e alterar apenas valores numéricos para a constante na lei de formação da função afim, evidenciamos o teorema-em-ação: se insiro a lei de formação da função com um valor numérico apenas, o gráfico fica paralelo ou coincidente com o eixo $x$; e o conceito-em-ação: gráfico da função. Então, identificamos que o estudante reconhece a lei de formação e a representação gráfica de uma função afim caracterizada como constante.

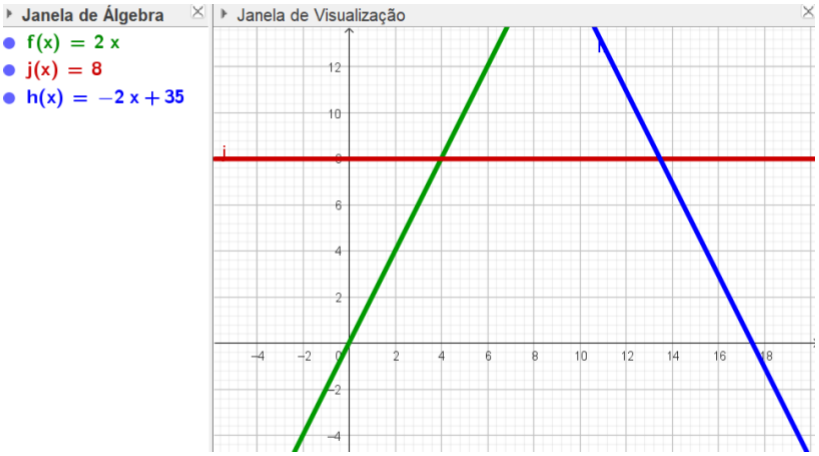
Para construir um caminho para o balão descer, Tiago digitou outra função na caixa de entrada, $h(x) = -5x + 10$. Também faz alterações da lei de formação da função na caixa de entrada. Inicialmente, mudou o valor do coeficiente linear de 10 para 100, e depois para 60. Então, mudou o coeficiente angular -5 para -2. Em seguida, alterou novamente o valor do coeficiente linear 60 para 40, depois para 35, e apertou *Enter*.

Por meio dessas ações, evidenciamos os teoremas-em-ação: se insiro um valor negativo na frente do $x$ na lei de formação da função afim, então a representação gráfica da função terá inclinação entre 90º e 180º com o eixo $x$, pois o coeficiente angular é negativo; se adiciono e altero o valor junto na lei de formação da função afim, a representação gráfica se desloca no sentido vertical, e os conceitos-em-ação: gráfico da função, coeficiente angular, números inteiros, coeficiente linear e eixo $y$. Assim, identificamos que o estudante reconhece a lei de formação e a representação gráfica de uma função afim caracterizada como decrescente e que o valor do coeficiente linear interfere na posição do gráfico da função no plano cartesiano.

Na Figura 6 está a *base do trajeto* construído pelo estudante para o balão percorrer.

**Figura 6**

*Funções criadas pelo estudante para o caminho do balão*




No momento em que Tiago apresentou sua construção aos demais, P. Clara solicitou que ele explicasse que tipos de função usou.

*Tiago: Eu usei três funções $f(x)$, $j(x)$ e $h(x)$.*

*P. Clara: Qual é o comportamento dessas funções? Por que você escolheu elas?*

*Tiago: Porque uma sobe* [função afim caracterizada como crescente], *outra anda reto* [função afim constante] *e a outra vai para baixo* [função afim caracterizada como decrescente].

*Gabriel: Crescente, decrescente.*

*Tiago: E reta.*

*P. Clara: Essa reta tem um outro nome.*

*Tiago: É horizontal.*

*P. Clara: Tem outro nome. Uma é crescente, a outra é decrescente e a outra é?*

*Tiago: Constante!*

Esse excerto indica que Tiago relaciona a representação gráfica de cada uma das funções com o que precisava para formar a base do trajeto para o balão percorrer. Embora ele não cite cada função com o nome correto, explica o comportamento de cada uma, e com as intervenções do colega Gabriel e da P. Clara, são nomeadas corretamente.

Em seguida, ocorreu a seguinte discussão:

> *P. Clara: Isso aí, ela é constante. Por quê? Lembram?*
>
> *Tiago: Porque ela não muda de ... fica na mesma altura.*
>
> *P. Clara: E essa altura é em relação ao eixo $x$ ou a $y$?*
>
> *Tiago: $y$!*

Tiago revela que compreendeu como se comporta a posição da representação gráfica da função constante no plano. Nesse caso, evidenciamos o teorema-em-ação: o valor que insiro na lei de formação da função constante indica a posição que a representação gráfica da função intercepta o eixo $y$; e os conceitos-em-ação: gráfico da função, função constante e eixo $y$. Assim, identificamos, novamente, que o estudante reconhece a lei de formação e a representação gráfica de uma função afim caracterizada como constante.

Após, P. Clara questionou Tiago:

> *P. Clara: Pensando nas funções que você fez, qual é a lei de formação da função crescente?*
>
> *Tiago: Da crescente é $f(x) = 2x$.*

Para verificar se o estudante também estabelece relação entre o coeficiente linear da função afim e sua interferência na representação gráfica, a discussão continuou.

> *P. Clara: E se você colocasse $f(x) = 2x$ mais alguma coisa, o que vai mudar?*
>
> *Tiago: Ia mudar a posição em relação a* [eixo] $x$ *e a* [eixo] $y$.
>
> *P. Clara:* [...] *e se colocasse $f(x) = 2x + 2$, o que esse 2 iria interferir no gráfico?*
>
> *Tiago: Iria mudar a reta.*
>
> *P. Clara: Mas para que número [posição] ele [gráfico] iria?*
>
> *Tiago: Para 2.*
>
> *P. Clara: Em relação a* [eixo] $x$ *e a* [eixo] $y$*?*
>
> [...]
>
> *Tiago: $y$.*

Portanto, Tiago estabelece relação entre a representação gráfica e algébrica da função afim, além de indicar que posição, em relação ao eixo $y$, o gráfico da função iria ficar, caso fosse adicionado um valor na lei de formação. Nesse sentido, evidenciamos o teorema-em-ação: o valor que adiciono na lei de formação da função afim indica em que posição o gráfico intercepta o eixo $y$; e os conceitos-em-ação: coeficiente linear, gráfico da função e eixo $y$. Então, identificamos que o estudante reconhece que o valor do coeficiente linear indica a posição em que o gráfico da função intercepta o eixo $y$.

Para verificar se o estudante faz distinção entre a função afim caracterizada como crescente e a decrescente, P. Clara perguntou:

*P. Clara: E se a função $f$ fosse decrescente, o que ia mudar?*

*Tiago: Isso aqui* [coloca o sinal negativo na frente do 2]*, o menos*.

Portanto, ele sabe que o valor do número junto com o $x$ deve ser negativo na função afim decrescente.

