Edison Laderas Huillcahuari, Vladimir Acori Flores, Luis Villa Pérez

ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL ASISTIDO POR EL SOFTWARE GEOGEBRA

Differential and integral Calculus teaching assisted by GeoGebra software

RESUMEN

Este estudio evaluó el impacto del software GeoGebra en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en educación superior, analizando autorregulación, metacognición, significatividad, percepción del entorno, lenguaje simbólico y razonamiento. Se utilizó un enfoque cuantitativo y un diseño cuasi experimental con dos grupos independientes (N=60), recopilando datos mediante cuestionarios y escalas tipo Likert, analizados con estadística no paramétrica. Los resultados mostraron mejoras significativas en metacognición, lenguaje simbólico y percepción, potenciando el pensamiento matemático y espacial. El test de Kolmogorov-Smirnov (D=1) indicó una alta desviación entre los grupos. El estudio concluye que GeoGebra es una herramienta innovadora que mejora el aprendizaje de las matemáticas. Futuras investigaciones podrían explorar el uso de GeoGebra en diversas áreas matemáticas, evaluando su efectividad junto con estrategias pedagógicas innovadoras.

PALABRAS CLAVE:

- *Cálculo diferencial e integral*
- *Metacognición*
- *Innovación*
- *Enseñanza - aprendizaje*
- *GeoGebra*

ABSTRACT

This study evaluated the impact of GeoGebra software in the teaching of differential and integral calculus in higher education, analyzing self-regulation, metacognition, meaningfulness, perception of the environment, symbolic language and reasoning. A quantitative approach and a quasi-experimental design with two independent groups (N=60) were used, collecting data through questionnaires and Likert-type scales, analyzed with non-parametric statistics. The results showed significant improvements in metacognition, symbolic language and perception, enhancing mathematical and spatial thinking. The Kolmogorov-Smirnov test (D=1) indicated

KEY WORDS:

- *Differential and integral calculus*
- *Metacognition*
- *Innovation*
- *Teaching - learning*
- *GeoGebra*

Laderas Huillcahuari, E., Acori Flores, V. y Villa Pérez, L. (2023). Enseñanza del cálculo diferencial e integral asistido por el software GeoGebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 26*(3), 357 - 377. https://doi.org/10.12802/relime.23.2634. Recepción: Octubre 24, 2020 / Aceptación: Septiembre 6, 2024.

a high deviation between groups. The study concludes that GeoGebra is an innovative tool that improves mathematics learning. Future research could explore the use of GeoGebra in various mathematical areas, evaluating its effectiveness along with innovative pedagogical strategies.

RESUMO

Este estudo avaliou o impacto do software GeoGebra no ensino do cálculo diferencial e integral no ensino superior, analisando a autorregulação, a metacognição, o significado, a perceção do ambiente, a linguagem simbólica e o raciocínio. Utilizámos uma abordagem quantitativa e um desenho quasi-experimental com dois grupos independentes (N=60), recolhendo dados através de questionários e escalas do tipo Likert, analisados com estatística não paramétrica. Os resultados revelaram melhorias significativas ao nível da metacognição, da linguagem simbólica e da perceção, potenciando o raciocínio matemático e espacial. O teste de Kolmogorov-Smirnov (D=1) indicou um desvio elevado entre os grupos. O estudo conclui que o GeoGebra é uma ferramenta inovadora que melhora a aprendizagem da matemática. Futuras investigações poderão explorar a utilização do GeoGebra em várias áreas matemáticas, avaliando a sua eficácia em conjunto com estratégias pedagógicas inovadoras.

PALAVRAS CHAVE:

- *Cálculo diferencial e integral*
- *Metacognição*
- *Inovação*
- *Ensino e aprendizagem*
- *GeoGebra*

RÉSUMÉ

Cette étude a évalué l'impact du logiciel GeoGebra sur l'enseignement du calcul différentiel et intégral dans l'enseignement supérieur, en analysant l'autorégulation, la métacognition, la signification, la perception de l'environnement, le langage symbolique et le raisonnement. Nous avons utilisé une approche quantitative et une conception quasi-expérimentale avec deux groupes indépendants (N=60), en recueillant des données par le biais de questionnaires et d'échelles de type Likert, analysées à l'aide de statistiques non paramétriques. Les résultats ont montré des améliorations significatives de la métacognition, du langage symbolique et de la perception, ainsi qu'un renforcement de la pensée mathématique et spatiale. Le test de Kolmogorov-Smirnov (D=1) a révélé un écart important entre les groupes. L'étude conclut que GeoGebra est un outil innovant qui améliore l'apprentissage des mathématiques. Des recherches futures pourraient explorer l'utilisation de GeoGebra dans divers domaines mathématiques, en évaluant son efficacité avec des stratégies pédagogiques innovantes.

MOTS CLÉS:

- *Calcul différentielle et intégrale*
- *Métacognition*
- *Innovation*
- *Enseignement-apprentissage*
- *GeoGebra*

1. Introducción

Cada día la tecnología adquiere mayor relevancia tanto en la vida cotidiana como en los procesos educativos, siendo los programas informáticos cada vez más accesibles y necesarios. En el ámbito del aprendizaje de las matemáticas, el uso de aplicaciones tecnológicas contribuye al desarrollo del pensamiento creativo y a la resolución de problemas mediante el razonamiento matemático (Pilli y Aksu, 2013). En este contexto, GeoGebra se presenta como un software matemático gratuito que facilita el aprendizaje exploratorio. Su uso es intuitivo para principiantes y ofrece un entorno amigable tanto para estudiantes como para docentes (Dikovic, 2009). Una de las principales ventajas de GeoGebra es su capacidad para integrar geometría y álgebra en el proceso de enseñanza (Hohenwarter y Jones, 2007).

Considerando que la tecnología influye en los estilos de aprendizaje, su implementación, junto con la simulación y visualización de modelos matemáticos (Xistouri y Pitta-Pantazi, 2013; Akcay, 2017), puede transformar la comunicación abstracta entre profesores y estudiantes en una experiencia rica y accesible (Abramovich, 2013). En este sentido, el dominio tecnológico es una competencia esencial para la generación actual, y su fomento debería ser prioridad en las aulas de matemáticas (Mainali y Key, 2012).

