Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
RELIME
ISSN 1665-2436 | eISSN 2007-6819
Vol. 29, e445

Artículo
https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e445

Análisis praxeológico de los números reales en libros de texto peruanos de secundaria, 1961–1999

Praxeological Analysis of Real Numbers in Peruvian Secondary School Textbooks, 1961–1999

Wenceslao Quispe Yapo
Universidad Nacional del Altiplano de Puno, Perú

Elio Ronald Ruelas Acero
Universidad Nacional del Altiplano de Puno, Perú

Fredy Gallegos Flores
Universidad Nacional del Altiplano de Puno, Perú

Resumen

Este estudio analiza la presentación de los números reales en libros de texto de matemática de educación secundaria del sistema educativo peruano publicados entre 1961 y 1999. Se examinan la introducción de los números irracionales, la definición de número real, los registros ostensivos y las praxeologías asociadas mediante la Teoría Antropológica de lo Didáctico. El corpus estuvo conformado por 25 textos organizados en dos periodos: Tradicional y Matemática Moderna. Los resultados muestran que ambos periodos privilegian definiciones operativas y representaciones visuales centradas en la clasificación y la intuición geométrica, en detrimento de la fundamentación teórica del continuo real. Se identifica un desacoplamiento entre praxis y logos, donde las tareas y técnicas no se articulan con tecnologías y teorías que justifiquen la estructura de los números reales. Se concluye que es necesario fortalecer la relación entre visualización, justificación y formalización en su enseñanza.

Palabras clave:

- *Números reales*
- *Libro de texto*
- *Educación secundaria*
- *Teoría Antropológica de lo Didáctico*
- *Praxeología*

Cómo citar:

Quispe Yapo, W., Ruelas Acero, E. R. y Gallegos Flores, F. (2026). Análisis praxeológico de los números reales en libros de texto peruanos de secundaria, 1961–1999. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *29*, e445. https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e445

Recepción: 27/09/2024 Aceptación: 16/06/2026 Publicación: 19/06/2026

Abstract

This study analyzes the presentation of real numbers in mathematics textbooks for secondary education in the Peruvian educational system published between 1961 and 1999. The introduction of irrational numbers, the definition of real number, the ostensive representations, and the associated praxeologies are examined through the Anthropological Theory of the Didactic. The corpus consisted of 25 textbooks organized into two periods: Traditional and Modern Mathematics. The results show that both periods prioritize operational definitions and visual representations focused on classification and geometric intuition, to the detriment of the theoretical foundations of the real continuum. A decoupling between praxis and logos is identified, where tasks and techniques are not articulated with technologies and theories that justify the structure of real numbers. It is concluded that strengthening the relationship between visualization, justification, and formalization is necessary for teaching real numbers.

Keywords

- *Real numbers*
- *Textbook*
- *High school*
- *Anthropological Theory of the Didactic*
- *Praxeology*

Resumo

Este estudo analisa a apresentação dos números reais em livros didáticos de matemática do ensino secundário do sistema educacional peruano publicados entre 1961 e 1999. São examinadas a introdução dos números irracionais, a definição de número real, os registros ostensivos e as praxeologias associadas por meio da Teoria Antropológica do Didático. O corpus foi constituído por 25 livros organizados em dois períodos: Tradicional e Matemática Moderna. Os resultados mostram que ambos os períodos privilegiam definições operacionais e representações visuais centradas na classificação e na intuição geométrica, em detrimento da fundamentação teórica do contínuo real. Identifica-se um desacoplamento entre práxis e logos, no qual as tarefas e técnicas não se articulam com tecnologias e teorias que justifiquem a estrutura dos números reais. Conclui-se que é necessário fortalecer a relação entre visualização, justificação e formalização no ensino dos números reais.

Palavras-chave

- *Números reais*
- *Livro didático*
- *Ensino Médio*
- *Teoria Antropológica do Didático*
- *Praxeologia*

Résumé

Cette étude analyse la présentation des nombres réels dans les manuels scolaires de mathématiques de l’enseignement secondaire du système éducatif péruvien publiés entre 1961 et 1999. L’introduction des nombres irrationnels, la définition du nombre réel, les registres ostensifs et les praxéologies associées sont examinés à travers la Théorie Anthropologique du Didactique. Le corpus comprend 25 manuels organisés en deux périodes : Traditionnelle et Mathématiques Modernes. Les résultats montrent que les deux périodes privilégient des définitions opérationnelles et des représentations visuelles centrées sur la classification et l’intuition géométrique, au détriment des fondements théoriques du continuum réel. Un découplage entre praxis et logos est identifié, les tâches et techniques n’étant pas articulées avec les technologies et théories permettant de justifier la structure des nombres réels. Il est conclu qu’il est nécessaire de renforcer l’articulation entre visualisation, justification et formalisation dans l’enseignement des nombres réels.

Most Clés

- *Nombres réels*
- *Manuel scolaire*
- *Collège*
- *Théorie Anthropologique du Didactique*
- *Praxéologie*

Vol. 29, e445 https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e445

1. Introducción

En las últimas décadas se ha intensificado el interés por comprender cómo los libros de texto configuran la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, dado que constituyen dispositivos centrales en la institucionalización del saber escolar. Estos materiales median entre el conocimiento matemático y las prácticas de enseñanza, participando en la selección, organización y transformación de los contenidos que serán objeto de estudio. Sin embargo, como señalan Fan et al. (2013), aunque los libros de texto eran los materiales más frecuentes en las aulas, la investigación centrada en ellos estaba "dispersa, inconclusa y a menudo trivial" (p. 633). En este sentido, analizar la presentación de los números reales en los textos escolares permite comprender cómo determinados significados matemáticos son seleccionados, reorganizados y adaptados para su enseñanza. Desde esta perspectiva, las decisiones editoriales no solo determinan qué contenidos se presentan, sino también las praxeologías que estructuran las tareas, técnicas, tecnologías y teorías disponibles para los estudiantes, pudiendo favorecer una comprensión matemáticamente fundamentada o generar limitaciones cuando se introducen simplificaciones u omisiones que afectan la coherencia epistemológica del contenido (Chevallard et al., 2022; Gascón, 2024).

Estudios recientes muestran que persisten praxeologías centradas en el cálculo en detrimento de aproximaciones conceptuales, evidenciando sesgos, rupturas u omisiones en la organización matemática destinada al alumnado (Llanos y Otero, 2024). En este contexto, la vigilancia epistemológica propuesta por Chevallard se vuelve fundamental, pues permite identificar reducciones y desplazamientos conceptuales, evaluar la correspondencia entre el saber sabio y el saber enseñado (Bosch y Gascón, 2014; Trouche et al., 2018) y analizar las implicancias institucionales para el aprendizaje matemático (Rezat et al., 2021). Asimismo, investigaciones actuales evidencian que diversas desarticulaciones entre técnica, tecnología y teoría afectan la construcción de significados y limitan la comprensión del objeto matemático (Ledezma et al., 2023; Font et al., 2024).

En el sistema educativo peruano, los libros de texto de matemática constituyen un componente estructural del proceso de enseñanza y aprendizaje en la educación secundaria. Estos materiales median entre el currículo nacional y la práctica docente, organizan la progresión conceptual de los contenidos y orientan el diseño de actividades que posibilitan la comprensión de nociones fundamentales, como los sistemas numéricos (Ministerio de Educación, 2024). En la enseñanza de los números reales, los textos escolares determinan la forma en que se introducen conceptos clave —entre ellos, las expresiones decimales infinitas no periódicas, la irracionalidad, el conjunto de los números reales, la densidad, la completitud y la relación de orden—, nociones indispensables para el desarrollo formativo en áreas como el álgebra, el análisis y las ciencias aplicadas. La evidencia disponible muestra que la organización matemática de los libros de texto, su claridad conceptual y la calidad cognitiva de las tareas que proponen influyen directamente en las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes (Rezat et al., 2021; Hadar, 2017; Font et al., 2024).

La literatura especializada ha documentado tensiones persistentes en la presentación escolar de los números reales. Diversos estudios comparados indican que los textos suelen privilegiar enfoques procedimentales basados en algoritmos o aproximaciones decimales, relegando la elaboración conceptual de la estructura del sistema real (González-Martín et al., 2013; González-Martín, 2020). Esta orientación puede generar comprensiones fragmentadas y dificultades para vincular los números reales con problemas de medida, continuidad o variación. Asimismo, se ha observado que las inconsistencias terminológicas, las omisiones conceptuales o la selección de ejemplos poco articulados introducen conflictos de aprendizaje que se proyectan hacia niveles superiores (Zeynivandnezhad et al., 2024). Los estudios recientes profundizan en las dificultades persistentes en la comprensión escolar y universitaria de los números reales, Montoro (2025) mostró que conceptos clave —densidad, orden, infinito y continuidad— no se construyen de manera natural, sino que requieren un trabajo explícito y sostenido, dado que los estudiantes mantienen concepciones heterogéneas y fragmentadas. Este hallazgo enfatiza la brecha entre operar con lo infinito y comprender su estatuto matemático.

La pertinencia del estudio se sustenta en la escasez de investigaciones dedicadas específicamente al análisis de la transposición didáctica externa de los números reales en libros de texto latinoamericanos. Una revisión sistemática reciente muestra que, aunque existen trabajos consolidados sobre el análisis de textos escolares en educación matemática, estos no abordan de manera directa la presentación epistemológica y didáctica de los números reales. La investigación sobre libros de texto ha demostrado ser un campo fundamental para comprender cómo los saberes matemáticos se transforman, se institucionalizan y llegan a las aulas en contextos curriculares particulares. Los textos escolares funcionan como dispositivos didácticos que estructuran la práctica matemática y orientan tanto la enseñanza como las formas de razonamiento de los estudiantes (Marmolejo y González, 2015; De Gauna et al., 2013, Betancur et al., 2021). Asimismo, permiten identificar cómo las políticas educativas se traducen en propuestas pedagógicas concretas (Cordero y Flores, 2007) y cómo los recursos semióticos utilizados cumplen funciones epistemológicas y didácticas específicas (Cordero et al., 2010). El análisis de los libros escolares posibilita detectar vacíos y desajustes entre el conocimiento disciplinar y su transposición escolar, lo que contribuye a proponer mejoras fundamentadas (Martínez et al., 2017; Hernández y Fuenlabrada, 2024). En conjunto, estas contribuciones evidencian la importancia de estudiar los libros de texto; sin embargo, también revelan la ausencia de investigaciones centradas en la enseñanza de los números reales en el ámbito latinoamericano, vacío que el presente estudio busca comenzar a atender.

En este contexto se inscribe la presente investigación, guiada por la pregunta: ¿Cómo se organizan las praxeologías asociadas a la introducción y definición de los números reales en los libros de texto peruanos de educación secundaria publicados entre 1961 y 1999? Para responderla, se realizó un análisis cualitativo de veinticinco manuales correspondientes al Periodo Tradicional y al Periodo de la Matemática Moderna. El estudio identifica los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías mediante los cuales se introducen los números irracionales y reales, así como sus propiedades, los registros de representación utilizados y las dinámicas praxeológicas configuradas por los libros de texto en tanto objetos institucionales.

El objetivo general es analizar la organización praxeológica de la presentación de los números reales en los libros de texto peruanos de matemática para educación secundaria. Los objetivos específicos consisten en describir los tipos de tareas y técnicas empleados para introducir los números irracionales y definir el conjunto de los números reales; identificar las tecnologías y teorías que justifican dichas técnicas, especialmente las vinculadas con las propiedades de densidad, completitud y orden; analizar las dinámicas praxeológicas asociadas a los periodos de estudio; e interpretar las relaciones entre el saber sabio y el saber enseñado desde la perspectiva de la transposición didáctica.

La relevancia del estudio radica en que ofrece un análisis sistemático de los libros de texto como parte de la noosfera curricular y aporta evidencia sobre la forma en que se institucionaliza el conocimiento matemático y cómo estas decisiones condicionan las posibilidades de aprendizaje. Los resultados permiten identificar fortalezas, limitaciones y tensiones en la organización matemática de los manuales, lo cual ofrece insumos valiosos para el diseño de materiales educativos, la toma de decisiones curriculares y la mejora de la enseñanza de los números reales en la educación secundaria peruana.

La relevancia del estudio radica en que ofrece un análisis sistemático de los libros de texto en tanto productos de la noósfera curricular, es decir, como dispositivos institucionales en los que se materializan y estabilizan decisiones sobre el saber a enseñar. Desde esta perspectiva, se aporta evidencia acerca de las formas en que se institucionaliza el conocimiento matemático y de cómo tales decisiones condicionan las posibilidades de aprendizaje. Los resultados permiten identificar fortalezas, limitaciones y tensiones en la organización matemática de los manuales, lo cual ofrece insumos valiosos para el diseño de materiales educativos, la toma de decisiones curriculares y la mejora de la enseñanza de los números reales en la educación secundaria peruana.

