Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones

Gabriela Buendía [1]

RESUMEN

En este artículo presentamos una socioepistemología –o epistemología de prácticas– acerca de la periodicidad de las funciones, que tiene como aspecto principal la relación predicción-periodicidad en el reconocimiento significativo de dicha propiedad. También mostramos una situación, cuyo diseño se fundamenta en la socioepistemología, que da cuenta de cómo esta relación se pone en marcha intencionalmente en contextos didácticos interactivos, logrando una reconstrucción de significados situacionales sobre el aspecto periódico de las funciones. En la visión teórica con la que abordamos este estudio, el saber matemático se problematiza y se reconoce que para hablar de él no se le puede considerar como un objeto acabado no cuestionable, sino como un complejo de prácticas, de naturaleza social, que le den sentido y significado.

- **PALABRAS CLAVE**: Práctica social, lo periódico, predicción.

ABSTRACT

We present a socioepistemology –or epistemology of practices- about the periodicity of the functions whose main aspect is the relation prediction- periodicity in the significant recognition of this property. We present also a situation whose design is supported in the socioepistemology and that shows how this relation starts up, intentionally, in interactive didactic contexts achieving a situational meaning reconstruction regarding the periodic aspect of the functions. In the theoretical vision that we use to undertake this study, the mathematical knowledge it is problematized and, is recognized that to speak about a mathematical knowledge, this cannot be considered like a finished and not questionable object, but as a complex of practices, of social nature, that provide it with sense and meaning.

- **KEYWORDS:** social practice, periodicity, prediction.

Fecha de recepción: Marzo de 2006/ Fecha de aceptación: Enero de 2006

[1] Centro de Investigación en Matemática Educativa, Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Chiapas.

RÉSUMÉ

Nous présentons une socioépistémologie -ou épistémologie de la pratique- au sujet de la périodicité des fonctions ayant comme aspect principal la relation prédiction-périodicité dans la reconnaissance significative de cette propriété. Nous présentons de même une situation dont la conception est basée dans la socioépistémologie et qui montre comment cette relation se met en marche, intentionnellement, dans des contextes didactiques interactifs réussissant ainsi une reconstruction des significations situationnelles sur l'aspect périodique des fonctions. Dans la vision théorique avec laquelle nous abordons cette étude, le savoir mathématique se problématise et il est reconnu que pour parler d'un savoir mathématique celui-ci ne peut pas se considérer comme un objet fini sans possibilité de le remettre en question, mais plutôt comme un complexe de pratiques, de nature sociale, qui lui donnent un sens et une signification.

- **MOTS CLÉS:** Pratique sociale, ce qui est périodique, prédiction.

RESUMO

Apresentamos una socioepistemologia –ou epistemologia de práticas- a respeito da periodicidade das funções cujo aspecto principal é a relacão predição-periodicidade no reconhecimento significativo desta propiedade. Apresentamos também uma situação cujo traçado se fundamenta na socioepistemologia e que analisa como esta relação segue, intencionalmente, em contextos didáticos interativos alcançando uma reconstrução de significados situacionais sobre o aspecto periódico das funções. Na visão teórica com que abordamos este estudo, o saber matemático se problematiza e se reconhece que para falar de um saber matemático, este não se pode considerar como um objeto acabado não questionável, mas sim como um complexo de práticas, de natureza social, que lhes dão sentido e significado.

- **PALAVRAS CHAVE:** prática social, periódico, predição.

Introducción

La problemática fundamental que atiende la matemática educativa consiste en haber identificado una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar. En particular, esta investigación sobre el aspecto periódico de las funciones aborda el fenómeno didáctico que surge de la poca coherencia entre la existencia y aplicabilidad de una definición matemática[2] de periodicidad –componente

[2] Una función es periódica en su dominio si y sólo si $f(x) = f(x \pm p)$ para todo x que pertenezca al dominio, en donde p es un número real llamado periodo.

esencial de la estructura matemática– y lo que se interpreta acerca de lo periódico en los ambientes escolares.

Se ha considerado que la matemática escolar, en especial aquella del nivel de educación superior –que atiende este estudio–, se nutre no sólo de ella misma, sino de otros dominios científicos y del propio contexto sociocultural; la matemática toma sentido y significación de esas prácticas de referencia. En este reconocimiento, la adquisición de objetos matemáticos no resulta ser el referente único para hablar de la construcción del conocimiento; también darán cuenta de ello las prácticas relacionadas con la generación de dicho objeto.

Debido a que se reconoce a las prácticas sociales como generadoras de conocimiento matemático entre los grupos humanos, la socioepistemología es la aproximación teórica con la que se aborda este estudio sobre la periodicidad. Se presenta una relación entre la predicción y la periodicidad, que proporciona un escenario donde se articulan elementos que pertenecen más al tipo de recursos utilizados para hacer matemáticas que a la propia estructura matemática; tal es el caso del comportamiento de la gráfica de una función.

La epistemología de prácticas que se propone sobre lo periódico se fundamenta en esa relación predicción-periodicidad; por ello, daremos cuenta de su ingreso al sistema didáctico a través de una situación, en la que la predicción es el argumento, formado por significados, procedimientos y aspectos cognitivos, que favorece una reconstrucción situacional de significados acerca de lo periódico.

Problemática

Se han identificado varias cuestiones acerca de lo periódico en ambientes escolares, como la falta de sentido que tiene la definición matemática de las funciones periódicas (Cordero y Martínez, 2001) y la confusión entre las series de objetos y gráficas repetitivas con aquellas que son periódicas (Shama y Movshovitz-Hadar,1997; Shama,1998). Adicionalmente, cuando los estudiantes discuten gráficas que representan movimientos periódicos, esta propiedad, más que tener un significado propio en el movimiento o en la gráfica, parece ser la herencia de la función senoidal que los puede modelar. Lo periódico parece transferirse automáticamente desde la propiedad analítica del seno hacia cualquier otra gráfica o movimiento que resulte similar (Buendía, 2004; Buendía y Cordero, 2005). Esa falta de sentido se refleja también cuando lo periódico no suele ser una característica que resulta relevante ante otras propiedades, como la continuidad.

Lo anterior es un indicativo de que, alrededor de lo periódico, se han privilegiado argumentos de corte analítico que toman a los conceptos matemáticos como objetos elaborados, alejados totalmente de argumentos situacionales.

Como consecuencia, resulta común que estudiantes y profesores que saben la definición analítica de periodicidad declaren que gráficas como las de la Figura 1 sean periódicas. Es como si se generara un teorema factual que establece una relación biunívoca entre periodicidad y los comportamientos senoidales. O bien, en el mejor de los casos, se instituye una relación biunívoca entre cualquier forma de repetición de una gráfica y la propiedad periódica.

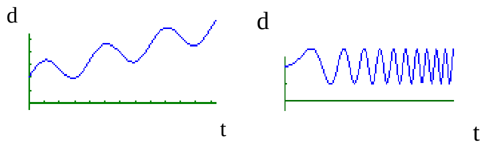


Figura 1. Gráficas senoidales.

Adicionalmente, la periodicidad es un concepto que transita entre diferentes disciplinas escolares que forman parte de una sola cultura científica del estudiante; sin embargo, el discurso escolar y, muy en particular, el del nivel superior, suele separarlas de tal manera que, para el caso de lo periódico, la propiedad cambia según el referente. En Cálculo, por ejemplo, una función es o no periódica si cumple o no la definición:

> *Decimos que una función* f con dominio X *es periódica*, *si existe un número real positivo* k *tal que* f (t + k) = f (t) *para todo* t *en* X. *Si existe un número positivo* k *mínimo con esta propiedad*, *entonces este se llama el periodo de* f (Swokowski, 1982).