En la educación universitaria, los estudiantes enfrentan dificultades al pasar de cálculo con una variable a varias. Existen investigaciones y propuestas didácticas que abordan estos desafíos (García-Oliveros et al., 2020; Prior Martínez y Torregosa Gironés, 2020), destacando problemas como la comprensión de gráficos multidimensionales (Pereira, 2020), simetría en representaciones de ternas (Agbolade et al., 2020), y la noción de espacio y dimensión. En el cálculo diferencial, el estudio de áreas irregulares y sólidos de revolución exige la integración de múltiples inteligencias, por lo que esta investigación se centra en el desarrollo del pensamiento matemático y espacial.

La geometría, en particular, requiere la orientación del docente y una complementación entre los enfoques sintético y analítico por parte del estudiante (Aroca Araújo, 2019). El uso de GeoGebra en el cálculo asistido por computadora rompe con los paradigmas tradicionales de la relación docente-estudiante, facilitando un aprendizaje más significativo (Coto Jiménez, 2020; Espinoza Guzmán et al., 2018). En este estudio de caso se analizó el impacto del uso de GeoGebra en el desarrollo del pensamiento matemático y espacial de los estudiantes. El aporte más relevante de la investigación es su contribución a la mejora de la calidad educativa tanto para la comunidad estudiantil como para la docente (Campos Soto et al., 2020).

Los estudios revisados subrayan la importancia del uso de GeoGebra en la enseñanza de la geometría, sugiriendo la necesidad de desarrollar una didáctica específica para su implementación. El problema central radica en cómo mejorar la enseñanza de la geometría y el aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario, utilizando GeoGebra como una herramienta eficaz (Morales Chicana et al., 2022).

A partir de este marco, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿cuál es el impacto del uso de GeoGebra en la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial e integral en estudiantes de Cálculo I en la educación superior universitaria? El objetivo general es determinar dicho impacto, y se derivan los siguientes objetivos específicos: a) evaluar el impacto de GeoGebra en las dimensiones del pensamiento matemático, tales como autorregulación, metacognición, significatividad, percepción del entorno, lenguaje simbólico, modelación de procesos, comunicación efectiva y lógica; b) comparar las habilidades de pensamiento matemático y espacial entre los estudiantes que aprenden con y sin GeoGebra; c) identificar cuál es la dimensión del pensamiento matemático que más influye en la mejora de las habilidades de pensamiento matemático y espacial.

2. Materiales y métodos

El pensamiento matemático se caracteriza por su dinamismo, claridad, progreso y simplicidad, desempeñando un rol fundamental en el aprendizaje (Reyes-Santander et al., 2018). Según Blossier y Richard (2014), este tipo de pensamiento está estrechamente relacionado con el uso de herramientas informáticas y el desarrollo de habilidades específicas en la interacción con dichas herramientas. Basándonos en esta premisa, se considera que el pensamiento matemático y espacial deben reforzar los conocimientos adquiridos en matemáticas. Para este estudio, se diseñaron encuestas centradas en las dimensiones del pensamiento matemático propuestas por Ocaña Gómez et al. (2019). Estas encuestas abarcaron ocho dimensiones y veinte subdimensiones, utilizando una escala Likert de 1 a 10, donde 1 representa el valor más bajo y 10 el más alto (ver Tabla I).

Las encuestas fueron aplicadas a estudiantes de Cálculo I en la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, seleccionados en función de su experiencia en el área de matemáticas. Los estudiantes autorregularon su conocimiento, lo que aportó validez a la investigación, ya que se procesaron los datos a partir de sus propias apreciaciones (Romero-López et al., 2020).

TABLA I
Estructura del cuestionario con escala de Likert antes y después de la enseñanza del GeoGebra

Dimensión (sección)	*Subdimensión*	*Ítems*	*Escala*
Autorregulación	Habilidad, comportamiento, desarrollo social y cognitivo	01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08	Likert
Metacognición	Operaciones intelectuales, asociación al conocimiento, aprendizaje significativo.	9,10,11	Likert
Significatividad	Nivel de uso del GeoGebra	12, 13	Likert
Percepción del entorno	Modelación de sus cálculos en herramientas digitales, comprensión entre los modelos	14	Likert
Lenguaje simbólico	Conoce operadores lógicos, estratifica resultados, toma decisiones acertadas	15	Likert
Modelación de procesos	Software GeoGebra	16	Likert
Comunicación efectiva	Socializa el conocimiento, reconoce habilidades y debilidades	17	Likert
Razonamiento	Argumentación, trascendencia, origen de modelos matemáticos	18, 19, 20	Likert

Fuente: Datos de la prueba piloto

La metodología adoptada fue de enfoque cuantitativo, con un diseño cuasi experimental de nivel explicativo. Se implementaron pretest y postest para evaluar el impacto del uso de GeoGebra en la enseñanza del cálculo diferencial e integral (Arias, 2012). Los estudiantes fueron previamente informados sobre los objetivos de aprendizaje, los criterios y los procedimientos de evaluación (Alsina et al., 2019). La muestra estuvo compuesta por 60 estudiantes universitarios de ciencias e ingeniería, distribuidos en dos grupos independientes: un grupo control y un grupo experimental. La selección de los estudiantes fue inclusiva para aquellos que asistieron regularmente y aprobaron, excluyéndose a los estudiantes que no asistieron y los que no estaban matriculados. El muestreo se realizó mediante una técnica probabilística de tipo aleatorio estratificado.

3. Resultados

En esta sección se presentan los datos que respaldan la calidad científica de la investigación a nivel metodológico. Se trata de un estudio de tipo aplicado, con un nivel explicativo y un enfoque inductivo-analítico. El diseño utilizado fue pre-experimental, con la aplicación de pretest y postest tanto al grupo de control, que siguió un método de enseñanza tradicional, como al grupo experimental, que utilizó GeoGebra. Ambos grupos contaron con el mismo número de participantes.