2. Marco teórico

La revisión de los antecedentes sobre el estudio de los números reales en los libros de texto, junto con los aportes de la TAD de Chevallard, constituyen el marco teórico que fundamenta el presente estudio

2.1. Antecedentes de investigación

El análisis institucional desarrollado por González-Martín (2020) muestra que las praxeologías asociadas a los números reales en la educación secundaria se estructuran casi exclusivamente en el bloque práctico, configurando organizaciones que "*se articulan más bien como listas de cosas que aprender*" (p. 20), con escasa justificación tecnológica-teórica. Esta orientación privilegia tareas centradas en procedimientos operativos, mientras se omiten discusiones sobre la necesidad matemática de los irracionales y la función estructural de la recta real. Como consecuencia, las definiciones son implícitas, las propiedades se fundamentan en ejemplos y no se promueve la construcción de una teoría coherente que prepare al estudiantado para transitar hacia un pensamiento formal. Tales elecciones institucionales generan praxeologías incompletas y distantes de la matemática académica.

González-Martín et al., (2013) analizaron las dificultades que estudiantes y docentes enfrentan al abordar los números reales y examinaron cómo los libros de texto de matemáticas presentan este contenido, atendiendo a sus implicaciones didácticas y epistemológicas. Desde la TAD de Chevallard, mostraron que las decisiones institucionales sobre la organización del saber condicionan la enseñanza y el aprendizaje, en particular por la ausencia de una transición explícita entre los números racionales y los reales. Con un enfoque cualitativo, estudiaron libros de texto brasileños aprobados por el Ministerio de Educación y evidenciaron la insuficiencia de estrategias didácticas que articulen la naturaleza y las propiedades del conjunto real. Identificaron además una marcada orientación algebraica que limita la profundización conceptual y una escasa justificación de las propiedades introducidas, situación que puede conducir a un "empirismo ingenuo" (Balacheff, 1987) donde predomina la memorización de reglas sobre la construcción de significados. Sus resultados destacan la necesidad de fortalecer la conexión entre

Vol. 29, e445 https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e445

comprensión conceptual y razonamiento matemático en la enseñanza de los números reales.

De Gauna et al. (2013) analizaron libros de texto de matemáticas del bachillerato publicados entre 1970 y 2007 y, a partir de su modelo teórico, establecieron cuatro categorías de estudio: tratamiento didáctico del contenido, lenguaje gráfico y simbólico, problemas y ejercicios, e innovaciones metodológicas vinculadas al modelo de enseñanza y aprendizaje. Durante la vigencia de la Ley General de Educación española, identificaron materiales que priorizaban las representaciones simbólicas y el método deductivo, resultando más útiles para el profesorado que para el estudiantado. Posteriormente, observaron la aparición de libros con un enfoque más práctico, centrados en problemas que facilitaban el trabajo en clase y sustentados en un fundamento conductista y una pedagogía por objetivos.

El análisis de Licera et al. (2011) revela que la enseñanza de los números reales en la educación media se caracteriza por una marcada fragmentación. Las tareas aparecen desconectadas, las técnicas tienen escaso alcance y los elementos teóricos se incluyen sin vínculo funcional con problemas de medida o modelización. Los autores muestran, además, una ruptura entre los bloques de números y medidas, así como una falta de continuidad entre grados escolares. También señalan que la ampliación del campo numérico carece de justificación institucional porque no se integra en actividades de modelización que la fundamenten. Desde la didáctica, el origen del problema reside en la organización disciplinar —donde la medida ocupa un rol secundario— y en un currículo que naturaliza estas incoherencias y limita el margen de acción docente.

Bergé (2008) analizó la enseñanza del conjunto de los números reales y de su completitud en cuatro cursos universitarios consecutivos de la Universidad de Buenos Aires. Desde la TAD, distinguió dos niveles de conceptualización: uno inicial, centrado en representaciones decimales y en la ubicación de irracionales en la recta numérica, y otro avanzado, donde $\mathbb{R}$ se comprende mediante propiedades aritméticas, de orden y de completitud. Asimismo, reconstruyó la evolución histórica de esta propiedad, desde su tratamiento implícito en Euclides hasta su formalización por Dedekind y Cantor. Su análisis praxeológico mostró que el Cálculo privilegia tareas computacionales, mientras que el Análisis exige justificaciones formales.

Bronner (1997) analizó la relación de los profesores de secundaria con los conceptos de “número real” y “raíz cuadrada”, empleando el enfoque antropológico de Chevallard para examinar cómo dichas relaciones, tanto personales como institucionales, no estaban plenamente determinadas por la institución. A partir de entrevistas y encuestas, identificó un "vacío didáctico institucional" que generaba variaciones significativas en las posturas docentes respecto del concepto de número real. El estudio evidenció una amplia flexibilidad en la manera en que los profesores abordaban estos contenidos, lo que derivó en una diversidad de enfoques didácticos.

Fischbein et al., (1995) investigaron la comprensión de los números irracionales en estudiantes de secundaria y futuros docentes, centrándose en la aceptación de la inconmensurabilidad y en la comprensión de su densidad. Mediante un cuestionario aplicado a diversos grupos, evidenciaron que las dificultades intuitivas no son primitivas, sino consecuencia del desarrollo intelectual modelado por la enseñanza. Los autores destacaron la necesidad de una instrucción más estructurada que trascienda los procedimientos técnicos y promueva una comprensión profunda e intuitiva de estos conceptos.

La literatura reciente subraya que la irracionalidad, lejos de explicar la naturaleza de $\mathbb{R}$, solo evidencia la insuficiencia estructural de $\mathbb{Q}$ para fines geométricos y algebraicos. Oktaç y Vivier (2016) afirman que "la comprensión del conjunto $\mathbb{R}$ no puede reducirse a la distinción entre racionales e irracionales" (p. 95), dado que las propiedades decisivas del continuo dependen de la completitud. En esta línea, los números irracionales constituyen un subconjunto cuya función principal es mostrar la necesidad de un sistema numérico más robusto. De este modo, el estudio de $\mathbb{R}$ exige atender nociones centrales del análisis —como límites, continuidad y completitud— que permiten comprender su estructura topológica y su significado matemático.

2.2. Teoría Antropológica de lo Didáctico

La TAD, desarrollada por Yves Chevallard, ofrece un marco sólido para analizar la enseñanza de las matemáticas mediante la descomposición praxeológica en tarea, técnica, tecnología y teoría. Esta estructura analítica permite examinar con precisión cómo los libros de texto organizan y legitiman los saberes matemáticos. Su pertinencia queda explícita en la afirmación de Chevallard (1999), quien sostiene que el análisis didáctico debe incluir a "los estudiantes, los profesores, los manuales, etc." y evitar excluir elementos que podrían parecer "culturalmente ajenos a los objetos considerados emblemáticos de las cuestiones de didáctica de las matemáticas" (p. 222), desempeñan un papel central en la construcción institucional del conocimiento. Integrar la TAD en este estudio posibilita dilucidar la lógica que estructura las praxeologías vinculadas a los números reales en los textos escolares y comprender los mecanismos mediante los cuales estas obras transforman el saber sabio en saber enseñado.

En la TAD, la praxeología constituye la unidad elemental del análisis de la acción humana y se define como la articulación entre *tareas, técnicas, tecnologías y teorías*. Chevallard y Bosch (2020) formalizan esta estructura como "$p = [\mathrm{T}/\tau/\theta/\Theta] = [\mathrm{T}/\tau] \oplus [\theta/\Theta] = \Pi \oplus \Lambda$" (p. xxxii), donde el bloque praxis $[T/\tau]$ describe el saber hacer, mientras que el bloque logos $[\theta/\Theta]$ expresa el saber que justifica dicho hacer. El análisis praxeológico constituye la aplicación metodológica de esta noción y permite estudiar cómo las instituciones reorganizan estas estructuras. En consonancia con ello, los autores subrayan la necesidad de responder preguntas como "¿De dónde vienen estas relaciones? ¿Cuál es su génesis?", interrogantes que la praxeología permite abordar para explicar el origen y transformación de los vínculos que sostienen las prácticas (Chevallard y Bosch, 2020, p. xxxii). Así, analizar praxeológicamente implica describir y explicar el funcionamiento de estas estructuras en situaciones didácticas concretas.

El análisis praxeológico, además, constituye una herramienta central de la TAD para caracterizar la organización interna de los saberes matemáticos. Desde esta perspectiva, cada objeto de estudio es concebido como una *obra* cuya estructura, funciones y usos deben explicitarse para comprender las condiciones que impone al sistema didáctico. Chevallard y Sensevy (2014) señalan que "La TAD sostiene que O es una combinación de varias praxeologías $(\mathrm{T}/\tau/\theta/\Theta)$ que por lo general comparten partes de su teoría Θ y de su tecnología θ" (p. 40), lo que indica que toda obra integra tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que orientan su funcionamiento. Asimismo, destacan que "el elemento fundamental de toda actividad es una estructura de cuatro componentes denominada praxeología" (Chevallard y Sensevy, 2014, p. 39). Bajo esta óptica, el análisis praxeológico permite estudiar con rigor los contenidos, métodos y justificaciones presentes en los libros de texto de matemáticas, revelando cómo estas obras institucionalizan las prácticas y configuran modos específicos de hacer, explicar y teorizar la enseñanza.

Chevallard (1999) explicó que la *tarea* (t) y *tipo de tareas* (T), establecen una relación de pertenencia entre ellas, es decir, $t \in T$. Las tareas, vistas como artefactos culturales y construcciones institucionales, se convierten en objetos de estudio de la didáctica. En el ámbito educativo, las tareas se refieren a actividades específicas como 'encontrar un número irracional entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$'. Para Chevallard y Bosch (2020), una tarea particular, como 'ubicar $\sqrt{2}$ en la recta numérica', ejemplifica un tipo de tarea y se denomina ejemplar de dicho tipo. Las tareas suelen formularse con un verbo de acción y un objeto directo, lo que delimita géneros y tipos de tareas. Sin embargo, Chevallard y Bosch aclararon que no se puede aprender a realizar una tarea aislada; más bien, se aprende a ejecutar tipos de tareas. Por ello, es fundamental no confundir "la tarea" con el tipo de tareas, ya que esto afecta la correcta construcción y aplicación de las técnicas didácticas, “por lo tanto, debemos tener cuidado de no hablar de ‘la tarea’ cuando en realidad nos referimos al tipo de tareas” (Chevallard y Bosch, 2020, p. xxxvi).

La *técnica* (τ), derivada del griego *tekhnê*, es la metodología utilizada para ejecutar un tipo de tarea, constituyendo el "saber hacer" o la forma específica de realizar un conjunto de tareas T, conocido como bloque práctico-técnico $[T/\tau]$. Chevallard (1999) definió que "una praxeología relativa a T precisa (en principio) *una manera de realizar las tareas* $t \in T$: a tal *manera de hacer*, τ, se le da aquí el nombre de *técnica*" (p. 225). Afirmó que La técnica posee tres características esenciales: Primero, su alcance está limitado a una parte de las tareas de tipo T, no pudiendo aplicarse a todas ellas. Segundo, no siempre es algorítmica o cuasi algorítmica, pudiendo ser procedimental. Tercero, las técnicas institucionalmente reconocidas pueden excluir otras, quizá más eficientes (Chevallard, 1999).

Un análisis praxeológico sobre un tipo de tarea T implica una técnica τ específica para dicho T. Analizar las técnicas en los libros de texto permitió identificar las expectativas sobre el conocimiento procedimental que los estudiantes deben adquirir, así como la diversidad y eficacia de las estrategias y algoritmos propuestos. En el contexto educativo, esto incluye las recomendaciones pedagógicas y los pasos detallados para la resolución de problemas matemáticos.

La *tecnología* (θ) es el discurso racional que justifica una técnica (τ) y puede incluir cualquier comentario explicativo o ilustrativo que apoye su realización. Chevallard (2020) señaló que "Cualquier técnica requiere un comentario explicativo o de apoyo, llamado su tecnología, denotado por la letra θ" (p. xxxii). La función principal de la tecnología es justificar racionalmente la técnica, asegurando que permita cumplir las tareas del tipo T (Chevallard, 1999). Esta justificación es relativa a su contexto institucional y varía con el tiempo. Para el análisis didáctico, la tecnología tuvo tres funciones importantes: primero, justificar la técnica, garantizando que proporcione los resultados esperados; segundo, explicar y hacer comprensible la técnica, cumpliendo con su función de justificación, a través de la exigencia demostrativa; y tercero, produciendo nuevas técnicas, reconociendo que existen tecnologías potenciales que aún no se aplican a ninguna técnica o a muy pocas. Este fenómeno refleja la subexplotación de tecnologías disponibles, tanto en su función justificativa como explicativa y productiva (Chevallard, 1999).