A partir das ações, dos teoremas-em-ação e dos conceitos-em-ação, é possível identificar a manifestação de conhecimentos matemáticos relacionados às características das funções afim constante, crescente e decrescente, e aos elementos que compõem a lei de formação dessas funções, como coeficiente angular e coeficiente linear. Isso foi possível por meio da manipulação da construção do cenário animado, de forma semelhante descrito na pesquisa de Hines (2002), que investigou os processos utilizados por um estudante para interpretar funções lineares ao manipular um sistema de elevação de bobinas. Ademais, com a disponibilização do software GeoGebra, assim como no caso das calculadoras gráficas descritas por Bardini et al. (2004), o estudante avançou seus conhecimentos relacionados a função de forma gráfica e algébrica, utilizando símbolos corretamente.

Nesse processo de construção desenvolvido pelo estudante Tiago, também identificamos esquemas de uso, como usar a caixa de entrada para digitar a lei de formação de cada função e fazer alterações quando necessário. Assim, Tiago sabe o que digitar na caixa de entrada do GeoGebra para construir os gráficos que compõem o caminho que o balão percorrerá e como realizar essas ações no software.

Além disso, identificamos que o estudante, ao digitar a lei de formação da função na caixa de entrada, observa a representação gráfica de cada função na janela de visualização e faz relação com o que foi digitado. Nesse sentido, o estudante manifesta conhecer os recursos do software para que a construção seja desenvolvida. Assim, na Tabela 2, indicamos as ações do estudante relacionadas à instrumentação e a instrumentalização.

**Tabela 2**

*Relação entre instrumentação-instrumentalização na construção do caminho do balão*

| *Ações do estudante relacionadas à instrumentalização* | *Ações do estudante relacionadas à instrumentação* |
|---|---|
| Reconhecer que não existe a ferramenta função, mas é necessário digitar a lei de formação na caixa de entrada. | Inserir a lei de formação de cada função afim caracterizada como crescente, decrescente ou constante, na caixa de entrada para formar a base do percurso do balão. |
| Saber como fazer alterações no coeficiente angular e/ou linear na lei de formação da função afim caracterizada como crescente, decrescente ou constante, usando tanto a caixa de entrada como a janela de álgebra. | Alterar o valor do coeficiente angular e/ou linear na lei de formação de cada função afim caracterizada como crescente, decrescente ou constante, quando necessário. |
| Perceber que o software retorna a representação gráfica da função afim caracterizada como crescente, decrescente ou constante, na janela de visualização e a representação algébrica na janela de álgebra. | Interpretar as representações gráfica e algébrica da função afim caracterizada como crescente, decrescente ou constante, fornecidas pelo software, e estabelecer relação entre elas. |

Para cada ação relacionada à instrumentalização, identificamos ações relacionadas à instrumentação, então, é possível estabelecer a relação entre o estudante (sujeito) e o GeoGebra (artefato), conforme propõem Rabardel (2002) e Drijvers et al. (2013). Além disso, tomando como base principalmente o que Rabardel (2002), Drijvers et al. (2010) e Drijvers et al. (2013) discutem, como o estudante desenvolveu a construção no artefato GeoGebra empregando técnicas instrumentadas no software e desenvolvendo esquemas, compreendemos que o GeoGebra é um instrumento ($I_1$) para a construção do caminho que o balão percorrerá.

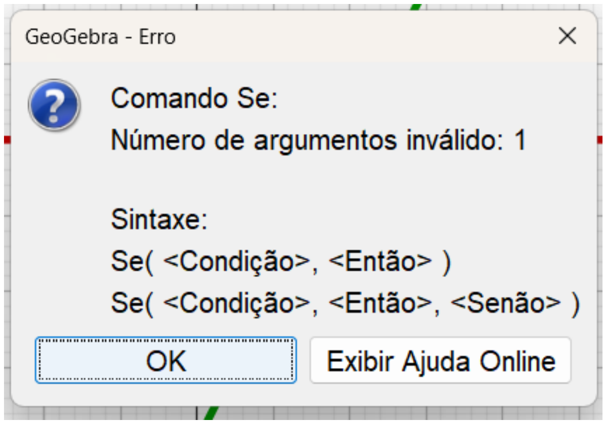
### 5.2. Restringindo o percurso do balão

Depois do estudante construir a base do caminho em seu cenário animado, de acordo com o planejamento realizado, esperávamos que ele limitasse cada parte desse caminho. Para isso, era necessário que ele identificasse que o domínio da função determina o intervalo que está sendo considerado para que a função exista e estabelecesse os intervalos para o domínio da função usando os símbolos de desigualdade e/ou igualdade. A seguir, descrevemos o que o estudante realizou.

Para limitar o caminho que o balão percorrerá, ou seja, restringir o domínio de cada uma das funções, Tiago digitou $Se$ na caixa de entrada e selecionou a opção $Se(< Condição >, < Então >)$. Em seguida, digitou $Se(16 < x < 10)$, clicou em *Enter* e apareceu uma caixa de erro na tela, como na Figura 7.

**Figura 7**

*Caixa de erro que aparece na tela*




Nesse caso, ele se equivocou em relação ao intervalo digitado, considerando valores menores que 10 e maiores que 16; logo, não há valores de interseção dentro desse intervalo. Além disso, digitou apenas o intervalo na *condição* e não indicou *então* a qual elemento deve ser aplicada essa condição. Nesse sentido, o software não consegue representar o gráfico desejado, visto que há erros matemáticos no comando (Bueno et al., 2023) e erros ao usar o comando disponível no software.

Em seguida, como Tiago digitou outros intervalos errados e não completou a estrutura do comando, a caixa de erro voltou a aparecer na tela. Ele, sem conseguir solucionar o problema, solicitou ajuda de P. Clara.

> *Tiago: Como que faz esse comando aqui, condição, então? Eu quero restringir aqui* [gráfico da função]*, então eu vou delimitar ela* [função]. *Vou colocar um valor na condição.*
>
> *P. Clara: É o intervalo onde você quer que ela* [gráfico da função] *apareça.*
>
> [...]
>
> *P. Clara: Faça como você achar.*

Tiago digitou $Se(13 < x < 18)$, clicou em *Enter*, e a caixa de erro surgiu na tela. P. Clara explicou:

Vol. 28, e435 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e435

*P. Clara: Olha, você colocou o intervalo, mas você esqueceu de indicar qual função você quer nesse intervalo.*

*Tiago: Ah! Vírgula* $h(x)$.

Em seguida, Tiago digitou $Se(13 < x < 18, h(x))$, e clicou em *Enter*. O software criou outra função, $g$, com a mesma lei de formação da função $h$, mas com o domínio sendo o intervalo real indicado na condição.