Una vez recolectada la puntuación de cada estudiante, se procede a validar ¿qué?, aplicando un análisis de correlación canónica y una prueba de Kolmogorov-Smirnov, para determinar si se rechaza o no la hipótesis nula de la investigación (Freire et al., 2020).

3.1. *Propuestas de modelos de trabajo*

Se diseñaron cuatro propuestas de trabajo matemático siguiendo el programa de contenidos en matemática de la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga ([UNSCH], 2018), específicamente se abordó el tema de funciones reales de variable real por ser el más extenso y de mayor aplicación en los distintos programas de formación.

Las actividades de aprendizaje que establece el programa de matemáticas de la universidad son:

a. Números reales.
b. Valor absoluto.
c. Desigualdades.
d. Distancias entre la recta real.
e. Intervalos y entornos.
f. Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones
g. Utilización de las herramientas algebraicas en la resolución de problemas.
h. Medida de un ángulo en radianes. Razones trigonométricas de un ángulo.
i. Uso de fórmulas y transformaciones trigonométricas en la resolución de triángulos y problemas geométricos diversos.
j. Vectores libres en el plano. Operaciones. Producto escalar. Módulo de un vector.
k. Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas. Idea de lugar geométrico en el plano.
l. Cónicas. Análisis.

m. Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Raíces complejas en funciones cuadráticas: características, expresión y representación. Dominio, recorrido y extremos de una función. – Operaciones y composición de funciones. Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia y continuidad. – Aproximación al concepto de derivada. Extremos relativos en un intervalo. Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales.

A continuación, se adaptaron al modelo de enseñanza en línea. Es importante resaltar que la didáctica del docente se rige por las teorías de enseñanza y aprendizaje de Van Hiele actualizadas (Wahab et al., 2017); las propuestas de trabajo son:

3.1.1. *Propuesta 1*

Estimación del área entre dos curvas para la función $f(x) = x^2 - x - 6$ y $g(x) = x + 1$, en el intervalo de intersección de sus curvas, asistido por GeoGebra.

En la primera propuesta, el docente orientó en el modelado a través del software asistido GeoGebra y los estudiantes presentaron evidencias de su desarrollo (Figura 1).

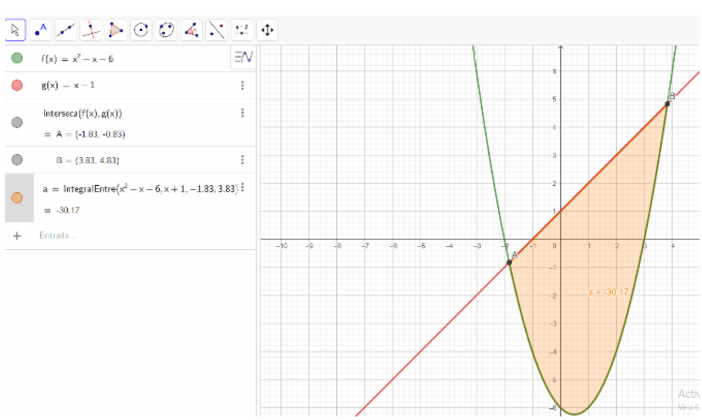

Figura 1. Con orientación del docente y modelando a través del software asistido, los estudiantes presentaron evidencias de su desarrollo

3.1.2. *Propuesta 2*

Estimación del área bajo la curva "La integral como límite del área" o "suma de Riemann". Calcule la suma de Riemann para la para la función $f(x) = 7x - 8.5x^2 + 3x^3$ en el intervalo $\langle 0, 2\rangle$. Aplique GeoGebra y compare con el cálculo manual.

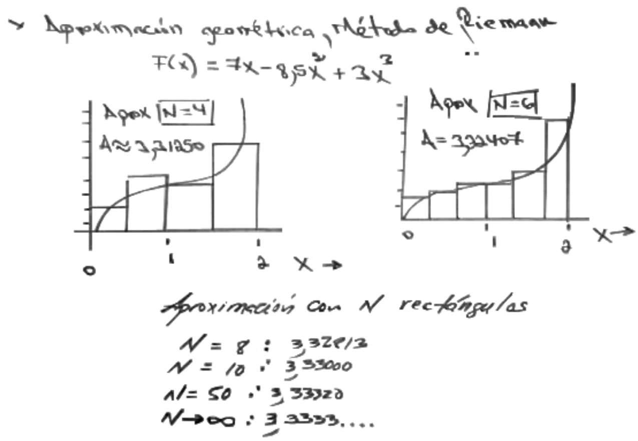

Figura 2. Memoria de cálculo de un estudiante seleccionado al azar, utilizando modelo de Riemann, para la función $f(x) = 7x - 8.5x^2 + 3x^3$ en el intervalo $\langle 0, 2\rangle$

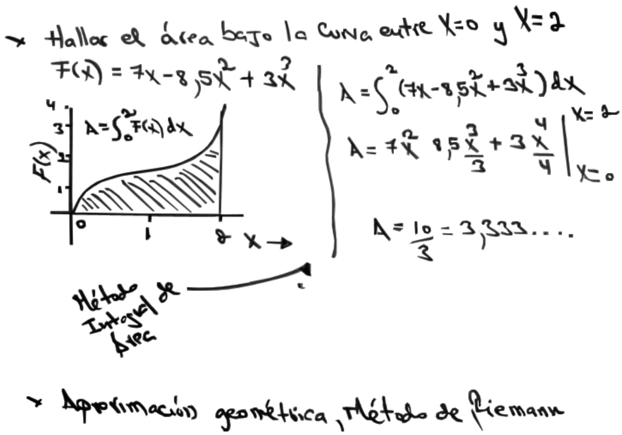

Figura 3. Memoria de cálculo de un estudiante seleccionado al azar, utilizando modelo de integral limite, para la función $f(x) = 7x - 8.5x^2 + 3x^3$ en el intervalo $\langle 0, 2\rangle$

En esta propuesta, se solicita a los estudiantes que elaboren una memoria de cálculo utilizando el método de Riemann por aproximaciones y la integral como límite de área. Esta memoria se comparará con el modelo simulado en GeoGebra para extraer conclusiones. Además del análisis descriptivo, se realizó un análisis estadístico para determinar si existen diferencias significativas en el uso de GeoGebra entre los estudiantes de Cálculo I (Vaillant et al., 2020).