Por su parte, al estudiar lo periódico con osciladores, como en ecuaciones diferenciales, se habla de funciones casi periódicas, o bien se define un periodo especial –*cuasiperiodo*– que alude sólo al tiempo:

> *La superposición de dos vibraciones con frecuencias circulares inconmensurables* ω_1 y ω_2 *resulta en un proceso de superposición de vibraciones sinusoidales que ya no es periódico. Señalamos que tales funciones siempre tienen un carácter aproximadamente periódico, o, como decimos, son casi periódicas* (Courant, 1979).

> *Como* $x(t) = Ae^{-\lambda t} sen(\sqrt{\varpi^2} - e^{\lambda^2} t + \varphi)$ *no es una función periódica*, *al número* $2\pi / \sqrt{\varpi^2 - \lambda^2}$ *se le llama cuasiperiodo. El cuasiperiodo es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos máximos sucesivos de* $x(t)$(Zill, 1988).

Pareciera entonces que, al abordar situaciones periódicas en diferentes contextos, no basta conocer, aplicar o comprobar una fórmula. En sí misma, la definición puede incluso tener diferentes formas y seguir diferentes objetivos[3]; adicionalmente, consideramos que, antes de hablar sobre la periodicidad como una propiedad terminada y aplicable, será preciso considerar su naturaleza y sus significados en el seno de situaciones y actividades que le dan sentido.

Lo periódico

A la luz de la problemática mostrada en relación con el aspecto periódico de las funciones, pensamos que su origen estriba en que en la matemática escolar no hay suficientes marcos de referencia, más allá de los exclusivamente matemáticos, que permitan resignificar el conocimiento matemático. Queremos proponer, en consecuencia, marcos que consideren la naturaleza del saber, su función y origen social.

3 Consúltese, por ejemplo, la discusión presentada por Dormolen y Zaslavsky (2003), quienes mencionan que al hacer matemáticas uno puede elegir una u otra definición por razones lógicas, pedagógicas o de carácter convencional, y sería peligroso mezclar estas razones o creer que, finalmente, una definición es única o pura.

Estamos planteando un escenario donde, alrededor de los aspectos meramente analíticos de la periodicidad, se dibujen muchos más elementos que influyen en su significado y construcción. Ya que no bastan su definición y operatividad matemática, más que hablar de periodicidad, nos referiremos a *lo periódico*, término que nos permitirá, por un lado, hacer evidente la inclusión de aspectos culturales, históricos e institucionales que tienen que ver con la periodicidad; por otro, separar el aspecto periódico del sentido utilitario que le ha impregnado el sistema didáctico. Esto confiere un carácter complejo a la generación de conocimiento matemático y a su difusión institucional, ya que lo periódico puede constituir un lenguaje (sin definiciones) antes de que aparezca la institucionalización de la periodicidad a través de la definición.

Así, esta investigación trata de evidenciar que lo periódico adquiere sentido cuando los seres humanos se enfrentan a la tarea de buscar la predicción de una posición lejana que se tendrá sobre la gráfica del movimiento, dada una cierta información actual, lo cual favorece una distinción significativa de la repetición que presenta un movimiento. Por tanto, la búsqueda de una base de significados para lo periódico no descansa en un virtual encadenamiento lógico-matemático de objetos, sino en la práctica de predecir (Cantoral, 2001). De ahí que se propone una epistemología de prácticas para lo periódico que articule los aspectos cognitivos, culturales, históricos e institucionales de la periodicidad; en dicha (socio)epistemología, la predicción será una práctica que favorezca la articulación y la inclusión, funcional y articulada, de lo periódico en el sistema didáctico.

Objetivos

El objetivo de nuestra investigación consiste en proponer una epistemología de lo periódico cuyos elementos estén extraídos de las prácticas que realiza el individuo al tratar con aspectos del comportamiento repetitivo de gráficas de funciones que describen movimientos. A esta epistemología de prácticas le hemos llamado *socioepistemología de lo periódico*.

Otro aspecto que aborda este trabajo es la transformación de las prácticas cuando se tiene la intención de que el conocimiento ingrese al sistema didáctico. Para ello, se diseñó y puso en escena una situación fundamentada en la *socioepistemología de lo periódico*, con el propósito de dar cuenta que la predicción es una práctica desarrollada de manera intencional en contextos interactivos y juega el papel de argumento situacional. Esto permite reconocer la naturaleza de lo periódico y usarla significativamente.

En resumen, el objetivo de nuestra investigación tiene que ver con proponer una *socioepistemología de la periodicidad* y una situación cuyo diseño se fundamente en ella. El aspecto principal de dicha epistemología de prácticas es la relación predicción-periodicidad y cómo se pone en marcha en contextos interactivos, logrando una reconstrucción situacional del aspecto periódico de las funciones.

La socioepistemología como aproximación teórica

En la búsqueda de la matemática educativa por explicar cómo se construye el conocimiento, nuestra propuesta pretende hacer énfasis no sólo en los aspectos cognitivos alrededor de la construcción del objeto matemático, sino en la propia práctica social que conduce a la adquisición de dicho conocimiento. El propósito es dar evidencia y clarificar la existencia de relaciones entre prácticas sociales y conocimiento matemático que no sólo se circunscriben al ámbito didáctico actual, sino también pueden dar cuenta de la función de dicho conocimiento en diferentes momentos a lo largo de su historia, así como de su origen en el seno de paradigmas sociales y de su vínculo con otras prácticas de referencia.

Ese análisis sobre la naturaleza de las prácticas sociales y de su papel en la construcción y difusión institucional del saber matemático conforma el aspecto social en el estudio de la construcción del saber matemático. Con esto, se establece un marco donde esa dimensión social interactúa, de manera sistémica, con la didáctica, epistemológica y cognitiva del saber para brindar una explicación más robusta acerca de su construcción; al resultado de la conjunción de estas dimensiones se le ha llamado *aproximación socioepistemológica* (Cantoral y Farfán, 1998; Cordero, 2001). Desde su génesis, esta visión teórica marca una forma de hacer investigación en matemática educativa, donde se reconocen y estudian científicamente los mecanismos sociales de construcción del saber matemático.

Si bien es cierto que los aspectos sociales, cognitivos, epistemológicos y didácticos del conocimiento han sido abordados por diferentes esquemas explicativos, un paradigma predominante es *el objeto matemático como metáfora para explicar cómo se construye el conocimiento*. El enfoque que se ha asumido señala que los objetos matemáticos existen previamente y que las dificultades didácticas yacen en la distancia entre las imágenes formadas por el individuo y los objetos matemáticos (Cantoral, 2000). La respuesta epistemológica que se obtiene es guiada por la pregunta sobre cómo se constituye el objeto de conocimiento; la cognitiva, por cómo el estudiante aprende el objeto, y la didáctica, por cómo se enseña el objeto. Las epistemologías formuladas en este marco, en el mejor de los casos, ayudan a tener cierto entendimiento sobre los conceptos y sus desarrollos, pero difícilmente logran establecer relaciones funcionales que conjunten o unifiquen conceptos y estructuras a lo largo del sistema educativo (Cordero, 2003).

El énfasis en el aspecto social que propone la socioepistemología al concebir a las prácticas sociales como metáfora para explicar la construcción del conocimiento reformula las dimensiones cognitiva, epistemológica y didáctica, pues se reconoce que el conocimiento se construye y reconstruye en el contexto mismo de la actividad que lleva a cabo el individuo al hacer matemáticas. Hay un reconocimiento a la complejidad del conocimiento matemático y a su naturaleza social, pero principalmente –y esto marca un panorama distinto y amplio respecto a otras perspectivas teóricas– propone entender porqué y cómo los grupos humanos tuvieron o tienen que hacer ciertas cosas para construir ese sistema complejo de conceptos. Esas “ciertas cosas” son las prácticas sociales que realizan los grupos humanos para construir conocimiento (Cordero, 2005).