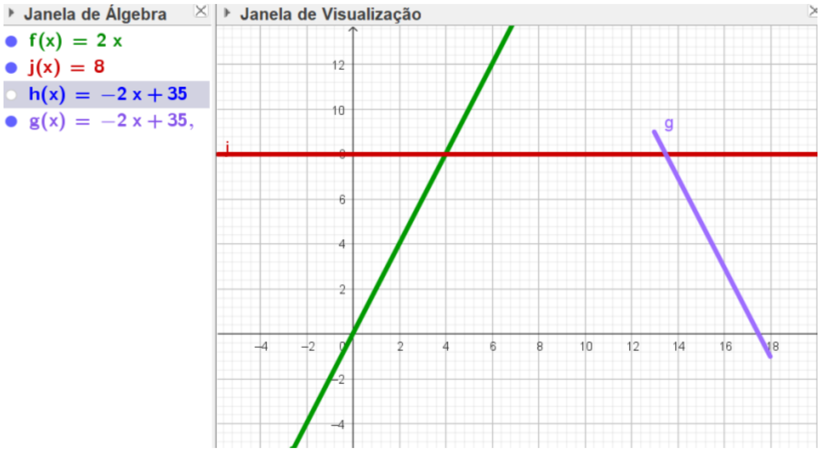
Nessa situação, pode-se observar que é necessária atenção ao desenvolver a técnica instrumentada, conforme destacado por Bueno et al. (2023), pois, ao digitar expressões matemáticas ou comandos na caixa de entrada, a estrutura da linguagem usada deve estar correta, caso contrário, pode apresentar algum problema.

Nessa situação, por meio dessas ações, evidenciamos o teorema-em-ação: se uso o comando $Se(< Condição >, < Então >)$ no GeoGebra, em *condição*, devo indicar um intervalo para o gráfico da função, e no *então*, devo indicar a qual função considero esse intervalo, e os conceitos-em-ação: gráfico da função e intervalos. Assim, identificamos que Tiago, inicialmente, não estabelece o intervalo para o domínio da função, nem utiliza o comando $Se$ corretamente. Somente após a intervenção de P. Clara, ele consegue conjecturar o comando com todos os elementos necessários.

No entanto, o gráfico da nova função (Figura 8), $g$, ficou com intervalo maior que o necessário para formar o percurso do balão.

**Figura 8**

*Função afim caracterizada como decrescente com o domínio limitado*

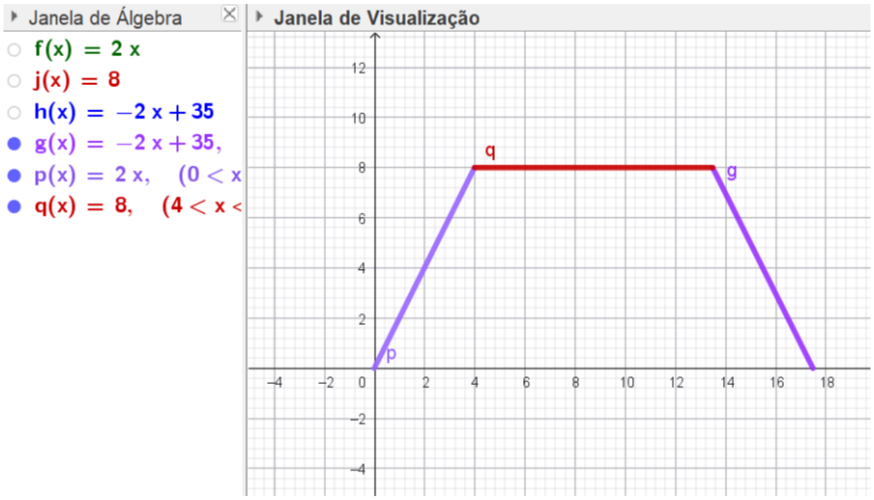


Para solucionar esse problema, o estudante clicou sobre a função $g$ na janela de álgebra e, fazendo alterações nos valores do intervalo, redefiniu o domínio da função até que o gráfico estivesse representado conforme ele desejava.

Sem ajuda, ele fez o mesmo processo para restringir o domínio da função afim caracterizada como crescente. O estudante digitou corretamente o intervalo para a função constante. Tiago deixou a função afim caracterizada como crescente com domínio real $(0{,}4)$[5]; e a constante, com domínio real $(4{,}13.5)$. O software criou as funções $p$ e $q$, respectivamente (Figura 9).

**Figura 9**

*Cada função afim com o domínio limitado*




*Nota.* O vídeo pode ser acessado em: https://youtu.be/auaSIwNEjF4

Nessa situação, por meio dessas ações, evidenciamos os teoremas-em-ação: o menor valor que seleciono para o intervalo indica a posição que a representação gráfica da função inicia, considerando a reta numérica da esquerda para a direita; o maior valor que seleciono para o intervalo indica a posição em que o gráfico da função termina, também considerando a reta numérica da esquerda para a direita, e dos conceitos-em-ação: gráficos da função, reta numérica e intervalo. Então, identificamos que, agora, o estudante utiliza corretamente o comando $Se$, com símbolos de desigualdade, e consegue estabelecer, sozinho, os intervalos para o domínio das duas funções. Além disso, ele identifica que o domínio da função determina o intervalo que está sendo considerado para que a função exista.

Na apresentação, P. Clara perguntou a Tiago:

> *P. Clara: A função é infinita. O que você fez para restringir* [o gráfico]?

Vol. 28, e435 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e435

> *Tiago: Aquele comando Se, condição, então. Na condição, os números.*
>
> *P. Clara: Que números são esses?*
>
> *Tiago: Para delimitar a função.*

No excerto acima, Tiago explicou aos demais que, para restringir a representação gráfica de cada uma das funções, usou um comando disponível no software e que, na condição, colocou números, referindo-se aos intervalos.

Nessa situação, inicialmente mobilizando esquemas de uso, o estudante recordava o comando que deveria digitar na caixa de entrada do GeoGebra para limitar a representação gráfica de cada função e, assim, constituir o percurso do balão. No entanto, não conseguia completá-lo. Somente após o auxílio de P. Clara conseguiu concluir essa etapa da construção.

Quando o estudante foi apresentar a construção às duas professoras que faziam um curso no âmbito do projeto USF, depois de construir cada função para compor o caminho, ele propôs uma forma diferente para delimitar o domínio das funções, como pode ser observado no excerto abaixo.

> *Tiago: A gente quer restringir o domínio das funções, ou seja, aqui eles* [gráficos] *são infinitos, e a gente quer diminuir eles* [gráficos] [...]. *Dá pra fazer de outro jeito* [não somente com o comando $Se$]. *É assim, você vai criar* [digitar na caixa de entrada] *uma nova função, $o(x)$). Vai colocar igual. Você vai escrever* [digitar] *o comando função* [na caixa de entrada]. *O GeoGebra já tem várias opções. Essa aqui* [aponta na tela], *"função, valor de $x$ inicial. valor de $x$ final". Aqui* [no comando], *você vai por $(f(x), -9, -4)$ e pode clicar em Enter.*

O comando indicado pelo estudante para limitar a representação gráfica da função $f$ ficou da seguinte forma: $o(x) = função(f(x), -9, -4)$. Em seguida, Tiago pediu para desabilitar a função $f$ na janela de álgebra para que elas pudessem ver a representação gráfica da função $o(x)$. Novamente, identificamos que o estudante reconhece que o domínio da função determina o intervalo que está sendo considerado para que a função exista.