3.1.3. *Propuesta 3*

Representar el sólido de revolución, punto a punto y estimar el volumen usando GeoGebra 3D, para la integral definida:

$$V = \pi \int_{0}^{2} f(x)^2 dx$$

De la misma manera, siguiendo la instrucción docente se procedió a determinar el modelo propuesto para estimar el volumen del sólido de revolución (Figura 4).

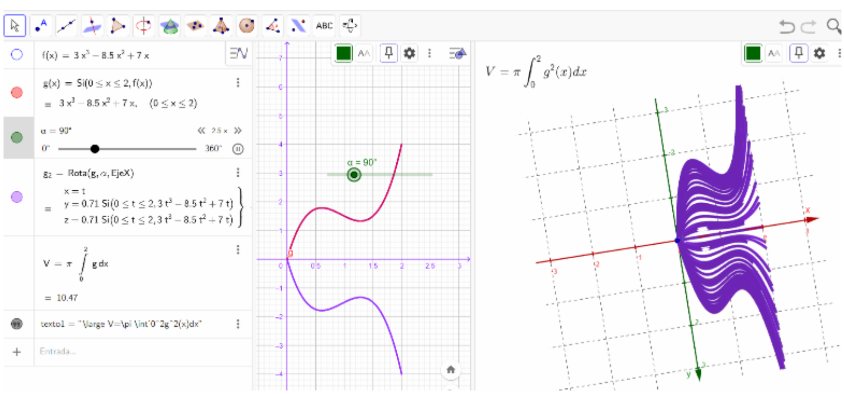

Figura 4. Sólido de revolución para la integral definida $f(x) = 3x^3 - 8.5x^2 + 7x$ en el intervalo ⟨0, 2⟩

3.1.4. *Propuesta 4*

Representar las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = 8$, $h(x) = x^3$, seguidamente en el rango positivo ⟨0, + ∞⟩, el dominio ⟨-2, 2⟩; y con la función rotar de GeoGebra 3D, construir el sólido de revolución en torno al eje y. Seguir las instrucciones del docente.

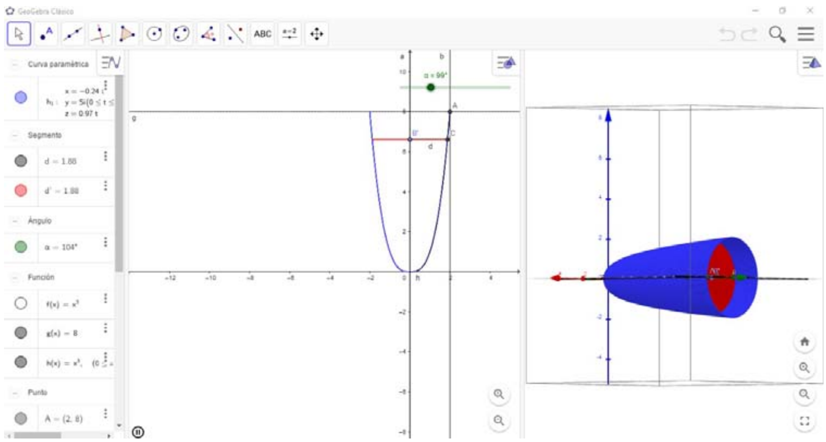

Figura 5. Sólido de revolución de las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = 8$, $h(x) = x^3$ en el rango positivo $\langle 0, +\infty\rangle$ y el dominio $\langle -2, 2\rangle$.

Los estudiantes representaron su modelo geométrico utilizando el software, guiados por el docente según el modelo aplicado en estudios recientes de geometría. De acuerdo con Fabres Fernández (2016, p. 91), "una propuesta metodológica efectiva es aquella orientada a tareas de conceptualización, investigación y demostración, que fomente habilidades como visualización, dibujo, comunicación, razonamiento lógico y transferencia, basadas en los niveles de razonamiento propuestos por Van Hiele y un enfoque de resolución de problemas".

3.2. *Análisis estadístico*

Para evaluar las mejoras en el pensamiento matemático y espacial, los datos recolectados de las encuestas realizadas antes y después de la aplicación de GeoGebra en la asignatura Cálculo I se analizaron mediante una correlación canónica. Este análisis permitió estudiar la relación entre los dos momentos de enseñanza-aprendizaje y determinar cuán vinculadas están las ocho dimensiones con la variable canónica, identificando correlaciones directas e inversas. El Análisis de Correspondencia Canónica (CCA) permite examinar la relación proporcional o inversa entre dos o más distribuciones (Restrepo-Betancur et al., 2019). Se realizó una prueba de permutación para verificar si la relación entre la tabla de contingencia y las variables explicativas es significativa. Los coeficientes de adecuación de las variables canónicas (U,V) son cruciales, ya que determinan qué dimensiones son significativas y permiten aceptar o rechazar la hipótesis nula (Vera, 2019):

Sean dos vectores aleatorios $X = X_1, X_2, \ldots, X_p$ e $Y = Y_1, Y_2, \ldots, Y_q$ de dimensiones p y q. En el análisis de correlación canónica buscamos dos variables U y V.

$$U = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_pX_p = X_a$$
$$V = b_1Y_1 + b_2Y_2 + \ldots + b_qY_q = Y_b$$

Asimismo,

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

Tal que la correlación entre U y V sea máxima. Sean S_{XX} y S_{YY} las matrices de covarianzas de X e Y respectivamente y sea S_{XY} la matriz de covarianzas de las variables de X y de Y. Si suponemos que las varianzas de U y V son igual a 1 entonces nuestro problema se traduce en encontrar los vectores a y b tal que maximizan $a^t S_{XY} b$ que es la correlación entre U y V.

$$Max.Corr.\ (U,V) = a^tS_{xy}b$$

Si y sólo si,

$$a^tS_{XX}a = 1$$
$$b^tS_{YY}b = 1$$

En este sentido, las variables resultantes U y V se las llama variables canónicas solución, a los vectores a y b primeros vectores canónicos y a la *Corr.* (U, V), primera correlación canónica. En este sentido, se procede a respaldar esta primera apreciación con la Prueba de Shapiro-Wilk (Shapiro y Wilk, 1965) para determinar cuáles de estas dimensiones son las que marcan la toma de decisiones en cuanto a las hipótesis de investigación.