La *teoría*, representada por Θ, es el discurso justificativo que opera a un nivel superior de la tecnología (θ), proporcionando explicaciones y produciendo principios generales (Chevallard y Bosch, 2020). El discurso tecnológico es más o menos explícito y puede ser cuestionado; en este sentido, se encuentra "en un nivel superior de justificación-explicación-producción, el de la teoría, Θ, la cual desempeña, con respecto a la tecnología, el mismo papel que esta última tiene con respecto a la técnica" (Chevallard, 1999, p. 227). La praxeología de Chevallard (1999) sugiere que la naturaleza de la teoría evoluciona históricamente, generando avances teóricos. Además, se caracteriza por su naturaleza abstracta, distante de las preocupaciones técnicas y tecnológicas, lo que le confiere su forma general en los principios teóricos.

Así mismo, el análisis se sustenta en la noción de registros ostensivos como componente fundamental de las praxeologías. En este marco, los ostensivos se entienden como sistemas materiales y semióticos mediante los cuales una organización praxeológica se hace visible, manipulable y comunicable en una institución escolar (Chevallard, 1992; Bosch y Chevallard, 1999). Tal como señalan estos autores, los ostensivos no solo permiten mostrar los objetos matemáticos, sino que condicionan las formas en que estos pueden ser pensados y estudiados. En consecuencia, no producen por sí mismos el conocimiento, pero orientan y regulan la actividad matemática, haciendo posible "ver" propiedades cuya justificación última pertenece al nivel tecnológico-teórico (Chevallard, 1999). Desde esta perspectiva, el análisis de los libros de texto considera los registros ostensivos —como la recta numérica, las representaciones simbólicas y las configuraciones gráficas— como elementos que median la construcción del saber enseñado y que inciden en la articulación entre praxis y logos.

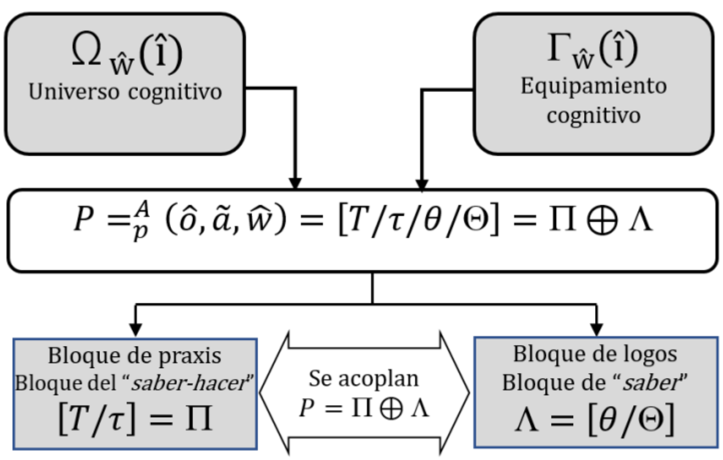
En el marco de la TAD, la escala de niveles de co-determinación didáctica constituye un instrumento analítico fundamental para comprender que las praxeologías no pueden interpretarse exclusivamente en el nivel local del saber enseñado. Este dispositivo teórico permite situar el análisis en una jerarquía de niveles —civilización, sociedad, escuela, pedagogía y disciplina— que configuran un sistema de condiciones y restricciones bajo el cual se organizan las prácticas didácticas. En este sentido, el nivel del tema, donde se identifican las tareas, técnicas, tecnologías y teorías, se encuentra co-determinado por instancias superiores que regulan tanto la selección como la forma de presentación del conocimiento matemático. Así, las praxeologías observadas en los libros de texto deben ser comprendidas como productos institucionales que responden a orientaciones curriculares, tradiciones disciplinares y marcos socioculturales específicos, lo que permite explicar no solo su estructura interna, sino también sus alcances y limitaciones en la construcción del saber enseñado (Chevallard y Ladage, 2011).

3. Metodología

El estudio de la presentación de los números reales en los libros de texto se realizó considerando la praxeología de Yves Chevallard. La metodología del análisis praxeológico se sustenta en la descomposición sistemática de una práctica institucional en sus unidades mínimas de organización, las praxeologías. Chevallard y Bosch (2020) definen la praxeología como una organización de la actividad humana que puede representarse mediante la estructura $p = [\mathrm{T}/\tau/\theta/\Theta]$. En este marco, la praxeología la concibe como una "teoría de la acción humana cuyo punto de partida es la noción de un *tipo de tareas* T (y la noción de tarea t de tipo T, que se denota por $t \in T$)" (p. xxxii). Esta definición no solo tiene un carácter conceptual, sino también operativo, ya que permite analizar cómo se articulan las tareas, las técnicas, las tecnologías y las teorías en una institución determinada, además orienta los procedimientos que permiten estudiar el funcionamiento interno de una actividad matemática. En efecto, el análisis praxeológico consiste en identificar: (1) el tipo de tarea T, (2) la técnica τ movilizada para realizarla, (3) la tecnología θ que explica y legitima la técnica y (4) la teoría Θ que fundamenta dicha tecnología. Como enfatiza Chevallard (1999), toda actividad humana puede describirse como un sistema de tareas y de técnicas acompañado de un discurso justificativo, lo que otorga a la metodología un carácter operativo. En consecuencia, el análisis praxeológico constituye un método estructurado que permite explicar cómo los saberes matemáticos son producidos, transformados y legitimados dentro de una institución. El diseño metodológico queda ilustrado en la Figura 1.

Figura 1

Diseño de investigación praxeológica



Nota. Esta figura muestra los elementos constitutivos de la praxeología y explica su notación simbólica. Tomado de Chevallard y Bosch (2020). $\Omega_{\hat{w}}(\hat{\imath}) \stackrel{\text{def}}{=} \{o/\hat{w} \vdash R(\hat{\imath}, o) \neq \emptyset\}$: *Universo cognitivo*

Vol. 29, e445 https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e445

de la instancia $\hat{\imath}$ según $\widehat{w}$. Los objetos o existen para $\hat{\imath}$ según $\widehat{w}$. $\hat{\imath}$: Instancia descrita o evaluada, cuyo universo cognitivo se analiza. $\widehat{w}$: instancia que evalúa o describe a otra. $\hat{\mathrm{w}} \vdash$: el punto de vista institucional. $R(\hat{\imath}, o)$: conjunto de relaciones que la instancia $\hat{\imath}$ mantiene con el objeto o. $\Gamma_{\hat{\mathrm{w}}}(\hat{\imath}) \stackrel{\text{def}}{=} \{(o, R(\hat{\imath}, o)) \ / \ o \in \Omega_{\hat{\mathrm{w}}}(\hat{\imath})\}$: *El equipamiento cognitivo* de $\hat{\imath}$ según $\widehat{w}$, específica cómo $\hat{\imath}$ conoce los objetos o según $\widehat{w}$. $\hat{o} = (I, p)$: Sujetos de la instancia de una institución I y una posición p. ${}^{A}_{p}(\hat{o}, \tilde{a}, \widehat{w})$: El funtor praxeológico que proporciona un análisis praxeológico de la actividad $\tilde{a}$.

Para clasificar los libros de texto se estableció una periodificación fundada en criterios didácticos y transpositivos, más que en una división meramente cronológica. El punto de corte en 1972 se justifica por la aparición de los primeros textos peruanos que se autodenominan Matemática Moderna, evidencia de la recepción local del movimiento internacional. Esta decisión coincide con la interpretación de Chevallard (1985), quien señala que la reforma francesa de 1971 constituye "este punto culminante de la evolución de la transposición didáctica que representa la reforma de 1971 (la de las 'matemáticas modernas'*)*" (p. 78) y advierte que "esta aberración no lo es tal, pues únicamente precipita, cristaliza y hace explícitos rasgos que ya pueden identificarse en la evolución de las décadas anteriores" (p. 78). Así, distinguir un Periodo Tradicional previo a 1972 y un Periodo de la Matemática Moderna posterior permite caracterizar con mayor precisión la transformación del campo matemático escolar en el caso peruano.

La extensión del Periodo de la Matemática Moderna hasta 1999 no desconoce la contrarreforma internacional; por el contrario, reconoce que en el Perú la matriz modernista mantuvo vigencia curricular y editorial hasta fines de los noventa. Chevallard (1985) recuerda que, aun tras la reforma de 1971, "el programa de 1978 instaurará una versión atenuada de la misma estrategia" (p. 79), mostrando que la modernización no se extingue, sino que se reconfigura. Ese patrón también aparece en los textos peruanos: persistencia de la teoría de conjuntos, estructuración numérica y énfasis empirista descrito por el autor como "la invasión del campo de estudio por las estructuras numéricas" (p. 79). Asimismo, la dialéctica entre observación y teoría característica de los manuales modernistas se mantiene en los textos nacionales hasta 1999. Por ello, fijar este límite permite capturar el ciclo completo de textualización modernista antes de la reforma curricular por competencias implementada en el año 2000.

El estudio analizó 25 libros de texto de matemática utilizados en el sistema educativo peruano entre 1961 y 1999, correspondientes a los grados segundo, tercero y cuarto de secundaria. La selección del corpus documental fue intencional y teóricamente fundamentada, en coherencia con el enfoque cualitativo adoptado. Los criterios de inclusión fueron: (a) que el texto presentara o desarrollara los números reales o sus

Vol. 29, e445 https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e445

subconjuntos (racionales e irracionales); (b) que hubiese circulado o sido adoptado en instituciones educativas peruanas; (c) que perteneciera a editoriales activas en el periodo analizado (como Ambers, Luren, Omega, Labrusa, Universo, Brasa, Iberia o Coveñas); y (d) que su contenido permitiera identificar praxeologías matemáticas y didácticas vinculadas con la enseñanza de los números reales. La selección continuó hasta alcanzar saturación teórica, entendida como el punto en que la incorporación de nuevos textos no generaba categorías praxeológicas adicionales. El corpus se presenta en la Tabla 1 y se describe mediante un código alfanumérico que combina las iniciales del autor, el grado escolar y el año de publicación (por ejemplo, RRM-3-1968).

Tabla 1

Corpus de libros de texto de matemática del sistema educativo peruano que presentan los números reales, codificados según periodos de estudio

	Periodo Tradicional			
Códigos	*Título del libro de texto*	*Autor(es)*	*Año de publicación*	*Editorial*
GMB-3-1961	*Matemáticas 3er. Año*.	Bruño	1961	Bruño.
RRM-2-1963	*Matemáticas. Segundo año*.	Romero, R.	1963	Iberia.
FVV-3-1968	*Matemática 3er. Año de Educación Secundaria*.	Vega, F.	1968	Colegio Militar Leoncio Prado.
RRM-3-1968	*Matemáticas. Tercer año*.	Romero, R.	1968	Universo.
RRM-3-1969	*Matemáticas. Tercer año*.	Romero, R.	1969	Universo.
	Periodo de la Matemática Moderna			
RRM-3-1972	*Matemática Moderna III*.	Romero, R.	1972	Universo.
RRM-2-1975	*Matemática Moderna II*.	Romero, R.	1975	Universo.
RRM-3-1976	*Matemática Moderna 3*.	Romero, R.	1976	Universo.
FVV-4-1977	*Matemática Moderna 4*.	Vega, F.	1977	Colegio Militar Leoncio Prado.
VGAO-3-1978	*Matemática Tercer Año de Secundaria*.	Gutiérrez, V. y Ortiz, A.	1978	Quipu.
MCS-3-1980	*Matemática 3er. Grado de Educación Secundaria*.	De la Cruz, M.	1980	Brasa.
RRM-3-1982	*Matemática. Tercer Grado de Secundaria*.	Romero, R.	1982	Universo.
RRM-4-1982	*Matemática. Cuarto Grado de Secundaria*.	Romero, R.	1982	Universo.
RRM-3-1983	*Matemática. Tercer Grado de Secundaria*.	Romero, R.	1983	Labrusa.
RRM-4-1985	*La nueva estructura de la Matemática 4*.	Romero, R.	1985	Labrusa.
PBM-4-1988	*Matemática Cuarto Grado de Secundaria*.	Bustamante, P.	1988	Gira.
PBM-3-1989	*Matemática Tercer Grado de Secundaria*.	Bustamante, P.	1989	Gira.
PBM-2-1991	*Matemática 2 Secundaria*.	Bustamante, P.	1991	Gira.
VG-4-1993	*Matemática Cuarto Grado de Secundaria*.	Gutiérrez, V.	1993	Omega.
GRG-2-1994	*Matemática 2. Teoría y Práctica. Segundo Grado de Secundaria*.	Rojas, G.	1994	Ambers.
MCN-4-1996	*Matemática 4. Cuarto año de Secundaria*.	Coveñas, M.	1996	Coveñas.

Vol. 29, e445 https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e445

MCS-4-1996	*Matemática 4. Cuarto Grado de Educación Secundaria*.	De La Cruz, M.	1996	Luren.
ARP-2-1997	*Matemática 2*.	Rojas, R.	1997	Skanners
MCN-3-1998	*Matemática 3. Cuarto año de Secundaria*.	Coveñas, M.	1998	Coveñas.
MCN-2-1999	*Matemática 2. Cuarto año de Secundaria*.	Coveñas, M.	1999	Coveñas.