Por meio dos teoremas-em-ação, dos conceitos-em-ação e esquemas de uso nessa etapa da construção em que Tiago limita a representação gráfica da função, identificamos que estudante, ao digitar o comando $Se$ na caixa de entrada, indicou um intervalo para cada função e, ao observar a representação gráfica na janela de visualização, fez os ajustes necessários para formar o caminho que o balão percorreria. Nesse sentido, o estudante manifesta conhecimentos sobre os comandos disponíveis no software para que essa etapa da construção seja desenvolvida. Assim, na Tabela 3, indicamos as ações do estudante relacionadas à instrumentação e à instrumentalização.

**Tabela 3**

*Relação entre instrumentação-instrumentalização na delimitação do caminho do balão*

| *Ações do estudante relacionadas à instrumentalização* | *Ações do estudante relacionadas à instrumentação* |
|---|---|
| Compreender que, no GeoGebra, não existe uma ferramenta pronta para limitar a representação gráfica da função (restringir o domínio), mas saber qual comando deve digitar na caixa de entrada, embora precise de ajuda para finalizá-lo inicialmente. | Selecionar o comando $Se(< Condição >, < Então >)$ na caixa de entrada e digita os elementos no comando, como intervalo, usando símbolos e notações matemáticas. |
| Ter conhecimento de que é possível fazer alterações no intervalo do domínio de cada função usando tanto a caixa de entrada como a janela de álgebra. | Alterar os valores de máximo e mínimo do intervalo no comando $Se$, na janela de álgebra, para que a representação gráfica de cada função, na janela de visualização, seja ajustada, quando necessário. |
| Ter conhecimento de outros comandos disponíveis no software para restringir o domínio de cada função. | Selecionar o comando $Função(< Função >, < Valor\ de\ x\ Inicial >, < Valor\ de\ x\ Final >)$ na caixa de entrada e digitar os elementos no comando, usando números e notações matemáticas. |

Novamente são estabelecidas relações entre o estudante (sujeito) e o GeoGebra (artefato) (Rabardel, 2002; Drijvers et al., 2013), visto que Tiago mobiliza seus conhecimentos sobre os recursos do software para realizar essa etapa da construção no seu cenário próprio. Além disso, Tiago manifesta conhecimentos matemáticos relacionados ao domínio de função. Nesse caso, conforme propõem Rabardel (2002), Drijvers et al. (2010) e Drijvers et al. (2013), compreendemos que, para o estudante, o GeoGebra é um instrumento ($I_2$) para restringir o caminho que o balão percorrerá, pois, nesse processo, ele emprega técnicas instrumentadas no software e desenvolve esquemas.

## 5.3. Unindo as partes do percurso do balão

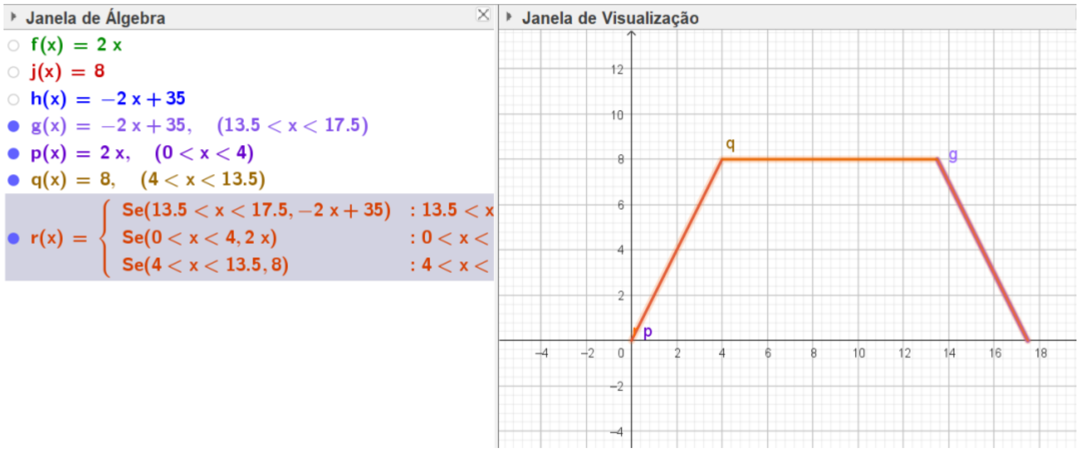
Depois do estudante construir a base do caminho e limitar cada uma das partes, conforme o planejamento realizado, esperávamos que ele unisse as partes desse caminho. Dessa forma, era necessário que ele identificasse que a função por partes é formada por partes das outras funções e que cada valor de $x$, do conjunto domínio, se relaciona com um único valor de $y$, do contradomínio. A seguir, descrevemos o que o estudante realizou.

Vol. 28, e435 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e435

Na construção, depois de limitar o domínio de cada função, Tiago destacou: *eu vou ter que transformar tudo aqui* [gráficos das funções com os domínios restringidos] *em uma* [função] *só*, ou seja, um único caminho. Para isso, ele digitou, na caixa de entrada do GeoGebra, o comando $Se(13.5 < x < 17.5, g(x), 0 < x < 4, p(x), 4 < x < 13.5, q(x))$ e clicou em *Enter*. Esse comando gerou uma função por partes $r$ (Figura 10).

**Figura 10**

*Função por partes*




A partir dessas ações do estudante, em que ele cria uma função por partes, e do esquema de uso: usar o comando na caixa de entrada; evidenciamos o teorema-em-ação: se uno em um único comando cada intervalo seguido da função, a representação gráfica será formada pela união de partes das funções; e os conceitos-em-ação: gráfico da função e intervalo. Dessa forma, identificamos que o estudante usa corretamente o comando $Se$ e reconhece que a função por partes é formada por partes das outras funções.

Na apresentação, P. Clara questionou:

*P. Clara: A função $r$ é crescente, decrescente ou constante?*

*Tiago: Ela é* [formada por] *todas juntas*.

*P. Clara: Uma parte ela* [função] *é crescente*.

*Tiago: Outra constante e outra decrescente.*

Por meio da resposta do estudante, evidenciamos o teorema-em-ação: se indico no comando mais de uma função, o gráfico será formado por partes de funções, e não tem apenas um comportamento; e os conceitos-em-ação: gráfico da função, função por partes, função crescente, função decrescente e função constante. Assim, identificamos novamente que o estudante reconhece que a função por partes é formada por partes das

Vol. 28, e435 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e435

outras funções e que, nesse caso, todas as funções são funções afim. Ambos, teorema-em-ação e conceito-em-ação, fazem parte dos esquemas de ação instrumentada.