La prueba de Shapiro-Wilk se utilizó para evaluar la normalidad del conjunto de datos de los estudiantes de Cálculo I. Teóricamente, la hipótesis nula plantea que la muestra $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ proviene de una población con distribución normal. Se usa desde el año 1965 y fue propuesta por Samuel Shapiro y Martin Wilk, se le considera una prueba de fiabilidad a la hora de estimar los valores de "*p*" y "alpha". El modelo aplicado es el siguiente:

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i * x_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x')^2}$$

donde, x_i es el número que ocupa la i-ésima posición en la muestra en orden creciente y la media muestral se presenta: $x' = x_1 + x_2, \ldots, + x_n / n$; la hipótesis nula se rechazara si "W" es demasiado pequeño. El valor de "W" debe estar entre 0 y 1.

Finalmente, se aplicó una prueba de Kolmogorov-Smirnov entre las medias de las dimensiones antes y después de modelar las propuestas de trabajo matemático con GeoGebra, para comparar el valor-p computado con el nivel de significación alpha, de esta manera podemos asumir cuál de las hipótesis soporta la investigación. Si “*p*” es mayor que “alpha” se acepta la hipótesis nula, en caso contrario se rechaza. Entonces, se contrasta la hipótesis de normalidad de la población, el estadístico de prueba es la máxima diferencia de:

$$D = |F_n(x) - F_0(x)|$$

siendo $F_n(x)$ la función de distribución muestral y $F_0(x)$ la función correspondiente a la población normal especificada en la hipótesis nula. La repartición del estadístico de Kolmogorov-Smirnov es no dependiente de la distribución de la población especificada en la hipótesis nula y los valores críticos están tabulados. Si la distribución pedida es la normal y se estiman sus parámetros, los valores críticos se consiguen empleando la proposición Lilliefors, asumiendo, “Una de las propiedades más importantes de la mezcla de modelo de distribuciones normales es su flexibilidad para acomodar varios tipos de funciones de distribución” (Barakat et al., 2019).

4. Discusión de resultados

Los valores propios para el pensamiento matemático y espacial antes y después de usar GeoGebra indican que las variables canónicas necesarias para las correlaciones entre ellas es una sola, “F_1”. En este sentido se explica el 90.615 % de la variabilidad con la enseñanza asistida por GeoGebra (Tabla II).

TABLA II
Valores propios de correlación antes y después de usar GeoGebra

	F_1	F_2
Valor propio	0.072	0.007
Variabilidad	90.65	9.385
% acumulado	90.615	100.00

Fuente: SPSS V26

Con base en los resultados de la prueba de Shapiro-Wilk, con nivel de significancia del 0.05, se observa que solo una combinación lineal de las dimensiones autorregulación, metacognición, significatividad, percepción del entorno, lenguaje simbólico, modelación de procesos, comunicación efectiva, razonamiento (0.058) presenta la mayor correlación (ver Tabla III).

TABLA III
Prueba de Lambda de Shapiro-Wilk

Lambda	*F*	*GL1*	*GL2*	*Pr > F*
0.921	0.058	64	260.2772964	1.000
0.993	0.007	49	232.8798687	1.000

Fuente: SPSS V26

Las correlaciones de las dos variables canónicas generadas, "F_1" y "F_2", refleja igual que la tabla anterior, que solo una variable canónica (0.268), está fuertemente vinculada con las dimensiones de la investigación (ver Tabla IV).

TABLA IV
Correlaciones canónicas generadas

F_1	F_2
0.268	0.086

Fuente: SPSS V26

Los coeficientes de redundancia de ambos grupos de variables canónicas revelan que las variables "Y_1", que son las ocho dimensiones evaluadas antes de implementar GeoGebra, presentan mayor nivel de explicación para las variables "Y_2" (después de implementar (GeoGebra); en cambio al examinar los coeficientes de redundancia de la variable "Y_2", tienen menor nivel de explicación para las variables "Y_1" (ver Tabla V). Esto quiere decir que las dimensiones autorregulación, metacognición, significatividad, percepción del entorno, lenguaje simbólico, modelación de procesos, comunicación efectiva y razonamiento después de implementar el software tienen una variabilidad grande (90.615 %).

TABLA V
Coeficientes de redundancia

Coeficiente de redundancia (Y_1):		
F_1	F_2	*Suma*
0.018	0.001	0.020
Coeficiente de redundancia (Y_2):		
F_1	F_2	*Suma*
0.010	0.001	0.011

Fuente: SPSS V26

Estos son los resultados que definieron el estudio, los coeficientes canónicos estandarizados (ver Tabla VI). A partir de aquí se definieron las combinaciones lineales de cada una de las dos variables canónicas que resultaron ser significativas. La dimensión lenguaje simbólico después de aplicar GeoGebra mejoró (0.510[a]), sabiendo que antes del software era menor (-0.053[a]) implica que su correlación es proporcional inversa, esta dimensión está vinculada con la variable canónica.