Así, el saber matemático se problematiza y se reconoce que, antes de hablar sobre un saber matemático como un objeto acabado no cuestionable, “habrá que hacerlo sobre un complejo de prácticas, de naturaleza social, que den sentido y significado al saber matemático" (Cantoral, 2004, p. 6). Ello plantea un análisis en torno a las prácticas de referencia y al paso del conocimiento hacia el saber institucionalizado, donde la noción matemática en cuestión tendrá que presentarse centrada en su uso social y su funcionalidad asociada. Tal situación resignifica al propio conocimiento, pero no en relación con establecer un significado nuevo en un contexto determinado, sino en cuanto a su uso en la situación propuesta, donde se debate entre su función y su forma acorde con lo que organiza el grupo humano (Dominguez, 2003).

Los aspectos tradicionalmente estudiados del saber necesariamente se modifican (Arrieta, 2003). El aspecto cognitivo deberá ahora ser guiado por la pregunta sobre cómo los estudiantes y el profesor, interactivamente, construyen y reconstruyen identidades, significados, sus realidades y su propia cognición. El aspecto didáctico abordará cuestiones relativas a los contextos argumentativos que se proponen a los estudiantes y las formas y mecanismos para argumentar y llegar a consensos. Finalmente, la dimensión epistemológica se centrará en analizar la naturaleza social de la construcción del conocimiento matemático, su conformación histórico-cultural y el papel esencial que juega en el marco de otras prácticas de referencia.

Así, se establece una diferencia en la fundamentación y objetivos con aproximaciones teóricas que cuestionan el binomio individual/social, aquellas donde las prácticas sociales se proponen a nivel de contextos interactivos[4] (Bauersfeld, 1995) y las que toman a su objeto de estudio, como dada, externa al sujeto. Por tanto, los esfuerzos educativos se centran en cómo el sujeto se apropia, construye o aprehende este objeto.

La socioepistemología pretende desarrollar estrategias de investigación con naturaleza epistemológica, donde ésta sea entendida como el estudio de las circunstancias que favorecen la construcción del conocimiento, las cuales darán cuenta de la relación entre prácticas sociales y conocimiento matemático. Se pretende formar con dichos elementos una primera base de significaciones para los conceptos y procesos matemáticos, buscando incidir, con su auxilio, en el discurso matemático escolar (Cantoral, 2001). Una epistemología fundamentada en prácticas sociales, en contraposición a una de objetos matemáticos, favorecerá el establecimiento de relaciones funcionales, alejadas del utilitarismo, entre los diversos tópicos del saber matemático (Cordero, 2003).

Una socioepistemología de lo periódico

Hemos comentado que lo periódico puede constituir un lenguaje (sin definiciones) antes de que aparezca la institucionalización de la periodicidad a través de la definición, y que en el reconocimiento significativo de lo periódico proponemos a la predicción como una práctica asociada. En esta sección, se intentará dar cuenta de ello[5].

4 La matematización, práctica propuesta por Bauersfeld (1995), se refiere a la constitución interactiva de una práctica social: los profesores y estudiantes se reúnen e interactivamente producen ciertas regularidades y normas de hablar y actuar matemáticamente.

5 Para una revisión más completa de aspectos epistemológicos históricos de la periodicidad, puede consultarse Buendía (2004).

Los fenómenos naturales periódicos han sido piedra angular en el desarrollo de la ciencia. Su comportamiento repetitivo motivó el interés del hombre por conocerlos y usarlos como unidades naturales de tiempo: la periodicidad de los fenómenos celestes fue el puente entre la práctica empírica y la teoría de predicción.

> *En la repetición periódica la regla abstracta evoluciona a partir de hechos concretos. El periodo fue la fundamentación y esencia de la primera ciencia de las estrellas. Descubriendo y estableciendo los periodos, el conocimiento se vuelve ciencia* (Pannekoek, 1961, p. 54).

Incluso antes de cualquier razonamiento teórico, culturas como la babilónica y la egipcia usaron lo periódico para hacer predicciones (Montiel, 2005); el comportamiento periódico poseía ciertos atributos especiales y utilizables para desarrollar conocimiento.

Hoy, bajo una estructura que privilegia lo analítico y lo algebraico, dichos atributos suelen quedar relegados. El discurso matemático escolar ha favorecido una identificación tan estrecha de lo periódico con las funciones trigonométricas, que termina por excluir otras. De ahí que, si un fenómeno físico puede ser modelado por medio de la función seno, adquiere como consecuencia la propiedad de ser periódico. La periodicidad pareciera no significar nada por sí misma, más que a la luz del comportamiento repetitivo *sui generis* de la función seno.

La investigación en este campo señala que la asociación entre la función seno y su propiedad de periodicidad no es evidente de forma inmediata. Aun cuando el seno era conocido y manejado desde principios de nuestra era como una línea de la circunferencia, su carácter funcional y periódico no se consideraban relevantes. Movimientos típicamente periódicos, como el resorte, fueron inicialmente estudiados sin hacer referencia a las funciones trigonométricas. Esta situación se prolongó hasta mediados del siglo XVIII, aparentemente porque nadie había visto algún uso razonable para ellas (Katz, 1987).

Sin un referente obligado hacia los aspectos analíticos, algunos comportamientos periódicos fueron de interés científico para varios autores. Hooke, por ejemplo, utiliza la gráfica del arco coseno para representar en qué tiempos el peso colgado de un resorte está en una posición dada, pero no emplea este término trigonométrico, sino se queda sólo con la geometría de la situación. Taylor, al abordar el problema de la cuerda vibrante, maneja también el arco seno, lo cual le permite estudiar los tiempos periódicos del movimiento.

Al hablar entonces de movimientos periódicos parece existir un uso por separado del comportamiento que presenta el tiempo y del que indica el desplazamiento; tal distinción es fundamental para desarrollar el concepto de función periódica como relación entre variables, pero ocultará de alguna manera el comportamiento *sui generis* de lo periódico: cómo se comporta cada uno de sus componentes.

Montiel (2005) afirma que fueron quizá los nuevos usos de las cantidades trigonométricas lo que las despojó de su carácter geométrico, pues pasaron de ser consideradas como líneas en un círculo a cantidades que describían ciertos fenómenos, particularmente movimientos periódicos. En dichos usos se reflejan los paradigmas de un época; por ejemplo, el interés en la descripción analítica de movimientos como rasgo característico de los desarrollos científicos del siglo XVIII, lo cual ayudó a la consolidación de la algoritmia del cálculo.

El interés de Euler, quien en el siglo XVIII estableció formalmente la periodicidad como una propiedad de la función seno, radicó en describir un movimiento que ocurría a través del tiempo. Esto resultó distinto a lo que le era contempóraneo –centrado más en las propiedades del tiempo– y fue necesario, hasta entonces, manipular a la expresión arco seno –forma para el seno más utilizada en la época– para expresar el tiempo como variable independiente y el desplazamiento como variable dependiente. De esta manera, Euler podría realizar diversos cálculos relacionados con la descripción del movimiento de osciladores armónicos; entre ellos, predecir la posición dado un tiempo determinado.

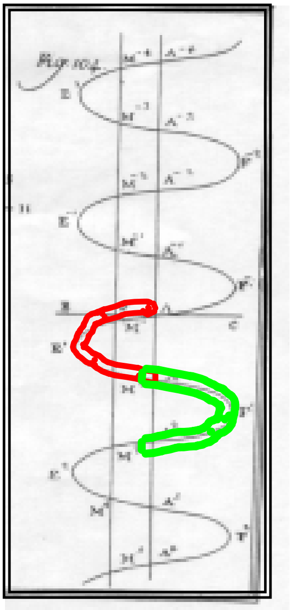
El objetivo central de las ciencias físicas –adelantarse a los acontecimientos, determinar leyes que gobiernen comportamientos de sistemas– parece permear lo que sucede en ambientes matemáticos (Cantoral, 2001). Así, podemos identificar prácticas, como la predicción propia de contextos físicos, con el uso y reconocimiento de lo periódico. Si bien esa práctica de predicción favore el paso hacia un estudio analítico del movimiento, reconoce también la naturaleza del objeto sobre el que se trabaja.