Nesse episódio, a partir dos teoremas-em-ação, conceitos-em-ação e esquema de uso, identificamos que Tiago, ao usar o comando $Se$ na caixa de entrada para unir as representações gráficas das funções em uma única função, digitou o intervalo seguido do nome dado à função, e observou a representação gráfica gerada pelo software a partir do comando. Nesse sentido, o estudante manifesta, novamente, conhecimentos sobre o comando disponível no GeoGebra para poder construir essa etapa da construção do cenário. Assim, indicamos, na Tabela 4, as ações do estudante relacionadas à instrumentação e à instrumentalização.

**Tabela 4**

*Relação entre instrumentação-instrumentalização na união do caminho do balão*

| *Ações do estudante relacionadas à instrumentalização* | *Ações do estudante relacionadas à instrumentação* |
|---|---|
| Saber que, no GeoGebra, não existe uma ferramenta pronta para unir as três funções afim caracterizadas como crescente, decrescente ou constante, mas que é necessário digitar um comando na caixa de entrada. | Selecionar o comando $Se$, na caixa de entrada, e digitar o intervalo correspondente a cada função afim, usando símbolos de desigualdade e notações matemáticas para formar a função por partes. |

Como o estudante mobiliza seus conhecimentos matemáticos e sobre o software para realizar essa etapa da construção, há uma relação estabelecida entre o estudante (sujeito) e o GeoGebra (artefato) (Rabardel, 2002; Drijvers et al., 2013). Nesse sentido, tomando como base o que propõe Rabardel (2002), Drijvers et al. (2010) e Drijvers et al. (2013), compreendemos que, para Tiago, o GeoGebra é um instrumento ($I_3$) para unir o caminho que o balão irá percorrer, visto que, nesse processo, ele emprega técnicas instrumentadas no GeoGebra e desenvolve esquemas.

### 5.4. Animação do balão

Depois do estudante construir, limitar e unir cada uma das partes do caminho, conforme o planejamento realizado, esperávamos que ele animasse a construção. Para isso, era necessário que ele estabelecesse relação entre função, controle deslizante e os pontos da figura e compreendesse que os pontos que pertencem à função podem ser escritos como $(x, f(x))$. A seguir, descrevemos o que o estudante realizou.

Vol. 28, e435 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e435

Durante a construção em seu computador, Tiago buscou na internet uma figura de um balão e a salvou. Em seguida, ele inseriu-a na janela de visualização, usando a ferramenta *Inserir Imagem* disponível no software.

Nessas ações, identificamos relações com a instrumentação e a instrumentalização.

**Tabela 5**

*Relação entre instrumentação-instrumentalização ao inserir a figura do balão*

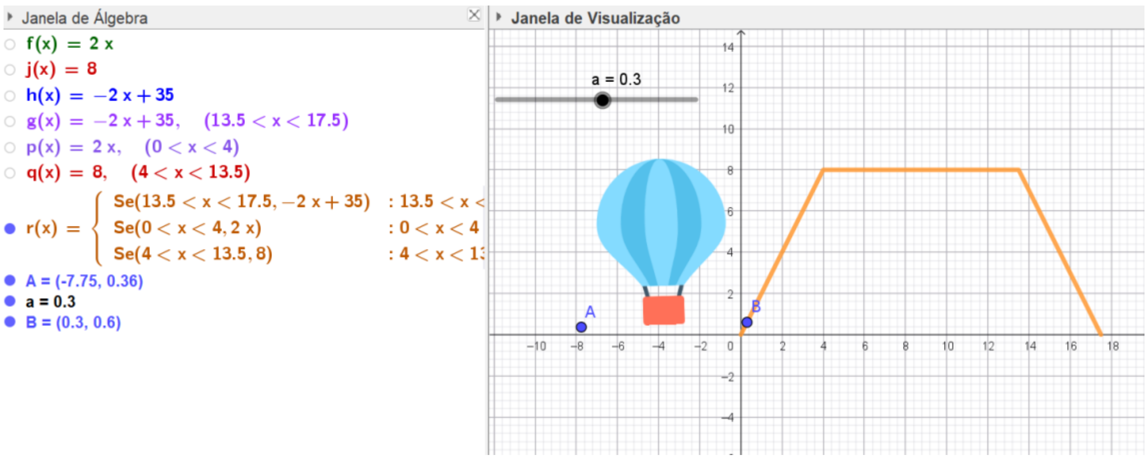
| *Ações do estudante relacionadas à instrumentalização* | *Ações do estudante relacionadas à instrumentação* |
|---|---|
| Ter conhecimento sobre os recursos e ferramentas do software para inserir a figura do balão na janela de visualização. | Selecionar a ferramenta *Inserir Imagem* e inserir a figura do balão no plano. |

A figura do balão fica atrelada a dois pontos, $A$ e $B$. Para que os pontos da figura fossem conectados com a função por partes $r$, Tiago deu dois cliques rápidos com o mouse sobre o ponto $B$ e abriu-se uma caixa na tela. Em seguida, ele redefiniu as coordenadas de $B$, digitando $(a, r(x))$, mas não clicou *Enter*.

Tiago relatou para a P. Clara: *professora, eu coloco* $(a, r(a))$ *para o ponto* $[B]$ *pertencer a função, né? Aqui, ó* [aponta para a função por partes $r$]. Em seguida, ele muda as coordenadas do ponto $B$ para $(a, r(a))$ e clica em *Enter* (Figura 11).

**Figura 11**

*Ponto $B$*




*Nota*. O vídeo pode ser acessado em: https://youtu.be/UuvBT5owwSA

Por meio dessas ações e do esquema de uso: alterar as coordenadas do ponto usando a janela de álgebra; evidenciamos o teorema-em-ação: se altero as coordenadas do ponto $B$ para $(a, r(a))$ o ponto só existe se estiver sobre a representação gráfica da função $r$; e os conceitos-em-ação: ponto e gráfico da função. Então, identificamos que o estudante estabelece relação entre ponto, variável (controle deslizante) e função e compreende que os pontos que pertencem à função podem ser escritos como $(x, f(x))$.

Como a é uma variável e o estudante ainda não havia criado esse objeto na construção, o GeoGebra sugere criar um controle deslizante $a$. O estudante aceitou a sugestão (Figura 12).

O software cria o controle deslizante padrão com valor de mínimo -5 e máximo 5. Como a função $r$ estava definida dentro do intervalo $(0,17.5)$, quando Tiago animou o controle deslizante, em alguns momentos, o ponto $B$ e a figura do balão sumiram na janela de visualização. Então, ele deixou o controle deslizante a posicionado em um valor que a figura do balão e o ponto $B$ aparecessem na tela.