TABLA VI
Coeficientes canónicos estandarizados

Coeficientes canónicos estandarizados antes de GeoGebra (Y_1):		
	F_1	F_2
Autorregulación	0.489	-0.004
Metacognición	0.000[b]	0.313
Significatividad	0.048[c]	-0.062
Percepción	0.489	-0.004
Lenguaje simbólico	-0.053[a]	0.036
Modelación	0.048	-0.062
Comunicación	0.000	0.313
Razonamiento	0.106	0.706

Coeficientes canónicos estandarizados después de GeoGebra (Y_2):

	F_1	F_2
Autorregulación*	-1.215	1.367
Metacognición*	0.861[b]	-1.000
Significatividad*	0.510[c]	0.194
Percepción*	0.134	-0.171
Lenguaje simbólico*	0.510[a]	0.194
Modelación*	-0.042	-0.004
Comunicación*	-0.042	-0.004
Razonamiento*	-0.042	-0.004

[a,b,c,d] dimensiones significativas de proporcionalidad directa,
* dimensiones después de implementar GeoGebra

Fuente: SPSS V26

El resultado más importante de la investigación está en la dimensión metacognición, dado que era nula antes de implantar el software (0.000[b]) y después de aplicarlo mejoró (0.861[b]).

También mejoró la dimensión significatividad después de la aplicación (0.510[c]), que era casi nula antes (0.048[c]). Ese mismo comportamiento se obtuvo para la dimensión percepción, que pasó de (0.134[d]) a (0.489[d]); aunque hay una pobre correlación, es significativa. Sin embargo, las dimensiones de modelación, comunicación y razonamiento no experimentaron cambios significativos, lo que indica que no se correlacionan con el uso del software. Además, la dimensión de autorregulación no mostró mejora, mostrando una correlación inversa que indica una desmejora después de la implementación del software asistido.

En la Figura 6 se representan de forma gráfica los resultados de los coeficientes canónicos estandarizados, en el primer cuadrante se muestran las dimensiones metacognición*, percepción*, significatividad* y lenguaje simbólico* como las dimensiones más importantes del estudio. El mejor valor de adecuación en ambas variables lo muestra la variable canónica F_1 con un valor de (0.254) en la Tabla VII.

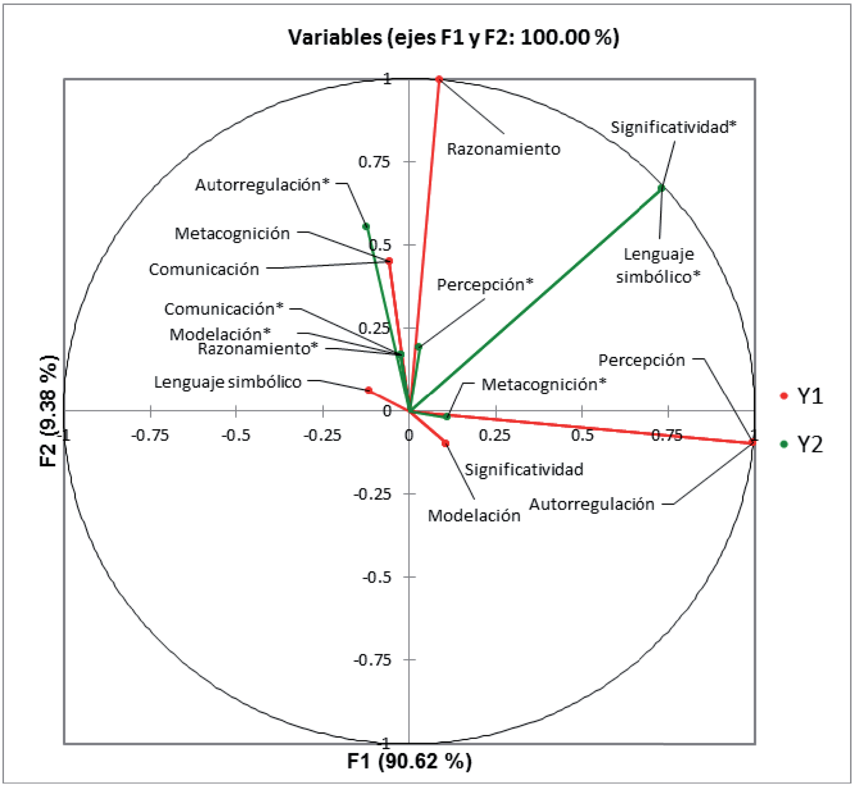

Figura 6. Gráfico de coeficientes canónicos estandarizados, en relación a las ochodimensiones de estudio

TABLA VII
Prueba de Kolmogorov-Smirnov
para validez de distribución de la población

D	*1*
Valor p-bilateral	Menor a 0.0001
alfa	0.05

Fuente: SPSS V26

Este es el resultado final la investigación, donde se muestran los coeficientes de adecuación del estudio, la variable canónica más representativa es ($F_1 = 0.254$) (Tabla VIII).

TABLA VIII
Coeficientes de adecuación de las variables canónicas

Coeficientes de adecuación de las canónicas	
(Y_1): F_1	F_2
0.254	0.180
Coeficientes de adecuación de las canónicas	
(Y_2): F_1	F_2
0.138	0.166

Fuente: SPSS V26

En la Figura 7 se muestra que los estudiantes otorgaron una puntuación más alta al estudio después de implementar GeoGebra en la asignatura Cálculo I. En las dos líneas de tendencia, las puntuaciones sin GeoGebra están entre 2 y 6 en promedio, mientras que en el segundo cuestionario el promedio está entre 6 y 10 en la escala de Likert, lo que representa que los estudiantes mejoraron sus habilidades de desarrollo del pensamiento matemático y espacial, corroborando con el estudio que las dimensiones que marcaron esta apreciación son metacognición*, percepción*, significatividad* y lenguaje simbólico*.