4. Resultados

A continuación, se presentan los resultados del análisis praxeológico correspondiente a los dos periodos identificados en el corpus.

4.1. Periodo Tradicional de la enseñanza de la matemática

La introducción de los números irracionales se realizó mediante la radicación, presentada como "la operación inversa a la potenciación, que consiste en hallar la base de una potencia, conocida dicha potencia y el exponente" (RRM-2-1963, p. 54). Los textos distinguieron entre raíces exactas e inexactas: una raíz "es exacta si al elevar a la potencia de exponente igual al índice, se obtiene el radicando" (FVV-3-1968, p. 9), mientras que "es inexacta [...] cuando al elevar dicha raíz al exponente igual al índice, se obtiene un resultado menor [...] esto se debe a que hay un residuo" (RRM-2-1963, p. 55). La noción de raíz inexacta funcionó como principal vía para introducir los números irracionales, explicitados como aquellos casos en los que "cuando un número no tiene raíz exacta, se dice que es un número irracional" (GMB-3-1961, p. 131).

La presentación de los números irracionales se limitó a los algebraicos; los trascendentales apenas se mencionaron, usualmente sólo π y con un abordaje geométrico (RRM-2-1963, p. 152). Las definiciones de los irracionales variaron entre presentarlos como raíces inexactas (RRM-2-1963), caracterizarlos como "números que no son racionales, tales como $\sqrt{2}, \pi, \sqrt[3]{2}$, etc." (FVV-3-1968, p. 192) o, desde una perspectiva operacional, como "los números que no se pueden escribir en forma a/b" (RRM-3-1968, p. 163). Un hallazgo particularmente interesante fue la definición de número real en GMB-3-1961 como "toda cantidad que no contiene ningún número imaginario" (p. 132), sustentada en la noción previa de que "la raíz de índice par de un número negativo [...] se llama número imaginario" (p. 131). Esta formulación evidenció que la construcción escolar del conjunto de los números reales se fundamentó principalmente en criterios operativos y clasificatorios, sin explicitar los principios teóricos que estructuran formalmente dicho conjunto.

Se observó que, aunque se enunciaran propiedades de la radicación acompañadas de ejemplos, no se presentaron demostraciones. Por ejemplo: "se llama residuo a la diferencia entre el número dado y la potencia de exponente igual al índice" (FVV-3-1961, p. 10) y "el residuo de una raíz cuadrada inexacta es menor que el doble de la raíz más uno" (FVV-3-1961, p. 10) y luego de ser enunciado se ejemplifican para inducir su comprensión. La ausencia de justificaciones revela la falta de un componente teórico que articulara dichas propiedades con una caracterización rigurosa de los números irracionales.

Desde una perspectiva praxeológica, la enseñanza tradicional presentó los números irracionales como consecuencia de la radicación inexacta: valores obtenidos cuando la radicación no se clausura en $\mathbb{Q}$. La tarea (T) se limitó a distinguir raíces exactas e inexactas, y la técnica (τ) consistió en aplicar algoritmos que producían "raíces inexactas", asumidas como irracionales. Sin embargo, la tecnología (θ) no ofreció justificaciones conceptuales y la teoría (Θ) estuvo prácticamente ausente; no se explicaron la no completitud de los racionales ni principios como la continuidad o la densidad. Así, los irracionales no fueron construidos como objetos matemáticos, sino introducidos de modo residual, revelando una transposición didáctica donde predomina el saber hacer sobre el saber por qué.

En la revisión de los libros de texto, se encontró un uso limitado de representaciones de la radicación. Se señala que "la operación de extraer raíces se indica con el signo $\sqrt{\ }$, llamado signo radical" (FVV-3-1968, p. 8). En los textos analizados, se identifican gráficos que ilustran la radicación como expresión de números irracionales. El análisis de la presentación de la radicación en los libros del *Periodo Tradicional* muestra un predominio claro de *registros ostensivos* como medio principal para introducir la raíz cuadrada y, de manera indirecta, el número irracional. Tal como advierten Bosch y Chevallard (1999), la actividad matemática escolar es profundamente "sensible a los ostensivos" (p. 85), pues estos objetos semióticos permiten "re-presentar … mediante la manipulación de un conjunto de objetos ostensivos asociados" (p. 91) entidades que no son directamente manipulables, como los irracionales.

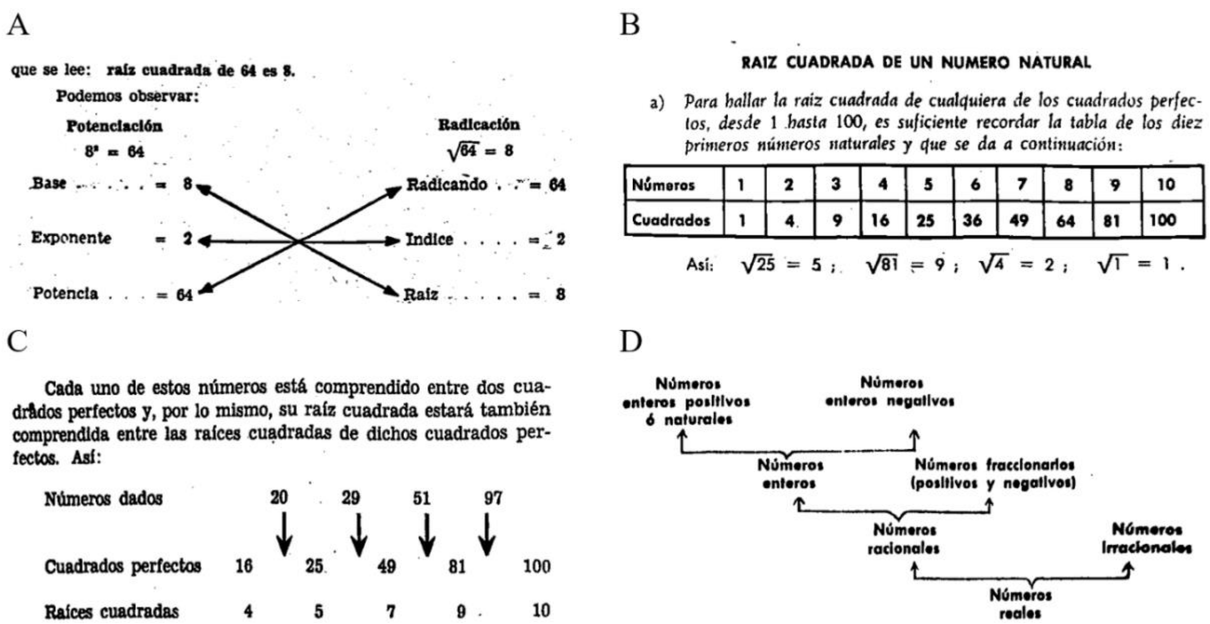
En el Panel A de la Figura 2, la descomposición sagital de $\sqrt{64}$ privilegia relaciones gráficas antes que justificaciones, ilustrando lo que los autores describen como la tendencia institucional a hacer "como si los objetos no ostensivos pudieran mostrarse y ser efectivamente manipulados" (Bosch y Chevallard, 1999, p. 91). En el Panel B, la tabla de cuadrados perfectos opera como un *ostensif institutionnalisé*, pues estabiliza asociaciones numéricas sin proveer una tecnología explicativa; esta función coincide con la idea de que el sistema didáctico se apoya en ostensivos para asegurar una "comprensión claramente inteligible" (Chevallard, 1992, p. 97). En el Panel C**,** la alineación de números dados, cuadrados perfectos y raíces cuadradas utiliza un registro ostensivo secuencial que sugiere aproximaciones por encuadre, pero sin explicitar las razones que justifican por qué un número se encuentra entre dos cuadrados perfectos. Tal como señalan Bosch y Chevallard,

Vol. 29, e445 https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e445

estos ostensivos “producen efectos de evidencia” (1999): el procedimiento parece autojustificado por la disposición gráfica, aunque carezca de una tecnología explícita, mientras que el Panel D clasifica los sistemas numéricos sin problematizar la existencia de irracionales. El análisis revela que la radicación se presenta mediante ostensivos gráficos y tabulares que orientan un trabajo matemático centrado en lo visible, generando una ilusión de comprensión que, como señalan Bosch y Chevallard (1999), deriva precisamente de que “la dependencia de los ostensivos puede producir una ilusión de comprensión” (p. 118). Esta dependencia limita el acceso a tecnologías y teorías necesarias para comprender la irracionalidad más allá de patrones empíricos.

Figura 2

Representación de la radicación como expresión del número irracional en el Periodo Tradicional



Nota. Panel A: Registro sagital de $\sqrt{64}$ (FVV-3-1968, p. 9). Panel B: Registro tabular de las raíces perfectas (RRM-2-1963, p. 55). Panel C: Registro de cuadrados no perfectos (FVV-3-1968, p. 10). Panel D: Registro esquemática de los sistemas numéricos (RRM-3-1968, p. 164 y RRM-3-1969, p. 150).

El análisis de los libros de texto muestra que no se explicitan procedimientos para determinar cuándo un número posee una raíz inexacta; se asume que el estudiante, mediante ensayo y error o aproximaciones hasta los centésimos, debe concluir si la raíz es irracional. Esta falta de fundamentación contrasta con la abundancia de tareas repetitivas, como “hallar la raíz cuadrada con aproximación hasta los centésimos”, por ejemplo,

Vol. 29, e445 https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e445

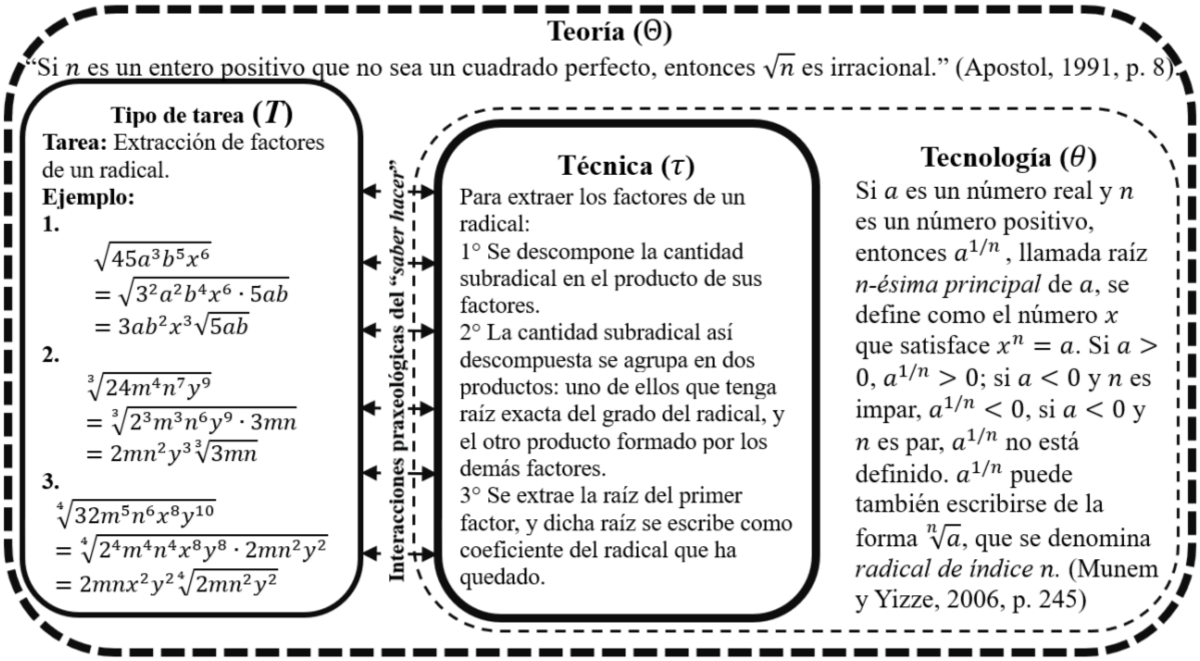
402’443,721 (RRM-2-1963, p. 58). Este predominio del entrenamiento mecánico confirma la lógica instruccional descrita por Bruner (1960), según la cual el aprendizaje se confiaba a la repetición y memorización de algoritmos.

La praxeología de Chevallard permite valorar críticamente esta organización. La Figura 3 evidencia la estructura praxeológica de la radicación: el *tipo de tarea* (T) —extracción de factores de un radical— aparece acompañado de una *técnica* (τ) explícita y prescriptiva. Sin embargo, la *tecnología* (θ) y la *teoría* (Θ) muestran una presencia implícita (contornos punteados), lo que indica su ausencia en el texto original. Por ello, el análisis incorpora definiciones y propiedades provenientes del saber sabio con el fin de visibilizar el “saber a ser enseñado”. Así, la proposición “Si n es un entero positivo que no sea un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{n}$ es irracional.” (Apostol, 1991, p. 8) debería articularse con la definición tecnológica de la raíz n-ésima para ofrecer una comprensión rigurosa del carácter irracional de ciertas raíces.