La generación de conocimiento parece tener que ver, entonces, con un tránsito continuo entre disciplinas científicas que surge mediante el reconocimiento de las prácticas involucradas. Esta es la fuente que nos permite investigar cómo podemos dotar de un contexto significativo a la construcción de conocimiento matemático, en particular el que atañe a lo periódico. La atención se cincunscribe no sólo a los resultados matemáticos obtenidos (como el manejo analítico formal de una propiedad periódica para el seno), sino también a las actividades y herramientas utilizadas alrededor de su construcción (como la necesidad de predecir sobre el comportamiento de un movimiento o la identificación del comportamiento de cada una de las variables que éste involucra). Podemos notar en torno a lo periódico aspectos que conciernen más con prácticas en las que se involucra el individuo y menos con aspectos exclusivamente analíticos de la periodicidad.

Por otra parte, al hacer una revisión sobre las investigaciones acerca de la periodicidad, identificamos otros elementos vinculados a un reconocimiento útil de lo periódico. Ellos forman parte de los marcos de significación para lo periódico que queremos proponer y que no tratan sólo de la producción matemática del alumno.

a) Acerca del comportamiento de una función

Retomamos el trabajo desarrollado por Euler, quien fue el primero en introducir las funciones trigonométricas al análisis y, por ende, en estudiar sus propiedades dentro de este contexto. Cuando Euler se refiere al carácter periódico de la función seno, lo hace en realidad haciendo énfasis en su comportamiento. Veamos la siguiente gráfica (Figura 3):



Primero, digamos que la abscisa es x = 0, entonces la ordenada A A^1 = a , A A^2 = 2 a, A A^3 = 3 a, etc. En la otra dirección A A^{-1} = a , A A^{-2} = 2 a, A A^{-3} = 3 a, etc y la curva pasa por cada uno d e estos puntos (Euler, 1948)

Figura 3. Trabajo de Euler sobre lo periódico.

La propiedad periódica parece estar tratada como una cualidad que define cierto tipo de comportamiento, ya que se refiere al *número infinito de partes* de las que consta la gráfica: son los intervalos AE^1A^1, $A^1F^1A^2$, $A^2E^2A^3$, $A^3F^2A^4$, etc. Señala, además, que los intervalos E^1E^2, E^2E^3, E^1E^{-1}, $E^{-1}E^{-2}$, así como F^1F^2, F^1F^{-1}, $F^{-1}F^2$, son iguales a $2a\pi$. De esta manera, haciendo referencia al comportamiento de la función, específicamente a lo que ahora equivale a los mínimos o máximos, queda establecido que la longitud del periodo de repetición es precisamente $2a\pi$.

Shama (1998), en un estudio cognitivo sobre el entendimiento del concepto de periodicidad entre alumnos de nivel medio, reporta que los estudiantes suelen citar como ejemplos periódicos situaciones dinámicas, de tal manera que terminan identificando a la periodicidad como un proceso, no como un objeto. Esto los lleva a cometer errores al identificar como periódicos a fenómenos que no lo son, debido a la transferencia de propiedades del proceso a su producto, ya que establecen que por medio de un algoritmo repetitivo o patrón se obtiene necesariamente un fenómeno periódico.

Para un estudio cognitivo como el que hizo Shama, la explicación de este fenómeno didáctico (*aquello que se repite es periódico*) se lleva a cabo a través de la dialéctica proceso-objeto. Sin duda, esta es una cuestión cognitiva relevante que, en un marco de prácticas sociales, señala herramientas como el comportamiento de una función para argumentar acerca de lo periódico. La pregunta de investigación toma, necesariamente, matices más ricos: *¿Qué tiene que ver una cuestión como el comportamiento de una función para distinguir significativamente el proceso del objeto periódico?* La metáfora para explicar la generación de conocimiento matemático ha cambiado.

Callahan et al. (1992) mencionan que, al tratar de describir y entender los procesos naturales, se buscan patrones que puedan predecir lo que va a pasar en el futuro. Dichos autores señalan que el interés de la ciencia gira alrededor de ejemplos de comportamientos periódicos o casi periódicos. Para clarificar este punto, citan el ejemplo del comportamiento de poblaciones “predador-presa”, donde los números suben y bajan cada diez años en algo como un patrón periódico. La gráfica que presentan (Figura 4) no es periódica; sin embargo, analizar ese comportamiento casi periódico permite preguntas que hacen avanzar a la ciencia, como “si una cantidad que estamos estudiando realmente fluctúa de manera periódica, ¿por qué sucede esto?”

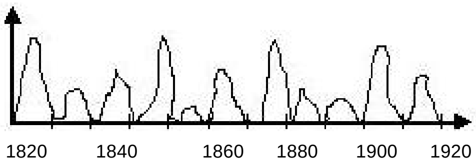


Figura 4. Comportamiento periódico.

El empleo del adjetivo “casi” o “cuasi” también lo hallamos en libros de texto para calificar cierto tipo de comportamientos repetitivos, como el movimiento de un oscilador amortiguado (Figura 5). La función que modela esa clase de movimientos no es periódica, ya que la amplitud de la función seno va disminuyendo conforme pasa el tiempo. Sin embargo, “aun cuando el movimiento no es verdaderamente periódico, podemos definir un cuasiperiodo $T_d = 2\pi/\mu$ como el tiempo entre los máximos sucesivos del desplazamiento” (Boyce y DiPrima, 1987).

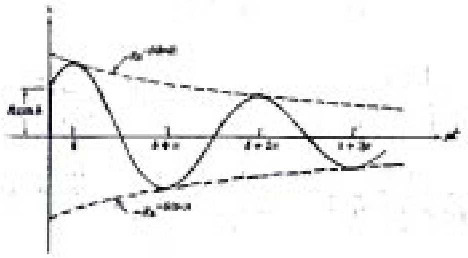


Figura 5. El cuasiperiodo.

Es interesante notar que la expresión *cuasiperiodo* se refiere a considerar lo que anteriormente, en oscilaciones no amortiguadas, era el periodo de la función, pero ahora lo atiende *sólo en relación con la repetición que presenta el eje x*. Ahora bien, se hace necesaria una distinción entre los componentes del comportamiento de una función: el comportamiento en el eje x y en el eje y, lo cual es fundamental para distinguir entre algo periódico y algo que no es verdaderamente periódico.

Las ideas anteriores pretenden evidenciar que en un reconocimiento significativo y útil de la propiedad periódica están involucrados muchos más elementos que los exclusivamente analíticos, como la atención al comportamiento de cada variable en la función.

b) Dualidad local-global

Dreyfus y Eisenberg (1983) identifican que la visualización global es un elemento necesario para que el estudiante reconozca lo periódico. Su estudio consistió en indagar cómo los alumnos manejan características de las funciones como linealidad, suavidad (diferenciabilidad) y periodicidad, por lo cual aplicaron un cuestionario de 34 preguntas a 84 estudiantes de primer semestre en dos universidades israelitas

El marco de su investigación se basó en el concepto imagen de lo que es una función y en las intuiciones del estudiante.

En el caso de la periodicidad, pidieron que se continura el trazo de cada una de las siguientes gráficas (Figura 6). Los estudiantes optaron por seguir la gráfica de una manera periódica: 0% para el caso a, 13% para el caso b, 40% para el caso c y 79% para el caso d.

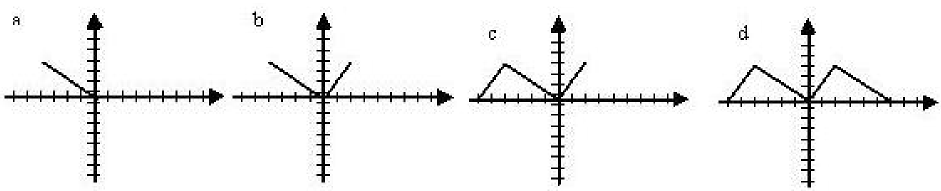


Figura 6. Visualización global de lo periódico.