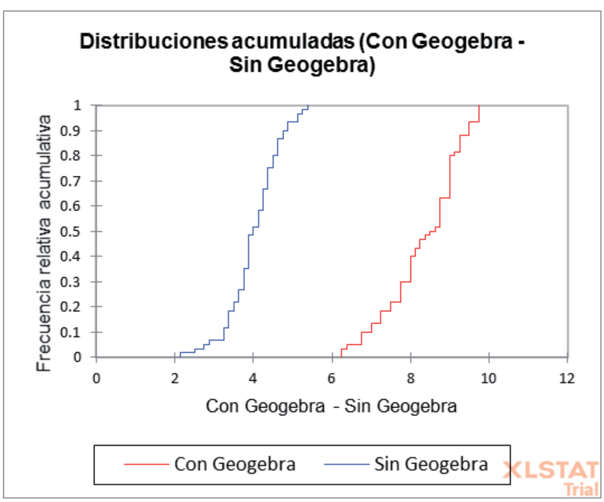

Figura 7. Distribución de los resultados de la encuesta a estudiantes de Cálculo I, aplicando GeoGebra

5. Conclusiones

Se concluye que el uso de GeoGebra tuvo un impacto significativo en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo diferencial e integral en estudiantes de educación superior. GeoGebra demostró ser una herramienta eficaz tanto en la enseñanza general de las matemáticas como en la de Cálculo específico (Lemos y Almeida, 2019). La investigación evaluó el impacto del software en diversas dimensiones del pensamiento matemático: autorregulación, metacognición, significatividad, percepción del entorno, lenguaje simbólico, modelación de procesos, comunicación efectiva y razonamiento.

A diferencia del estudio de Vilchez-Quesada (2019), que se centra en la satisfacción estudiantil y rendimiento académico con el software VilCretas, la presente investigación profundiza en la relación entre variables canónicas antes y después de la implementación de GeoGebra, con un énfasis en habilidades cognitivas como la autorregulación y la metacognición. Se observó una alta variabilidad (90.615%) en las dimensiones tras la implementación del software.

La investigación también revela limitaciones del software educativo en ciertas dimensiones del aprendizaje, mientras que el estudio de Lugar Geométrico en GeoGebra se enfoca en aspectos visuales y conceptuales. Sería útil explorar cómo las visualizaciones geométricas pueden influir en dimensiones metacognitivas como la autorregulación y modelación (Gómez-Chacón y Escribano, 2014). Ambos estudios sugieren que el software educativo no es una solución universal, sino que su eficacia depende del enfoque y las dimensiones evaluadas.

Finalmente, se identificó que la dimensión metacognición es la más representativa en la mejora de habilidades matemáticas y espaciales, seguida de lenguaje simbólico, significatividad y percepción. Las dimensiones menos vinculadas a las variables canónicas fueron razonamiento, modelación, autorregulación y comunicación, sugiriendo la necesidad de investigar más en estas áreas.

Agradecimientos

Expresamos nuestro especial agradecimiento a la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga y a los estudiantes de la Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil, quienes estuvieron siempre dispuestos a colaborar y contribuyeron significativamente a la realización y divulgación del presente trabajo de investigación.

Referencias

Alsina, Á., García, M. y Torrent, E. (2019). La evaluación de la competencia matemática desde la escuela y para la escuela. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *15*(55), 85–108. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/294

Abramovich, S. (2013). Computers in Mathematics Education: an introduction. *Computers in the Schools, 30*(1–2), 4–11. https://doi.org/10.1080/07380569.2013.765305

Agbolade, O., Nazri, A., Yaakob, R., Ghani, A. A. y Cheah, Y. K. (2020). Morphometric analysis of 3D soft-tissue for sexual dimorphism in human face. *International Journal of Morphology, 38*(2), 367-373. https://dx.doi.org/10.4067/S0717-95022020000200367

Akcay, A. O. (2017). Instructional technologies and pre-service mathematics teachers' selection of technology. *Journal of Education and Practice, 8*(7), 163–173. https://www.iiste.org/Journals/index.php/JEP/article/view/36021

Aroca Araújo, A. (2019). La enseñanza de la geometría analítica en la educación media. *Revista U.D.C.A Actualidad & Divulgación Científica, 22*(1), 1-8. https://dx.doi.org/10.31910/rudca.v22.n1.2019.1222

Arias, F. G. (2012). *El proyecto de investigación: introducción a la metodología científica* (6a ed.). Episteme. https://bit.ly/3cTgjvg

Barakat, H. M., Aboutahounb, A. W. y El-kadar, N. N. (2019). A new extended mixture skew normal distribution, with applications. *Revista Colombiana de Estadística, 42*(2). https://doi.org/10.15446/rce.v42n2.70087

Blossier, M., y Richard, P. R. (2014). Le travail mathématique en interaction avec un logiciel de géométrie dynamique tridimensionnelle. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *17*(4(II)), 327–342. https://doi.org/10.12802/RELIME.13.17416

Campos Soto, M. N., Navas-Parejo, M. R. y Moreno Guerrero, A. J. (2020). Realidad virtual y motivación en el contexto educativo: estudio bibliométrico de los últimos veinte años de Scopus. *Alteridad, Revista de Educación, 15*(1), 47-60. https://dx.doi.org/10.17163/alt.v15n1.2020.04

Coto Jiménez, M. (2020). Descubrimiento del estilo de aprendizaje dominante en estudiantes de Matemática Superior. *Revista Educación, 44*(1), 240-252. https://dx.doi.org/10.15517/revedu.v44i1.38571

Dikovic, L. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems, 6,* 191–203. https://eudml.org/doc/252642

Espinoza Guzmán, J., Rodríguez Granados, N. y Moreira-Mora, T. E. (2018). Relación entre diseño instruccional y rendimiento académico en un curso presencial y bimodal de Matemática: un estudio cuasiexperimental. *Revista Educación, 42*(2), 573-597. https://dx.doi.org/10.15517/revedu.v42i2.28763

Fabres Fernández, R. (2016). Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, utilizadas por docentes de segundo ciclo, con la finalidad de generar una propuesta metodológica atingente a los contenidos. *Estudios Pedagógicos, 42*(1), 87-105. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052016000100006

Freire, G. L., Sousa, V. C., Moraes, J. F., Alves, J. F., Oliveira, D. V. y Nascimento, J. R. (2020). Are the traits of perfectionism associated with pre-competitive anxiety in young athletes? *Cuadernos de Psicología del Deporte, 20*(2), 37-46. https://www.redalyc.org/journal/2270/227064711003/html/