En coherencia con Brousseau (1986), la didáctica exige identificar los fenómenos que los conceptos buscan explicar y determinar las técnicas, tecnologías y métodos de prueba necesarios para abordarlos. En el caso de los números reales, esta articulación resulta indispensable para garantizar una introducción rigurosa de los números irracionales y de sus propiedades. El análisis de los libros de este periodo evidenció una presentación operativa de raíces inexactas para introducir los números irracionales, sin referencias explícitas a propiedades fundamentales como densidad, completitud u orden, lo que revela una transposición didáctica incompleta. Este exclusivismo en la introducción de los irracionales mediante raíces inexactas ya había sido advertido por Bronner (1997), quien analizó la relación entre los conceptos de “número irracionales” y “raíz cuadrada” en la enseñanza de los reales. Por otro lado, Fischbein et al., (1995) destacaron la necesidad de una enseñanza de los números reales más estructurada que trascienda los procedimientos técnicos y promueva una comprensión profunda e intuitiva de los irracionales.

Figura 3

Praxeología de la extracción de factores de un radical



Nota. Los contornos punteados indican una presencia implícita, mientras que los contornos continuos denotan una presencia explícita en el texto RRM-3-1969, p. 154.

4.2. Periodo de la Matemática Moderna

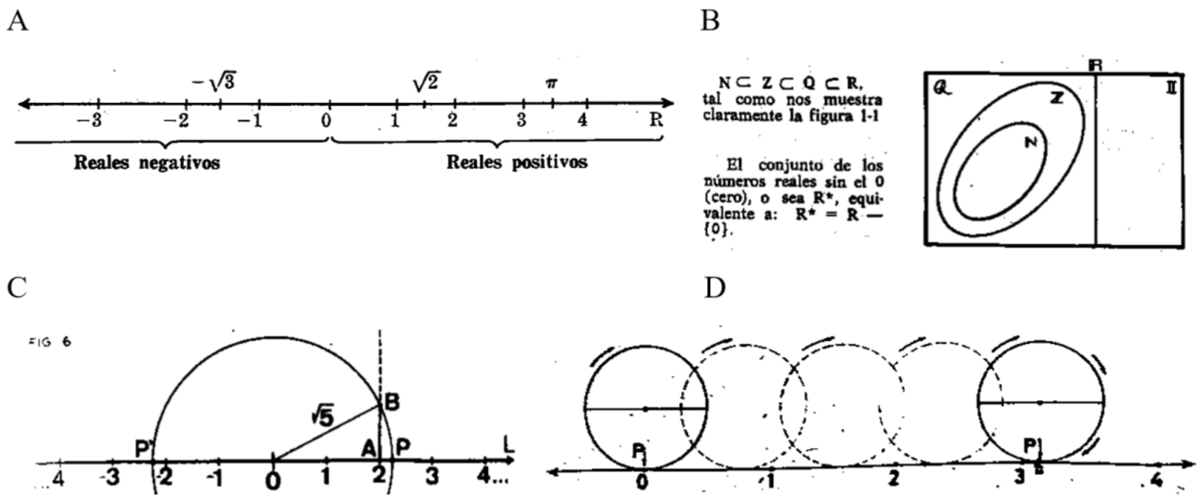
En este periodo de estudio, la introducción de los números irracionales se apoyó en registros ostensivos simbólicos —como $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$ y $\sqrt[3]{4}$— empleados sólo como ejemplos, junto con expresiones decimales de irracionales trascendentes como π, e y algunos decimales infinitos no periódicos, aunque no se identificó el número áureo Φ. Los textos recurrieron sistemáticamente al diagrama de Euler (Figura 4, Panel B) para presentar la praxeología asociada a la conformación de $\mathbb{R}$, definiéndolo como "$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$" (RRM-3-1976, p. 29) e indicando las inclusiones $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$. Sin embargo, esta técnica no proporcionó una definición rigurosa. La recta numérica (Panel A) funcionó como otro registro ostensivo clave para representar densidad, completitud y orden. Su variante geométrica (Panel C) exigía aplicar el teorema de Pitágoras para proyectar $\sqrt{5}$ sobre la recta numérica. En el caso de π, los textos utilizaron su definición como razón entre la circunferencia y el diámetro (Panel D), limitándose a los recursos gráficos indispensables para ejecutar las tareas. Resulta interesante que los libros de texto enuncien las propiedades de $\mathbb{R}$ en forma listada —"El conjunto de los números reales es infinito..., es denso…, es ordenado…, es completo” (MCN-2-1999, p. 46)— sin articularlas con una praxeología que permita producirlas, justificarlas o comprenderlas. Estas propiedades aparecen como declaraciones aisladas del bloque del logos $[\theta/\Theta]$, mientras que el bloque de la praxis $[T/\tau]$ permanece prácticamente vacío: no se proponen tareas, ni técnicas asociadas, que posibiliten siquiera una apropiación operativa de dichas propiedades estructurales.

En términos de los registros ostensivos descrita por Bosch y Chevallard (1999), estos signos no “tienen” un sentido, sino que lo “producen” dentro de una praxeología institucionalmente regulada. Sin embargo, los libros analizaban su valencia semiótica, pero no su valencia instrumental, lo que generó un saber dependiente de la apariencia gráfica más que del razonamiento matemático.

El diagrama de Euler, recurrente en los textos, funcionó como un ostensivo estabilizado institucionalmente para representar la partición $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. No obstante, esta representación reforzaba una visión clasificatoria que no alcanzaba a expresar la estructura teórica del conjunto $\mathbb{R}$. Del mismo modo, la recta numérica operó como un ostensivo gráfico que permitía visualizar densidad, completitud y orden, pero, siguiendo a Bosch y Chevallard (1999), producía una “ilusión de comprensión”, pues su uso no se apoyaba en tecnologías que justificaran dichas propiedades. En síntesis, los registros gráficos evidencian que la enseñanza privilegiaba lo visible, mientras que la teoría quedaba relegada, confirmando que la praxeología institucional se apoyaba en ostensivos que hacían “ver” los irracionales, pero no los explicaban.

Figura 4

Registro de representación de los números reales del Periodo de la Matemática Moderna



Nota. Panel A: La recta numérica (GRG-2-1994, p. 24). Panel B: Diagrama de Euler de $\mathbb{R}$ (MCS-3-1980, p. 18). Panel C: Ubicación de $\sqrt{5}$ en la recta numérica (RRM-4-1985, p. 31). Panel D: Ubicación de π en la recta numérica (RRM-3-1976, p. 22).

4.2.1. Definición de los números irracionales

El análisis de 20 libros de texto del Periodo de la Matemática Moderna permitió identificar una praxeología escolar recurrente para introducir la definición de los números irracionales. En términos de la estructura $p = [T/\tau/\theta/\Theta]$ (Chevallard, 1999), la tarea inicial consistía en revisar los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, y reconocer que todo número racional puede representarse mediante decimales exactos, periódicos o mixtos. Esta organización técnica preparaba la técnica de encontrar la fracción generatriz de un decimal; una vez ejecutada, emergía la tarea de analizar expresiones como 0,131331333133331..., cuyo comportamiento decimal no es periódico. A partir de esta ruptura, la tecnología justificativa introducía el criterio "toda expresión decimal no periódica" como definición de irracional (RRM-3-1983, p. 21), apoyándose en la distinción estructural entre racionalidad y periodicidad.

De manera complementaria, los textos incorporaban otra tecnología: caracterizar los irracionales como números que "no pueden expresarse en forma de fracción" (VG-4-1993, p. 67). Este enfoque generaba tareas como demostrar que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, lo que implicaba movilizar técnicas de reducción al absurdo. Paralelamente, una tercera tecnología definía los irracionales como "raíces no exactas" (RRM-3-1972, p. 90), estableciendo la ampliación de $\mathbb{Q}$ para resolver la radicación. Así, GRG-2-1994 afirmaba que "no siempre la raíz cuadrada de un número racional positivo es un racional" (p. 24), y RRM-3-1976 sostenía que "fue necesario extender el conjunto $\mathbb{Q}$" (p. 24). En conjunto, estas tecnologías muestran cómo los textos legitimaban la existencia de un nuevo conjunto numérico disjunto de $\mathbb{Q}$.

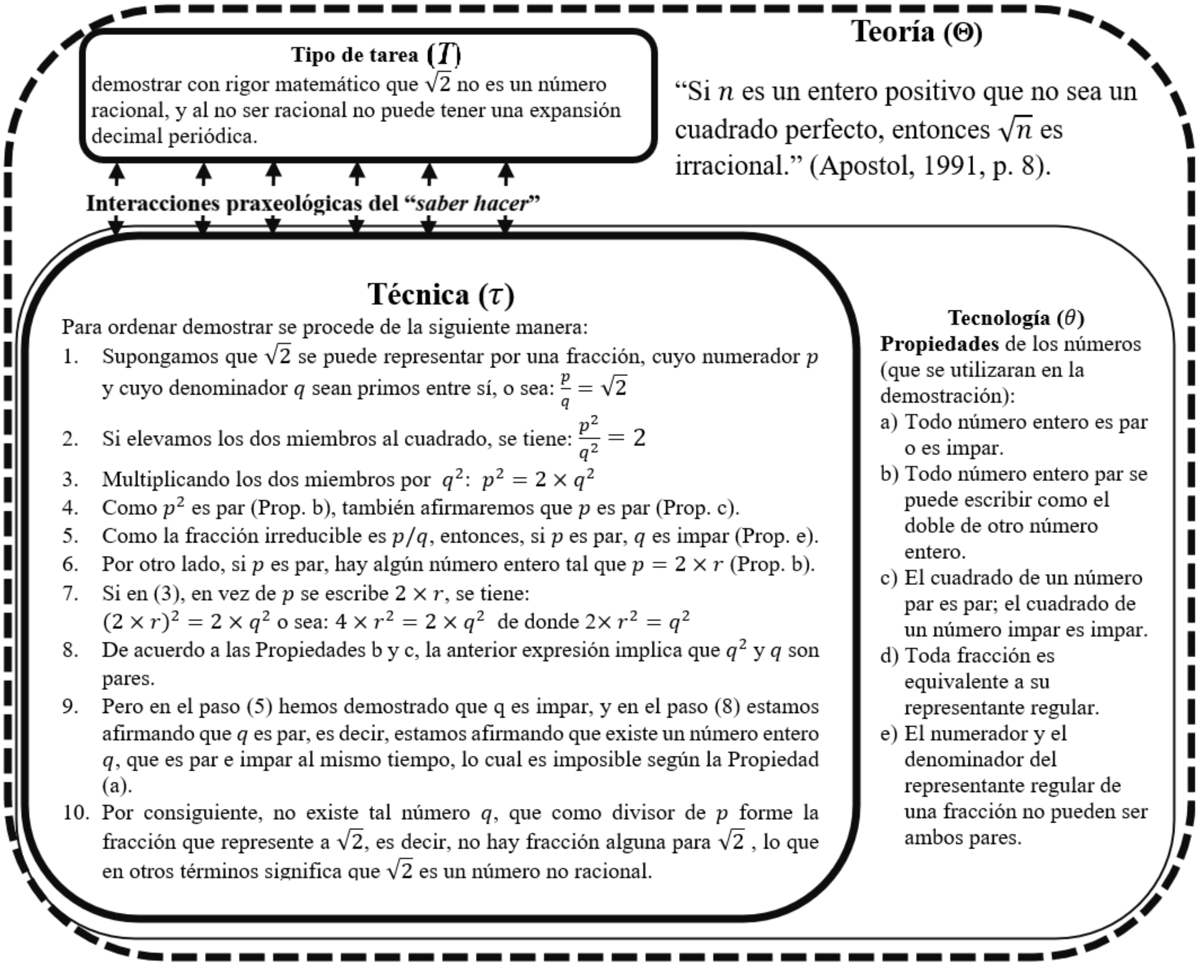
En consecuencia, respecto a la definición de los números irracionales el análisis praxeológico permite distinguir tres organizaciones recurrentes en los libros de texto. La primera se articula en torno a la tarea de reconocer decimales infinitos no periódicos; la técnica consiste en analizar su estructura para verificar la ausencia de periodicidad; la tecnología sostiene que tales expresiones constituyen una nueva clase numérica; y la teoría establece que "los números irracionales se caracterizan por tener decimales infinitos no periódicos". La segunda organización se centra en la tarea de determinar si un número admite forma fraccionaria a/b; la técnica implica explorar posibles representaciones racionales; la tecnología afirma que ciertos números no pueden escribirse como cocientes de enteros; y la teoría define que "los números irracionales no se pueden escribir en forma de fracción". Finalmente, la tercera organización se estructura a partir de la tarea de evaluar la exactitud de una radicación; la técnica requiere calcular raíces cuadradas, cúbicas o cuartas; la tecnología distingue entre potencias perfectas y no perfectas; y la teoría establece que las raíces no exactas de números racionales positivos son números irracionales. Juntas, estas tres praxeologías configuran el repertorio escolar dominante para justificar la existencia y naturaleza de los números irracionales.