Esto, concluyen los autores, parece sugerir la necesidad de una visualización global de la información geométrica para la que la periodicidad sea evidente.

Cordero y Martínez (2002) mencionan que los modelos de predicción en las funciones periódicas son principalmente globales e integran caracterizaciones locales y globales. Por tal motivo, es preciso especificar tanto el estado inicial de una función (caracterización local) como su comportamiento (periodo) para poder hacer predicciones en un instante posterior o anterior (conocer todo en un cierto margen), lo cual muestra la Figura 7b. Entonces, la periodicidad es una representación integral que está caracterizada por lo local y lo global en una relación dialéctica.

De acuerdo con Cordero y Martínez, este modelo de predicción en las funciones periódicas contrasta con el empleado tradicionalmente en el cálculo. El sistema de predicción local (Figura 7a) se utiliza en el cálculo y generalmente es preferido para hacer predicciones. La manera de predecir en este sistema consiste en tomar información sobre el comportamiento de las propiedades (posición y variación) del sistema en una vecindad infinitesimal (instante) en el espacio $(t, f(t))$, a fin de conocer la solución en cualquier instante anterior o posterior (conocer todo en un cierto margen). Aquí, sólo importan las caracterizaciones locales. En cambio, el sistema de predicción global (Figura 7b) se ocupa para movimientos periódicos o que se repiten, donde se establecen nuevas caracterizaciones que determinan el movimiento; por tanto, este sistema de predicción necesita integrar las caracterizaciones locales y globales.

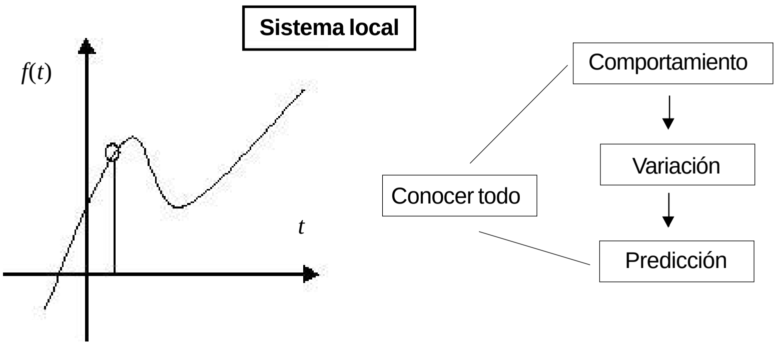


Figura 7a. Sistema de predicción local.

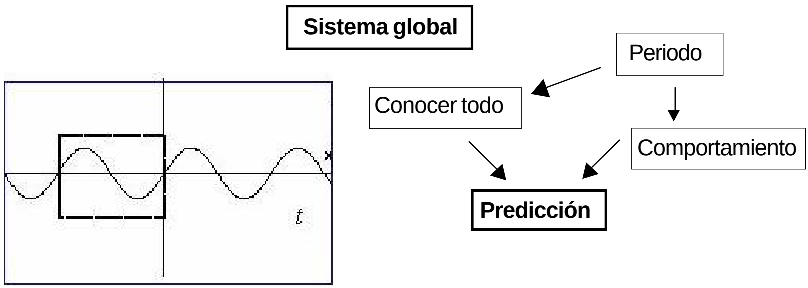


Figura 7b. Sistema de predicción global.

Otro ejemplo de esta dualidad local-global en fenómenos periódicos lo hallamos en North (1997), quien menciona la existencia de sistemas, como el de los electrones, que presentan una existencia discontinua, por lo cual su análisis debe ser distinto al puntual para captar su comportamiento, que se manifiesta en todo un período. Con el fin de aclarar esta proposición, North hace un símil con el sistema musical, ya que “en un instante, una nota musical no es nada, sino que requiere todo el periodo para manifestarse” (1997, p. 337).

La socioepistemología que se propone en esta investigación habla, ante todo, del reconocimiento a la naturaleza de lo periódico como una construcción social en la que los aspectos analíticos de la periodicidad se nutren de otros de carácter cultural, histórico e institucional. El uso significativo y articulado de esta propiedad a lo largo de un sistema didáctico involucra, por un lado, reconocer el comportamiento del objeto en cuestión (la gráfica o la función) a través del que distingue a cada una de las variables involucradas; por otro, emplear una visión dual local-global para que la naturaleza de tal comportamiento sea significativa. La práctica de predicción aparece como una fuente que favorece el reconocimiento significativo de dichos elementos.

En la siguiente sección, se presenta una situación en cuyo diseño se plantea intencionalmente la práctica de predicción en un escenario de movimientos repetitivos. Más que consistir en una serie de actividades para desarrollar habilidades predictivas, queremos dar cuenta de cómo en un escenario de predicción –que no es sólo el acto de poder o no predecir– se ponen en marcha:

- Significados acerca de movimientos y gráficas repetitivas o periódicas que pone en juego un estudiante, los cuales se reflejan a través de argumentos situacionales.

- Los procedimientos, que son las operaciones inducidas por los significados; en particular, los visuales, algebraicos o numéricos para poder predecir.

- Aspectos cogntivos, como la dualidad proceso-objeto o las construcciones mentales acerca de la gráfica de una función[6], que influyen y son influidos por los elementos anteriores.

- El argumento, que se refiere a la nueva reorganización de estos elementos en esquemas explicativos. En la situación, la predicción se transforma en el argumento que favorece la reconstrucción de significados acerca de lo periódico.

La situación

Para la reproducción intencional de las prácticas y estudiar su ingreso al sistema didáctico, hemos diseñado una situación que será el marco de referencia epistemológico, a fin de dar cuenta sobre cómo esos elementos extraídos de la actividad humana se transforman en los argumentos y herramientas que utiliza el alumno para llevar a cabo su interacción en el salón de clases.

El diseño de la situación tiene como base los elementos identificados alrededor de la construcción de lo periódico: la relación de lo periódico con lo dinámico, la búsqueda de patrones de comportamiento, la necesidad de una visión local-global, la búsqueda de una unidad de análisis y la importancia de la predicción como una práctica que potencia la aparición de dichos elementos. Por eso, nos referimos a la predicción como una práctica, no sólo como una actividad hecha al momento con intenciones muy puntuales, no asociadas con la construcción del conomiento matemático.

La situación (consultar Anexo) consta de tres secuencias. Cada una se fundamenta en los elementos de lo periódico que hemos mencionado e intenta reflejar momentos en la resignificación de lo periódico. Planteamos la existencia de todo un escenario predictivo formado por todas las secuencias de la situación (descripción del movimiento, actividad de predicción, reconocimiento de lo periódico).

Secuencia 1. Consta de dos actividades:

Actividad 1. Se presentan ocho gráficas de movimientos repetitivos y se pide describirlos.

Actividad 2. Se pide agrupar las gráficas anteriores por semejanzas y diferencias.

[6] Kaldrimidou e Ikonomou (1998) reportan que, al tratar con la representación gráfica de una función, el estudiante puede tener diferentes concepciones: La curva es considerada independientemente de su sistema de ejes; sólo en relación con el eje *x* o *l* se le concibe en función de los dos ejes.

Los elementos aluden, por un lado, a la relación de lo periódico con algo dinámico; por otro, a la asociación no discriminada de la propiedad periódica con la repetición de la gráfica de un movimiento.

Momento 1: Las gráficas que representan movimientos repetitivos son periódicas.

Secuencia 2. Consta de dos actividades:

Actividad 1. Para cada una de las gráficas anteriores, se pide predecir la posición del móvil en el tiempo 231.

Actividad 2. Se pide agrupar las gráficas anteriores por semejanzas y diferencias.

Los elementos se refieren a las herramientas que permiten predecir sobre la gráfica, así como a la percepción del comportamiento de las variables que conforman la gráfica.

Momento 2: Existen diferentes maneras en las que una gráfica puede repetirse.

Secuencia 3. Consta de una sola actividad:

Actividad 1. Se pregunta cuáles de las gráficas son periódicas.