Em seguida, para configurar as coordenadas do ponto $A$, que também interfere na posição da figura do balão no plano, ele relatou:

> *Tiago: Agora eu pego esse* [ponto $A$] *e faço a mesma coisa.*
>
> *P. Clara: Será que é bem a mesma coisa?*

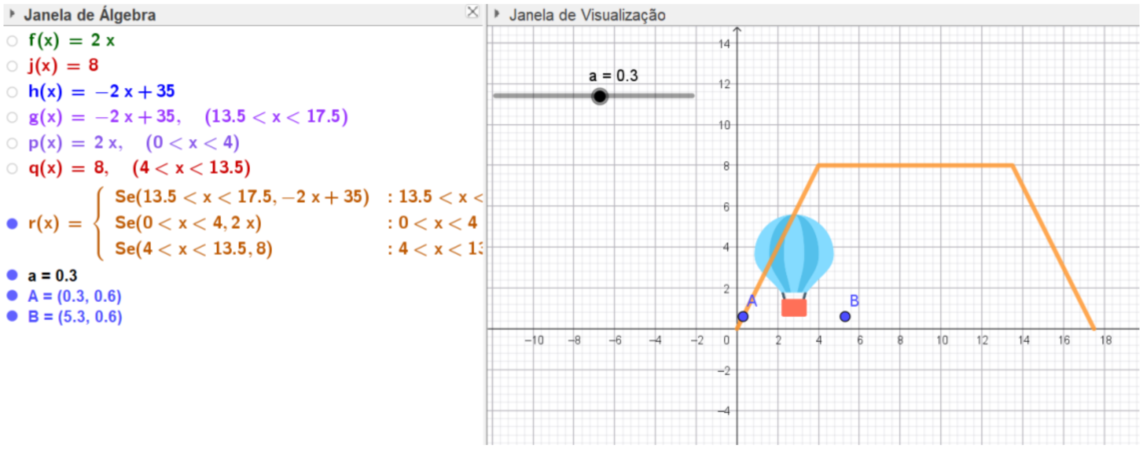
Tiago realizou o mesmo procedimento para redefinir as coordenadas do ponto $A$, deixando como $(a, r(a))$, clicou *Enter* e a figura sumiu da tela.

Nessa situação, por meio dessa ação, evidenciamos o teorema-em-ação: se utilizo as mesmas coordenadas em dois pontos, eles ficam sobrepostos, e então, a figura some e os conceitos-em-ação: pontos e pontos sobrepostos. Assim, identificamos que o estudante estabelece novamente relação entre função, variável (controle deslizante) e os pontos da figura, mas não se atenta para o fato de que deveria existir uma distância entre os pontos para que a figura exista no plano.

Então ele lembrou: *Ah, mas eu tenho que adicionar um valor ali* [junto à coordenada $x$ do ponto $B$] (Figura 12).

**Figura 12**

*Ponto $A$ e $B$*



*Nota*. O vídeo pode ser acessado em: https://youtu.be/lVIX_eFuBRI

Ele clicou duas vezes sobre o ponto $B$ novamente, alterou sua coordenada $x$ para $a + 10$ e clicou *Enter*. A figura voltou a aparecer na tela, mas em um tamanho grande. Então, Tiago alterou novamente as coordenadas $x$ do ponto $B$, deixando $a - 10$, clicou *Enter* e a figura do balão ficou invertida, de *ponta-cabeça*. Então, para arrumar a figura na tela, ele redefiniu a coordenada $x$ do ponto $B$, mudando para $a + 5$, e clicou *Enter*. A figura ficou na posição correta e com tamanho adequado (Figura 12).

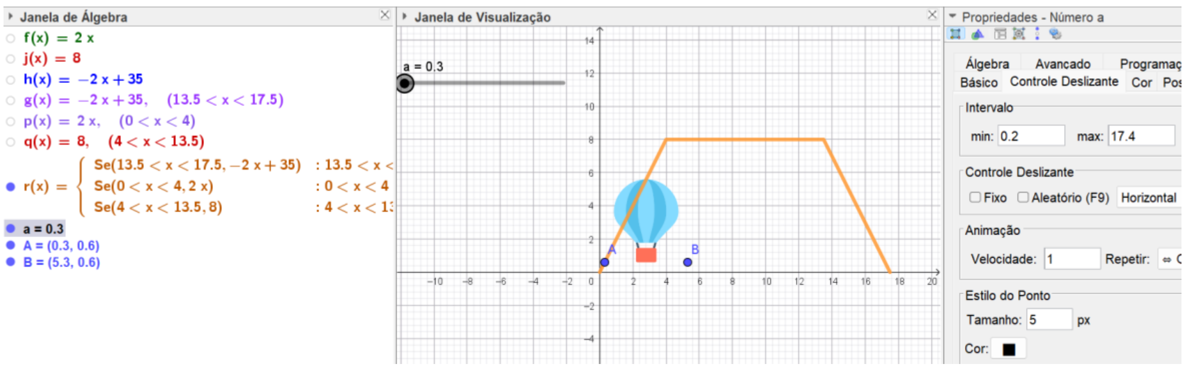
Por meio das ações de Tiago para deixar a figura do balão aparecendo na tela e conectada à função por partes, juntamente com o esquema de uso: alterar as coordenadas do ponto usando a janela de álgebras; evidenciamos os teoremas-em-ação: se quero que a figura seja exibida na tela, devo deixar uma distância entre os pontos atrelados a ela; se adiciono um valor positivo junto à coordenada $x$ do ponto $B$, ele fica à direita do ponto $A$; se adiciono um valor negativo junto à coordenada $x$ do ponto $B$, ele fica à esquerda do ponto $A$; se altero o valor que está sendo somado ou subtraído junto à coordenada $x$ do ponto $B$, o tamanho da figura é alterado, e os conceitos-em-ação: ponto e distância entre dois pontos. Então, identificamos que o estudante reconhece que o valor que está sendo somado/subtraído na coordenada $x$ interfere na posição do ponto e da figura no plano cartesiano.

Dessa forma, Tiago tem conhecimento sobre como devem ser as coordenadas dos pontos da figura do balão para que sejam conectados com a função por partes e animados por meio do controle deslizante.

Em seguida, quando ele animou o controle deslizante *a*, percebeu que a figura do balão sumiu em alguns momentos. Para que isso não ocorresse, ele abriu as propriedades do controle deslizante, fez alterações no valor máximo, clicou *Enter* e verificou, na construção, se o valor selecionado atendia as necessidades da construção (Figura 13). Quando ele digitou como valores máximos 16 ou 17, percebeu que a figura não percorreu todo o trajeto formado pela função por partes $r$. Já quando colocou valores máximos como 18 ou 20, percebeu que a figura e os seus pontos sumiram.

**Figura 13**

*Controle deslizante*




*Nota*. O vídeo pode ser acessado em: https://youtu.be/hGYB3DHR77o

Deixando 18 como máximo, ele moveu devagar o controle e percebeu que, até 17.4, a figura aparecia na tela. Então, alterou o valor máximo do controle para 17.4. Em seguida, ele realizou o procedimento análogo para verificar e alterar o valor mínimo do controle deslizante.

Por meio das ações do estudante em alterar o valor máximo e mínimo do controle deslizante, evidenciamos o teorema-em-ação: se animo/movimento o controle deslizante, então os pontos se movem em relação à representação gráfica da função no plano, e os conceitos-em-ação: pontos e gráfico da função. Assim, identificamos que o estudante realiza uma exploração para definir os valores de máximo e de mínimo do controle deslizante, e não associou necessariamente aos valores dos intervalos da função por partes.