Los resultados de Liceras et al. (2011) muestran que la pérdida de sentido de los números reales en la enseñanza media proviene de praxeologías que privilegian definiciones conjuntistas y demostraciones aisladas —como la irracionalidad de $\sqrt{2}$— desconectadas del régimen epistemológico que unifica el campo de los reales. Nuestros hallazgos confirman este diagnóstico, pero revelan un rasgo adicional: los libros analizados no solo reproducen esa fragmentación, sino que la institucionalizan mediante el uso sistemático de diagramas de Euler, reforzando la igualdad $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ sin abordar la completitud en su estatuto de continuidad. Del mismo modo, la demostración de $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ aparece como una tarea puntual, sin articular tecnologías o teorías que otorguen cohesión conceptual.

Si bien Liceras et al. (2011) sostienen que "las únicas tareas que involucran números irracionales son proponer ejemplos, ubicarlos en la recta numérica, clasificarlos y operar radicales" (p. 714), nuestros resultados muestran un uso más diversificado de la recta numérica, empleada también para representar densidad, completitud y orden. Además, identificamos tareas ausentes en dicho estudio, como la construcción geométrica de irracionales mediante el teorema de Pitágoras y la introducción de π mediante la razón entre la circunferencia y el diámetro, lo que evidencia una ampliación incipiente de los registros ostensivos.

Figura 5

Demostración hipotética deductiva por reducción al absurdo



Nota. Los contornos punteados indican una presencia implícita, mientras que los contornos continuos denotan una presencia explícita en el texto RRM-3-1976, pp. 18-19.

Un resultado relevante que se ha encontrado en RRM-2-1973, RRM-3-1976 y VGAO-3-1978 es la tarea de demostrar que el número $\sqrt{2}$ no es un número racional, utilizando el razonamiento por reducción al absurdo (Figura 5). Esta praxeología es interesante por la técnica y tecnología permiten promover un razonamiento formal a los estudiantes en el sentido de Chevallard, pues articula un tipo de tarea demostrativa (T), una técnica deductiva (τ), una tecnología justificativa (θ) y una teoría no enunciada (Θ). La técnica se estructura mediante un razonamiento por contradicción que parte de suponer $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ y concatenar propiedades aritméticas —"todo número entero es par o es impar", "el cuadrado de un número par es par"— hasta obtener el absurdo lógico de que un mismo número sea simultáneamente par e impar. Esta cadena de inferencias, legitimada por la teoría que es implícito “Si n es un entero positivo que no sea un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{n}$ es irracional” (Apostol, 1991, p. 8), sitúa al estudiante en un trabajo matemático no meramente operativo, sino argumentativo sobre la tecnología. En consecuencia, la praxeología promueve el tránsito del saber hacer al saber por qué, consolidando un pensamiento hipotético-deductivo esencial para la educación matemática avanzada.

4.2.2. Densidad de los números reales

Los libros de texto respecto a la propiedad de la densidad de los números racionales $\mathbb{Q}$, explican que esta propiedad también se cumple en el conjunto de los números irracionales. El libro de texto GRG-2-1994 se explica que “El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es denso. Esto significa que entre dos números reales siempre existe otro número real” (p. 24). Un enunciado alternativo, que respaldó esta noción, es el siguiente: “Se dice que el conjunto de los números reales es denso porque si se toman dos reales por más próximos que sean, siempre encontraremos otro número real entre ellos. Dados $a < b$, existe c; tal que $a < c < b$” (PBM-2-1991, p. 7). Estas definiciones son una extensión de la definición de la densidad de los números racionales. Mientras que los textos como RRM-3-1972, VGAO-3-1978, MCS-3-1982 y VG-4-1993, no presentan la propiedad de la densidad. En síntesis, se ha observado que los libros de texto no proponen ni desarrollan situaciones didácticas que permitan aproximar la comprensión de la propiedad de la densidad a su forma *sabia*.

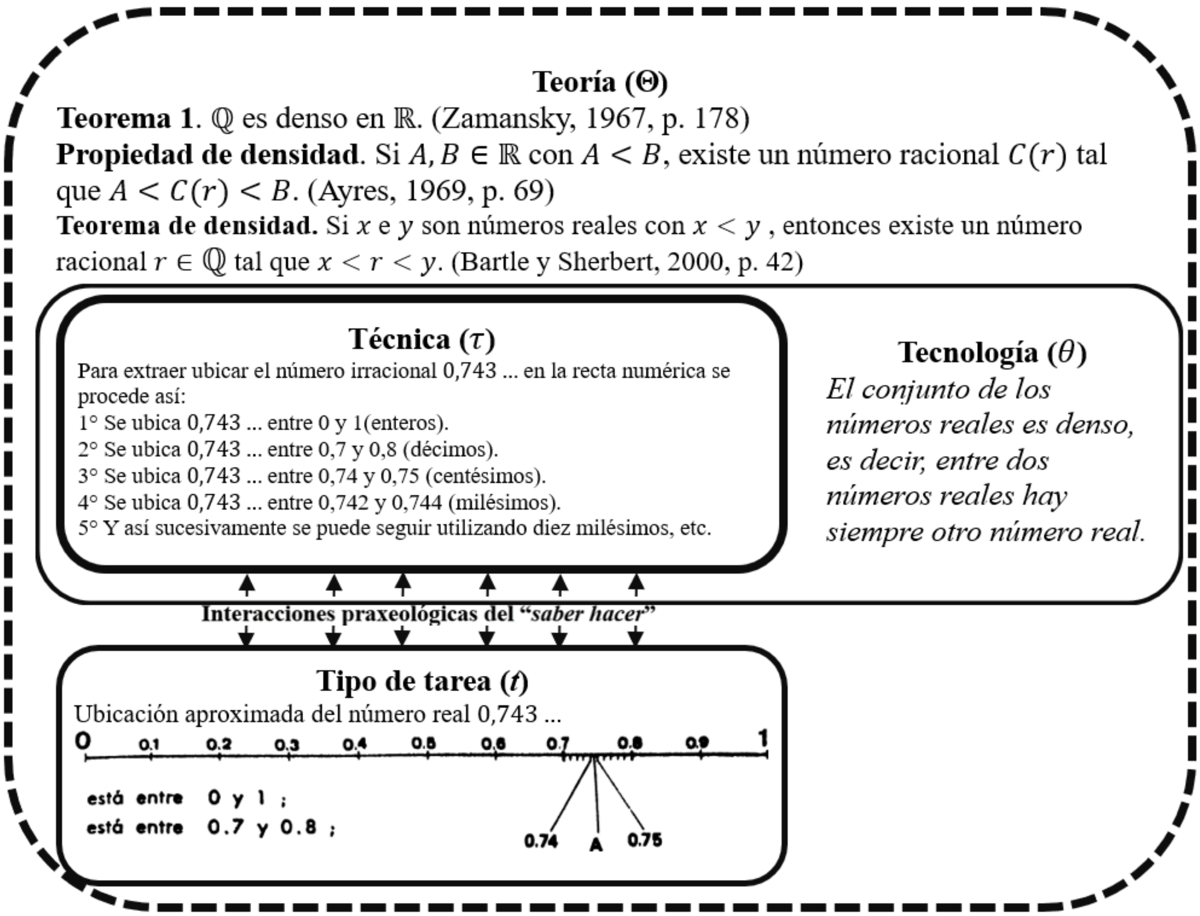
En RRM-3-1983 se ilustró la tarea (T) de ubicar el número 0,743 en la recta numérica. La técnica ($\boldsymbol{\tau}$) sugiere reducir los intervalos progresivamente: primero se ubica entre 0 y 1, luego entre 0,7 y 0,8, después, entre 0,74 y 0,75, y finalmente entre 0,742 y 0,744. Como se observa en la Figura 6, este proceso puede continuar indefinidamente, comprobando que siempre se puede encontrar un número real entre dos números dados, reflejando la propiedad de densidad. La figura muestra cómo mediante la reducción de intervalos, se aproxima con mayor precisión la ubicación de 0,743 en la recta numérica. La técnica ilustra que siempre es posible hallar un número real intermedio, confirmando que entre cualquier par de números reales existe otro, destacando así la densidad de los números reales.

La recta numérica como registro de ostensivo de naturaleza gráfica fue un recurso didáctico valioso para enseñar esta propiedad, pues facilitó la comprensión visual y conceptual de cómo los números reales se distribuyen de manera continua y sin interrupciones en la recta numérica, una característica fundamental para entender conceptos avanzados en matemáticas, como la continuidad y la completitud de los números reales.

En el libro de texto RRM-3-1983 de la Figura 6 no se define formalmente la propiedad de la densidad, lo ideal es que se diseñen tareas que permitan comprender la propiedad a un nivel teórico Θ más próximo al *saber sabio* como lo enuncian Zamansky, (1967), Ayres (1969) y Bartle y Sherbert (2000). De esta observación se colige que es necesario estudios que desarrollen una transposición didáctica que aproximen el *saber a ser enseñado* al *saber sabio*, de tal manera que el *saber aprendido* se aleje del saber intuitivo, trivial o banal (Chevallard, 1998).

Figura 6

Praxeología de la densidad de los números reales



Nota. Los contornos punteados indican presencia implícita, en tanto que los contornos continuos denotan la presencia explicita en el libro de texto RRM-3-1983, p. 25.

Los resultados muestran que algunos textos, como RRM-4-1985 (p. 33), introducen la densidad mediante cuestiones que operan como contraejemplos para los conjuntos ℕ y ℤ, tales como: "¿Es siempre posible determinar un número natural entre dos números naturales?" y "¿Cuántos números enteros existen entre dos números enteros consecutivos?". Estas preguntas buscan evidenciar que dichos conjuntos no son densos. En contraste, la cuestión "¿Cuántos números racionales con denominador 18 existen entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$?" permite comprender la densidad en $\mathbb{Q}$ mediante la técnica de reescribir fracciones con denominador común y obtener valores intermedios: $\frac{3}{18} < \frac{4}{18} < \frac{5}{18} < \frac{6}{18}$. Asimismo, cuando el texto RRM-4-1985, p. 33) propone la tarea (T): "Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, demuestre que $\frac{a+b}{2}$ está entre a y b, es decir: $a < \frac{a+b}{2} < b$", promueve una actividad demostrativa que debería estructurarse en torno a una técnica (τ) algebraica y una tecnología (θ) justificativa. Sin embargo, los libros no ofrecen los componentes praxeológicos necesarios para resolverla, lo que convierte la demostración en un ejercicio inoperante.

Esta ausencia de teoría Θ refleja un tratamiento escolar de la densidad centrado en la observación y la aproximación empírica, sin la justificación teórica que exige el saber sabio. Tal reducción coincide con la crítica de Chevallard, según la cual "existe la 'realidad', que es un dato cuya presencia se impone con la mayor fuerza; y existe la 'teoría' de ese dato, que se pretende extraer, por abstracción, del objeto al que se consagra" (1985, p. 79). De este modo, "la dialéctica de lo numérico y lo algebraico: uno de sus términos (lo algebraico) se disuelve en el otro (lo numérico), al que por naturaleza se le otorga una existencia casi material, y del cual lo algebraico procederá genéticamente." (pp. 79-80), lo que explica que textos como RRM-3-1983 recurran únicamente a reducciones sucesivas de intervalos sin ofrecer una tecnología que fundamente la propiedad de densidad ni teorías que articule un trabajo matemático completo.