Los elementos señalan a la identificación de la predicción como una práctica que favorece la reconstrucción de los significados sobre la repetición presente en la gráfica de un movimiento, al igual que la emergencia de la propiedad periódica como un atributo particular y significativo.

Momento 3: La periodicidad es una propiedad que califica cierto tipo de repetición.

La Figura 8 presenta cómo se articula el diseño. De entrada, propone una confrontación entre las clasificaciones de las gráficas antes y después de predecir (*Secuencia 1, actividad 2- Secuencia 2, actividad 2*). Los criterios que se ponen en juego para agrupar por semejanzas y diferencias pueden ser percibidos de diferente manera cuando sólo se considera que la gráfica es repetitiva, en comparación con atender al modo y tipo de repetición; tal distinción influye en la predicción realizada sobre cada una de las gráficas. Una vez confrontadas dichas clasificaciones, tenemos un escenario para resignificar lo periódico, donde la relación periodicidad-predecir puede percibirse a través de argumentos y herramientas situacionales. En el marco de la situación es que decimos que la práctica de predicción se percibe como *el argumento* de la periodicidad.

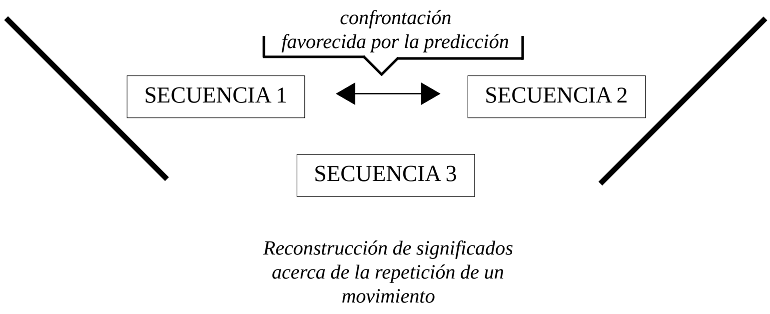


Figura 8. Resignificación de lo periódico.

Aspectos metodológicos

El aspecto metodológico de la situación tiene que ver con un análisis a priori, donde la socioepistemología inicial de lo periódico informa acerca de lo hipotético, una puesta en escena y un análisis a posteriori para tratar lo que realmente hicieron los alumnos. La confrontación entre ambos análisis genera una socioepistemología final o revisada, que permite hablar sobre los elementos propuestos y su articulación.

La situación se aplicó tanto a grupos de estudiantes (cuyas edades son de 19 y20 años) como a profesores de nivel superior, al igual que en diversos programas de posgrado en Matemática Educativa. Se trabajó en equipos de tres a cinco integrantes, dependiendo del número de participantes. Todos los equipos fueron explícitamente conformados para trabajar con la situación en modalidad de laboratorio, mientras que el investigador participó con la intención de favorecer contextos discursivos.

Realizar varias puestas en escenas permite analizar los distintos argumentos y herramientas situacionales. Si bien un argumento es una construcción hecha para convencer, cada uno de los argumentos de corte discursivo forma parte de un esqueleto que, al analizarse de manera global y en el marco de la situación, puede dar cuenta de la predicción como el argumento de la situación, que permite explicar la reconstrucción de lo periódico.

Algunos resultados de la puesta en escena

Presentamos algunos ejemplos de la puesta en escena con el propósito de ilustrar tanto las herramientas y los argumentos situacionales como la resignficación de lo periódico en un escenario predictivo.

La primera actividad atañe a la descripción que se realiza de cada movimiento. Hay caracterizaciones generales que utilizan todos los equipos pero, adicionalmente, resultó muy valioso notar que las características socioculturales del grupo en cuestión “visten” la descripción. Por ejemplo, la descripción de la gráfica *e* Figura 9):

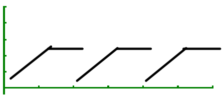
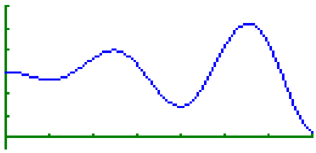
Gráfica	Caracterización general	Ejemplo particular
	• Es un objeto que avanza y luego se detiene por un periodo de tiempo. Inmediatamente regresa a su punto de partida y hace lo mismo • Varios (tres) objetos que hacen el movimiento anterior: primero uno y, en cuanto acaba, el siguiente	*Cristina y Mercedes, alumnas de Licenciatura (19-20 años)* –M: De aquí me voy a la puerta del baño y esta parte horizontal es lo que me tardo en el baño peinándome. –C: Podría ser todas las personas que van al baño y ahí se quedan. *Karina, profesora de matemáticas trabaja en un equipo con otras tres mujeres* Una persona camina alejándose del sensor y después se mantiene un tiempo parada. Luego, otra vuelve a hacer lo mismo. Es como una pasarela de modelos.

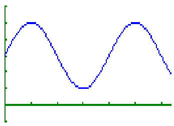
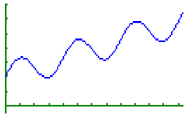
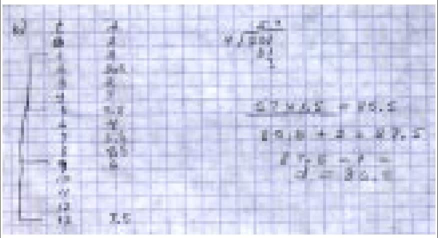
Figura 9. Descripción del movimiento.

En la segunda actividad se pide predecir. Para ello, tiene especial importancia la descripción hecha en la primera secuencia ya que, por ejemplo, para la gráfica *d* (Figura 10), que se trata de *un objeto que va y viene, pero cada vez se aleja una unidad más y cada vez regresa una unidad más,* puede ser que al describirla se decida que el objeto se detiene en el tiempo 12 (tiempo visible), que vuelve a empezar o que continúa haciendo lo mismo. Así, no podemos hablar de "la respuesta correcta", sino de cómo se va construyendo un esquema explicativo, empezando por cómo es descrito el movimiento en cuestión.



Un hallazgo valioso de nuestro trabajo es identificar herramientas de distinta naturaleza que provocan distintos procedimientos para predecir. La relevancia de tales procedimientos no recae en sí mismos; no es la posesión o carencia de alguno lo que nos explique su relación con la resignificación de lo periódico, sino su uso en el marco de una situación que propone a la predicción como una práctica intencional.

Es importante notar que los procedimientos se basan en la búsqueda de una unidad de análisis que se emplea de acuerdo con el comportamiento que presenta la gráfica. Adicionalmente, pueden identificarse herramientas de corte analítico, visual (gráfico) o aritmético, así como una mezcla entre ellas, que resulta significativa. Presentamos algunos ejemplos (Figura 11):

Gráfica	Ejemplo de una puesta en escena	Comentario
	***Profesor de matemáticas, alumno de la maestría en Matemática Educativa*** $d\,(t) = 2 + \text{sen}\,(\ \pi t\ \ / 4\ )$ $d\,(231) = 2 + \text{sen}\,(\ \pi.231/ 4\ )$ $\boxed{\textit{Identificación del comportamiento en el eje } x}$	*Hallar la expresión analítica que represente a la curva es una herramienta usual entre alumnos y profesores de matemáticas cuya formación ha sido fuertemente analítica.*
	***Equipo de tres profesores de matemáticas, alumnos de la maestría en Matemática Educativa*** 	*En este ejemplo, se identifica la unidad de análisis en una tabla tiempo-distancia que se escribe hasta completar tres periodos. Después, se realizan operaciones aritméticas de división para conocer el número de periodos (usar su comportamiento) y, posteriormente, una multiplicación para tomar en cuenta el comportamiento de la distancia (multiplicar por 1.5)*