No entanto, nessa etapa da construção, o estudante manifestou conhecimentos sobre a ferramenta controle deslizante e observou que os valores de máximo e mínimo devem ser alterados para que os pontos e a figura não desapareçam durante a animação.

Por meio dos teoremas-em-ação, dos conceitos-em-ação e dos esquemas de uso, identificamos que o estudante, para realizar a etapa de animação do cenário animado, insere a figura do balão na janela de visualização e altera as coordenadas dos pontos da figura, relacionando ao controle deslizante e à função por partes. Além disso, o estudante identifica que, para que a figura existisse no plano, deveria haver uma distância entre os pontos e o controle deslizante deveria assumir apenas valores específicos. Dessa forma, o estudante manifesta conhecimentos sobre as ferramentas e possibilidades oferecidas no software para que essa etapa da construção fosse desenvolvida. Assim, na Tabela 6, indicamos as ações do estudante relacionadas à instrumentação e à instrumentalização.

**Tabela 6**

*Relação entre instrumentação-instrumentalização ao conectar pontos da figura, controle deslizante e função*

| *Ações do estudante relacionadas à instrumentalização* | *Ações do estudante relacionadas à instrumentação* |
|---|---|
| Ter conhecimento sobre as ferramentas disponíveis no software e reconhecer a utilidade do controle deslizante na definição/atrelado às coordenadas dos pontos que pertencem a função. | Alterar a definição dos pontos $A$ e $B$ da figura para conectá-los à função por partes e ao controle deslizante, fazendo com que a figura se mova conforme a representação gráfica da função por partes. |

Nesse processo em que o estudante mobiliza seus conhecimentos matemáticos e sobre o software para realizar essa etapa da construção, é possível identificar a relação entre o estudante (sujeito) e o GeoGebra (artefato) (Rabardel, 2002; Drijvers et al., 2013). Ademais, tomando como aporte teórico o que Rabardel (2002), Drijvers et al. (2010) e Drijvers et al. (2013) discutem, como o estudante anima a figura do balão empregando técnicas instrumentadas no software e desenvolvendo esquemas, compreendemos que o GeoGebra é um instrumento ($I_4$) para a animação do balão sobre o caminho construído.

## 6. Considerações

Por meio deste trabalho, buscamos descrever o processo de construção do cenário animado desenvolvido pelo estudante brasileiro e depois a apresentação que ele realizou aos demais. Nesse sentido, buscamos relacionar as ações, teoremas-em-ação e conceitos-em-ação com as características da função afim que foram manifestadas pelo estudante durante a construção e apresentação(ões).

No decorrer dos encontros, o conteúdo foi abordado por meio da construção dos cenários animados no GeoGebra e foram promovidas discussões sobre função afim e suas características. Dessa forma, foi proposto uma abordagem diferente, sem foco em reprodução mecânica de regras e algoritmos (Merli & Nogueira, 2024), mas favorecendo a transição entre diferentes formas de representar as funções (Brasil, 2018; Santana et al., 2024).

Destacamos que o software usado é de matemática dinâmica, mas ao construir o cenário animado, inicialmente, o estudante não o usa com a finalidade de fazer matemática, e sim para construir um cenário animado em que um balão percorre determinado percurso. Nesse contexto, foram favorecidas oportunidades diferentes para que o estudante tivesse contato com o conteúdo de função afim (Hattikudur et al., 2012) e, por meio do uso do software, a visualização instantânea de suas representações (Birgin, 2012; Bueno et al. 2023).

Por meio das análises embasadas nos principais teoremas-em-ação e conceitos-em-ação destacados nesse processo, relacionados às características da função afim crescente (valor positivo junto com o $x$ na lei de formação), constante (na lei de formação há apenas um valor numérico) e decrescente (valor negativo junto com o $x$ na lei de formação), identificamos que o estudante tem noção do comportamento de cada função afim e reconhece que, ao alterar o coeficiente angular ou o linear, a representação gráfica da função também é alterada. Além disso, por meio dos teoremas-em-ação e dos conceitos-em-ação identificamos a manifestação de outras noções relacionadas ao conteúdo de função, como domínio da função (comando para limitar a representação gráfica da função), função por partes (comando usado para unir os gráficos) e pontos que pertencem à função (alterar e animar as coordenadas dos pontos da figura do balão). No momento em que o estudante atrelou ponto, controle deslizante e função, foi identificada a manifestação de noções sobre a relação entre as duas variáveis, dependente e independente, e que envolvem outros elementos, como controle deslizante, para que a figura percorra o caminho construído.

Vale destacar que isso tudo ocorreu com a mediação dos professores da EA, pois o estudante não estabeleceu sozinho as relações da construção com os conteúdos matemáticos, essa relação só aparece durante as discussões e a partir dos questionamentos que os integrantes da EA fizeram ao estudante.

Nesse processo de construção e apresentação, em alguns momentos, Tiago não nomeava corretamente cada tipo de função afim, mas estabelecia relação entre o que digitava na caixa de entrada e o comportamento da representação gráfica exibida na tela.

Considerando a dialética artefato-instrumento, identificamos que o GeoGebra se transformou em diferentes instrumentos para o estudante, como instrumento para construir o caminho para o balão ($I_1$), instrumento para limitar as partes do caminho ($I_2$), instrumento para unir as partes para formar um único e contínuo caminho ($I_3$), e por fim, usando os recursos do GeoGebra, instrumento para animar a construção desenvolvida por ele ($I_4$). Nesse sentido, para o estudante, o GeoGebra, durante a construção dos cenários animados, deu origem a diferentes instrumentos ($I_1$, $I_2$, $I_3$ e $I_4$).

Dessa forma, o estudante reconhece as possibilidades do software para construir o cenário animado e, assim, segundo Rabardel (2002), além das propriedades intrínsecas, outras propriedades extrínsecas podem ser adicionadas ao artefato, conforme as funções que são atribuídas a ele, para se constituir em um instrumento. Nesse sentido, identificamos que o GeoGebra se tornou um instrumento para o estudante construir o cenário animado Balão.

Quanto à dialética instrumentação-instrumentalização, identificamos as ações direcionadas para o estudante (instrumentação): compreender o funcionamento do artefato, reconhecer suas possibilidades, investigar os recursos disponíveis e usar as ferramentas. Com relação às ações direcionadas para o artefato (instrumentalização), identificamos: inserir a lei de formação na caixa de entrada, fazer alterações na lei de formação, usar o comando *Se* na caixa de entrada, fazer alterações no comando, usar a ferramenta *Inserir Imagem* e alterar as coordenadas dos pontos.