García-Oliveros, G., Salguero-Rivera, B., Rodríguez-Díaz, O., Palomino-Bejarano, E. y Caicedo-Valencia, R. (2020). Las prácticas de evaluación de las matemáticas universitarias: Tensiones y desafíos desde la red conceptual en la que se inscriben. *Uniciencia, 34*(1), 246-262. https://dx.doi.org/10.15359/ru.34-1.14

Gómez-Chacón, I. M., y Escribano, J. (2014). Actividades sobre lugares geométricos desarrolladas en un sistema de geometría dinámica. visualización no icónica y génesis instrumental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4(II)), 361–383. https://doi.org/10.12802/RELIME.13.17418

Hohenwarter, M. y Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. En D. Küchemann (Ed), *Proceedings of British Society for Research into Learning Mathematics, 27*(3), 126-131. https://eprints.soton.ac.uk/50742/2/Hohenwarter_Jones_link_geom_alg_GeoGebra_2007.pdf

Lemos, G. C. y Almeida, L. S. (2019). Compreender, raciocinar e resolver problemas: Novo instrumento de avaliação cognitiva. *Análise Psicológica, 37*(2), 119-133. https://dx.doi.org/10.14417/ap.1583

Mainali, B. y Key, M. (2012). Using dynamic geometry software GeoGebra in developing countries: a case study of impressions of mathematics teachers in Nepal. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 1–16. https://www.cimt.org.uk/journal/mainali.pdf

Morales Chicana, L., Zuta Velayarse, L. M., Solis Trujillo, P. B. Fernández Otoya, F. A. y García González, M. (2023). El uso del Software GeoGebra en el aprendizaje de las matemáticas: Una revisión sistemática. *Referencia Pedagógica*, *11*(1), 2–13. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2308-30422023000100002

Ocaña Gómez, A., Pulido López, D. A., Gil Suárez, S. M. y Zuluaga López, M. M. (2019). Cambios en el desempeño de estudiantes de pensamiento matemático desde la evaluación formativa con un banco de preguntas en línea. *Interdisciplinaria, 36*(1), 7-22. https://www.redalyc.org/journal/180/18060087001/html/

Pereira, V. C. (2020). Por uma poética cartesiana: gráficos 3D nas criações digitais de André Vallias. *Estudos de Literatura Brasileira Contemporânea*, (59), 1-15. https://doi.org/10.1590/2316-40185914

Pilli, O. y Aksu, M. (2013). The effects of computer-assisted instruction on the achievement, attitudes and retention of fourth grade mathematics students in North Cyprus. *Computers & Education, 62*, 62–71. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.10.010

Prior Martínez, J. y Torregosa Gironés, G. (2020). Razonamiento configural y Espacio de Trabajo Geométrico en la resolución de problemas de probar. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 34*(66), 178-198. https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a09

Quiliano Navarro, M. y Quiliano Navarro, M. (2020). Inteligencia emocional y estrés académico en estudiantes de enfermería. *Ciencia y Enfermería, 26*(3). https://dx.doi.org/10.4067/s0717-95532020000100203

Restrepo-Betancur, L. F., Peña-Serna, C. y Martínez-González, M. F. (2019). Cambio climático en la ciudad de Medellín - Colombia, en un periodo de cincuenta años (1960-2010). *DYNA, 86*(209), 312-318. https://dx.doi.org/10.15446/dyna.v86n209.69531

Reyes-Santander, P., Aceituno, D. y Cáceres, P. (2018). Estilos de pensamiento matemático de estudiantes con talento académico. *Revista de Psicología, 36*(1), 49-73. https://dx.doi.org/10.18800/psico.201801.002

Romero-López, A. M., Portero-de-la-Cruz, S. y Vaquero-Abellán, M. (2020). Effectiveness of a web platform on university students' motivation to quit smoking. *Revista Latino-Americana de Enfermagem, 28*, 1-9. https://doi.org/10.1590/1518-8345.3731.3318

Shapiro, S. S. y Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples) . *Biometrika*, *52*(3/4), 591–611. https://doi.org/10.2307/2333709

Universidad Nacional de San Cristobal de Huamanga. (2018). Currículo Escuela Profesional de Ingeniería Agroindustrial. http://209.45.73.27/wp-content/uploads/2019/10/MALLA-C.-E.P.-FISMA-CARRERA-MAT EM%C3%81TICA.pdf

Vaillant, D., Rodríguez Zidán, E. y Betancor Biagas, G. (2020). Uso de plataformas y herramientas digitales para la enseñanza de la Matemática. *Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação 28* (108), 718-740. https://doi.org/10.1590/s0104-40362020002802241

Vera, O. (2019). A interpretação dos resultados: um elemento de significado para inferência estatística. *Educar em Revista, 35*(78), 131-152. https://doi.org/10.1590/0104-4060.69046

Vílchez-Quesada, E. (2019). Estudio de caso: Estrategia de enseñanza y aprendizaje asistida por computadora para un curso de matemática discreta a través del uso del paquete VilCretas en el software Wolfram Mathematica. *Revista Electrónica Educare, 23*(2), 1-25. https: //dx.doi.org/10.15359/ree.23-2.13

Wahab, R. A., Abdullah, A. H., Mokhtar, M., Atan, N. A. y Abu, M. S. (2017). Evaluation by experts and designated users on the learning strategy using SketchUp make for elevating visual spatial skills and geometry thinking. *Bolema, 31*(58), 819-840. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a15

Xistouri, X. y Pitta-pantazi, D. (2013). Using GeoGebra to develop primary school students' understanding of reflection. *North American GeoGebra Journal, 2*(1), 19–23. https: //mathed.miamioh.edu/index.php/ggbj/article/view/38

Autores

Edison Laderas Huillcahuari. Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga, Perú.
edison.laderas@unsch.edu.pe

https://orcid.org/0000-0002-4598-319X

Vladimir Acori Flores. Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga, Perú.
vafunsch@gmail.com

https://orcid.org/0000-0001-7195-1047

Luis Villa Pérez. Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga, Perú.

https://orcid.org/0000-0002-9951-0582