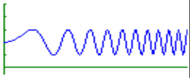
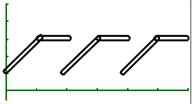
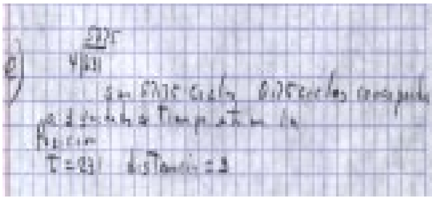
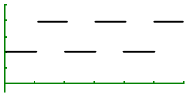
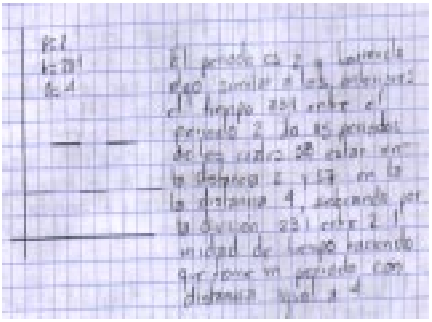
	***Profesora de matemáticas, alumna de la maestría en Matemática Educativa*** Aquí, la distancia no va a variar. Vemos que de cero a dos se desplaza un cachito; de 2 a 4, uno; de 4 a 6, uno y un cachito; de 6 a 8, dos; de 8 a 10, dos y un cachito. Entonces, hay que ir juntando el tiempo hasta llegar a 230-232.	*En esta gráfica es “difícil” predecir, pues no hay un mismo periodo en el eje tiempo. Sin embargo, la identificación de algún patrón es una herramienta que puede utilizarse.*
	***Equipo de dos profesores de matemáticas, alumnos de la maestría en Matemática Educativa*** 	*Este es el procedimiento más común que se usa en todas las gráficas después de hallar una unidad de análisis: determinar cuántas veces se repite e interpretar el residuo o el resto para llegar al tiempo pedido.* *Es importante notar que no hay que hacer ninguna operación extra, ya que el comportamiento en el eje es el mismo por todos los periodos.*
	***Equipo de tres profesores de matemáticas, alumnos de la maestría en Matemática Educativa*** 	*Nótese que aun cuando estos estudiantes de maestría mencionan que “el periodo es 2”, el uso que realmente hacen de la unidad de análisis denota que tomaron como periodo 4.* *De ahí la importancia no sólo de la identificación de una unidad de análisis, sino de su uso. Esto es un resultado relevante de la investigación.*

Figura 11. Herramientas para predecir.

La comparación entre las agrupaciones hechas antes y después de predecir nos da elementos para analizar la reformulación acerca de la repetición presente en una gráfica que favorece la práctica de predecir. Un ejemplo significativo de la agrupación antes y después de predecir es el siguiente (Figura 12):

	Primera clasificación	Segunda clasificación	Observaciones
Estudiantes de maestría	Discontinuas: *d, h* Tienen periodo y repetitivas: *a, e* Se alejan: *b, f, h* Ondas senoidales: *a, b, c, f*	En cuanto al procedimiento de predicción: a) Se divide el tiempo total entre el periodo y se ajusta el residuo: *a, d, e* b) Se divide el tiempo total entre el periodo, se ajusta el residuo y se ajusta distancia: *b, h* c) Se ajusta el tiempo, pero no en la distancia: *c* d) Ajuste en el tiempo y en la distancias: *f*	El procedimiento de predicción hace que distingan entre el comportamiento que se presenta en el tiempo y el comportamiento que se presenta en la distancia. En ello fundamentan su segunda clasificación.

Figura 12. *Comparación en las agrupaciones*

Al discutir sobre la propiedad periódica de las funciones, en la tercera secuencia se utiliza la reconstrucción de signficados acerca de la repetición de un movimiento como argumento para lograr consensos. En el siguiente ejemplo, un estudiante de licenciatura pone en juego la distinción entre el tipo de comportamiento que se tiene en el eje x del que se presenta en el eje y, lo cual fue relevante para darle un significado a lo periódico tras realizar la predicción:

> *Un ciclo es una vuelta. Periodo me da la idea de tener tiempos iguales en distancias iguales; es un movimiento repetitivo. Un ciclo nos da la idea de cuántas veces se repite un periodo. Entonces, el movimiento puede que esté aquí y se abra como quiera y si llega de aquí a aquí ya se cumplió un ciclo. Si es o no periódico es difente. Ya si cumple con la condición de tiempos iguales y distancias iguales es periódico.*

Esta distinción, que en un principio no parecía importante, brinda un escenario donde pueden percibirse significados reconstruidos acerca de la repetición de un movimiento, lo que favorece una resignificación, a su vez, de lo periódico.

Para concluir, esta investigación plantea la existencia de una relación entre la práctica de predecir con la construcción del atributo periódico de las funciones. Tal relación, llevada intencionalmente al escenario didáctico, favorece una resignificación situacional de dicho atributo.

Análisis a posteriori

La situación que se mostró en este trabajo tuvo fundamento en una *socioepistemología de lo periódico*; de manera particular, se abordó el contexto de las funciones periódicas a través de sus gráficas. Los elementos principales se refirieron al uso del comportamiento de la gráfica como una herramienta para la construcción significativa de dicho atributo, así como a la predicción como una práctica intencional, que fue motor de esa resignificación. Con los ejemplos se pretendió dar cuenta de cómo se articulaban dichos elementos.

Al predecir el comportamiento del móvil a través de su gráfica tiempo-distancia, hay una búsqueda de alguna unidad fundamental para comparar los estados futuros con el presente. Esta búsqueda inicia no sólo con la tarea explícita de realizar una predicción, sino desde la misma descripción del movimiento que permite entender y reconocer el tipo de movimiento en cuestión.

La unidad de análisis tendrá que contener en sí misma, de algún modo, información del todo y depender completamente del tipo de repetición que presente la gráfica. Por tanto, esta unidad de análisis adquirirá la característica de una relación dialéctica entre los análisis de tipo local y global para que lo periódico del movimiento sea relevante, un elemento identificado en la socioepistemología propuesta. Podemos notar esta identificación de la unidad de análisis (“ver cómo se está repitiendo”) en los diferentes tipos de procedimientos utilizados (analíticos, a través de tablas, usando la gráfica).

Al tratar con la gráfica de una función creemos que, en primera instancia, dicha gráfica pueda ser concebida sin relación con los ejes coordenados: es simplemente “repetitiva”. Cuando se busca una unidad de análisis para hacer la predicción, el comportamiento presente en cada uno de los ejes se vuelve primordial, ya que determinará el tipo de repetición de la gráfica: puede ser repetitiva con relación al eje horizontal o al eje vertical. Esto plantea una diferencia significativa con aquellas gráficas que se perciben *repetitivas*, de acuerdo a ambos ejes al mismo tiempo. Las estructuras mentales asociadas con la gráfica de una función y con la dialéctica proceso-objeto son influídas e influyen en el tipo de procedimientos que se realizan, así como en la reconstrucción de significados.

Esta necesidad de precisar el comportamiento de cada variable (tiempo-distancia) en el marco de la práctica de predicción favorece una identificación útil de lo periódico dentro del contexto de las funciones, lo cual va mucho más allá de poder aplicar o no una definición para determinar el carácter periódico de un movimiento. Por tanto, lo que perciba un alumno acerca de la repetición de un movimiento se reformula para dar cabida a un reconocimiento del atributo periódico, como sucedió con el último comentario presentado.

Comentarios finales

Se presentó una problemática acerca del aspecto periódico de las funciones en ambientes escolares, relacionada con el poco significado de la definición formal de propiedad periódica y la asociación no discriminada de esta propiedad con cualquier tipo de repetición que presente una gráfica. Resaltamos el predominio de argumentos de corte analítico, ante la falta de un marco de referencia suficientemente rico que permitiera distinguir entre fenómenos y gráficas repetitivos de aquellos que son periódicos.