Dessa forma, o pensamento e as ações do estudante direcionam o uso do artefato, pois ele se limita a usar ferramentas que conhecia conforme o objetivo proposto, logo, ele está instrumentalizado para essa situação: construir cenários animados com/usando o conteúdo de função afim. O GeoGebra também pode moldar o pensamento e as ações do estudante, principalmente de forma visual, ao fornecer as representações gráficas das funções e a animação dos pontos da figura, destacando a variável em ação, situação que não ocorre quando se usam recursos como lápis e papel. Logo, o estudante também está instrumentado para usar as ferramentas e recursos do software para construir cenários animados.

Durante a realização desta pesquisa, verificamos que os elementos da dialética são entrelaçados e, por vezes, é difícil separar e identificar quais ações são referentes a cada noção. Para auxiliar, é necessário estabelecer o que/quais ações será/serão considerado/consideras para identificar cada noção.

Por fim, ressaltamos que, por meio deste trabalho, identificamos que o software GeoGebra se transformou em diferentes instrumentos para o estudante, esses instrumentos são relacionados à construção de cenários animados e às ações que o estudante deveria desenvolver para realizar a construção. Dessa forma, o estudante, até o momento desta pesquisa, não sabia operar com funções ou usar o software para esse fim.

## Declaración de contribución y autoría

*Adrieli Cristine Bueno: Conceptualização, Curadoria de Dados, Investigação e Escrita – rascunho original*.

*Maria Ivete Basniak: Conceptualização, Administração da Pesquisa, Supervisão e Escrita – revisão e edição*.

*Daysi Julissa García-Cuéllar: Conceptualização, Supervisão e Escrita – revisão e edição*.

## Financiamiento

Fundação Araucária, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM) e Capes/PROAP.

## Referencias

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 6(8), 13-33.

Brasil. (2018). Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)* - Ensino Fundamental.

Bueno, A. C., & Basniak, M. I. (2020). Construcción de escenarios en GeoGebra en la movilización de conocimientos matemáticos por alumnos con altas habilidades/superdotados. *PARADIGMA*, 252–276. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p252-276.id895

Bueno, A., Basniak, M. I., & Cuéllar, D. J. G. (2023). Função afim e suas características abordadas por meio do cenário animado Abelha no GeoGebra. *PNA: Revista de investigación en didáctica de la matemática*, 17(4), 401-423. https://doi.org/10.30827/pna.v17i4.26081

Bardini, C., Pierce, R. U., & Stacey, K. (2004). Teaching linear functions in context with graphics calculators: students' responses and the impact of the approach on their use of algebraic symbols. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2(3), 353-376. https://doi.org/10.1007/s10763-004-8075-3

Birgin, O. (2012). Investigation of eighth-grade students' understanding of the slope of the linear function. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26, 139-162. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000100008

Caraça, B. J. (1951). *Conceitos fundamentais da matemática*. (1ª ed). Gradiva.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19(2), 221-266.

Couto, R. M. de L. S. (2018). *Metaorquestração instrumental: um modelo para repensar a formação de professores de matemática* (Doctoral dissertation, Universidade Federal de Pernambuco). https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/32844

Drijvers. P. et al. (2010). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. En: C. Hoyles & J. B. C. Lagrange (Ed.). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (pp. 89-133). New York: Springer. http://dx.doi.org/10.1007%2F978-1-4419-0146-0_7

Drijvers, P. et al. (2013). One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 23–49. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9416-8

Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195–227. https://doi.org/10.1023/A:1009892720043

Hattikudur, S., Prather, R. W., Asquith, P., Alibali, M. W., Knuth, E. J., & Nathan, M. (2012). Constructing graphical representations: Middle schoolers' intuitions and developing knowledge about slope and y-intercept. *School science and mathematics*, 112(4), 230-240. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00138.x

Hines, E. (2002). Developing the concept of linear function: One student's experiences with dynamic physical models. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(3), 337-361. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00074-3

Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? En: A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education*, Vol. 1 (pp. 323-349). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0273-8_11

José, A. A. G. (2015). *As dificuldades dos alunos em tarefas envolvendo gráficos de funções afins no 8º ano de escolaridade*. (Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa). http://hdl.handle.net/10451/23388

Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., & Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio* (Vol. 1). Sociedade Brasileira de Matemática – SBM.

Martínez, M., & Brizuela, B. M. (2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(4), 285-298. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.11.003

Merli, R. F. & Nogueira, C. M. I. (2024). As relações entre as ideias-base do conceito de função e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). En: Teles et al. *Aspectos conceituais, cognitivos e didáticos de função*. (pp. 24-57). Editora UFPE.

Rabardel, P. (1995). *Los hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Rabardel, P. (2002). *Pessoas e tecnologia: uma abordagem cognitiva dos instrumentos contemporâneos*. Université Paris 8. hal-01020705.

Rebelo, C. (2011). *A aprendizagem das funções: uma experiência com alunos do 7º ano de escolaridade*. (Dissertação de Mestrado, Universidade da Beira Interior). http://hdl.handle.net/10400.6/1855

Rocha, K. M. (2019). *Une étude des effets du travail documentaire et collectif sur le développement professionnel des enseignants de mathématiques: apport des concepts d'expérience et de trajectoire documentaires* (Doctoral dissertation, Université de Lyon). https://theses.fr/2019LYSEN014

Santana, J. E. B., Teles, R. A. de M., & Santos, M. C. dos (2024). Ensino de função afim no 1º ano do Ensino Médio: tecendo inter-relações entre o contrato didático e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. En: Teles et al. *Aspectos conceituais, cognitivos e didáticos de função*. (pp. 342-377). Editora UFPE.

Vol. 28, e435 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e435

Tenório, A., Oliveira, M. E. F. de, & Tenório, T. (2015). A influência do GeoGebra na resolução de exercícios e problemas de função polinomial do 1º grau. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 8(2), 98-126.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. En: K. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche. (Eds.). *The didactical challenge of symbolic calculators:* Turning a computational device into a mathematical instrument. (p. 137-162). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-23435-7_7

Trouche, L., & Drijvers, P. (2010). Handheld technology: Flashback into the future. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 42(7), 667-681. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0269-2

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 10(23), 133-170.

Vergnaud, G. (1996). A trama dos Campos Conceituais na construção dos conhecimentos. *Revista do GEMPA*, 4, 9-19.

Vergnaud, G., & Récopé, M. (2000). De Revault d'Allonnes à une théorie du schème aujourd'hui. *Psychologie française* (La Société Française de Psychologie a cent ans), 45(1), 35-50.

## Notas

1. Tínhamos um parecer favorável do comitê de ética para a realização dos encontros e o termo de consentimento livre e esclarecido assinado pelos responsáveis pelos estudantes.
2. A construção pode ser vista em https://www.geogebra.org/m/kujf4ez6
3. As duas professoras em questão estavam participando de um curso sobre a construção de cenários animados que estava sendo promovido no âmbito do projeto de extensão USF.
4. A construção pode ser vista em: https://www.geogebra.org/m/zy3rw2d8
5. Segundo Lima et al. (2006), considerando os números reais $a$ e $b$, tal que $a \leq b$, tem-se: $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ou $(a, b)$ é aberto.