4.2.3. Completitud de los números reales

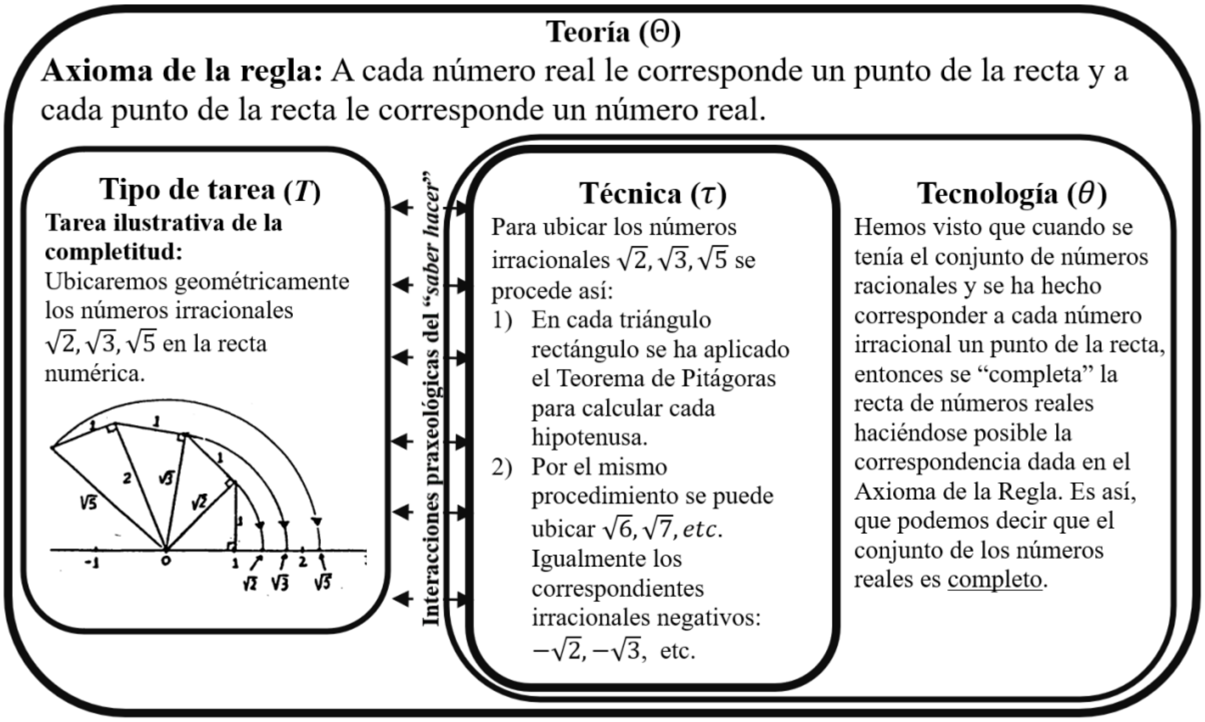
Párrafo En el contexto de la Matemática Moderna, la completitud de los números reales se introduce predominantemente a través de la correspondencia biunívoca entre números y puntos de la recta. El libro MCN-3-1998, en el capítulo "Presentación Intuitiva de los Números Irracionales y de los Reales" (p. 73), después de enunciar las propiedades del conjunto, afirma que "existe una biyección entre el conjunto de los números reales y el conjunto de puntos de la recta" (p. 74). A continuación, propone aproximar $\sqrt{2}$ mediante valores por defecto y por exceso —por ejemplo, $1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422$—, aunque no se explicita la técnica que sustenta el procedimiento. En la misma línea, RRM-3-1983 sostiene que "el conjunto de los números reales es completo, es decir: además de que a cada número real le corresponde un punto en la recta numérica, recíprocamente, a cada punto de la recta le corresponde un número real" (p. 25). Una concepción equivalente aparece en

PBM-2-1991, donde se afirma: "A cada número racional le corresponde un punto en la recta; también a cada irracional le corresponde un punto en la recta... Esta recta 'completa' de números reales se la llama recta numérica" (p. 3). En la misma dirección, RRM-2-1975 explica que "existen infinitos puntos cuyas coordenadas no son racionales" (p. 97) y que, en consecuencia, la recta se completa asignando a dichos puntos coordenadas irracionales: "Todos los puntos de la recta tienen su respectiva coordenada; los puntos... a los cuales no les corresponde un número racional, tienen por coordenada un número irracional" (p. 96). Finalmente, MCS-3-1982 formula esta propiedad mediante el lenguaje de las aplicaciones: "a cada número real le corresponde un punto y sólo uno de la recta y cada punto de la recta es imagen de un número real" (p. 19), reforzando así el carácter funcional de la correspondencia que estructura el continuo real.

Los resultados presentados en la Figura 7 evidencian que la praxeología $[T/\tau/\theta/\Theta]$ de la completitud, tal como se presentan en los libros analizados, muestra un desacoplamiento entre el bloque de la praxis Π y el bloque del logos Λ. Aunque la tecnología introduce la complementariedad entre racionales e irracionales y su consecuencia más significativa —el axioma de la regla—, esta aproximación permanece distante del conocimiento sabio, cuyo núcleo es el axioma del supremo. La formulación formal de Apostol (1991) —"Todo conjunto no vacío S de números reales que esté acotado superiormente admite un supremo" (p. 11)— no aparece explícita, confirmando, como advierte Chevallard (1998), una transposición didáctica que omite los fundamentos analíticos del continuo. Esta ausencia coincide con la observación de Oktaç y Vivier (2016), quienes señalan que la completitud "parece particularmente compleja y poco explícita incluso en niveles avanzados" (p. 94). Las tareas de ubicar $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ o $\sqrt{5}$ hacen visible la necesidad de irracionales, pero reducen la completitud a una intuición geométrica. En consecuencia, el "saber hacer" escolar no accede al "saber por qué" que estructura la teoría de $\mathbb{R}$. Esta situación se complica si se considera la crítica intuicionista de Brouwer (1999), según la cual los irracionales no pueden ser generados mediante un algoritmo numerable, lo que exige clarificar la naturaleza del continuo desde perspectivas no exclusivamente geométricas. Asimismo, Bergé (2008) mostró que la noción de completitud de $\mathbb{R}$ está presente en los cursos de Cálculo y Análisis, pero adopta formas más o menos explícitas según el grado de justificación teórica, y observó que la presentación axiomatizada de $\mathbb{R}$ no explicita las razones para incluir el axioma de completitud, lo que evidencia una debilidad persistente del bloque del logos incluso en el sistema universitario.

Figura 7

Praxeología de la completitud de los números reales



Nota. Los contornos continuos denotan la presencia explicita de los elementos praxeológicos en el libro de texto PBM-4-1988, pp. 56-58.

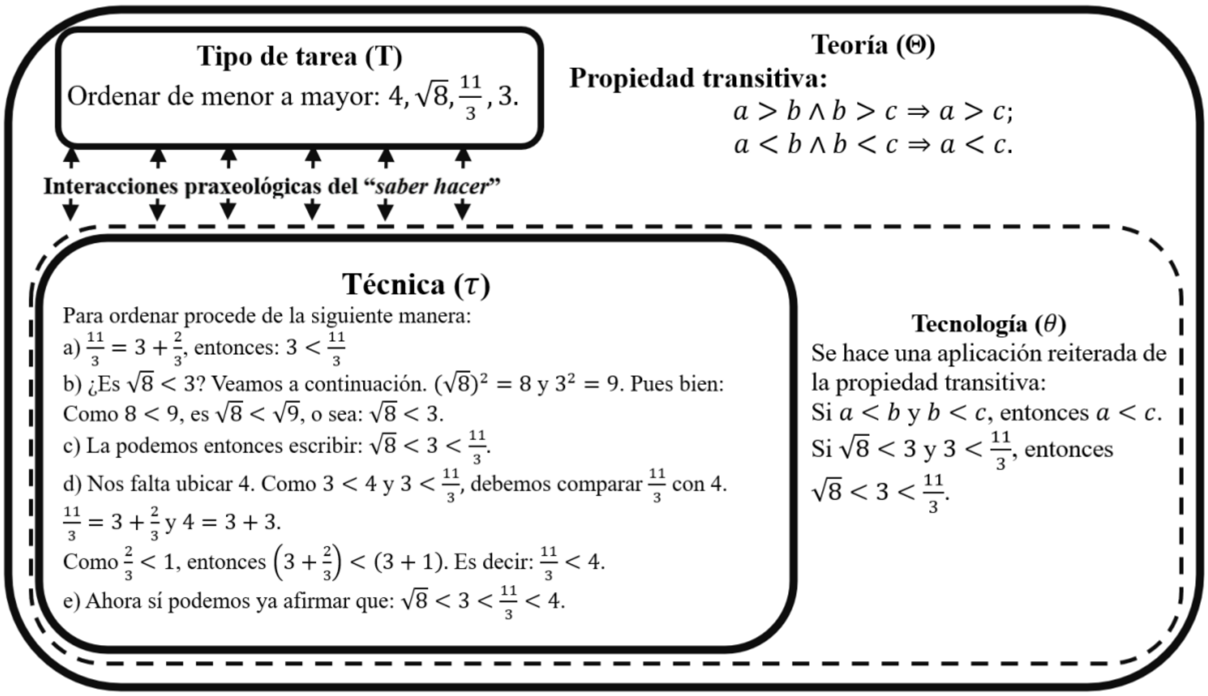
4.2.4. Relación de Orden en los Números Reales

La relación de orden constituye un elemento estructural para comprender la organización del conjunto de los números reales. En los textos analizados se observó una regularidad notable: todos presentan los axiomas que definen esta relación y, de forma consecutiva, los ejemplifican. Según la teoría matemática (Θ), para cualesquiera números reales a y b, "una y sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera: $a < b, a = b$, o $a > b$" (RRM-2-1975, p. 103). Esta ley de tricotomía garantiza comparabilidad y unicidad del orden. Así también MCN-2-1999 define el orden en $\mathbb{R}$ así: "Se dice que a es mayor que b si la diferencia $a - b$ es un número positivo" y "Se dice que a es menor que b si la diferencia $a - b$ es un número negativo" (p. 48), además usa registros de naturaleza algebraica como $\forall a, b \in \mathbb{R}, a > b \Leftrightarrow a - b > 0$, y a continuación propone tareas de carácter operativo como comparar dos números.

Asimismo, los libros enumeran sistemáticamente tres propiedades: la transitiva, la aditiva y la multiplicativa de la desigualdad. Solo RRM-3-1976 (p. 32) incorpora las propiedades *conexas, antirreflexiva y antisimétrica*; no obstante, no propone tareas (T) que permitan su aplicación, lo cual limita su función en la praxeología.

Figura 8

Praxeología de la ordenación de números reales



Nota. Los contornos punteados indican una presencia implícita, mientras que los contornos continuos denotan una presencia explícita de los elementos praxeológicos en el libro de texto RRM-3-76, p. 35.

La Figura 8 presenta una praxeología de la ordenación de números reales, donde el tipo de tarea (T) —ordenar de menor a mayor los números— constituye una regularidad curricular. La técnica (τ), explícita y procedimental, combina descomposiciones numéricas, aproximaciones y comparaciones sucesivas sustentadas en la propiedad transitiva. Esta técnica recibe legitimación a través de una tecnología (θ) de presencia implícita en el texto, mientras que la teoría (Θ) se manifiesta a través del enunciado explícito de las propiedades como la transitiva. Aunque algunos textos, como RRM-3-1976, omiten desarrollar la tecnología, la articulación entre técnicas de comparación y teoría del orden se evidencia también en propuestas que recurren a aproximaciones decimales para decidir la posición relativa de números reales, estrategia que vincula práctica, justificación y conceptualización. En conjunto, la praxeología revela que el "saber hacer" $[T/\tau]$ se concreta en la solución de ejercicios de ordenación, que a través de la ejemplificación busca la comprensión de las propiedades de orden, integra parcialmente los elementos praxeológicos, evidenciando que la actividad matemática escolar requiere no sólo procedimientos operativos, sino también dispositivos justificativos $[\theta/\Theta]$ que permitan comprender el fundamento de las propiedades de la relación de orden y evitar una transposición limitada a la mera ejercitación.

El análisis comparado muestra que los libros peruanos de 1961–1999 y los estudiados por González-Martín, et al., (2013) comparten praxeologías centradas casi exclusivamente en el bloque práctico, con una articulación tecnológica-teórica mínima. En ambos casos, la introducción de los números irracionales se basa en la radicación y en las “raíces inexactas”, lo que genera tareas mecánicas orientadas a la repetición algorítmica. Esta tendencia coincide con la observación de González-Martín (2020), quien señala que “las definiciones, propiedades y ejemplos se articulan más bien como listas de cosas que aprender [...] sin promover el desarrollo de discursos que justifiquen las técnicas utilizadas” (p. 21). La ausencia de irracionales trascendentales, el escaso discurso justificativo y el predominio de reglas descontextualizadas producen organizaciones praxeológicas incompletas. En consecuencia, como advierte González-Martín (2020), “el alumno podrá ser capaz de clasificar algunos números como irracionales, pero sin saber [...] qué significa ser irracional” (p. 20), confirmando la persistencia de significados empobrecidos y débilmente articulados con el conocimiento sabio sobre los números reales.

Estudios resientes revelan una asimetría entre la praxeología escolar y la universitaria en torno a la relación de orden de los números reales. En el ámbito escolar, el libro ARP-2-1997 propone una técnica (τ) explícita para comparar números, afirmando que “*Si tenemos dos números reales, siempre es posible saber cuál de ellos es mayor. Para esto bastará con ubicarlos en la recta numérica y tomar el de la izquierda como el menor de ambos números*” (p. 24). Cuando la ubicación en la recta no es operativa, recomienda que, si *dos números reales son de signo distinto, es mayor el de signo positivo, en tanto que “Si los dos números reales son del mismo signo, será conveniente expresarlo como decimales, para establecer el número real mayor, comparando cifra a cifra del mismo orden a partir de las cifras de la izquierda* (p. 25). Esta praxeología articula el bloque Π con justificaciones locales que permiten operar efectivamente con el orden. En contraste, Espín et al., (2025) señalan que “El modelo actual privilegia un enfoque deductivista en el que el orden, la completitud y las propiedades aritméticas aparecen desconectados de la actividad de modelización original que históricamente justificó su introducción” privilegiando el bloque Λ. Además, describen que “En este paradigma, el bloque teórico se centra en los axiomas del cuerpo y en la relación de orden, los cuales se tratan como propiedades fundacionales más que como respuestas a preguntas explícitas surgidas de situaciones de medición.”. Esta divergencia evidencia una ruptura en la articulación praxis–logos que sostiene el diseño praxeológico escolar y universitario, lo cual explica las dificultades persistentes en la comprensión de la relación de orden de los números reales.