La revisión de investigaciones tocantes a la periodicidad y un análisis histórico sobre esta propiedad permitieron reconocer que el saber matemático se constituye socialmente en ámbitos no escolares. Su ingreso significativo al sistema didáctico obliga a considerar aspectos de la naturaleza de dicho saber, que han quedado ocultos por el privilegio de los aspectos analíticos: el papel de la predicción y el uso de herramientas como el comportamiento de una gráfica. Se puso, pues, atención en elementos cognitivos, culturales e históricos relacionados con lo periódico.

La introducción intencional de la *socioepistemología de lo periódico* en el sistema didáctico es propuesta a través de situaciones cuyo diseño se fundamente en los aspectos mencionados. La que hemos presentado, junto con datos de su puesta en escena, dan cuenta de cómo la práctica social –predicción, en este caso– se transforma en el argumento que a través de significados y procedimientos situacionales propicia una reconstrucción de significados acerca de lo periódico.

Consideramos que lo periódico constituye todo un lenguaje, incluso antes de que aparezcan los aspectos analíticos formales de esta propiedad. Reconocer estos marcos de significación para lo periódico permitirá articularlo a lo largo del sistema didáctico. Actualmente, estamos trabajando en contextos como secuencias numéricas e icónicas y diversas situaciones periódicas, donde en su articulación significativa se percibe la identificación y uso de una unidad de análisis, elemento de la *socioepistemología de lo periódico*[7].

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). Las *prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Bauersfeld, H. (2005). The structuring of the structures: development and function of mathatematizing as a social practice. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin & B. Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning*. New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Boyce, W. y DiPrima, R. (1987). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Limusa.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics 58* (3), 299-333.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Callahan, J; Cox, D; Hoffman, K; O'Shea, D; Pollatsek, H. & Senecnal, L. (1992). Periodicidad. En *Calculus in context* (pp. 413-453) . USA: Mc Millan.

7 Esta investigación se lleva a cabo en el proyecto *Estudio del desarrollo del saber matemático en un marco socioepistemológico*, financiado por el Programa de Mejoramiento del Profesorado (*Promep*).

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 17, pp. 1-9). México: Clame.

Cantoral, R. (2001). *Matemática educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en matemática educativa. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 13, pp. 54-62). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa-Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon 42*, 353-369.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon* volumen 42, *14* (3), 854-856.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (3), 265-286.

Cordero, F. (2003) Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y significados. En J. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 16, pp 73-78). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4* (2), 103-128.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso de comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1* (1), 56-74.

Cordero, F. y Martinez, J. (2002) El comportamiento periódico de una función como un argumento contextual. La manifestación del movimiento fuera del instante. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 15, pp 55-60). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. y Martinez, J. (2001). La comprensión de la periodicidad en los contextos discreto y continuo. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 14, pp. 422-431). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Courant, R. (1979). *Differential an integral calculus*. USA: Interscience Publishers.

Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav, México.

Dormolen, J. & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: the case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior* (22), 91-106.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1983). The function concept in college students: linearity, smoothness and periodicity. *Focus on Learning Problems in Mathematics 5* (3-4), 119-132.

Euler, L. (1948). *Introduction to analysis of the infinite*. USA: Springer-Verlag.

Kaldrimidou, M. & Ikonomou, A. (1998). Epistemological and metacognitive factor involved in the learning of mathematics: the case of graphic representatios of function. In H. Steinberg, M. Bartolini & A. Sierpinska (Eds.), *Language an Communication in the Mathematicas Classroom*. USA: National Council Teachers of Mathematics.

Katz, V. (1987). The calculus of the trigonometric functions. *Historia Mathematica 14*, 311-324.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de doctorado no publicada, Cicata, México.

North, A. (1997). La matemática como elemento en la historia del pensamiento. En *Sigma. El mundo de las matemáticas* (tomo 1, pp. 325-338) Barcelona, España: Grijalbo.

Pannekoek, A. (1961) *A history of astronomy*. Canada: Dover Publications, Inc.

Shama, G. (1998). Understanding periodicity as a process with a gestalt structure. *Educational Studies in Mathematics 35* (3), 255-281.

Shama, G. & Movshovitz-Hadar, N. (1997). The process of periodicity. In *Proceeding of the Nineteenth Annual Meeting Psychology of Mathematics Education*. *ERIC Cleaninghouse for Sciencie, Mathematics and Environmental Education.* (pp. 45-50). USA: Columbus, Ohio.

Swokowski, E. (1982). *Cálculo con geometría analítica*. EU: Wadsworth Internacional.

Zill, D.(1988). *Ecuaciones dferenciales con aplicaciones*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gabriela Buendía Abalos
Centro de Investigación en Matemática Educativa
Facultad de Ingeniería
Universidad Autónoma de Chiapas

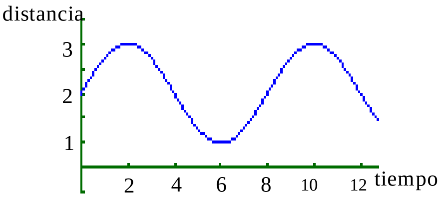
E-mail: buendiag@unach.mx.

ANEXO

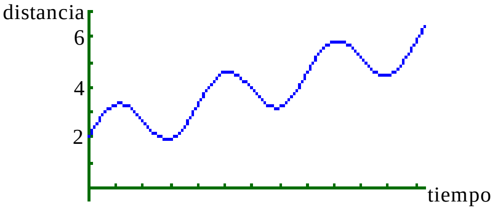
La situación: la predicción y lo periódico
Secuencia 1.

1. Suponga que un sensor está registrando el comportamiento de un cuerpo durante un determinado tiempo. Describa en cada caso cómo se está moviendo el cuerpo para que el sensor dibuje las siguientes gráficas:

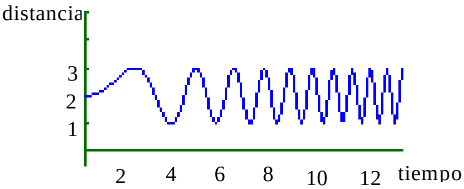
a)



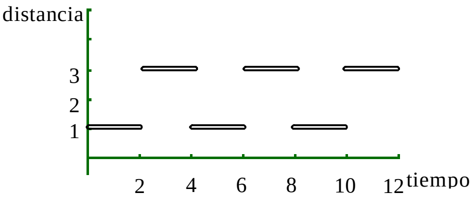
b)



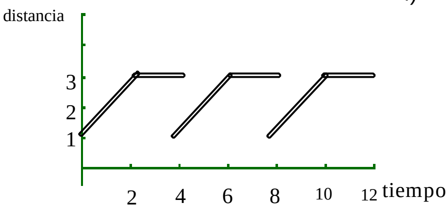
c)



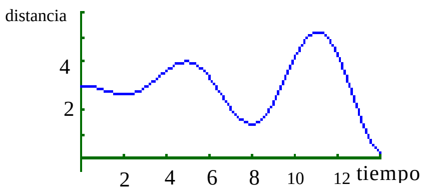
d)



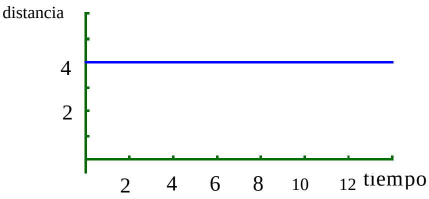
e)



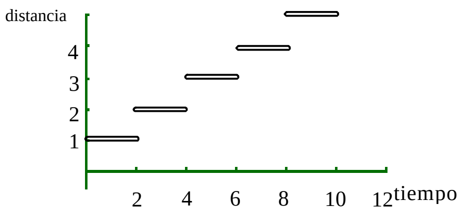
f)



g)



h)



2. Agrupe las gráficas anteriores de acuerdo con semejanzas y diferencias.

Secuencia 2.

1. Prediga cuál será la posición del móvil en el segundo 231. Argumente su predicción lo más ampliamente posible.

2. Agrupe las gráficas anteriores de acuerdo con semejanzas y diferencias.

Secuencia 3.

1. ¿Cuáles de las gráficas anteriores son periódicas?