Los resultados muestran que la presentación de los números reales en los libros de texto peruanos coincide con lo que Chevallard (2004) denomina *epistemología escolar monumentalista*, en la cual el saber se ofrece como un objeto estable, cerrado y no problematizable. En los manuales analizados, la definición de los números reales como la unión de los racionales e irracionales se expone como una verdad autosuficiente, desvinculada de los problemas matemáticos que justifican la necesidad del sistema real. Esta formulación canónica, repetida a lo largo de todo el periodo estudiado, omite discusiones sobre la densidad, la completitud o la estructura ordenada de $\mathbb{R}$, y evita introducir tareas que permitan a los estudiantes reconstruir conceptualmente el objeto. Así, los textos consolidan una monumentalización del saber matemático que privilegia definiciones heredadas por encima de praxeologías que fomenten la comprensión de las estructuras numéricas (Chevallard, 2004).

5. Conclusiones

El objetivo de este estudio fue analizar la presentación de la introducción de los números irracionales y la definición de los números reales en libros de texto de educación secundaria publicados entre 1961 y 1999, identificando las praxeologías didácticas que estructuran estos contenidos en dos periodos históricos de la enseñanza de la matemática. Los resultados permitieron caracterizar las formas en que el saber matemático sobre el continuo real ha sido transpuesto al ámbito escolar.

En el Periodo Tradicional, la introducción de los números irracionales se organizó principalmente a partir de la radicación inexacta, entendida como consecuencia de la no clausura de la radicación en el conjunto de los números racionales. Definiciones como “cuando un número no tiene raíz exacta, se dice que es un número irracional” (GMB-3-1961, p. 131) reflejan un tratamiento empírico y operativo del concepto. Este enfoque se apoyó en diversos registros ostensivos —tablas de cuadrados perfectos, descomposiciones gráficas y procedimientos de aproximación— que producen efectos de evidencia y favorecen una comprensión basada en la experiencia numérica más que en fundamentos conceptuales.

Desde una perspectiva praxeológica, este periodo muestra un marcado desequilibrio entre la praxis $[T/\tau]$ y el logos $[\theta/\Theta]$. Las tareas se orientaron principalmente a distinguir raíces exactas e inexactas, mientras que las técnicas consistieron en algoritmos repetitivos destinados a ejercitar procedimientos. En contraste, la tecnología aparece de manera implícita y la teoría permanece prácticamente ausente, lo que limita la construcción de explicaciones matemáticas que permitan comprender la estructura del conjunto de los números reales.

En el Periodo de la Matemática Moderna, los textos incorporaron nuevos registros ostensivos —especialmente diagramas de Euler y representaciones en la recta numérica— que facilitaron visualizar la partición $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ y algunas propiedades asociadas al conjunto de los números reales. No obstante, estas representaciones produjeron sentido sin ofrecer una justificación tecnológica o teórica suficiente, generando una comprensión apoyada en la evidencia gráfica más que en la fundamentación conceptual.

El análisis permitió identificar tres praxeologías predominantes para introducir los números irracionales: (1) su caracterización mediante decimales infinitos no periódicos, (2) la imposibilidad de expresarlos como fracciones de números enteros, y (3) la aparición de raíces no exactas como argumento para ampliar el conjunto de los racionales. En conjunto, estas organizaciones didácticas muestran una institucionalización fragmentada del concepto de irracionalidad, centrada en criterios operativos más que en fundamentos teóricos que expliquen la estructura del conjunto $\mathbb{R}$.

Respecto a las propiedades de los números reales, el estudio revela que la densidad se aborda principalmente mediante procedimientos empíricos apoyados en la recta numérica, sin desarrollar tareas ni justificaciones que permitan acceder a su fundamento teórico. De manera similar, la completitud suele reducirse a la correspondencia entre números y puntos de la recta, omitiendo el papel del axioma del supremo en la caracterización analítica del continuo. En cuanto a la relación de orden, aunque algunos textos enuncian axiomas, las tareas se concentran en ejemplos y técnicas de comparación, lo que genera una integración parcial entre praxis y logos.

El contraste entre ambos periodos muestra continuidades y rupturas en la organización praxeológica escolar de los números irracionales. Mientras el Periodo Tradicional privilegió una praxis empírica basada en la radicación inexacta, el Periodo de la Matemática Moderna amplió los registros ostensivos y diversificó las formas de definir los irracionales. Sin embargo, en ambos casos persiste un débil desarrollo tecnológico-teórico, lo que limita la construcción de un significado matemáticamente fundamentado del conjunto de los números reales en el nivel escolar.

Desde una perspectiva más amplia, estos resultados ponen de relieve la relevancia del análisis de libros de texto en investigación en educación matemática, ya que estos materiales constituyen un espacio privilegiado donde se materializa la transposición didáctica del saber matemático. El estudio de las praxeologías presentes en los textos permite comprender cómo se organizan las tareas, técnicas, tecnologías y teorías que estructuran la enseñanza de los conceptos matemáticos —en particular, los números reales— y qué aspectos del conocimiento disciplinar permanecen implícitos o ausentes en la institución escolar.

En este sentido, la principal aportación de esta investigación consistió en caracterizar praxeológicamente la evolución histórica del tratamiento escolar de los números irracionales y de algunas propiedades fundamentales del conjunto de los números reales en los libros de texto de secundaria, mostrando cómo ciertas elecciones didácticas han privilegiado aproximaciones operativas y ostensivas en detrimento de desarrollos tecnológicos y teóricos que permitan comprender con mayor profundidad la estructura del continuo real.

Declaración de contribución y autoría

Wenceslao Quispe Yapo: Conceptualización, Investigación, Metodología, Análisis formal, Redacción – borrador original, Redacción – revisión y edición.

Elio Ronald Ruelas Acero: Conceptualización, Investigación, Metodología, Análisis formal, Redacción – borrador original, Redacción – revisión y edición.

Fredy Gallegos Flores: Conceptualización, Investigación, Metodología, Análisis formal, Redacción – borrador original, Redacción – revisión y edición.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional del Altiplano y al Fondo Especial de Desarrollo Universitario del Vicerrectorado de Investigación por el apoyo institucional, las gestiones realizadas, la asignación del presupuesto parcial y las facilidades brindadas para la ejecución y publicación del presente artículo científico.

Referencias

Apostol, T. (1991). *Análisis matemático*. Reverté.

Ayres, F. (1969). *Álgebra moderna*. McGraw-Hill.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147-176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Bartle, R. y Sherbert, D. (2000). *Introduction to real analysis*. John Wiles & Sons.

Bergé, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 217-235. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9101-5

Bosch, M. y Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 77–123. http://pascal-francis.inist.fr/vibad/index.php?action=getRecordDetail&idt=2011512

Bosch, M. y Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbahs y S. Prediger (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 67–83). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_5

Bronner, A. (1997). Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée ». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *17*(3), 55–80. https://revue-rdm.com/1997/les-rapports-d-enseignants-de/

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *7*(2), 33–115. https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/

Brouwer, L. E. J. (1999). Intuitionism and Formalism. *Bulletin* (*New Series*) *of the American Mathematical Society*, *37*(1), 55-64. https://www.ams.org/journals/bull/2000-37-01/S0273-0979-99-00802-2/S0273-0979-99-00802-2.pdf

Bruner, J. S. (1960). *The Process of Education*. Harvard University Press.

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Première partie : l'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, *5*, 51-94. https://bibnum.publimath.fr/IPX/IGR84010.pdf

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73–112. https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica, del saber sabio al saber enseñado*. Aique.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de Didactique Comparée (Lyon, 3-4 mai 2004)*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45

Chevallard, Y. (2020). Some sensitive issues in the use and development of the Anthropological Theory of the Didactic. *Educação Matemática Pesquisa*, *22*(4), 13–53. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p013-053

Chevallard, Y. y Bosch, M. (2020). A Short (and Somewhat Subjective) Glossary of the ATD (pp. xviii–xxxvii). In M. Bosch, Y. Chevallard, F. García y J. Monaghan (Eds.), *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A Comprehensive Casebook* (pp. xviii–xxxvii). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780429198168

Chevallard, Y. y Ladage, C. (2011). *Didactique fondamentale: Module 1. Leçons de didactique* (UE SCEQ1: Apprentissage et didactique, Master 1, Université de Provence). Département des sciences de l'éducation. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/DFM_2011-2012_Module_1_LD_.pdf

Chevallard, Y. y Sensevy, G. (2014). Anthropological approaches in mathematics education: French perspectives. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 38–43). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_9

Chevallard, Y., Barquero, B., Bosch, M. y Florensa, I. (Eds.). (2022). *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic*. Birkhäuser / Springer. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-76791-4

De Gauna, J. R., Dávila, P., Etxeberria, J. Y Joxemari, J. (2013). Los libros de texto de matemáticas del bachillerato en el periodo 1970 – 2005. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 16* (2), 245-276. https://www.relime.org/index.php/relime/article/view/222/190

Espín Buendía, J. G., Gascón, J. y Nicolás, P. (2025). *Didactic analysis of the modality of study of the real numbers in the Degree in Mathematics* [Preprint]. arXiv. https://arxiv.org/abs/2509.20023

Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM – Mathematics Education, 45*, 633–646. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x

Fischbein, E., Jehiam, R. y Cohen, D. (1995). The Concept of Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(1), 29-44. https://www.jstor.org/stable/3482830

Font, V., Breda, A., Sala-Sebastià, G. y Pino-Fan, L. R. (2024). Future teachers' reflections on mathematical errors made in their teaching practice. *ZDM—Mathematics Education*, *56*, 1169–1181. https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-024-01574-y

Gascón, J. (2024). Contributions of the anthropological theory of the didactic to the epistemological programme of research in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education, 56*(6), 1319–1330. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01563-1

González-Martín, A. S. (2020). La introducción de los números reales en la enseñanza secundaria: Un análisis institucional de libros de texto. *Números, 105*, 7–24. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7643017

González-Martín, A.S., Giraldo, V. y Souto, A.M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: an institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education*, *15*(3), 230–248. https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/14794802.2013.803778

Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2023). Analysing the mathematical activity in a modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives. *Mathematics Education Research Journal*, *35*, 715–741. https://doi.org/10.1007/s13394-022-00411-3

Licera, M., Gascón, J. y Bosch, M. (2019). Las tres dimensiones fundamentales del problema didáctico de los números reales. *Contextos de Educación*, *26*(19), 13–26. https://www2.hum.unrc.edu.ar/ojs/index.php/contextos/article/view/925

Licera, R. M., Bastán, M., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). El problema didáctico de la pérdida de sentido de los números reales en la enseñanza media. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD: Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (*10*, 695-718). https://portalrecerca.uab.cat/en/publications/el-problema-did%C3%A1ctico-de-la-p%C3%A9rdida-de-sentido-de-los-n%C3%BAmeros-rea/

Llanos, V. C. y Otero, M. R. (2024). Análisis transpositivo en los libros de texto para la enseñanza Secundaria en Argentina en los últimos ochenta años: reformas educativas y transformaciones en el saber. *Revista Colombiana de Educación*, (93), 7–36. https://doi.org/10.17227/rce.num93-17006

Ministerio de Educación. (2024). *Norma técnica para la implementación del mecanismo denominado compromisos de desempeño 2024*. https://www.minedu.gob.pe/cdd/download/rm_046-2024-minedu_cdd2024.pdf

Montoro, V. (2025). Pensar y repensar los números reales: Interacción entre lo cognitivo y lo epistemológico. *Revista de Educación Matemática*, *40*(2), 39–64. Unión Matemática Argentina – Famaf (UNC). https://doi.org/10.33044/revem.49996

Oktaç, A. y Vivier, L. (2016). Conversion, change, transition… in research about analysis. En B. R. Hodgson, A. Kuzniak y J. B. Lagrange (Eds.), *The didactics of mathematics: Approaches and issues. A homage to Michèle Artigue* (87–121). Springer. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-26047-1

Rezat, S., Fan, L. y Pepin, B. (2021). Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change. *ZDM–Mathematics Education, 53*, 1189–1206. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01309-3

Trouche, L., Gueudet, G. y Pepin, B. (2018). Enfoque documental de la didáctica. En S. Lerman (Ed.), *Enciclopedia de la educación matemática*. Nueva York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100011-1 .

Zamansky, M. (1967). *Introducción al álgebra y análisis moderno*. Montaner y Simón.

Zeynivandnezhad, F., Saralar-Aras, I. y Halai, A. (2024). A refined framework for qualitative content analysis of mathematics textbooks. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 20*(3), en https://doi.org/10.29333/ejmste/14284